UNIVERSITAT DE BARCELONA

PANORÀMICA DEL SISTEMA DECIMAL POSICIONAL DES DELS ORÍGENS INDIS A L'*ARISMÈTICA* DE SANTCLIMENT

by

Josep Pla i Carrera

AMS Subject Classification: 01, 01A13, 01A30, 01A32, 01A35, 01A40, 11-03

Mathematics Preprint Series No. 235
April 1997

PANORÀMICA DEL SISTEMA DECIMAL POSICIONAL DES DELS ORÍGENS INDIS A L'*ARISMÈTICA* DE SANTCLIMENT*

JOSEP PLA I CARRERA
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Al segle XX hem pogut veure com, a poc a poc, s'imposaven a la societat civil occidental tècniques, d'antuvi mecàniques, més tard elèctriques i finalment electròniques, cada cop més sofisticades, per tal de realitzar els càlculs aritmètics més elementals.[1] Des que van aparèixer les primeres caixes enregistradores fins avui que el valor d'un producte és llegit directament a través d'un codi de barres, qui s'entreté ja a fer sumes? La totalitat d'operacions bancàries es duen a terme a través de màquines electròniques. És possible d'efectuar un ingrés o una liquidació, sol·licitar un prèstec, demanar l'estat de comptes o qualsevol altra operació de forma gairebé instantània, per via telefònica, des de quilòmetres de distància. Qui no fa o ha fet servir en un moment o altre una targeta *Visa* o de qualsevol altra mena? Qui no ha utilitzat mai un caixer automàtic? Qui no ha pagat la benzina de l'automòbil, el peatge d'una autopista, el bitllet d'avió o de tren i fins i tot l'entrada d'un espectacle sense haver de *comptar* els diners amb què ho ha fet? Les operacions de càlcul en tots aquests casos, i en tants d'altres, es realitzen automàticament per mitjà de mecanismes que ens eviten haver de recórrer als *algorismes de càlcul* apresos amb més o menys facilitat a l'escola primària.

I a l'escola, no ens ensenyen ben aviat a emprar petites calculadores de butxaca per tal de realitzar càlculs elementals que fins fa ben poc temps s'efectuaven manualment? Podríem dir, sense equivocar-nos gaire, que aquests petits artilugis han desplaçat les taules de logaritmes, les trigonomètriques i potser, fins i tot, les taules de sumar i multiplicar. Qui es preocupa avui de saber de memòria els nombres primers més petits que 100, els quadrats dels vint primers nombres, les potències d'exponent més petit que 10 dels 10 primers nombres, les cinc o sis xifres decimals exactes de les arrels quadrades de $2, 3, 5, 6, 7, 8$ i 10, o les dels nombres π i e? Hi ha enginys de maneig senzill, i econòmics, que permeten d'efectuar els càlculs necessaris a l'ensenyament escolar tot evitant aquests esforços de memòria.

---

*AMS Subject Classification: 01, 01A13, 01A30, 01A32, 01A35, 01A40, 11-03. Treball subvencionat parcialment per la beca PB94-0920 de la Dirección General de Investigación Científica y Ciencia

[1] El lector interessat pot consultar PAULOS, J. A. [1989]; DAVIS, P. J.-HERSH, R. [1986].

No hi ha cap mena de dubte que l'home actual no hauria pogut dur a terme els viatges espacials, ni hauria aconseguit acoblar les llençadores o els coets a les estacions orbitals, ni hauria situat satèl·lits de comunicacions o de predicció metereològica, si no hagués disposat d'unes eines de càlcul sofisticades i precises —les grans computadores— que fan milions d'operacions en un lapse de temps breu. Tampoc no hauria pogut realitzar els espectaculars avenços en el camp de la biologia —clonatge, inseminació, mapes genètics, estudis ecològics d'evolució de les espècies, etc.— sense haver disposat de les esmentades eines de càlcul, eines que es troben en un estadi molt evolucionat, revolucionàriament evolucionat, que no és ara el moment de detallar.[2]

I si fem atenció al camp de la tecnologia, de la tècnica, del disseny, ens trobem que no hauria pas estat possible de planejar i construir les sofisticades estructures d'enginyeria o aeronàutica de què disposem avui, ni tampoc els complexos sistemes de producció industrial i, encara menys, els túnels de simulació i de proves, les maquetes reals i virtuals, els acceleradors de partícules, etc., si les tècniques de càlcul no ens ho haguessin permès. Fins i tot a la nostra vida quotidiana rebem, a través de tota mena de sistemes de transmissió més o menys sofisticats com ara la ràdio, la televisió, el telèfon, etc., missatges que ens arriben a l'instant i ens permeten de tenir una informació puntual de fenòmens i esdeveniments que tenen lloc en punts molt allunyats de nosaltres. Algunes d'aquestes informacions ens alliberen, a voltes, de la situació de precarietat en què es trobava l'home del segle XIX i dels segles anteriors perquè ens permeten d'efectuar prediccions climatològiques, de preveure certes catàstrofes, amb un lapse de temps a vegades, ai las!, encara insuficient i, per tant, de prevenir o almenys de pal·liar-ne les conseqüències, de dur a terme estimacions estadístiques que permeten fer estudis de millora de l'agricultura, la pesca, els ecosistemes on es desenvolupen els animals i les plantes, etc.

La ciència, conjuntament amb la tecnologia, ha desenvolupat tota mena d'eines efectives per enfrontar-se amb les qüestions relatives a la salut: microscopis de precisió, escànners, tècniques d'intervenció quirúrgica basades en el làser, retransmissió televisiva ampliada de les zones d'intervenció, electroencefalogrames, cardiogrames, tècniques basades en els ultrasons, etc., que han permès avenços realment espectaculars de certes àrees de la medicina.

També és cert que aquestes mateixes tècniques han permès a l'home disposar d'artefactes de destrucció física i psíquica de la personalitat humana, de màquines de guerra amb una capacitat d'aniquilació mai abans albirada, d'eines que permeten de sotmetre l'home al domini d'altres homes, per esmentar alguns exemples negatius.

[2]Un llibret molt gratificant i enginyós, basat en articles divulgatius breus i senzills que posen de manifest les possibilitats, els perills, les limitacions i d'altres qüestions relatives a les eines informàtiques, és *L'endoll foradat* de l'amic LLORENÇ VALVERDE.

En el camp de les idees i, en particular, de la recerca matemàtica més estricta, podem preguntar-nos: on són els grans calculistes dels segles XVI, XVII, XVIII i XIX que es passaven, si calia, trenta anys de la seva vida elaborant taules de trigonometria o logarítmiques amb sis, deu, tretze o disset xifres decimals exactes, per tal de dotar la comunitat d'una eina important, útil i prou acurada de càlcul? On són els càlculs que, en tantes i tantes ocasions, havien de permetre fer *conjectures* plausibles que després, és clar, caldria en tot cas contrastar, demostrar o refutar? [3]

Durant un període que podem situar entre els anys 1850 i 1950 els matemàtics van decantar la seva activitat cap a una matemàtica *teoritzada* en la qual, almenys aparentment, els càlculs com a eina per crear intuïcions i fabricar conjectures havien desaparegut de l'escenari matemàtic. Aquesta manera d'entendre i de fer matemàtica fou transmesa d'una generació a una altra a través d'una docència deslligada del càlcul fins i tot en els centres més prestigiosos del món occidental.[4] Una explicació possible d'aquest fet és que la capacitat de càlcul dels matemàtics, amb els mitjans de què disposaven abans de 1940, havia arribat a una situació de saturació que feia necessària una *revolució* de les eines de càlcul, íntimament lligada a una revolució tecnològica. Sense aquesta revolució, el *temps* necessari per realitzar un càlcul nou —la seva *complexitat* i la de la *solució*— era, en molts casos, massa gran. Això feia que el resultat quedés *massa allunyat de la intuïció*. Per tal de poder anar endavant, de seguir avançant, calien, doncs, camins més teòrics que no descansessin en els càlculs.

Tanmateix, aquesta situació ha canviat completament des que els matemàtics disposen d'eines de càlcul potents i, sobretot, ràpides. Això els ha permès d'elaborar taules de nombres primers fins ara impensables, de cercar propietats de nombres

[3] Recordem, per exemple, que PIERRE de FERMAT [1601–1665] va establir que els nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, 3$ i 4, són *primers* i va *conjecturar* que això és cert per a qualsevol valor de n. Tanmateix, però, l'any 1732 LEONHARD EULER [1707–1783] establiria l'error en descompondre $F_5 = 2^{2^5} + 1$ en factors. [Avui, curiosament, el que no sabem és si, per a algun $n \neq 0,\ 1, 2, 3$ o 4, F_n és primer.]

La tècnica de la conjectura a partir d'un nombre reduït de casos és una tècnica que ha donat fruits molt notables i que, fins ben entrat el segle XVII, s'usava força habitualment. Per exemple, BONAVENTURA CAVALIERI [1598–1647] va aconseguir provar que

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,a^{n+1}, \quad \text{per a } n = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ i } 6.$$

Aleshores va conjecturar la validesa d'aquesta expressió per a qualsevol valor de n. Aquest fet fou confirmat amb posterioritat.

[4] Aquesta nova didàctica de la matemàtica té el seu exponent paradigmàtic en NICOLAS BOURBAKI, l'equip de matemàtics francesos que, en una obra monumental, va intentar de rescriure tota la matemàtica del passat i alhora fixar les pautes de la del futur, seguint aquesta ideologia *teoritzant*. [Vegeu el text de MICHÈLE CHOUCHAN sobre questa escola.]

tan grans que la seva escriptura és pràcticament impossible.[5] Ha permès també de recórrer a les màquines de càlcul per *demostrar* certs teoremes en què la *quantitat de casos* que cal distingir i analitzar és *massa gran* per poder-ho fer de cap altra manera.[6] Qui es pot imaginar avui un centre d'estudi i de recerca matemàtica —o de qualsevol altre ciència teòrica o aplicada— sense un laboratori informàtic, sense estacions de treball idònies i que no estigui connectat en xarxa amb d'altres màquines més ràpides, amb prou memòria i recursos, amb tècniques de càlcul prou potents, per tal que la tasca no es vegi interrompuda durant la realització d'un càlcul o d'una recerca concreta?

Deixeu-me dir, encara que només sigui com a simples anècdotes, que els matemàtics han aconseguit calcular el valor aproximat del nombre π —la relació que hi ha entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre— amb més d'un bilió de xifres decimals exactes i d'establir que el nombre $P = 2^{756\,838}\,(2^{756\,839} - 1)$ és un nombre perfecte.[7] I encara que això pugui semblar una simple anècdota —i potser ho és—, posa de manifest la mena de dificultat que cal vèncer: el reconeixement de la primalitat o no de nombres grans. La tècnica que involucra aquesta anàlisi és el que ha permès, als matemàtics especialitzats en teoria de nombres i en informàtica, d'elaborar una teoria molt potent de la *codificació* —una tècnica d'elaboració de

---

[5]Aquesta situació no és pas nova del tot. El sistema de numeració grec, en tant que sistema de numeració xifrat i alfabètic, era poc apte per designar nombres grans. Per això ARQUIMEDES [~287 aC–212 aC] quan, a l'*Arenari*, pretén de comptar tots els grans de sorra de l'univers —del sistema solar— ha de recórrer a les *octades*, un sistema de còmput que li permeti de referir-se a nombres prou grans. [Vegeu, per exemple, NEWMAN, J. R. [1956], edició castellana de 1968, **IV**, 2–17.]

[6]Penso, per exemple, en el *problema dels quatre colors*, la *classificació de tots els grups finits*, etc. [Vegeu DAVIS, P. J.–HERSCH, R. [1982], edició castellana de 1988, 272–279.]

[7]Recordem que un nombre natural N és *perfecte*, si, i només si, és igual a la suma dels seus divisors propis. Per exemple, el número 6 és perfecte: els seus divisors propis, els divisors de 6 diferents de 6, són $1, 2$, i 3. És clar que $1 + 2 + 3 = 6$. Els matemàtics grecs coneixien quatre nombres perfectes: $6, 28, 496, 8128$ [Vegeu HEATH, sir T. [1921], edició de 1981, **I**, 74.]

Aquesta definició la trobem recollida a *Els Elements* d'EUCLIDES [~300 aC], Llibre VII, definició 22. A més, EUCLIDES demostra [Llibre IX, proposició 36] que tot nombre de la forma $2^{n-1}\,(2^n - 1)$, on $2^n - 1$ és primer, és sempre un *nombre perfecte parell*.

El matemàtic suís LEONHARD EULER va aconseguir demostrar que "tots els nombres perfectes parells són de la forma descrita per EUCLIDES" [vegeu EULER, L. [1849], **II**, 514, art. 107]. La dificultad rau, doncs, a saber quan un nombre de la forma $2^n - 1$ és primer. Podeu entretenir-vos a veure si els nombres $2^n - 1$, amb $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ i 17, són o no primers.

Els nombres $2^n - 1$ es fan grans molt de pressa i això fa molt difícil de saber, per exemple, si $2^{756\,839} - 1$ és primer o no. Aquest nombre, la primalitat del qual s'establia l'any 1992, té 227 832 xifres o guarismes. [Sabries dir quants fulls de paper DIN A4 calen per escriure'l?].

Avui encara no sabem si hi ha *infinits* nombres perfectes parells. I, més sorprenent encara, *no sabem* si n'hi ha cap de senar.

missatges secrets— basada precisament en la dificultat que suposa saber si un nombre prou gran és primer o no i, en cas de no ser-ho, en la dificultat que comporta descompondre'l.

La *teoria dels fractals* —el comportament recurrent d'alguns fenòmens geomètrics que es presenten a la física, la biologia, i la naturalesa, en definitiva— i la *teoria del caos* que tan sovint es presenta en alguns dels problemes que ens planteja l'estudi matemàtic de la naturalesa —*petites variacions de les condicions inicials* poden arribar a produir efectes *molt distanciats*, molt diferents, i fan que certs fenòmens siguin *intrínsecament impredicibles*—, no s'haurien pas pogut estudiar si no s'hagués disposat d'enginys de càlcul ràpids, potents, segurs i que poden ser utilitzats amb una certa facilitat per científics no necessàriament matemàtics.[8]

* * *

La recerca i utilització de ginys de càlcul no és pas nova. Els pobles antics que no disposaven de sistemes de numeració eficaços —pensem, per exemple, en els romans— efectuaven els càlculs més simples emprant artefactes mecànics, com ara l'*àbac*, una eina de càlcul prou útil per als objectius concrets als quals s'aplicava. D'altres pobles, com ara els maia del PERÚ, usaven els *quipús*. Aquests artefactes, però, si bé resultaven força útils en l'intercanvi comercial, no eren pas gaire adequats per proporcionar intuïcions o resultats científics i matemàtics.[9]

Per tal de poder realitzar càlculs més sofisticats, com ara els càlculs d'astronomia, calia disposar de *taules de dades prou acurades i contrastades*. Inicialment aquestes taules eren *simples llistes de dades observacionals*, però amb l'evolució de l'astronomia realitzada pels astrònoms egipcis, babilonis i, sobretot, grecs es va fer indispensable disposar, d'una banda, d'un sistema de numeració, és a dir, de representació de dades numèriques, i d'una altra, d'eines de càlcul *prou fines*. Per això, no ens ha

[8] El lector interessat en alguns d'aquests aspectes, o en d'altres, pot consultar les obres de divulgació següents: DEVLIN, K. [1988], 1-27, 75-99, 262-278; PETERSON, I. [1988], edició castellana de 1992, 33-62, 135-166, 167-200; DAVIS, D. D. [1993], 6-10, 194-199, 249-283, 284-370.

[9] Els pobles primitius quan encara no disposen de cap sistema de numeració usen senyals en pals, pedres, o nusos, per tal de *comptar*, sense número [vegeu CAMPIGLIO, A.-EUGENI, V.].

I, fins i tot, disposant de sistemes de numeració, la seva inadequació pot haver retardat certes descobertes. Sembla que, des de GRÈCIA fins al segle XVI, els matemàtics estaven convençuts que, "quan n és un nombre primer, $2^n - 1$ també ho és". L'any 1536, avançat el primer terç del segle XVI, HUDALRICHUS REGIUS [~1535] establiria que $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \times 89$, posant de manifest l'error de la sentència anterior. L'únic fet que permet d'explicar un error com aquest amb un nombre tan petit com ara el 2 047 és la inadequació dels sistemes de numeració grec i romà i de l'àbac per tractar aquesta mena de problemes. El nombre era massa gran per aquesta mena d'enginys i calia esperar la consolidació del sistema numeral indi per tal de poder treballar aquests nombres amb comoditat [vegeu BURTON, D. [1985], edició de 1991, 458].

d'estranyar gens ni mica que, al text de síntesi de l'astronomia grega elaborat per CLAUDI PTOLEMEU [~85–~165], *La Sintaxi*, conegut pels astrònoms i matemàtics àrabs com l'*Almagest*, hi trobem ja una *taula de cordes*, que és l'equivalent d'una taula trigonomètrica.[10] Aquesta tècnica de càlcul s'aniria consolidant, a partir del segle XIV, amb les taules de dades geogràfiques elaborades pels *cartògrafs* i pels descobridors que s'aventuraven en viatges per terra i per mar. Es van fer eines de càlcul que garantien l'establiment de rutes segures, màquines de càlcul més o menys sofisticades,[11] taules de dades astronòmiques com les que s'elaboraren a l'entorn de TYCHO BRAHÉ [1546–1601] i taules de logaritmes i trigonomètriques. Aquesta tasca ja no s'aturaria mai més a OCCIDENT, però gran part de l'èxit fou degut al fet que s'hagués implantat un *sistema de numeració* apte per aconseguir-ho. Aquest sistema és el *sistema de numeració indoaràbic decimal*. I fou curiosament la necessitat de disposar de taules acurades el que desvetllà una de les seves possibilitats més notables: el sistema indoaràbic permet d'escriure els nombres *no sencers* de manera que els *algorismes de càlcul* siguin els mateixos que calen per treballar amb nombres sencers.[12] A més, permetia de caracteritzar —representar de *forma única*— qualsevol nombre real.[13]

* * *

Com diu el cantautor RAIMON, "qui perd orígens, perd identitat". Per això ara que, com hem dit, hi ha un abandó social, no tant del sistema indoaràbic, com de la utilització dels *algorismes de càlcul associats al sistema* que van contribuir d'una forma tan notable al fet que el sistema fos útil i potent durant més de set segles,[14] ens ha semblat que fóra bo de fer un ràpid repàs de l'aparició d'aquest sistema decimal posicional, de la seva lenta implantació a OCCIDENT fins a arribar a la consolidació que va comportar l'aparició dels textos impresos del segle XV, tot just acabada de descobrir la impremta de caràcters mòbils. I, d'entre tots els textos impresos a EUROPA durant el segle XV, hem volgut fer una anàlisi detallada i alhora

[10] Aquestes taules calia expressar-les en algun sistema de numeració. S'obtenien efectuant càlculs concrets amb els símbols del sistema de numeració de l'època i havien de ser útils per a posteriors càlculs. Un sistema de numeració sense algorismes de càlcul no tindria gaire utilitat.

[11] Vegeu BOORSTIN, D. J. [1983], edició castellana de 1989, 15–90, 150–169, 220–225, 270–276.

[12] Aquesta decoberta no fou pas immediata ni molt menys. Caldria esperar al final del segle XVI i començaments del XVII.

[13] Això fou establert, l'any 1874, per GEORG FERDINAND CANTOR [1845–1918].

[14] Recordem que l'any 1642, quan tenia divuit anys, BLAISE PASCAL [1623–1662] va elaborar una màquina de càlcul, la primera que coneixem, per tal de fer *més senzilla* la tasca del seu pare en els *llargs càlculs* que es veia obligat a fer com a recaptador d'impostos. Uns anys més tard seria millorada per GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ [1646–1716].

rònega del primer text d'aritmètica editat a la península IBÈRICA atès que té, per a nosaltres, la peculiaritat d'haver estat elaborat i editat a BARCELONA. A més, fou escrit en català. Em refereixo a la *Suma de la Art de Arismetica* [1482] del mestre d'aritmètica FRANCESC SANTCLIMENT, de la qual es conserva un exemplar incunable al Servei de Reserva de la Biblioteca de Catalunya.[15]

1 Els orígens indis del sistema de numeració decimal posicional i de certs algorismes de càlcul

No és gens fàcil de seguir pas a pas l'aparició del sistema indi d'escriptura numèrica decimal posicional i fins i tot cal indicar que no totes les veus són coincidents respecte del seu origen indi.[16] No obstant això, hi ha prou bibliografia relativa a les petjades d'aquest origen per tal que en puguem fer una síntesi breu.[17] Segons ens indica KAYE,[18] malgrat que, "segons els hindús, el sistema de numeració aritmètic decimal posicional té un origen diví", cal reconèixer que és relativament modern. Els sistemes emprats antigament a l'ÍNDIA poden ser convenientment classificats en quatre grans blocs: (a) el *kharosti*; (b) el *brahmi*; (c) el de *notació alfabètica* d'ĀRYABHATA i (d) el de *notació paraula-símbol*. En aquesta classificació també cal situar-hi el sistema numèric *jaina* i el del *manuscrit* BAKHSHĀLĪ.

Però encara resulta més difícil, malgrat l'enorme interès que té des del vessant de la història de la matemàtica entesa com a art de calcular, fer un seguiment dels algorismes que, en cada cas, acompanyaven el sistema de numeració. La bibliografia en aquest sentit és més aviat escassa i la que existeix deslliga força vegades l'algorisme del sistema de numeració concret. Caldria realitzar un estudi aprofundit basat en els textos originals i en les seves interpretacions per experts en *sànscrit* per tal de poder fer un treball acurat i seriós. Nosaltres intentarem solament d'oferir una primera aproximació, deixant per a una ocasió posterior una anàlisi més acurada.

Farem un repàs breu de la història de l'ÍNDIA i hi anirem col·locant els diferents sistemes de numeració, intentant alhora d'informar sobre els algorismes coneguts i,

[15]La signatura d'identificació a la Biblioteca de Catalunya és: 9–V–20.

[16]Vegeu LATTIN, H. P. [1933]. Hi trobareu una reflexió sobre la teoria de BUBNOV segons la qual els nostres numerals són, de fet, d'origen grec. Per a una informació més acurada, vegeu la nota 429 d'IFRAH, G. [1981], 465 i 560–561.

[17]El lector interessat a seguir més de prop aquesta evolució i disputa pot consultar, entre d'altres, WAERDEN, BARTEL L. van der [1903], 51–61; SMITH, D. E.-KARPINSKI, L. C. [1911]; HILL, G. [1915]; SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 64–88; MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 391–445; BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 275–279, 306–307, 322–323, 326–329; IFRAH, G. [1981], 453–518.

[18]KAYE, G. R. [1914], 342.

en tot cas, sobre els que semblen els més plausibles. La dificultat principal sorgeix, en força casos, a l'hora de datar els textos amb continguts matemàtics, perquè molts s'han perdut i se'n té referència per alguns de segles posteriors. Situar-los amb tota mena de rigor dins dels períodes històrics en què es van desenvolupar és un dels temes d'estudi dels historiadors dels textos indis.[19]

> Les excavacions arqueològiques dutes a terme a les mines de l'antiga ciutat de Muān-jo Daro han posat de manifest l'existència a l'ÍNDIA d'una civilització contemporània a la dels constructors de les grans piràmides egípcies, amb un nivell cultural alt, però no ens ha arribat cap document matemàtic d'aquesta època.[20]

1.1 Del 4000 aC al 1500 aC

Aquestes excavacions posen de manifest l'existència d'una cultura cap al quart mil·leni abans de la nostra era, a la vall de l'INDUS, que es va mantenir fins als voltants del 1500 aC, quan fou sotmesa pels invasors *aris vedes*, emparentats amb els pobles indoeuropeus de l'IRAN. L'extensió d'aquesta civilització era d'uns 1,2 milions de quilòmetres quadrats. Els seus centres urbans més notables foren HARAPĀ, al PANJĀB, i MUĀN-JO DARO, al SINDH. Aquestes poblacions havien desenvolupat una certa civilització que cal situar *entre les més avançades* de l'època. Del que se n'ha pogut esbrinar, podem afirmar que havien elaborat sistemes de mesures i, en particular, de pesos; dibuixos artístics; una ceràmica decorada i modelada al torn; la utilització del coure i del bronze. Però el més notable de tot són els "treballs d'urbanisme, realment sorprenents, amb un sistema de clavegueram i de piscines que palesen una preocupació progressiva per la higiene pública".[21] D'aquest període és una escriptura coneguda com a "protoíndia" que s'ha trobat en "segells" i que, segons els estudiosos, encara no s'ha pogut desxifrar.[22] Tampoc no sabem res del seu sistema de numeració, ni tan sols si en tenien.

[19]Vegeu, com a síntesi, JOSEPH, G. G. [1991], 218–219 i KAYE, G. R. [1914], 327.

[20]BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 270. Una breu síntesi del desenvolupament de la història de l'ÍNDIA i la seva cultura, tot lligant-la amb els desenvolupaments científics més notables de cada moment històric, podem trobar-la, per exemple, a TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, I, 168–201.

[21]TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, I, 169.

[22]TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, I, 169; JOSEPH, G. G. [1991], 218. Sembla, però, que fan referència a l'ús medicinal de certs productes naturals.

1.2 Del 1500 aC al 600 aC. La cultura vèdica

Els invasors aris, no solament van portar a l'ÍNDIA el ferro i el cavall, sinó que instituiren un sistema de *castes* —divisions jeràrquiques de la societat— que permetia de distingir-los de les poblacions aborígens. Així podien mantenir, tot preservant-los, els privilegis i els llocs de poder i decisió, tant religiosos com polítics o culturals. Evitaven, a més, el mestissatge i van copar la classe sacerdotal que gaudia d'uns privilegis molt notables. Com a casta superior s'imposà la casta dels *bramans*, que s'expressava en *sànscrit*.[23] Van imposar l'hinduisme a través dels *Veda* —el saber per excel·lència. Aquests textos[24] recullen les formes dels ritus i els sacrificis, els himnes religiosos, i la màgia negra. Foren escrits, com apuntàvem, en un sànscrit arcaic entre el 1500 aC al 1000 aC. Després, en un sànscrit més elaborat, trobem els *Brāhmaṇa* i d'altres escrits vèdics que s'estenen fins a l'aparició del *budisme* i el *jainisme*. Són menys fonamentals i més especulatius, però responen a una continuïtat doctrinal amb els *escrits vèdics* del sànscrit arcaic. D'aquest període vèdic i bramànic no disposem de cap text matemàtic pròpiament dit, malgrat que aquesta cultura va elaborar textos de medicina i d'astronomia. En aquests darrers ja hi podem trobar *noms específics* per a les potències de deu.[25]. Una hipòtesi és la que manté que, en aquesta època, s'inicià el sistema lingüístic d'expressar nombres, atès que aquesta mena de sistema resulta molt adequat al sistema d'escriptura en *sutres*, un estil poètic basat en regles breus que afavorien la memorització.[26] No obstant això, avui sabem que la literatura vèdica primitiva va desenvolupar un sistema de numeració propi, atès que en el *Yajur-veda* hi ha una llista de denominacions per referir-se a les potències de 10:[27]

eka	*dasa*	*shata*	*sahasra*	*ayuta*	*niyuta*	*prayuta*
1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
arbuda	*nyarbuda*	*samudra*	*madhya*	*anta*	*parārdha*	
10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	

[23] Els invasors aris s'expressaven ja en un sànscrit arcaic, una llengua vinculada amb les antigues llengües de l'IRAN, coneguda com a llengua vèdica. D'aquest període primitiu és, per exemple, el codi de Manu (*Manusmṛiti*).

[24] Es poden classificar en quatre períodes: els *Saṃhitā* (1000 aC), els *Brāhmaṇa* (800 aC), els *Āraṇyaka* (700 aC) i els *Upanishad* (600 aC). Els *Saṃhitā* consten de quatre textos clàssics: el *Ṛig-veda*, el *Yajur-veda*,el *Sāma-veda*, i l'*Atharva-veda*.

[25] Vegeu TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, **I**, 170. "En no disposar, diu, de cap escrit d'aquesta època, és difícil saber si existia algun tipus d'escriptura dels nombres o algun sistema de còmput".

[26] JOSEPH, G. G. [1991], 218, dóna com un fet indiscutible l'existència de *numerals lingüístics* i àdhuc de certes operacions aritmètiques.

[27] Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 2; IFRAH, G. [1985], edició castellana de 1987, 253; JOSEPH, G. G. [1991], 242.

A més sabem que hi havia una *matemàtica vèdica*. Si més no aquesta és la conclusió de la reconstrucció feta per SWAMI BHARATI KRISHNA TIRTHAJ [1884–1960] dels setze *sutres* —regles o normes— i dels tretze *subsutres* i d'un apèndix de l'*Atharva-veda*.[28] Aquesta reconstrucció és realment notable perquè posa de manifest la tècnica de càlcul —els algorismes numèrics aritmètics, els algèbrics i alguns de geomètrics—, però TIRTHAJ en fa una *reconstrucció* en el sistema decimal posicional actual que ens fa perdre de vista com era, de fet, la numeració que s'usava a l'època en qüestió. No obstant això, per tal de fer-nos càrrec de la matemàtica desenvolupada, ens permetrem de veure què diuen els dos *primers sutres* i com els interpreta TIRTHAJ.[29]

I. *Ekādhikena Pūrveṇa* que, traduït, diu: "Un més que l'anterior". La regla pretén de calcular, per exemple, $\frac{1}{19}$. El *modus operandi* és el següent: anem multiplicant per 2 fins a 18 vegades; obtenim

$$1;\quad 21;\quad 421;\quad 8\,421;\quad {}_168\,421;\quad {}_13_168\,421;\quad 7\,{}_13_168\,421;\ldots$$

Finalment arribem a l'expressió: $\frac{1}{19} = \cdot{}_105_12\,63_11\cdot{}_15_17_18/9_147\,{}_13_168\,421$. Així s'obté una regla *mnemotècnica* prou senzilla.[30]

II. *Nikilaṃ Navataścaramaṃ Daśataḥ* que traduït, diu: "tots des de nou i el darrer des de 10". De fet estableix una regla *mnemotècnica* de la multiplicació. Suposem que volem multiplicar 9 per 7. Tot rau a completar-ho fins a 10:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{10} \\ 9 & -1 \\ 7 & -3 \\ \hline 6 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Per tant, $9 \times 7 = 63$.[31]

[28] Vegeu la nota 24.

[29] TIRTHAJ, B. K. [1965], edició de 1992, 2–5, 13–19.

[30] Aquest mètode val, en general, per a tot invers de la forma $\frac{1}{10\alpha-1}$, on $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$ Aleshores cal multiplicar per α. Així, si volem calcular $\frac{1}{59}$, farem: 1; 61; ${}_3661$; ...

També és possible de fer-ho dividint. Comencem per ${}_10$ i dividim per 2 [o, en general, per α], atès que 1 no és divisible per 2: ${}_10$; ${}_105$; ${}_105_12$; ${}_10\,5_126$; ... [TIRTHAJ, B. K. [1965], edició de 1992, 5–11].

[31] L'algorisme consisteix en el fet que, sumant-los en creu, donen 6; el producte de la segona columna, atenent al signe, dóna +3. La base algèbrica d'aquesta regla o sutra és: $(10-a)(10-b) = 10(10-(a+b)) + ab$. Però $10-(a+b) = (10-a)-b = (10-b)-a$. És a dir: $ab = 10\big(a-(10-b)\big) + (10-a)(10-b)$. El mètode es pot estendre a nombres de tres, quatre, cinc, etc. xifres. En general, $(10^n-c)(10^n-d) = 10^n(10^n-c-d)+cd$, on $n = 1, 2, 3$, etc. [Vegeu JOSEPH, G. G. [1993], a NELSON, D.–JOSEPH, G. G.–WILLIAMS, J. [1993], 112–118.]

En aquests exemples, els algorismes són clars. Tanmateix, en el text de B. K. TIRTHAJ, el que no queda clar és quins eren els numerals que usaven per fer-ho.

* * *

Una altra col·lecció de textos vèdics són els *Sulvasutra*, que són apèndixs dels *Kulvasutra*. Són textos rituals en què trobem instruccions precises per a la construcció d'altars. Contenen implícitament una quantitat notable de geometria i, entre molts altres resultats, hi trobem aproximacions de l'arrel quadrada de 2, de π, les ternes pitagòriques, etc.[32] Els més notables són els de BAUDHAYANA, APASTAMBA i KATYAYANA.[33] Molt difícils de datar, el més plausible és el període que va del 800 aC al 400 aC.[34] En aquest text hi trobem una certa aritmètica relativa a les fraccions, que permet d'oferir-nos expressions com ara

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

També hi trobem una nomenclatura pròpia dels *surds* de la forma $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}, \ldots$[35] Més difícil és, però, d'esbrinar els *algorismes de càlcul* emprats.[36]

1.3 Del 600 aC al 300 aC: el *budisme* i el *jainisme*

Al segle VI aC ens trobem amb l'aparició de SIDDHĀRTA GAUTAMA [~563 aC-483 aC], conegut com BUDA. Fou un personatge d'una gran influència religiosa.[37] Instaurà els

[32] No s'exclou que fossin textos basats, d'una banda, en les tècniques *prevèdiques* usades pels pobles aborígens de l'ÍNDIA en la seva elaborada tècnica de construcció i, d'altra banda, en la influència de la matemàtica babilònica.

[33] Vegeu DATTA, B. [1932].

[34] BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 272, els situa entre el 800 aC i el 200 dC, seguint KAYE, G. R. [1914], 327. JOSEPH, G. G. [1981], 228, els situa abans del gramàtic sànscrit PĀṆINI que va viure al segle IV aC. En canvi, SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 8, s'inclina pel període que hi ha entre el 800 i el 500 aC.

[35] Reben el nom de *karani*. Així $\sqrt{2}$ és *dwi-karani*, $\sqrt{3}$ *tri-karani*, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ *triteeya-karani*, $\sqrt{\frac{1}{7}}$ *saptama-karani* i $\sqrt{18}$ *ashtadasa-karani*, etc., cosa que ens permet de pensar que 2 es designava *dwi*, 3 *tri*, $\frac{1}{3}$ *triteeya*, $\frac{1}{7}$ *saptama* i 18 *ashtadasa*, etc. Les fraccions també es designen lingüísticament. Així, per exemple, $\frac{3}{8}$: *thri ashtama*; $\frac{2}{7}$: *dwi saptama*. [Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 12–13, i també BENOIT, P.–CHEMLA, K.–RITTER, J. [1992], 210–213.]

[36] S'ha conjecturat que, quan a és petit, feien servir la *fórmula d'Heró*: $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a}$ [vegeu, per exemple, KAYE, G. R. [1914], 329].

[37] Recordem que el segle VI aC és un segle realment sorprenent. Hi trobem homes notables que, cada un dins la seva cultura, ensenyaven als pobles a desvetllar l'intel·lecte, a fer-se preguntes transcendents de tot ordre: ZOROASTRE [~630 aC] a PÈRSIA, TALES de MILET [630 aC–546 aC] i PITÀGORAS de SAMOS [~580 aC–~497 aC] a GRÈCIA, BUDA [~563 aC–483 aC] a l'ÍNDIA i LAO TSE [VII aC–VI aC] i CONFUCI [~551 aC–479 aC] a la XINA.

principis d'una religió nova, coneguda com el *budisme*, que no respectava el sistema de castes. En aquesta època féu aparició també un altre corrent religiós, el *jainisme*, que la tradició atribueix a MAHAVIRA [~540 aC–468 aC]. Aquest corrent religiós desenvolupà, amb una certa analogia amb el *pitagorisme grec*, una manera pròpia d'entendre la matemàtica. La *matemàtica jaina* és molt més aritmeticoalgèbrica que la vèdica dels *Sulvasutra*.[38] És molt possible que fossin els membres del corrent jainista els qui contribuissin a la imposició del sistema decimal posicional lingüístic amb zero, un sistema que retrobem segles més tard.[39] Tanmateix, és difícil d'establir-ho amb una certesa absoluta. Aquesta és, si més no, l'opinió que ens ofereix DATTA quan diu que "desconeixem la forma dels numerals usats pels matemàtics jaines primitius", tot afirmant, a continuació, que "coneixien i empraven el sistema de notació decimal posicional alguns segles abans de l'era cristiana".[40] Tampoc no podem descartar l'escriptura basada en un sistema de paraules concretes per tal d'indicar la posició, un fet que hem trobat en el vedisme.[41]

eka: unitats;	*sahasra*: milers;	*kōti*: milions
dasa: desenes;	*dasa-sahasra*: desenes de mil;	*dasa-kōti*: desenes de milions
shata: centenes;	*shata-sahasra*: centenes de mil;	*shata-kōti*: centenes de milions.

És una notació numèrica amb "llocs" designats lingüísticament. No li cal el zero perquè cada lloc va indicat per un qualificatiu. Tanmateix fou, com ja hem indicat, la *porta* per la qual entrarien els *numerals indis* i el *zero*.

L'aritmètica jaina és força completa, si bé s'expressa en regles o sutres. Segons el *Sthānānga-sūtra*, datat com a molt tard al segle III aC, els temes d'interès dels matemàtics jaines foren deu:

parikarma: operacions elementals;	*yāvat-tāwat*: equacions simples;
vyavahāra: aritmètica aplicada;	*varga*: equacions quadràtiques;
rajju: geometria;	*ghana*: equacions cúbiques;
rāsi: mesura de sòlids;	*varga-varga*: equacions biquadrades;
kalāsavarna: fraccions;	*vikalpa*: permutacions i combinacions.

[38] Aquesta matemàtica cal situar-la entre el 600 aC i el 200 aC. El seu vocabulari és molt diferent del dels matemàtics grecs. Usaven noms específics per expressar nombres grans [vegeu DATTA, B. B. [1929], 709].

[39] Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 23.

[40] DATTA, B. B. [1929], 708.

[41] DATTA, B. B. [1929], 709 o SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 23. IFRAH, G. [1981], 484, ens informa del fet que aquesta nomenclatura és "un calc de l'expressió oral dels numerals en sànscrit". Tampoc és difícil de constatar que deriva de la terminologia vèdica.

La riquesa d'aquesta matemàtica podem trobar-la més detallada en textos d'història de la matemàtica índia.[42] La informació sobre els seus algorismes és escassa. Tanmateix sabem que usaven noms per designar *nombres molt grans* relatius a certes dades temporals. Per exemple,[43]

$$\begin{array}{rl} \textit{pūrvi}\text{:} & 756 \times 10^{11} \text{ anys;} \\ \textit{shirsha prahelika}\text{:} & (8\,400\,000)^{28} \text{ pūrvis.} \end{array}$$

1.4 Del 300 aC al 600 dC

Després de sis o set segles de dominacions, durant el segle III aC s'imposà la dinastia gupta, una dinastia d'origen indi, que regnà aproximadament, al nord de l'ÍNDIA, del 280 aC al 530 dC. D'aquesta nova dinastia cal destacar el rei AŚOKA [~272 aC–232 aC]. Aquest monarca es va convertir al budisme, afavorint així la difusió de la doctrina de BUDA. Féu una gran quantitat d'edictes i decrets, alguns escrits en escriptura *kharosti* i d'altres en escriptura *brahmi*. Durant el seu regnat s'inicià una recuperació cultural molt important que, entre els segles III aC i IV dC, propicià, indirectament o directa, una evolució de la matemàtica índia i, de retruc, de la notació numèrica realment digna d'atenció, que podem dividir sintèticament en quatre grans blocs.

1. *Les notacions kharosti* i *brahmi*

L'escriptura *kharosti* s'inicià al segle V aC i es mantingué fins al segle III aC. Es llegeix de dreta a esquerra i procedeix de PÈRSIA. Fou usada pels escribes i mercaders. Les seves formes numerals són simples marques fetes amb pals i, per tant, no són particularment significatives. Sabem, per exemple:[44]

[42] DATTA, B. B. [1929], 684–716; SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 20–28; JOSEPH, G. G. [1991], 249–256.

[43] El darrer d'ambdós números expressat en el sistema decimal posicional té 194 dígits. Sembla que "cap altra nació no ha usat nombres tan grans com els usats pels budistes i els jaines". L'ús de nombres grans és una constant en els textos indis; en trobem en els *Veda*; a la matemàtica jaina i també en el *Rāmāyana*, el més popular dels textos hindús, contemporani dels textos vèdics. En el *Rāmāyana*, s'afirma que RAVANA, el malvat, comandava un exèrcit de

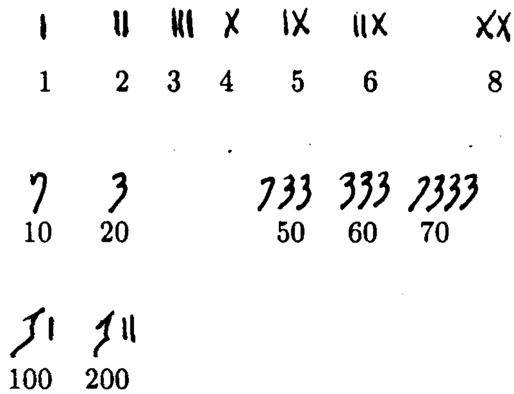
$$10^{12} + 10^5 + 36 \times 10^4 \text{ homes.}$$

L'exèrcit del seu enemic RĀMA, l'heroi del text èpic, tenia

$$10^{10} + 10^{14} + 10^{20} + 10^{24} + 10^{30} + 10^{34} + 10^{40} + 10^{44} + 10^{52} + 10^{57} + 10^{62} + 5 \text{ homes.}$$

[Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1 967], edició de 1 988, 3–4; JOSEPH, G. G. [1 991], 242–243.]

[44] Vegeu MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 50.



L'altra escriptura —la *brahmi*—[45] és considerada l'origen dels sistemes alfabètics indis (més de dos-cents), inclòs el sistema d'escriptura *devanagari*[46] que és molt semblant al que s'usa actualment.[47] S'escriu d'esquerra a dreta i és, probablement, un xic posterior a la *kharosti*. Si bé se'n desconeix l'origen precís, se la considera pròpiament índia. Tanmateix és força semblant a l'alfabet fenici.

En certs edictes del rei AŚOKA hi trobem alguns numerals brahmi[48] que ens permeten de constatar que es tracta d'un sistema de numeració xifrat en el sentit que especifica EVES.[49] Per aquesta raó, atès que no és posicional, no necessita del zero.

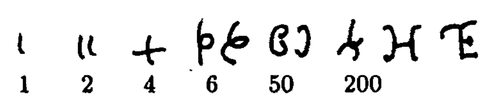
Els numerals brahmi —amb més o menys variacions paleogràfiques— es mantenen força temps, però sempre com a sistema de numeració xifrat. Així, per exemple, els retrobem a les parets de les coves de la muntanya NANA GHAT [~150 aC], situada a un centenar de quilòmetres de la ciutat de POONA i, al segle I o II dC, a les coves de NASIK i també a les inscripcions gupta del segle IV o V dC.[50] Hi ha conjectures

[45] Segons la tradició fou usada pel déu BRAHMĀ, un dels tres déus de la tríade postvèdica, ensems amb VISHNU i SHIVA, creador del món i personificació mitològica del *brahman* —concepte fonamental de la metafísica de l'hinduisme—, que significa l'absolut.

[46] A l'*Enciclopèdia Catalana* [1974], VI, 217, podeu veure-hi la forma de les vocals, diftongs i consonants en l'escriptura devanagari.

[47] Vegeu MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 265 i 294–295, o bé JEAN, G. [1987], edició anglesa de 1992, 67.

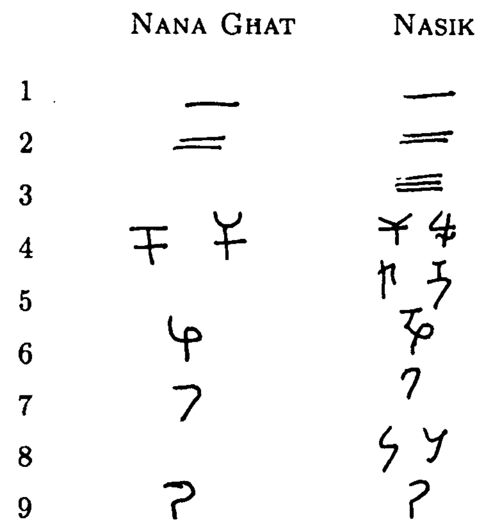
[48] Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 65–67, o bé IFRAH, G. [1991], 482–483. No hi ha pas tots els numerals. Només se n'hi troben uns quants.



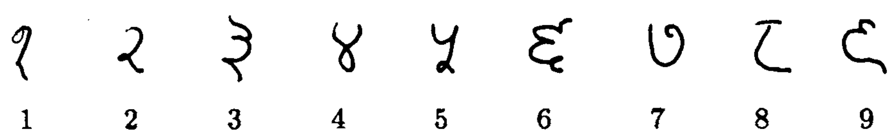
[49] EVES, H. [1953], edició de 1992, 18–19.

[50] Vegeu les taules força detallades d'IFRAH, G. [1991], 482–483, o de SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 66–67.

sobre la possibilitat que les xifres actuals siguin *variants paleogràfiques* del sistema de figures brahmi, i particularment de les de NANA GHAT, donada la semblança que tenen amb les actuals.[51] Les figures brahmi de NANA GHAT i NASIK són:[52]



Fou un sistema persistent. Es va mantenir amb variacions fins que, a l'entorn del segle VIII dC, s'imposà definitivament el sistema de numeració *devanagari* o sagrat:



2. *Els Siddhānta.*

En el període gupta es consolidà també l'astronomia vèdica, les arrels de la qual es troben ja en els Veda clàssics. En particular, després del segle III aC, s'esdevé un fet històric nou que havia d'ajudar a aquesta consolidació. L'any 519 aC, a la fi del segle VI aC, DARIOS I, dit *el Gran* [?–486 aC], envaeix l'ÍNDIA que roman sota la dominació estrangera fins que, en el segle III aC, ALEXANDRE, dit*el Gran* [356 aC–323 aC] aconsegueix derrotar DARIOS, dit *Codomà* [?–331 aC], sotmetre l'imperi persa i estendre el seu domini fins a les terres de l'est de l'INDUS amb la intenció de conquerir l'ÍNDIA.

[51] SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 66.
[52] BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 256–257.

Malgrat la victòria, obtinguda l'any 326 aC a les ribes de l'HIDASPES sobre el rei POROS, va renunciar a una empresa tan ambiciosa, davant l'actitud adversa del seu exèrcit [327 aC–325 aC]. Aquestes dominacions estrangeres van aconseguir que l'ÍNDIA entrés en contacte, en primer lloc, amb la cultura babilònica, i després amb l'hel·lènica a través dels nuclis indogrecs establerts per les conquestes d'ALEXANDRE i els seus generals a la conca del riu INDUS. Aquest fet políticohistòric afavorí l'aprofundiment de les relacions entre l'ÍNDIA i el gran centre polític, comercial i cultural d'ALEXANDRIA. És en aquest període i sota la influència d'uns i altres que apareixen els *Siddhānta*, els grans tractats d'astronomia hindú. La seva importància no es posaria, però, de manifest fins als primers segles de l'era cristiana.[53] El *Sūryasiddhānta* ens ofereix una síntesi, en vers, de tota l'obra astronòmica índia i és el primer text conegut que conté una taula de sinus.[54]

En aquest text queda ben palesa la utilització de *noms* per designar les *nou xifres* i d'un *nom per al zero*. És, però, difícil datar amb exactitud l'origen d'aquesta nomenclatura. No obstant això, és indiscutible la utilització d'una nomenclatura múltiple per a les deu xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 0,[55] basada en atributs de certs objectes usuals de la cultura índia. Indiquem-ne alguns de concrets:[56]

UN

śaśaṅka	: lluna
pitāmaha	: el primer pare (Brahman)
tanū	: el cos
ādi	: el principi de tot
eka	: nom usual de l'u

DOS

Yama	: parella
Aśvin	: els dos bessons
nayana	: els ulls
bahū	: els braços
pakṣa	: les ales
dvi	: nom usual del dos

[53] BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 272, afirma que són textos que s'inicien al segle II dC. Aquestes dates tanmateix contrasten amb les que trobem a JOSEPH, G. G. [1991], 265, o a TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, I, 177, que els situen en una època anterior a l'era cristiana o, tot just, a l'inici d'aquesta.

És possible que aquesta dificultad sigui deguda al fet que dels cinc *Siddhānta* —el *Paitāmahasiddhānta* [el de l'Avi], el *Vāsishthasiddānta*, el *Paulisasiddhānta*, el *Romakasiddhānta* [el romà] i el *Sūryasiddhānta* [la solució del Sol]— solament s'ha conservat el darrer que, amb força probabilitat, és del segle IV dC. Dels altres en tenim coneixement a través del *Pancasiddhāntika* [sobre les cinc solucions] que és un estudi crític dels cinc anteriors, elaborat, al segle VI dC, per l'astrònom VARĀHMIHIRA o bé gràcies a l'obra *Ta'rih al-Hind* sobre l'ÍNDIA, una història molt documentada escrita al segle XI per l'erudit àrab AL-BĪRŪNĪ.

[54] Vegeu WAERDEN, B. L. van der [1903], 54, o bé IFRAH, G. [1981], 477.

[55] IFRAH, G. [1985], edició castellana de 1987, 258 – 259, o bé IFRAH, G. [1981], 470–472.

[56] Veure BÜHLER, J. G. [1896], 731–737.

TRES

agni	: els tres focs vèdics
Rāmāh	: els tres germans de Rāma
loka	: els tres mons
trinetra	: els tres ulls de Siva
tri	: nom usual del tres

QUATRE

abdhi	: els oceans
Veda	: veda
diś	: punts cardinals
catur	: nom usual del quatre

CINC

indriya	: els sentits
bhūta	: els elements
bāṇa	: les cinc fletxes de Kāma
pañca	: nom usual del cinc

SIS

rasa	: els sis gustos
aṅga	: els sis membres
ṣaṭ	: nom usual del sis

SET

aśva	: els cavalls
naga	: les muntanyes
ṛṣi	: els set savis
sapta	: nom usual del set

VUIT

Vasu	: les divinitats
gaja	: els elefants
nāga	: els serpents
aṣṭa	: nom usual del vuit

NOU

aṅka	: les nou xifres
graha	: els nou planetes
chidra	: els nou orificis del cos humà
nava	: nom usual del nou

ZERO

śūnya	: el buit
ambara	: l'atmosfera
bindu	: el punt
kha	: el forat
viyat	: el cel

Aquesta nomenclatura els permetia d'escriure, per exemple, el 1021 en la forma

śaśi	*pakṣa*	*kha*	*eka*
lluna	ales	forat	u
1	2	0	1

i el 14 236 713 en la forma:[57]

trīṇy	*ekaṃ*	*sapta*	*ṣaṭ*	*trīṇī*	*dve*	*catvāry*	*ekakaṃ*
3	1	7	6	3	2	4	1

No hi ha cap mena de dubte que aquesta nomenclatura numèrica fou usada fins al

[57] Aquest nombre es troba en un text de cronologia de l'escola jainista, conegut com a *Lokavibhāga*, publicat el 25 d'agost de l'any 458 del calendari julià. [IFRAH, G. [1981], 476]. Notem que l'escriptura va de dreta a esquerra.

segle VII dC, l'època de BHĀSKARA, si bé era coneguda abans d'ĀRYABHATA [476–520 dC].[58]

Voldria remarcar explícitament els *noms usuals dels nombres* per la semblança que tenen amb els noms actuals

eka	*dvi*	*tri*	*catur*	*pañca*	*ṣaṭ*	*sapta*	*aṣṭa*	*nava*	*śūnya*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

i també el fet que, en aquesta manera d'escriure els numerals, hi ha la llavor del sistema decimal posicional.[59] Solament hi manquen els *guarismes*.

3. *El manuscrit* BAKHSHĀLĪ

És un text d'aritmètica del qual es conserva solament un fragment. Com en el cas dels altres documents esmentats, és difícil fixar-ne la data precisa.[60] La data d'aquest text és realment important, ja que ens permetria de situar "la invenció de la notació decimal posicional" a principis de la nostra era i potser fins i tot abans.[61] És un text atípic, atès que a més dels sutres —o regles—, tan corrents a la literatura índia, conté *comentaris* i *demostracions*. Això és el que permet de conjecturar que s'ha elaborat sobre un text anterior. És un text clar que estableix el nexe de connexió existent entre el període vèdic i l'època d'or de la matemàtica índia, que té els seus orígens al principi del segle VI en l'obra de l'astrònom i matemàtic ĀRYABHATA [~476].

La notació que trobem al manuscrit té una semblança notable amb la que faran servir els matemàtics del període clàssic. Endemés, conté *algorismes operatius* i això converteix aquest manuscriten un text únic, realment remarcable. HOERNLE ens ofereix una descripció de les figures numerals o guarismes. Són:[62]

---

[58] BHĀSKARA [~1114–1178] la usa amb tota normalitat en el seu *Comentari de l'Āryabhaṭiyā*. Aquest text cal situar-lo l'any 629 de la nostra era. [Vegeu IFRAH, G. [1981], 472–478]. Aquest autor dóna el valor del *Caturyuga* —cicle còsmic de 4 320 000 anys— en la forma

viyadambarākāśaśūnyayamarāmaveda
[cel–atmosfera–espai–buit–la primera parella–Rāma–Veda].

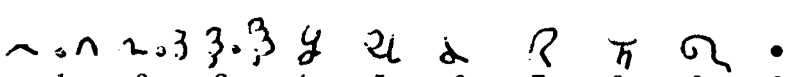
El *cicle còsmic* és el període al principi i al final del qual els nou elements —el sol, els planetes, la lluna, llurs àpsides i nodes— es retroben en perfecta conjunció mitjana amb el punt que estableix l'origen de les longituds.

[59] No he pogut trobar cap menció explícita als algorismes de càlcul que s'usaven fent servir aquestes formes numerals.

[60] HOERNLE el situa amb anterioritat al segle V dC, acceptant que el text que es coneix és una còpia posterior. KAYE, en canvi, el situa en el segle XII, i basa els seus arguments en "l'escriptura i llenguatge utilitzats i en els continguts del text". Vegeu HOERNLE, A. F. R. [1888], 663, o SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 29.

[61] BÜHLER, J. G. [1896], 729.

[62] HOERNLE, A. F. R. [1888], 663 i 666, o bé o KAYE, G. R. [1914], 343.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

El • l'usaven també per indicar la incògnita d'una equació, i el símbol + per indicar la resta.

Sense pretendre d'aprofundir excessivament en el text, vull fer notar algunes de les seves expressions algorísmiques.[63] Hi trobem que

$$\left|\begin{array}{ccc} 5 & 7 & \\ & & \text{yu} \\ 1 & 1 & \end{array}\right| \text{ pha } 12 \quad \text{representa} \quad 5+7=12,$$

$$\left|\begin{array}{cc} 12 & 7+ \\ & \\ 1 & 1 \end{array}\right| \text{ pha } 5 \quad \text{representa} \quad 12-7=5.$$

Aquestes notacions permetien als autors del manuscrit de treballar amb fraccions. Les sumaven i restaven tot reduint-les a denominador comú (*sadrisam kriyate*).[64] Així, per exemple,

$$\left|\begin{array}{cc} 15 & 8+ \\ & \\ 4 & 3 \end{array}\right| \quad \text{significa} \quad \frac{15}{4}-\frac{8}{3}.$$

Amb aquest sistema de representació i d'algorísmia podien plantejar i resoldre problemes com ara

$$\left|\begin{array}{cc} 5 & 32 \\ & \\ 8 & 1 \end{array}\right| \text{ pha } 20, \quad \text{que significa} \quad \frac{5}{8}\times 32=20;$$

o bé, força més interessant,[65]

[63] La paraula *yu* abreuja *yuta*, que vol dir sumar. El símbol *pha*, per *phalàm*, vol dir "és". El signe + és, segons HOERNLE, el més misteriós. Pot venir de l'abreujament *ka* de *kanita*, "disminuït", de l'alfabet d'AŚOKA. [Vegeu HOERNLE, A. F. R. [1888], 658 i 661, o bé CAJORI, F. [1928], I, 77–79.]

[64] Vegeu HOERNLE, A. F. R. [1888], 672 o SRINIVASIENGAR, C. N. [1981], 31. Notem que, de fet, els nombres enters són fraccions de denominador 1.

[65] De fet, cada columna, llevat de la primera, representa $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. El producte de les tres columnes és $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$. S'inverteix i s'aplica a 32 i s'obté 108. Així s'obté el valor del símbol •, que fa el paper de la nostra incògnita x. L'expressió *bhâ* abreuja *bhâga*, que vol dir "part", i representa la divisió. És a dir, busquem un nombre tal que multiplicat per $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ doni 32. El formalisme anterior ens diu que és el 108 i que s'obté buscant les $\frac{27}{8}$ parts de 32. És a dir: $x\cdot\left(\frac{8}{27}\right)=32$, dóna $x=\frac{27}{8}\times 32=108$.

$$\left|\begin{array}{ccccc} \bullet & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & \text{bhâ } 32 \\ 1 & 3+ & 3+ & 3+ & \end{array}\right| \text{ pha } 108, \quad \text{que significa } \left(1 : \frac{8}{27}\right) \cdot 32 = 108.$$

Un altre simbolisme és el que indica la divisió:

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 10 & 30 & 4 \\ & & \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \text{ pha } \begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \quad \text{significa} \frac{30}{1} : \left(\frac{10}{1} : \frac{4}{1}\right) = \frac{12}{1}. \text{ És a dir, } \frac{4}{12} = \frac{10}{30}.$$

Disposaven també de l'expressió de l'*arrel quadrada* que els permetia de plantejar operacions de segon grau [determinades i indeterminades]. Com a exemple, considerem

$$\left|\begin{array}{ccccc|cccccc} \bullet & 5 & & & \bullet & \text{sa} & \bullet & 7 & + & & \bullet \\ & & \text{yu} & \text{mú} & & & & & & \text{mú} & \\ 1 & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right|$$

que significa $\sqrt{x+5} = s$, $\sqrt{x-7} = t$.[66]

En aquest text, trobem una regla o algorisme d'obtenció d'arrels quadrades que podem sintetitzar amb l'expressió actual

$$\sqrt{a^2+h} \cong a + \frac{h}{2a} + \frac{(h/2a)^2}{2(a+h/2a)}.^{67}$$

4. *El sistema de numeració d'*ĀRYABHATA[68]

Aquest matemàtic és el llindar de la matemàtica clàssica que s'inicia amb ell mateix o, en tot cas, amb BRAHMAGUPTA. La seva obra sintetitza la dels astrònoms dels *Siddhānta* i el podem considerar el primer matemàtic indi conegut. El text més notable, conegut com a *Aryabhatiya*, fou escrit l'any 499 dC, quan l'autor tenia

[66] Òbviament hi ha una ambigüitat en el nom de la incògnita. El símbol $\overset{\bullet}{1}$ significa "quin és el nombre que". A SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 32–33, hi podeu trobar una petita discussió sobre el nom d'àlgebra a la matemàtica jaina —*yāvat-tāwat*— i el nom d'incògnita que trobem al manuscrit BAKHSHĀLĪ.

L'expressió *mú* abreuja, probablement, *múla* que, en sànscrit, significa *arrel d'una planta*. Vegeu l'article DATTA, B. [1927].

[67] Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 35–36, o JOSEPH, G. G. [1991], 260–261. No es troba, però, a la reproducció de l'article de HOERNLE, A. F. R. [1888], que conté CHATTOPADHYAYA, D. [1982], II, 653–683.

[68] FLEET, J. F. [1911] ens n'ofereix una anàlisi força clara. També podem trobar-lo a KAYE, G. R. [1914], 344–345. Tanmateix, WAERDEN, B. L. van der [1903] l'esmenta tot de passada.

23 anys.[69] Restà, però, perdut fins que l'any 1864 BHAU DAJI en va trobar una còpia.[70] No obstant això, era conegut pels matemàtics que van venir després d'ell; fou la pedra de toc de l'obra posterior. En trobem comentaris i anàlisis notables a VARĀHAMIHIRA [~507–587], BHĀSKARA I [~600] i BRAHMAGUPTA [~598–660]. Aquest darrer, malgrat la concisió de l'obra —33 versos—, la dividí en dues parts. La segona part, al seu torn, la dividí en tres, la primera de les quals l'anomenà *Ganita*; això és, "art de calcular", atès que el seu contingut és totalment matemàtic.[71]

La seva obra conté una taula de sinus; per expressar-la, però, no usa pas el sistema decimal posicional, sinó que *inventa* un sistema de numeració propi, basat en les 25 consonants *classificades* de l'escriptura sànscrita devanagari i en les 8 *no classificades*. Així doncs, disposa de la taula:[72]

LLETRA	VALOR	LLETRA	VALOR	LLETRA	VALOR	LLETRA	VALOR
k	1	jh	9	d	18	y	30
kh	2	ñ	10	dh	19	r	40
g	3	ṭ	11	n	20	l	50
gh	4	ṭh	12	p	21	v	60
ṅ	5	ḍ	13	ph	22	ś	70
c	6	ḍh	14	b	23	ṣ	80
ch	7	ṇ	15	bh	24	s	90
j	8	t	16	m	25	h	100
		th	17				

Les vocals i els diftongs indiquen, per multiplicació, les potències de 100:[73]

a		i		u		ṛ		ḷi	
1		10^2		10^4		10^6		10^8	
	10		10^3		10^5		10^7		10^9

e		ai		o		au
10^{10}		10^{12}		10^{14}		10^{16}
	10^{11}		10^{13}		10^{15}	

[69] Vegeu JOSEPH G. G. [1991], 265, o SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 41.

[70] SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 40.

[71] No entro en la qüestió de la possible existència de diversos matemàtics indis amb el mateix nom, perquè això no afecta la nostra anàlisi. Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 41–42.

[72] Vegeu l'entrada "devanagari" de l'*Enciclopèdia Catalana*, VI, [1974], 217. S'hi pot veure la figura en sànscrit. Comparant els noms que l'*Enciclopèdia* dóna a cada consonant i els que hem donat nosaltres a la taula, observem que l'*Enciclopèdia* els afegeix una *a*. Així doncs, el que nosaltres anomenem *k*, l'*Enciclopèdia* ho anomena *ka*; etc.

[73] És, de fet, un sistema multiplicatiu en la classificació d'EVES [vegeu EVES, H. [1953], edició de 1992, 14–21].

Amb aquest sistema pot aconseguir escriure nombres amb un valor força gran.[74] Veiem-ne uns exemples:

khya:	$2+30=32$,	khyughṛ:	4 320 000,
khyu:	320 000,	cayagiyiṅuśuchlṛ:	57 753 336,
ghṛ:	$4\cdot 10^6 = 4\,000\,000$,		

on el darrer nombre expressa les revolucions de la lluna en 432 000 anys.

La nomenclatura numèrica d'ĀRYABHATA no és posicional i no necessita el zero. Respon a la concisió de la versificació usada en l'obra. Tanmateix, segons van der WAERDEN, el pas endavant el donaria el seu deixeble BHASKARA I a l'entorn del 520, mentre que al 537 GANI invertiria l'ordre d'escriptura, atès que fins aleshores l'escriptura començava per les unitats.[75] En canvi, BHÜLER i KAYE, més prudents, afirmen que el pas del sistema alfabètic d'ĀRYABHATA a l'alfabètic posicional amb zero no és possible de confirmar-lo fins al segle XII; aleshores trobem textos en els quals

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k	kh	g	gh	ṅ	c	ch	j	jh	ñ
ṭ	th	ḍ	ḍh	ṇ	t	th	d	dh	n
p	ph	b	bh	m					
y	r	l	v	ś	ṣ	s	h		

i d'altres semblants.[76]

* * *

De tota aquesta exposició i anàlisi podem sintetitzar que el sistema decimal posicional amb zero era ben conegut a l'ÍNDIA amb anterioritat a l'inici del període clàssic de la matemàtica, que abraça des del segle VI al XII. Òbviament, la validesa d'aquesta afirmació categòrica depèn de l'acceptació, cada cop menys discutida pels estudiosos i erudits, de les dates més favorables atribuïdes al manuscrit de BAKHSHĀLĪ i als *Siddhānta*. La tesi, en definitiva, fóra

> Els matemàtics i astrònoms indis disposaven d'un sistema de numeració decimal posicional amb zero i també de certs algorismes de càlcul al començament de la

[74] Com, per exemple, el nombre de dies siderals que, a l'astronomia índia, era de 1 582 237 500.

[75] WAERDEN, B. L. van der [1903], 55. JAVIER de LORENZO [LORENZO, J. de [1971], edició de 1989, 69–70], sosté, en canvi, que ja era conegut pel propi ĀRYABHATA. En parlarem tot seguit.

[76] Vegeu BHÜLER, J. G. [1896], 737–738; KAYE, G. R. [1914], 345.

nostra era i, en tot cas, en el període que va del segle IV al V.[77]

Hi ha d'altres fets que ens permetran d'avalar aquestes afirmacions i que exposarem a continuació, gairebé com a cloenda d'aquest repàs breu i sintètic de la qüestió. Quedarà pendent un segon problema: com van evolucionar els símbols i com van aconseguir imposar-se els uns per damunt dels altres? Aquesta qüestió, força complicada, ha estat estudiada també pels *paleògrafs* i en parlarem breument.

No hi ha pas dubte que, malgrat que ĀRYABHATA es dotés d'una escriptura pròpia dels nombres, coneixia el sistema decimal posicional amb zero.[78] La qüestió sorgeix de l'anàlisi d'una frase que afirma:

> D'un lloc a l'altre, cada un és deu vegades el que el precedeix.[79]

Aquesta frase acompanyada de l'algorisme d'extracció d'arrels quadrades i cúbiques no ens permet de dubtar del fet que ĀRYABHATA coneixia el sistema decimal posicional amb zero.[80] ĀRYABHATA ens ofereix, efectivament, un *algorisme d'extracció d'arrels cúbiques*, que es fonamenta en la distinció que fa de les xifres del nombre al qual pretén de calcular l'arrel en llocs cúbics —*ghana*— i llocs no cúbics —*aghana*. Així doncs, indicarem els llocs cúbics i no cúbics amb els símbols $\circ$ i $-$, respectivament, i aplicarem l'algorisme d'extracció d'arrels cúbiques a un exemple concret.[81]

Volem calcular l'arrel cúbica del nombre 1 860 867; els seus llocs cúbics estan ocupats per les xifres $1, 0$ i 7; i els llocs no cúbics, per $8, 6, 8, 6$. Així, d'acord amb el conveni anterior, l'indicarem

$$\overset{\circ}{1}\ \ \bar{8}\ \ \bar{6}\ \ \overset{\circ}{0}\ \ \bar{8}\ \ \bar{6}\ \ \overset{\circ}{7}\,.$$

L'algorisme que fa servir ĀRYABHATA és el següent:

(i) l'arrel cúbica del primer lloc cúbic $\overset{\circ}{1}$ és 1;

(ii) el cub de l'arrel cúbica és $\overset{\circ}{1}$;

(iii) restem $\overset{\circ}{1}$ de $\overset{\circ}{1}\bar{8}$ i obtenim $0\bar{8}$;

---

[77] Amb paraules-símbol en el cas dels astrònoms o amb símbols més concrets en el cas del manuscrit BAKHSHĀLĪ.

[78] El lector interessat pot consultar GĀṄGULI, S. [1927]. És un petit paper on l'autor repassa les possibles traduccions d'una frase d'ĀRYABHATA per tal d'esbrinar si implícitament comporta el coneixement, per part del prestigiós matemàtic, del sistema posicional decimal amb zero.

[79] RODET, L. [1879], 397.

[80] L'extracció d'arrels quadrades era coneguda pels matemàtics jaines i, per tant, no és gaire interessant.

[81] Vegeu SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 44.

(iv) calculem tres vegades el quadrat de l'arrel cúbica; $3 \times 1^2 = 3$;

(v) dividim $0\overline{8}$ per 3 i obtenim 2 com a quocient; és el segon dígit de l'arrel cúbica;

(vi) calculem $3 \times 2 \times 1^2 = \overline{6}$ —tres vegades el quocient anterior pel quadrat de l'arrel cúbica;

(vii) restem $\overline{6}$ de $\overline{8}$; obtenim $\overline{2}\,\overline{6}$;

(viii) calculem $3 \times 2^2 \times 1 = 12$ —tres vegades el quadrat del quocient de (v) per l'arrel cúbica;

(ix) restem $\overline{1}\,\overline{2}$ de $\overline{2}\,\overline{6}$; obtenim $\overline{1}\,\overline{4}\,\mathring{0}$;

(x) calculem el cub del quocient obtingut a (v): és $\mathring{8}$ [i correspon al segon lloc cúbic];

(xi) restem $\mathring{8}$ de $\overline{1}\,\overline{4}\,\mathring{0} : \overline{1}\,\overline{3}\,\mathring{2}\,\overline{8}$.

Ara tornem a començar des de (iv), però considerant que l'arrel cúbica és 12:

(iv′) calculem tres vegades el quadrat de l'arrel cúbica $3 \times 144 = 432$;

(v′) dividim $\overline{1}\,\overline{3}\,\mathring{2}\,\overline{8}$ per 432 i obtenim el quocient 3; és el tercer dígit de l'arrel cúbica.

Finalment en resulta que l'arrel cúbica és 123.

Si aquesta interpretació és certa, podem afirmar que, tot just al començament del segle V, el sistema decimal posicional amb zero estava prou consolidat per poder-hi muntar algorismes de càlcul força sofisticats. Això ens portaria a situar-lo, com a mínim, un segle abans.

* * *

Una altra qüestió oberta la constitueix l'existència o no d'àbacs a la *logística índia*. El sistema indi de *nombres-paraules* podria fer pensar en la possibilitat que els matemàtics i astrònoms indis fessin servir *àbacs de sorra* o *taules de sorra*, en els quals hi hauria columnes amb *llocs buits* que després caldria traduir verbalment o simbòlica amb un símbol —el zero. No obstant això, l'existència d'aquesta mena de ginys es difícil de defensar atesa la poca referència que en tenim.[82] Tanmateix, cal indicar que hi ha autors que defensen que l'origen del zero a l'ÍNDIA, sigui quin sigui, és possible de situar-lo al segle II aC,[83] o fins i tot abans.

Ultra totes aquestes aportacions que, cada cop més, ens permeten de fixar l'origen del sistema decimal posicional amb zero a l'ÍNDIA, a tot tardar, al final del segle IV dC

[82] GANDZ, S. [1927], 308–316, ens ofereix algunes cites que defensen l'existència de *taules de sorra índies*, i d'altres que la refusen. Tanmateix, vegeu MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 397–398.

[83] DATA, B. [1926].

i, amb molta probabilitat, alguns segles abans, disposem d'alguns testimonis externs a l'ÍNDIA que també permeten de fer algunes conjectures.

Un dels testimonis ens ve de MESOPOTÀMIA i cal situar-lo a la meitat del segle VII, en boca de SEVERUS SEBOKHT. Aquest patriarca vivia en el convent de QUENESRE, a la vora de l'EUFRATES. La seva mort la situen els autors l'any 631.[84] Aquest autor intenta posar de manifest que no tots els coneixements ens han vingut de GRÈCIA i diu:

> No parlaré pas ara i aquí de la ciència índia... ni tampoc de les seves subtils descobertes en astronomia... ni del seu valuós mètode de càlcul ni tampoc dels seus algorismes. Només diré que sobrepassen tota descripció i que es basen en nou xifres.[85]

No menciona el zero. Tanmateix, però, no podem deixar de pensar que l'èmfasi que posa SEBOKHT en les nou xifres i els algorismes de càlcul posa de manifest la necessitat d'indicar la *mancança* d'alguna manera: un punt, un espai en blanc, etc.[86]

Una altra manifestació d'aquest fet ens ve de la XINA i cal datar-la al principi del segle VIII.[87] La referència del zero és explícita en un text important d'astronomia i astrologia publicat entre el 718 i el 729. A la part datada l'any 718, hi trobem un capítol relatiu al càlcul amb xifres índies; en aquest text es precisa que:

> Cada una de les xifres índies s'escriu cursivament i d'un sol traç... Quan una de les nou xifres assoleix la desena s'escriu en una columna més avançada i, cada vegada que apareix un espai buit en una columna, cal col·locar-hi un punt per tal de simbolitzar-ho.[88]

Aquestes notícies de l'existència del sistema numèric posicional decimal amb zero no són pas fets aïllats, sinó que estan íntimament vinculades a d'altres que trobarem en

[84] GINSBURG, J. [1917].

[85] Vegeu la traducció francesa de NAU, M. F. [1910], 225, o bé SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 166, i fins i tot IFRAH, G. [1981], 466. Hi ha una petita incongruència en les dates; mentre que D. E. SMITH estableix la seva mort l'any 631, G. IFRAH afirma que el text esmentat cal datar-lo "l'any 973 dels grecs (o sigui, el 662 de la nostra era)".

[86] Vegeu GINSBURG, J. [1917], 368–369. Aquest autor, a més, dóna raons per justificar el fet que el monàstic en tingués coneixement. Recordem també, que hi havia hagut contactes entre l'ÍNDIA, PÈRSIA i GRÈCIA des del segle III aC i potser des d'abans i tot [vegeu MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 393–394].

[87] Vegeu NEEDHAM, J. [1959], III, 12, 37, 88, o bé IFRAH, G. [1981], 466. A més, NEEDHAM prova que l'autor del text no és pas xinès sinó un savi budista d'origen indi resident, però, a la XINA [vegeu RONAN, C. A. [1981], II, 116].

[88] Aquest text posa de manifest que l'escriptura posicional decimal amb zero índia havia arribat a la XINA al començament del segle VIII i, per això, cal suposar que s'havia desenvolupat ja d'una faisó prou important a l'ÍNDIA. El text, a més, lliga la presentació posicional amb l'escriptura *abaquista per mitjà de columnes*, molt pròpia de la mentalitat xinesa.

els matemàtics de l'islam, tant en els de la zona d'influència de BAGDAD, com en els de la zona d'influència més occidental, és a dir, hispànica. Abans, però, de fer aquesta anàlisi més propera a OCCIDENT, acabarem la presentació de l'evolució dins l'ÍNDIA i la seva zona d'influència tot fent un repàs de les troballes d'aquest sistema de numeració en documents que no són ni matemàtics ni d'astronomia, sinó que o bé contenen fites històriques o bé són textos d'un caire cultural més ampli. Això ens permetrà, a més, d'establir un cert lligam entre els signes —o guarismes— dels numerals indis del sistema posicional i els nou primers símbols del sistema brahmi.

Els exemples més antics en aquest sentit els constitueixen certes *cartes de donacions*.[89] Són documents de cuiro escrits en sànscrit en els quals personatges rellevants fan donació de certs béns a les autoritats religioses bramanes. S'estenen des de les darreries del segle VI dC fins a mitjan segle X. Aquestes cartes descriuen, amb paraules, les raons de la donació, el nom del donador, el nombre i descripció dels béns donats. Es clouen amb la data de la donació, que correspon a algunes de les eres índies més usuals. Aquestes dates s'expressen, curiosament, en sistema posicional.[90] La més antiga d'aquestes cartes de donació està datada l'any 346 de l'*era Cédi*, que correspon al 595 dC. El símbol que indica la data *Cédi* és

3 4 6

Cal notar que aquesta carta de donacions no conté el zero; en canvi d'altres cartes més tardanes, datades al segle VIII dC, sí que el contenen.

D'altres exemples *epigràfics* els trobem a la ciutat de GWALIOR, una ciutat de l'estat indi de MADHYA PRADESH, situada uns 300 km al sud de NOVA DELHI. Són inscripcions del temple de VĀILLABHATTA-SVĀMIN, consagrat al déu VIṢHṆU. La primera d'aquestes inscripcions està datada, amb lletres, l'any 932 de l'*era Vikraṁa*, que correspon a l'any 875 dC. És una peça versificada en sànscrit, que consta de 26 versos numerats amb les xifres 1 a la 26, que tenen la forma següent:

La segona inscripció, datada amb xifres l'any 933, *Vikraṁa*, que correspon al 876 dC, és un acte de donació dels habitants de GAWLIOR a l'esmentat temple. Ens ofereix les notacions següents:

[89] IFRAH, G. [1981], 464, ens ofereix una taula en la qual podem trobar una certa informació relativa a les cartes de donacions.

[90] No hi ha pas un acord total sobre aquest fet, però tampoc no se n'ha pogut donar cap altra explicació.

9 3 3 2 7 0 1 8 7 5 0

Aquestes notacions posen de manifest que, entre els segles VI i IX dC, l'escriptura decimal posicional basada en les expressions brahmi i el zero eren d'ús comú i apareixien en inscripcions d'índole social.[91] Observeu que són posteriors al coneixement que tenien d'aquest fet SEVERUS SEBOKHT i l'astrònom indi resident a la XINA. Però, i això encara és més sorprenent, són també posteriors al coneixement que en tenien els matemàtics àrabs de l'islam i, potser, algun cristià d'OCCIDENT instruït que els hauria conegut a través dels contactes que els erudits indis i els comerciants de les zones més occidentals tenien a ALEXANDRIA, un nucli de contacte molt important entre ORIENT i OCCIDENT, tant comercialment com cultural.

2 L'islam: el pont cap a Occident

Ningú no dubta del fet que, gràcies a l'expansió islàmica, el poble àrab entrà en contacte amb el sistema de numeració posicional indi. Després d'assumir-lo amb més o menys intensitat, féu que fos conegut a OCCIDENT. Tanmateix, però, podem afirmar que els camins pels quals els numerals indis van arribar a OCCIDENT foren, almenys, tres ben diferenciats: el *camí d'Alexandria* i els *camins de Bagdad i Còrdova*. Els dos darrers tenen en comú que arriben a través d'un esdeveniment polític, social i religiós i, en definitiva, històric nou: l'islam. Els lligams que hi ha entre aquests camins són difícils d'establir, malgrat els excel·lents estudis realitzats pels historiadors i erudits.[92]

2.1 Alexandria

D'una banda, com ja hem indicat, els pobles de l'ÍNDIA aconseguiren establir lligams comercials importants amb d'altres pobles i civilitzacions més properes a la MEDITERRANIA, com ara les civilitzacions de MESOPOTÀMIA i EGIPTE. No hi ha pas dubte que, a través dels contactes comercials d'aquests pobles i el poble indi, s'aconseguí conèixer alguns trets de les cultures més orientals alhora que aquestes s'enriquiren amb alguns de les més occidentals. En particular, els numerals indis foren coneguts

[91] IFRAH, G. [1981], 468–469, ens ofereix d'altres fonts de numeració decimal basada en símbols sànscrits.

[92] Disposem d'un bon grapat de textos que ens permeten seguir de prop aquest fet. Podem consultar, per exemple, WOEPCKE, F. [1863]; WAERDEN, B. L. van der [1903], 57–61; SMITH, D. E.–KARPINSKI, L. C. [1911]; HILL, G. F. [1915]; SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, 69–80; MILLÀS i VALLICROSA, J. [1931], edició de 1983, 136–163; GANDZ, S. [1931]; SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 109–131; MENÉNDEZ PIDAL, G. [1959]; MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 406–421; YOUSCHKEVITCH, A. P. [1976], 15–25; VERNET, J. [1978], 60–66; IFRAH, G. [1981], 491-518; ALLARD, A. [1992], i-lxv; 1–22.

a ALEXANDRIA pels volts del segle V, però sense el zero.[93] L'aparició del zero, com hem vist, és difícil de situar i s'ha argumentat que podria ser d'aquesta època i haver-se forjat a ALEXANDRIA,[94] malgrat que, com fa notar MONTUCLA, això és un excés d'hel·lenisme:

> Els grecs tenien prou genialitat per no haver-se adonat del mèrit d'una invenció com aquesta; si l'origen hagués tingut lloc entre ells o n'haguessin arribat a tenir coneixement, l'haurien adoptada de seguida.[95]

En canvi, pel que sabem, aquest coneixement alexandrí del sistema indi —que s'estengué a través dels comerciants— no tingué cap mena de ressò en l'àmbit de la matemàtica com a ciència. El paper d'ALEXANDRIA com a centre d'estudi, de recerca, de docència, havia quedat gairebé desfet amb la mort d'HIPÀTIA, l'any 415; és a dir, al començament del segle V.[96] Dit altrament, el sistema de numeració indi, amb o sense zero, arribà a ALEXANDRIA massa tard. Al segle V ALEXANDRIA era, ben cert, una cruïlla de camins entre ORIENT i OCCIDENT. Hi passaven les principals vies de comerç, però ja no era el centre d'encontre dels erudits ni tampoc el nucli d'intercanvi dels coneixements de les civilitzacions orientals i occidentals. Això explicaria la manca total de textos matemàtics basats en els numerals indis a ALEXANDRIA. Si, a tot això, hi afegim el fet que el coneixement dels numerals indis era limitat —és a dir, sense el zero—, la qual cosa li feia perdre allò que de més notable té el sistema, deixant-lo desprovist d'interès, entendrem que aquest camí fos limitat i pobre.[97] Malgrat

---

[93] Vegeu SMITH, D. E.–KARPINSKI, L. C. [1911]; SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, 73. O bé MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 406.

[94] WAERDEN, B. L. van der [1903], 56–57. Fins i tot s'ha dit que *o* podria ser la lletra grega *omicrom* —un abreujament de la paraula grega *ουδὲν*, que significa *no-res*. Sembla que l'astrònom grec PTOLEMEU usava *o* per tal de designar la manca de quantitat en expressions com $\overline{\mu\alpha}\, o\, \overline{\iota\eta}$, el significat de la qual fóra 41° 00′ 18″, o com $o\, \overline{\lambda\gamma}\, \overline{\delta}$: 0° 33′ 04″. També el neoplatònic JÀMBLIC [~330] coneixia el zero. [Vegeu HEATH, sir T. [1921], edició de 1981, I, 39 i 45.]

[95] MONTUCLA, J.–F. [1798], edició de 1968, I, 376.

[96] Recordem que HIPÀTIA [† 415], filla de TEÓ d'ALEXANDRIA [~365], filòsofa i matemàtica, fou la darrera directora del Museu d'Alexandria, alhora que la primera matemàtica coneguda. Després de ser violada i torturada, trobà la mort a mans d'una plebs de cristians fanàtics al mes de març de l'any 415 [vegeu EVES, H. [1953], edició de 1992, 185]. La seva mort va comportar la fi del Museu d'Alexandria, del pensament pagà, de la seva ciència i filosofia, inclosa la matemàtica, i l'èxit d'una creixent implantació del cristianisme, iniciada per CONSTANTÍ; aquesta fi esdevingué definitiva amb l'edicte de JUSTINIÀ [482–565] de l'any 527, que obligava a tancar els temples i escoles paganes i a dispersar els estudiosos que hi treballaven. Així, l'any 529 fou tancada l'Acadèmia de Plató, considerada un focus de paganisme, després de vuit segles i mig d'existència ininterrompuda.

[97] No hi ha cap lligam conegut entre aquesta afirmació que sosté que, a l'ALEXANDRIA del segle V, els numerals indis, sense zero, eren coneguts, i el text, ja esmentat, del monjo SEVERUS SEBOKHT. No sabem si ambdós coneixements responen a una mateixa circumstància: l'expansió de certs trets culturals a través de les vies de comerç entre ORIENT i OCCIDENT. No obstant això, sembla força raonable.

totes aquestes limitacions i la manca de confirmacions explícites d'aquest pont cap a OCCIDENT, la seva acceptació pot servir, com veurem més endavant, per explicar un dels petits misteris que presenta la implantació occidental del sistema indoaràbic de numeració quan es pretén de lligar la seva aparició a OCCIDENT amb l'aportació deguda al desenvolupament cultural musulmà.

2.2 L'islam

El segle V és el segle de la desfeta de l'IMPERI ROMÀ. L'any 476, l'emperador de ROMA és vençut i substituït per un cabdill got. Tanmateix, resta l'IMPERI ROMÀ D'ORIENT o IMPERI BIZANTÍ, amb capital a CONSTANTINOBLE.

En aquesta època el poble àrab està encerclat per l'imperi persa, l'ÀSIA MENOR, SÍRIA i EGIPTE. Aquest darrer es troba sotmès a l'imperi bizantí i SÍRIA ha conquerit l'antiga MESOPOTÀMIA. El poble àrab, d'origen ètnic semític, és un poble de costums nòmades i està absolutament dividit en tribus inconnexes. La seva cultura és més aviat pobra i la seva "immoralitat és esfereïdora: les seves grans passions són la guerra, el sexe, el vi i el joc".[98] Viuen del pillatge a què sotmeten les caravanes de comerciants que, amb la intenció d'establir rutes comercials entre PÈRSIA, MESOPOTÀMIA, els pobles de la MEDITERRÀNIA i EGIPTE, gosen de travessar els deserts de l'ARÀBIA.

A l'ARÀBIA hi ha dues ciutats notables: MEDINA,[99] una ciutat comercial que es troba en el camí de les caravanes, i LA MECA que, a més de centre comercial, és un lloc de pelegrinatge. Com a tal, conté importants centres de culte, entre els quals cal distingir la KA'BA, construïda amb pedres negres de meteorit, que els àrabs consideraven com un déu protector.[100] Aquesta ciutat estava protegida pels beduïns. L'any 570 dC hi va néixer MAHOMA [~570–632].[101] La seva vida és tranquil·la fins a l'edat de 40 anys. Era, doncs, un home en plena maduresa quan assentà les bases d'una religió que, en un tres i no-res, es convertiria en l'islam —*submissió a* AL·LÀ. Perseguit pels comerciants rics i pels prohoms de LA MECA, fuig a MEDINA. La dècada següent la dedica a unificar les tribus a través de normes i principis de caire religiós, de regles de comportament i de moral que, després de la seva mort, esdevinguda l'any 632, seran recollits en el llibre sagrat dels musulmans: l'ALCORÀ. El fet indiscutible de la religió de MAHOMA és l'existència d'un sol déu —AL·LÀ— al qual cal sotmetre's totalment amb el convenciment ferm que ell donarà suport i consol a tots els que hi creuen. A

[98] Vegeu SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 91.

[99] La ciutat, quan MAHOMA hi emigrà, s'anomenava YAṮRIB. Després fou coneguda amb el nom de MADĪNA AL-NABI —Ciutat del Profeta— o simplement MEDINA.

[100] Els àrabs eren politeistes i adoraven arbres, pedres, etc.

[101] Recordem que el seu nom àrab és ABŪ-AL-QĀSIM MUḤAMMAD IBN 'ABD-ALLĀH IBN 'ABD AL-MUṬṬALIB IBN HĀŠIM.

més, aquesta religió cal imposar-la per la força als pobles pagans, en particular als politeistes; així doncs, la defensa de l'islam necessita d'un exèrcit poderós. AL·LÀ acollirà després de la mort tot aquell que mori a la Guerra Santa. Sota la bandera *or* i *verd* del profeta, l'islam conquereix els territoris que van de l'ÍNDIA a la península IBÈRICA, incloent-hi el nord d'ÀFRICA i el sud–est d'ITÀLIA. Així tot el món conegut —PÈRSIA, MESOPOTÀMIA, SÍRIA, EGIPTE, GRÈCIA, BIZANCI, etc.— cau dessota el domini de l'islam. L'any 629 MAHOMA retorna gloriosament a LA MECA, on mor d'unes febres l'any 632. Però la llavor de la Guerra Santa ja s'ha plantat i els seus successors derroten l'exèrcit bizantí l'any 635; dos anys més tard, desfan l'imperi persa, posant fi a la dinastia dels sassànides. L'any 642 aconsegueixen incorporar EGIPTE a l'imperi islàmic, cada cop més extens. A les darreries del segle VII han conquerit el nord d'ÀFRICA i el 711 TĀRIQ creua l'estret de GIBRALTAR[102] i, a la batalla de GUADALETE, aniquila l'exèrcit visigot comandat pel rei RODERIC [?–711]. S'estengueren ràpidament per gran part de la península IBÈRICA i traspassaren els PIRINEUS amb la intenció de conquerir també els pobles d'EUROPA, començant per la submissió de FRANÇA. Tanmateix, el mandatari franc CARLES MARTELL [685–741] els va derrotar a POITIERS. Feia cent anys que havia mort MAHOMA. Era l'any 732. L'aixecament del setge de CONSTANTINOBLE i la batalla de TALAS, que frenà la invasió vers l'ORIENT, juntament amb les disputes polítiques i religioses internes, van conduir al trencament de la unitat islàmica l'any 755, quan els pobles del MARROC aconseguiren separar-se dels àrabs de l'EST. S'establiren dos califats: l'un a CÒRDOVA i l'altre a BAGDAD.[103]

El successor de MAHOMA, el califa OMAR, fixà la capital a DAMASC, una ciutat de SÍRIA més propera a la MEDITERRÀNIA que no pas LA MECA. S'inicia així l'any 635, sota el regnat dels califes ortodoxos [632–661][104] i els omeies [661–750],[105] l'època de la Guerra Santa, en què el fet cultural preocupava poc, malgrat que, en estendre les fronteres, es va aconseguir posar en contacte pobles de cultures ben diverses.[106] A més, es va imposar l'àrab com a llengua comuna de l'islam, atès que l'ALCORÀ calia llegir-lo necessàriament en àrab.

El camí de Bagdad. La dinastia omeia fou substituïda, no pas pacíficament, pels abbàssides. Aquesta nova dinastia es preocupà de potenciar la cultura àrab i, per

[102] Recordem que el penyal de GIBRALTAR rep el nom de l'expressió àrab *Yebel al-Tāriq* que significa precisament penyal de TĀRIQ.

[103] Aquest darrer califat ben aviat es dividiria en dos: el del CAIRE i el de BAGDAD.

[104] Els califes ortodoxos van ser quatre.

[105] Els califes omeies van ser catorze.

[106] El nivell cultural àrab anterior a l'islam era certament molt baix i, pel que sembla, no disposaven pas de xifres numèriques. En tot cas, usaven un sistema xifrat basat en les lletres [vegeu REY PASTOR, J.–BABINI, J. [1984], I, 157].

aconseguir-ho, intentà de comprendre la cultura i la ciència dels pobles i civilitzacions que conqueria.[107] Aquest inici de la cultura i la ciència àrabs, entenent-les com aquelles que es desenvolupaven i s'expressaven en la llengua de l'ALCORÀ i, a voltes, en persa, tingué lloc sota el regnat del segon califa abbàssida ABŪ ǦA'FAR AL-MANṢŪR [?–775], a BAGDAD,[108] la nova capital de l'islam, que havia fundat a l'IRAK l'any 762. Amb ell, a més, començà la construcció d'una nova Alexandria, una obra ambiciosa que seria seguida pels seus successors HĀRŪN AL-RAŠID [766–809][109] i el seu fill AL-MA'MŪN [786–833].[110] Aquest nou centre cultural, la *casa de la Saviesa*,[111] contenia un observatori astronòmic, una important biblioteca, i centres de traducció, ensenyament i recerca.

Des del primer moment —és a dir, des de l'època mateixa d'AL-MANṢŪR— arriben a BAGDAD les obres astronòmiques dels matemàtics indis i, en particular, les taules trigonomètriques. L'any 773 les trobem ja traduïdes del sànscrit a l'àrab. És difícil de saber exactament si el que arribà fou algun dels *Siddhanta* o les obres d'astronomia de BRAHMAGUPTA. No obstant això, sembla innegable que, al segle VIII, els matemàtics àrabs havien entrat ja en contacte amb el sistema posicional decimal amb zero dels matemàtics i astrònoms indis.[112]

Sigui com sigui és indubtable, però, que al segle IX els erudtis àrabs coneixien el sistema indi de numeració amb zero. L'any 825 MOḤAMMAD IBN MŪSÀ AL-ḪWĀRIZMĪ [?–~840][113] elabora un petit opuscle en el qual posa de manifest la vàlua del sistema de numeració. Solament ens n'ha arribat una traducció llatina, probablement d'ADELARD de BATH [~1075–1160], amb el títol, gens suspecte, de *Liber Algorismi de numero Indorum.*[114] D'aquesta traducció se'n coneix solament una

[107] Els omeies, però, ja havien destruït el poc que quedava dempeus del Museu d'Alexandria i de la seva biblioteca. El lligam entre l'islam i la ciència àrab podem trobar-lo breument descrit a TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, **IV**, 474–486, 487–496.

[108] El segle VIII constitueix l'inici de la fi de l'imperi islàmic i alhora, com observa YOUSCHKEWITCH [YOUSCHKEWITCH, A. P. [1976], 2–3], l'inici de canvis realment importants en l'ordre polític.

[109] És el califa del cèlebre llibre *Les mil i una nits*. Se'l coneix com a AARÓ, el JUST.

[110] Era un excel·lent coneixedor de qüestions d'astronomia: el van preocupar el valor del meridià terrestre i la manera de calcular-lo.

[111] *Bayt al-Hikma.*

[112] Vegeu IFRAH, G. [1981], 492, o bé YOUSCHKEVITCH, A. P. [1976], 5–6. Vegeu també SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 167.

Cal recordar que, malgrat la dificultat que suposa saber amb exactitud els numerals usats per BRAHMAGUPTA [~628], sabem sense cap mena de dubte que coneixia el zero, que el considerava i manejava com un nombre més, oferint-nos-en les regles operatives. [Vegeu COLEBROOKE, H. T. [1817], 339–340.]

[113] Vegeu GILLISPIE, C. C. [1970–80], VII (1973), 358–365.

[114] "El llibre d'AL-ḪWĀRIZMĪ sobre els nombres indis" ens assabenta de l'existència d'un text anterior, potser de la fi del segle VIII [YOUSCHKEVITCH, A. P., [1976] nota 4, 165]. Malgrat que la

còpia incompleta del segle XIII.[115]

Abans d'entrar a fer una anàlisi detallada del text, vull indicar un fet realment notable. D'acord amb el que podem deduir dels textos llatins del segle XII, AL–H̲WĀRIZMĪ ens ofereix uns signes numèrics, la grafia dels quals correspon a la que s'usava a l'ÍNDIA.[116] No obstant això, no fou pas aquesta grafia la que s'imposà a BAGDAD; la grafia dels signes utilitzats pels musulmans d'Orient prové, potser, de l'AFGANISTAN,[117] on els guarismes indis havien sofert una lleu modificació. Segons SMITH, les formes dels dos sistemes de guarismes —l'indi i l'àrab— són:

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ० : sànscrit

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ : àrab,

malgrat que, a IFRAH, hi podem trobar una anàlisi més aprofundida.[118] A la història de la matemàtica de CARL B. BOYER trobem la genealogia dels nostres dígits seguint, però, el text de MENNINGER.[119] Més endavant, en el *camí de Còrdova*, ens plantejarem una petita curiositat sobre aquesta qüestió.

Deixant de banda, però, l'aspecte estrictament evolutiu dels símbols i acceptant les reserves que posa de manifest ALLARD,[120] sembla d'interès fer una síntesi de l'aportació d'AL–H̲WĀRIZMĪ, a través del text d'ADELARD del segle XII, atès que

traducció llatina s'ha atribuït normalment a aquest erudit anglès, A. ALLARD n'estableix els pros i els contres [vegeu ALLARD, A. [1992], vii–x].

[115] No és pas la meva intenció d'aprofundir l'anàlisi dels possibles textos existents, llurs diferències i analogies i llurs traduccions, atès que disposem d'una obra excel·lent en ambdós sentits [vegeu ALLARD, A. [1992]].

[116] Tanmateix, és difícil justificar la procedència dels símbols i molt més encara afirmar sense reserves que són els mateixos que va usar AL–H̲WĀRIZMĪ, atès que el text de què disposem és força posterior. En aquest sentit és d'interès l'estudi realitzat per A. ALLARD [vegeu ALLARD, A. [1987]], que m'ha donat a conèixer el professor J. SAMSÓ del Departament de filologia semítica de la Universitat de Barcelona.

[117] Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1951, II, 72. Vegeu també l'explicació que dóna G. IFRAH, a IFRAH, G. [1981], 493–495.

[118] Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 70; IFRAH, G. [1981], 490, 493 i 495.

[119] Vegeu BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 307; MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 418–419.

[120] Vegeu ALLARD, A. [1992], i-v, i, en particular, v: "Contràriament a l'opinió que semblava acceptada definitivament, el text d'ADELARD de BATH és un text híbrid i no pas una traducció fidel del text àrab d'AL–H̲WĀRIZMĪ".

probablement és el primer text aritmètic en què trobem de forma detallada els *algorismes de càlcul*, usant el sistema decimal posicional indi amb zero.[121] El text d'ADELARD comença amb les paraules:

> AL–H̲WĀRIZMĪ diu: he vist que els indis utilitzen *nou* lletres per a tots els seus nombres gràcies a una disposició *pròpia* i inventada per ells... Usen solament nou lletres, la representació de les quals és 9 8 7 6 5 4 3 2 1.[122]

Tot seguit ens informa que, per tal d'expressar el següent de 9, cal escriure 10, i per tal d'expressar el seu doble, triple, etc., cal posar 20, 30, etc. I diu:

> Fem servir un petit cercle que s'assembla a la lletra O, el 0, per posar de manifest que, a la posició de les unitats, no hi ha res.[123]

La raó per la qual AL–H̲WĀRIZMĪ vol ensinistrar-nos en aquest nou sistema és

> La seva simplicitat i concisió ... en aritmètica, tant si els nombres que s'usen són grans com si són petits, tant si els volem multiplicar com dividir, sumar o restar.[124]

D'antuvi ens ensenya a llegir els nombres expressats en el nou sistema de xifres i, després d'indicar-nos que la lectura cal fer-la en grups de tres començant per la dreta, ens facilita l'exemple següent:

> El nombre 1 180 703 051 492 863 es llegeix: 1 de mil mil mil mil mil (5 vegades), cent de mil mil mil mil (4 vegades) i vuitanta de mil mil mil mil (4 vegades) ... quatre-cents noranta-dos mil i vuit-cents seixanta-tres.[125]

Després ens ensenya a sumar i restar amb aquestes paraules:

> Quan vulguis sumar dos nombres posa'ls un dessota l'altre de forma que els del mateix rang es corresponguin. Després sumes els de cada rang, començant pels de l'ordre més baix, les unitats, les desenes, etc. Quan en una posició aconsegueixis una desena, aleshores posaràs una unitat més a l'ordre següent [les desenes, centenes, etc.] ... Això ho faràs amb tots els ordres fins al darrer.[126]

[121] Vegeu també SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 76, 119 i 124.
Recordem que el text de BHĀSKARA, traduït a l'anglès a COLEBROOKE, H. T. [1817], 4–12, on trobem els algorismes de càlcul, és tardà: del segle XII. És a dir, de la mateixa època que la primera traducció llatina del *Liber Algorismi de Numero Indorum*.

[122] A. ALLARD ens adverteix de la forma diferent de representar les xifres entre els diversos autors [vegeu ALLARD, A. [1992], 1 i 252].

[123] ALLARD, A. [1992], 3.

[124] ALLARD, A. [1992], 1.

[125] ALLARD, A. [1992], 6.

[126] ALLARD, A. [1992], 7.

No ens n'ofereix cap exemple. En canvi, quan explica la resta comença dient que "cal posar damunt el més gran dels dos nombres" i "restar posició a posició".

> Si no és possible —és a dir, si el nombre de la posició superior no és prou gran per tal de poder-li treure el nombre de la posició inferior— agafes una unitat de la posició superior de l'ordre següent i la converteixes en deu, aleshores li treus allò que et calgui treure-li i poses el que et queda a la posició superior. Si no et queda res, hi poses un zero com abans. Ara bé, si a la posició superior de l'ordre següent hi ha un zero, te'n vas una posició, més enllà, agafes una unitat de la posició superior i la converteixes en deu de l'ordre immediatament inferior. Aleshores agafes una unitat d'aquestes 10 i fas com abans hem indicat, deixant-ne 9 en la posició segona, on n'havies posat deu.[127]

Els únics dos exemples que ens ofereix aquest text, ben senzills, són:[128]

$$\boxed{\begin{array}{r}6422\\3211\end{array}} \quad \text{i} \quad \boxed{\begin{array}{r}1144\\144\end{array}}$$

En canvi, en un text usualment atribuït a JOAN DE SEVILLA [$\sim$1140],[129] hi trobem exemples força més interessants:[130]

[127] ALLARD, A. [1992], 7–8.

[128] Són senzills en el sentit que, a cada posició, el número de la posició superior és més gran que el número de la posició inferior i, per tant, com diu el text: "del 6 en treus 3 i a la quarta posició te'n queden tres; del 4 en treus dos i a la tercera posició te'n queden dos, etc La representació de la diferència [en el primer exemple] és doncs: 3211". L'altre exemple és curiós en el sentit que "al nombre mil cent quaranta-quatre li traiem el nombre CXL quatre". Hi ha una barreja constant entre les xifres de nova implantació i les romanes [vegeu ALLARD, A. [1992], 7–8].

[129] Al marge de les crítiques d'ALLARD, ja esmentades [ALLARD, A. [1992], 83–88, 249–251].

[130] En el primer dels tres exemples, el text és el següent: "Volem substreure tres mil sis-cents quatre de 12 mil vint-i-cinc. La figura següent ens dóna la posició d'aquests nombres $\boxed{\begin{array}{r}12\,025\\3\,604\end{array}}$. Ara caldria treure el nombre inferior en la darrera posició —és a dir, el tres— del nombre superior —és a dir, el dos— i això és impossible. Així, caldrà que prenguem una unitat de valor deu de la posició següent i que l'afegim al dos que teníem. Obtindrem 12. D'aquests dotze en traiem tres i en queden nou. Els posem en el lloc del 2. Ara n'hauríem de treure sis de la posició superior, però, atès que hi ha un zero, cal que agafem una unitat del nou de la posició següent; en queden vuit i la portem, amb valor 10, al lloc del zero. D'aquests deu en traiem sis i en queden quatre que posem al lloc del zero... Finalment la figura del nombre que resulta és $\boxed{8\,421}$" [ALLARD, A. [1992], 83–84]. Ho podem simbolitzar així:

$$\begin{array}{r}12\,025\\3\,604\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r}{}_{1}2\,025\\3\,604\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r}9\,025\\\cancel{3}\,604\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r}8\,{}_{1}025\\\cancel{3}\,604\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r}8\,425\\\cancel{3}\,\cancel{6}04\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r}8\,421\\\cancel{3}\,\cancel{6}\cancel{0}\cancel{4}\end{array} .$$

Observem que AL-<u>H</u>WĀRIZMĪ, segons el text d'ADELARD del segle XII, efectua la resta d'esquerra a dreta.

12 025	10 000	200 000
3 604	15	2

Després de la resta, exposa la divisió per 2. Ara, però, ens aconsella de començar per la dreta:

> Divideix les unitats per dos; si el nombre d'unitats és senar, divideix el que puguis i te'n quedarà una que posaràs en la forma 30/60. Després divideixes per dos les desenes; si és senar, agafes la meitat del parell i la poses al seu lloc i dónes el valor cinc a la meitat del que et queda i l'afegeixes a la posició inferior; etc.[131]

Seguidament, dóna els dos algorismes més importants: el de la multiplicació i el de la divisió. Primerament, cal aprendre la taula de multiplicar dels nombres que hi ha entre l'u i el nou, els uns amb els altres. La millor manera d'entendre el seu algorisme és seguir l'exemple que ens ofereix. Volem multiplicar 2326 per 214. Primerament cal posar-ho en la forma:

		2	3	2	6
2	1	4			

Aleshores cal multiplicar 214 per 2, sent 2 la xifra més alta del multiplicand. Això dóna 428. Ho posem de la forma:

4	2	8	3	2	6
	2	1	4		

Diu "un cop feta la multiplicació per la xifra més alta del multiplicand, l'esborrem i la substituïm pel producte sencer".[132] Després desplacem el multiplicador un lloc cap a la dreta. Ara multipliquem 214 per 3:

$$214 \times 3 = 642$$

i ho col·loquem al lloc del 3; això fa que hàgim de sumar 64 a 28. S'obté:

4	9	2	2	2	6
		2	1	4	

Ara multipliquem 214 per 2. Obtenim 428. Ho posem al lloc del 2. S'obté:

[131] ALLARD, A. [1992], 9.
[132] ALLARD, A. [1992], 10.

4	9	6	4	8	6
			2	1	4

i, finalment, al lloc del 6, hi col·loquem 214 × 6 = 1284. Obtindrem finalment,

497 764.[133]

La divisió també l'exemplifica. Volem dividir 46 468 per 324. Aquesta operació l'ofereix amb tota mena de detalls. L'explicació, com és usual en ell, no es fa algorísmicament, sinó amb paraules. En definitiva, però, fa el següent:[134]

Posem:	4 6 4 6 8 3 2 4	
Atès que 324 només cap un cop dins 464, posem un 1 a la primera posició del divisor. S'obté:	1 4 6 4 6 8 3 2 4	
Multipliquem 324 × 1 = 3214. Restem ordenadament. S'obté:	1 1 4 0 6 8 3 2 4	
Desplacem el divisor un lloc a la dreta i, atès que 324 cap 4 vegades dins 1406, posem un 4 a la segona posició del divisor. S'obté:	1 4 1 4 0 6 8 3 2 4	
Multipliquem 324 × 4 = 1296. Restem ordenadament. S'obté:	1 4 1 1 0 8 3 2 4	
Desplacem el divisor un lloc a la dreta i, atès que 324 cap 3 vegades dins 1108, posem un 3 a la tercera posició del divisor. S'obté:	1 4 3 1 1 0 8 3 2 4	
Multipliquem 324 × 3 = 972. Ho restem de 1108. Dóna 136 que col·loquem al seu lloc. Finalment, s'obté:	1 4 3 1 3 6 3 2 4	quocient romanent divisor.

Aleshores diu: "resulta així el que correspon a un dels nombres, que és 143 i 136

[133] ALLARD, A. [1992], 9–12.
[134] ALLARD, A. [1992], 13–15.

parts de 324".[135] D'aquesta manera apareixen els nombres fraccionaris àrabs, però, en aquest estudi, no ens hi ficarem.[136]

Així doncs, al segle IX, els matemàtics islàmics d'ORIENT coneixien ja el sistema decimal posicional. L'havien assimilat directament de pobles que, al seu torn, l'havien après a través de la influència dels textos matemàtics de l'ÍNDIA. No obstant això, els numerals eren representats de forma lleugerament diferent.[137] Però el sistema decimal posicional amb zero havia entrat de ple a la matemàtica àrab desenvolupada a l'entorn cultural de BAGDAD, i, en particular, a la "Casa de la Saviesa".[138]

Ens hem entretingut fent una descripció prou detallada de l'obra d'AL-H̱WĀRIZMĪ, de la qual, com ja hem dit, no en disposem de cap manuscrit original, i l'únic coneixement que en tenim prové d'un fragment llatí del segle XIII, la traducció i el traductor del qual han estat discutits i analitzats amb tota mena de detalls. Hi ha d'altres textos que també fan referència als numerals indis i a l'algorísmia associada. Algunes d'aquestes aritmètiques àrabs s'han conservat en col·leccions europees de manuscrits orientals.[139] Així, per exemple, del segle XI disposem d'un text de KUSYĀR AL-GILĪ [971-1029],[140] d'AN-NASAWĪ [~1030][141] i d'AL-KHARKHI [~1020].[142] D'altres textos anteriors, però descoberts més recentment, són els d'AL-UQLĪDISĪ [~950][143] i d'ABU'L WAFĀ [~980].[144] Aquestes obres "pretenen de mostrar que, al costat del càlcul que s'efectua, "esborrant figures fetes en taules de sorra", els calculistes àrabs disposaven també d'una tècnica de càlcul "sense l'operació d'esborrar que consistia a passar rat-

[135] ALLARD, A. [1992], 14-15.

[136] Vegeu l'excel·lent text: BENOIT, P.-CHEMLA, K.-RITTER, J. [1992], 223-302, en particular 291-302.

[137] Vegeu les taules d'evolució dels numerals que ens ofereixen ALLARD, A. [1987], 40-41, i IFRAH, G. [1981], 513-517.

[138] Vegeu IFRAH, G. [1981], 491-500, i, en particular, 498-499.

[139] Vegeu BERGGREN, J. L. [1986], 31-48.

[140] *Kitāb fi oṣul Ḥisāb al-Hind* ("Tractat de les operacions de càlcul amb xifres índies"). Se'n conserva un manuscrit a la Biblioteca d' 'Aya Sofia d'Istanbul [vegeu MAZAHERI, A. [1975]]. Cal situar-lo al principi del segle XI.

[141] *Al-muqui' fi-l-ḥisāb al-Hindī* ("Llibre que dóna raó de tots els coneixements de l'aritmètica índia") [vegeu SUTER, H. [1906-1907] o MEDOVOÏ, M. I. [1963]].

[142] *Kitāb al-Kafī fi-l-ḥisāb* ("Llibre suficient pel que fa a l'aritmètica") [vegeu WOEPCKE, F. [1853], 1-6; HOCCHEIM, A. [1878].] Aquest matemàtic àrab és, a voltes, anomenat simplement AL-KARAĞI o bé AL-KARH̱I.

[143] SAIDAN, A. S. [1966]. Aquest manuscrit *Kitāb al-Fuṣūl fi al Hisāb al-Hindī* ("El llibre dels capítols de l'aritmètica índia") cal datar-lo l'any 952 o 958.

[144] KARPINSKI, L. C. [1965], 51. Aquest text és realment notable atès que anava dirigit als comerciants. El seu títol és suggerent "Tractat del que els cal saber als escribes i marxants per tal de calcular". *(Kitāb fi mā yaḥtaǧu ilayhī al-kuttāb min'ilm al-ḥisāb).* Fou elaborat entre el 961 i el 976, però mai no ha estat estudiat a fons pels historiadors.

lla i a escriure a la línia superior els resultats intermedis"."[145] En el text d'AL–GILĪ se'ns proposa l'operació següent:

Volem multiplicar tres-cents vint-i-cinc per dos-cents quaranta-tres:[146]

٣٢٥ ٢٤٣

S'efectua de la forma següent:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrc} 325 & & 6\;325 & & 72325 & & 72925 & & 76925 & \\ 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{crcrcrcrcr} & 77725 & & 77765 & & 78765 & & 78965 & & 78975 \\ \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 & \Longrightarrow & 243 \end{array}$$

El nombre 78 975 és el que volíem calcular.[147]

Al segle XII trobem el text d'AL–HASSAR;[148] al XIII, el d'IBN AL–BENNA [1256–1321][149] i, finalment, al segle XV, el d'AL–KALÇADI.[150] L'algorísmia índia s'havia consolidat, doncs, a la matemàtica islàmica oriental.[151] Una pregunta que ens podem plantejar és: fou gràcies a aquesta consolidació que passà a EUROPA?

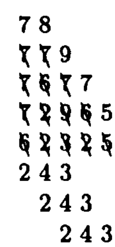
El camí de Còrdova. JOAN VERNET, en referir-se a la discussió que s'ha establert en relació amb la personalitat del traductor del text d'AL–H̱WĀRIZMĪ, diu:

> La personalitat del traductor ens és ben indiferent atès que els testimonis més antics i fidedignes són, com veurem, hispànics, i atès també que la consolidació de

[145] IFRAH, G. [1981], 499.

[146] MAZAHERI, A. [1975], 79–80.

[147] MAZAHERI, A. [1975], 79–80. De fet, ells ho feien en forma de torre i calia anar passant ratlla. Observem que l'operació és: multiplico el 3 de les centenes de dalt per 2 i el resultat el col·loco al seu lloc. Ara multiplico el 3 de les centenes de dalt per 4 i el resultat, que és 12, el col·loco al seu lloc. Aleshores l'u del dotze cal sumar-lo al sis d'abans i s'obté 72. Ara multiplico el tres de dalt per 3 i dóna 9. S'obté 72 925. Ara repetim el procés amb el dos de dalt i correm el 243 un lloc a la dreta. Després amb el cinc, corrent prèviament el 243 un altre lloc a la dreta.



[148] SUTER, H. [1901].

[149] MARRE, A. [1865].

[150] WOEPCKE, F. H.[1858].

[151] SAIDAN, A. S. [1978], 3–5 i 19.

les xifres "àrabs" i del sistema de numeració posicional es va efectuar en aquesta península.[152]

És el que he anomenat el camí de CÒRDOVA. Sabem que el pas dels omeies als abbàssides fou molt cruent. Solament un omeia de la línia successòria aconseguí escapar a la matança. Fou ABD AL-RAḤMĀNI I [756–788], nét d'HISĀM [724–743]. Va aconseguir refugiar-se a la península IBÈRICA i fundà la dinastia de CÒRDOVA.[153] Ens trobem, precisament, a la meitat del segle VIII, molt pocs anys abans del naixement, a ORIENT, d'AL-H̱WĀRIZMĪ.

Però, com diu YOUSCHKEVITCH, "la recerca científica esdevingué també una de les preocupacions dels nous mandataris cordovesos i una de les tasques que *s'aconseguí* desenvolupar a la península IBÈRICA i a la part més occidental de l'ÀFRICA del NORD".[154] Cal indicar que, de fet, CÒRDOVA fou, des de la seva fundació l'any 756, políticament independent de BAGDAD. Durant el regnat d'ABD AL-RAḤMĀN I s'establiren, però, contactes comercials, polítics i culturals entre aquest nou assentament islàmic i BAGDAD que tot seguit donarien els seus respectius fruits.[155] El seu successor, ABD AL-RAḤMĀN II [821–852], no va escatimar cap mena d'esforç per tal que CÒRDOVA, si més no en l'àmbit cultural, estigués a l'alçada de EL CAIRE i BAGDAD. L'any 929 l'emir de CÒRDOVA, ABD AL-RAḤMĀN III [912–961] es proclamà califa, establint la ruptura definitiva amb BAGDAD. Alhora, a CÒRDOVA, es consolidava "una autèntica cultura marroquina; era una cultura fruit de l'empelt d'aspectes hispanoromans, araboorientals provinents del MAGRIB i la seva cultura *morisca* i *berber*, i dels jueus".[156] El seu successor, AL-HIŠĀM II [965–1013], va dedicar importants esforços financers a la compra i reproducció, per mitjà de copistes, d'obres importants que es podien trobar en d'altres països islàmics o sotmesos a l'imperi de l'islam. Així, en poc temps, durant el seu regnat, aconseguí formar una biblioteca autènticament gegantina amb 400 000 manuscrits, obtinguts d'ALEXANDRIA, EL CAIRE, BAGDAD i DAMASC.[157]

Malgrat el descontentament polític creixent i el progrés del feudalisme que feren perdre autoritat al califat de CÒRDOVA, no es va interrompre el desenvolupament de la cultura arabohispànica, que aconseguiria assolir el seu màxim esplendor als segles XI

[152] VERNET, J. [1978], 60–61.

[153] Vegeu SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 94, o bé JOSEPH, G. G. [1991], 301-303.

[154] YOUSCHKEVITCH, A. P. [1976], 12.

[155] Trobem els primers matemàtics arabohispànics: AḤMAD IBN NASAR [?–944] i MASLAMA ABŪ-L-QĀSIM [† 1007]. A l'obra de SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1954], 17-35, s'hi detalla una llista força completa i detallada dels matemàtics àrabs dels segles VIII al XV, indicant-ne el seu lloc d'origen, tant si és oriental com occidental.

[156] YOUSCHEVITCH, A. P. [1976], 12.

[157] De fet, solament els textos clàssics acumulats a CONSTANTINOBLE se'ls feren escàpols.

i XII.[158] Aquesta cultura fou reconeguda, al segle XIII, pel rei cristià ALFONS X, dit *el Savi*, [1221–1284]. Amb el desig d'aixecar el nivell cultural de la població catòlica de la península IBÈRICA, que es trobava dessota el domini reial, féu traduir, al castellà, els llibres que contenien els coneixements d'astronomia assolits per àrabs i jueus. A més, es va envoltar de col·laboradors d'aquestes dues cultures. El segle XIII fou notable gràcies a les excel·lents recerques matemàtiques del marroquí IBN AL–BANNĀ', que assoliren una gran qualitat.

Aquest desvetllament cultural, juntament amb la situació lingüística de la península IBÈRICA, —autèntic gresol de llengües, comparable solament amb el de SICÍLIA— convertiren la península IBÈRICA en un lloc excepcional. Hi convivien el llatí, l'àrab, l'hebreu, els romanents de les antigues llengües visigòtica i ibèrica. Al segle XIII, a més, es consolidaren les llengües pròpies dels diversos nuclis peninsulars: castellà, català, galaicoportuguès, etc. Tot això propicià la formació de nuclis d'estudi i recerca i, sobretot, d'escoles de traductors. Les més notables foren les de TOLEDO i la de BARCELONA, amb una forta vinculació amb RIPOLL.

És precisament en aquest context que retrobem les xifres indoaràbigues, però amb una grafia diferent de l'oriental. Aquestes xifres, més semblants a les índies devanagari que a les del califat islàmic oriental, s'han batejat amb el nom de *xifres gubar*. La situació es complica amb l'aparició, dels *àpexs* de Gerbert i les possibles correlacions que se'n deriven. Així és com ens trobem davant un autèntic petit trencaclosques: el de l'evolució del sistema de numeració indoàrabic pel que fa a les *figures* des del seu naixement, no gaire clar, fins a la seva consolidació a OCCIDENT. No és, doncs, estrany que SÁNCHEZ PÉREZ digui:

> Davant l'existència del sistema indi, el sistema gubar i el sistema dels àpexs, tots els orientalistes i matemàtics moderns han tret conclusions tan contraposades pel que fa a l'origen de les xifres i a la transformació de les seves figures, que val més prescindir de les seves opinions.[159]

Tot seguit ens ofereix un reguitzell d'autors i de llurs opinions de forma sintètica: des dels que sostenen que les xifres àrabs són d'origen grec, passant pels que diuen que són el resultat dels àpexs de Gerbert, fins als que sostenen que són índies, però que

[158] Recordem que, al segle XII, mor a BARCELONA el matemàtic jueu ABRAHAM BAR ḤIYYA, conegut com a ABRAHAM IUDAEUS SAVASORDA [† 1136]. Havia elaborat una enciclopèdia matemàtica i havia traduït importants obres àrabs al llatí. Neixen a CÒRDOVA el filòsof, jurista, metge i astrònom ABŪ-L-WALĪD MUHAMMAD IBN RUŠD [1126–1198], conegut com a AVERROIS, i el gran pensador jueu MOŠÉ BEN MAIMON [1135 – 1204], conegut com a MAIMÒNIDES, la influència del qual és encara avui fruit d'estudi. El geògraf i cartògraf AL–IDRĪSĪ [1100 – 1166], format a CÒRDOVA, s'establí, en canvi, a la cort normanda de PALERM. Fou un dels pares de la cartografia matemàtica de l'època [1154]. A SEVILLA, ǦĀBIR IBN AFLAH assoleix un important desenvolupament de la trigonometria.

[159] Vegeu SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 111–112.

han sofert transformacions, i àdhuc aquells que sostenen que tenen orígens geogràfics diferents.[160]

En farem una síntesi breu inspirada en J. VERNET i G. MENÉNDEZ PIDAL.[161] D'ara endavant entendrem per *ḥurūf al-gubar* —les lletres fetes a la pols— aquells signes que es feien en una pissarra de pols o sorra. S'usaven per fer els càlculs i hom solament conservava els resultats parcials o totals que eren útils per al càlcul final que *se cercava*. De fet, la paraula àrab *gubar* és germana de la paraula llatina *pulvis*, que usaven els romans en els seus *àbacs*.[162] Aquesta és una de les raons per la qual S. GANDZ, seguint la coneguda teoria de WOEPCKE, defensa el doble origen de les xifres índies: l'occidental —o *gubar*— seria d'origen romà, mentre que l'oriental —o *devanagari*— seria d'origen indi. Però la situació no és, en absolut, tan simple.[163]

No obstant això, és difícil de sostenir una afirmació com aquesta, atès precisament que les xifres dels àbacs de sorra eren esborrades i, per tant, és difícil de conèixer-ne la

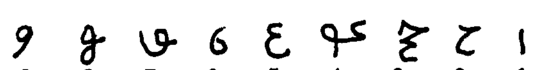
[160]La bibliografia esmentada per l'autor és força completa: WOEPCKE, F. [1863]; ROUSE BALL, W. W. [1889], edició de 1960, 184–185; CARRA de VAUX, B. [1917] i COLIN, G. S. [1933], entre d'altres.

No obstant això, és suficient fer una lectura atenta de GANDZ, S. [1931], per tal d'adonar-se de la complexitat de la qüestió.

[161]MENÉNDEZ PIDAL, G. [1959], VERNET, J. [1978], 61–66.

[162]Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 157–158, i la nota 3. Segons aquest autor, sembla que *àbac* vindria de la paraula grega *ἄβαξ*, d'origen semític, i voldria dir sorra, atès que els primers àbacs haurien estat taules de sorra. [Vegeu COROMINAS, J. [1980], I, 1, entrada "àbac".]

[163]Vegeu IFRAH, G. [1981], 501–503, i, en particular, el comentari d'un comentarista del segle XVIII d'un text àrab del segle XIV —del qual IFRAH ofereix la versió àrab i la traducció francesa. Hi trobem una descripció de les xifres gubar en forma mnemotècnica. El text diu:

> El prefaci tracta (de la forma de les figures) dels signes indis (tal com han estat establerts per la nació índia), que són nou figures que s'ha convingut de formar com segueix (a saber:
>
> un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit, nou
>
> donant-los la forma següent):
>
> 
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1,
>
> les quals s'usen preferentment a casa nostra (és a dir, entre els orientals); o bé de la forma següent:
>
> 
>
> 9 8 7 6 5 4 3 2 1,
>
> que s'usen molt poc (entre nosaltres), si bé el seu ús és més freqüent entre els occidentals.

forma.[164] Tampoc no tenim pas gaire informació sobre el funcionament de l'àbac fins que, al segle X, GERBERT d'ORLHAC [945–1030] va elaborar unes regles del càlcul de l'àbac de les quals, sortosament, en tenim coneixement. BOECI [480–524] introdueix els *àpexs* —unes fitxes marcades amb lletres de l'alfabet grec o amb d'altres signes. S'usaven per fer càlculs. Ja no calia, doncs, recórrer a les taules de sorra. Això, si més no, és el que afirma GUILLEM de MALMESBURY [† 1142], quan diu que BOECI fou "el primer a prendre l'àbac als sarraïns i a establir-ne les regles d'ús, regles que solament els abaquistes, amb la suor del seu front, aconseguien conèixer. No obstant això, aquests àbacs són posteriors a BOECI i anteriors a GERBERT".[165]

Sembla indiscutible que, l'any 967, GERBERT d'ORLHAC —nomenat papa amb el nom de SILVESTRE II, l'any 999— havia visitat la península IBÈRICA. I que fou a BARCELONA on va aprendre els nous numerals.[166] És molt probable que no arribés a tenir coneixement del zero ni a copsar-ne la importància. Això podria explicar-se precisament pel fet que usava l'àbac de les columnes. Situava els *nou caràcters* en fitxes, que els seus deixebles anomenarien *àpexs*. Aquests numerals serien batejats amb els noms d'*igin, andras, ormis, arbas, quimas, calctis, zenis, temenias, celentis* i *shipos*.[167]

Ens trobem, doncs, amb l'àbac de les columnes o dels arcs. Cada tres columnes

---

> *Nota bene*. El sentit de la frase de l'autor és, evidentment, que ambdues han estat instituïdes pels indis, i això és ben cert. El docte CHANDCHŪRĪ, en el seu comentari de la MURSHIDAH, diu: *I, a la segona manera de formar els signes que analitzem, se l'anomena índia, atès que ha estat establerta per la nació índia.* Fi de la cita. Tanmateix, distingim les unes de les altres per la seva denominació: les primeres les anomenem *índies*, i les segones *ghobārī*; i, aquestes darreres, s'anomenen *ghobārī* perquè els nostres avantpassats tenien el costum d'estendre farina damunt d'una tauleta i aleshores dibuixar-hi les figures [WOEPCKE, F. [1863], 63 i IFRAH, G. [1985], 501, nota].

Tot seguit el comentarista ofereix les xifres gubar i ho fa amb l'esmentat text mnemotècnic.

[164] SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 121–130, ens ofereix una panoràmica de l'evolució de les xifres gubar des del segle X fins al segle XVI, amb una detallada referència de la seva procedència.

[165] Vegeu GANDZ, S. [1927], 310, i VERNET, J. [1978], 61. Segons MENÉNDEZ PIDAL, les referències de BOECI a l'àbac constitueixen una interpolació posterior [MENÉNDEZ PIDAL, G. [1959], 182].

De fet els trobem en una geometria del segle XI que s'atribueix a BOECI; en canvi, a la seva aritmètica del segle VI no n'hi ha cap rastre.

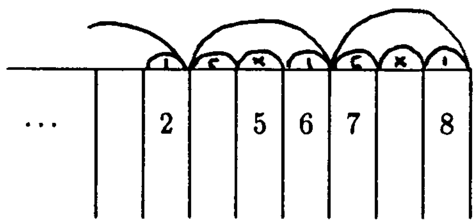
Sobre la validesa de la geometria atribuïda a BOECI, vegeu les paraules de P. TANNERY [TANNERY, P. [1887], edició de 1988, 128–129]: "La qüestió de BOECI, com s'ha anomenat, avui està resolta del tot. És difícil creure en l'autenticitat de la geometria que porta el seu nom i encara ho és més mantenir-la amb arguments admissibles".

[166] Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, 74.

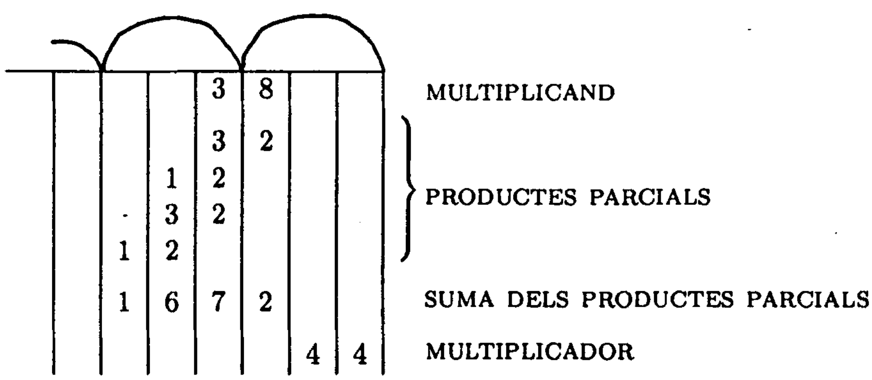
[167] SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, 75, diu "aquests termes mai no han estat explicats satisfactòriament, si bé semblen d'origen semític". El nom d'àpex és, probablement, del segle XII.

Voldríem fer notar dos fets que ens semblen d'interès. D'una banda, els símbols atribuïts als noms dels àpexs:

s'unien amb un arc.[168] S'hi col·locaven fitxes amb uns caràcters diferents dels romans i fins aleshores desconeguts. L'expressió de la figura adjunta, que per simplificar he escrit en numerals actuals, representaria el nombre 2 056 708. El zero no fóra, doncs, necessari.[169]



L'àbac era usat per realitzar les operacions aritmètiques de sumar, restar, multiplicar i dividir. Així, per exemple, per tal de multiplicar 3800 per 44, calia procedir de la forma següent:[170]



igin; *arbas*; *zenis*;
andras; *quimas*; *temenias*;
ormis; *calctis*; *celentis*

i *shipos*, per tal de designar el lloc buit, són un entremig dels numerals indis i dels gubar, si bé s'assemblen molt més als gubar.

D'altra banda, és força curiós de notar que els noms que se'ls atribueixen són ben diferents dels noms indis —esmentats amb anterioritat al final del paràgraf titulat *Els Siddhānta*— *eka*, *dvi*, *tri*, *catur*, *pañca*, *ṣaṭ*, *sapta*, *aṣṭa*, *nava*,— força més semblants, malgrat el seu origen sànscrit, als actuals.

[168]Se l'anomenava l'àbac dels *arcus* o dels *arcus pitagoricus*.

[169]Durant els segles XI, XII i XIII, el zero no figurava entre els *àpexs*, que es reduïen a nou. N'hi havia prou deixar un buit a la columna. Aconsello la lectura pausada de MILLÀS VALLICROSA, J. [1931], edició de 1983, 110–164.

[170]GERBERT, de fet, dóna vint regles per tal de dur a terme la multiplicació [vegeu MILLAS VALLICROSA, J. [1931], edició de 1983, 142–143].

La divisió es basa en la *multiplicació complementària* que hem trobat ja en la literatura índia,[171] i que "tendeix a referir i acostar el multiplicador a 10:

$$a\,b = 10\,b - (10 - a)\,b,$$

o sigui, per exemple, $9 \times 7 = 10 \times 7 - (10 - 9) \times 7 = 70 - 7 = 63$."[172]

D'ací GERBERT passa a la ***divisió per diferències***, o sia, a la divisió complementària, simètrica de la multiplicació que hem indicat. Tendeix també a referir el divisor a 10, obtenint romanents cada volta més petits amb els quals opera com amb el dividend original, i a la fi suma els quocients successius. Així, la fórmula en què basa el mètode és:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{10} + \frac{a}{10} \cdot \frac{10 - b}{b}.$$

Un cop obtingut el numerador del segon membre de la suma opera tal com ho féu amb a, i així successivament. Per exemple:

$$\begin{aligned}
\frac{900}{8} &= \frac{900}{10} + \frac{900}{10} \cdot \frac{10-8}{8} &&= 90 + \frac{180}{8};\\
\frac{180}{8} &= \frac{180}{10} + \frac{180}{10} \cdot \frac{10-8}{8} &&= 18 + \frac{36}{8};\\
\frac{36}{8} &= \frac{30}{10} + \frac{30}{10} \cdot \frac{10-8}{8} + \frac{6}{10} &&= 3 + \frac{12}{8};\\
\frac{12}{8} &= \frac{10}{10} + \frac{10}{10} \cdot \frac{10-8}{8} + \frac{2}{10} &&= 1 + \frac{4}{8};\\
\frac{4}{8} &= &&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

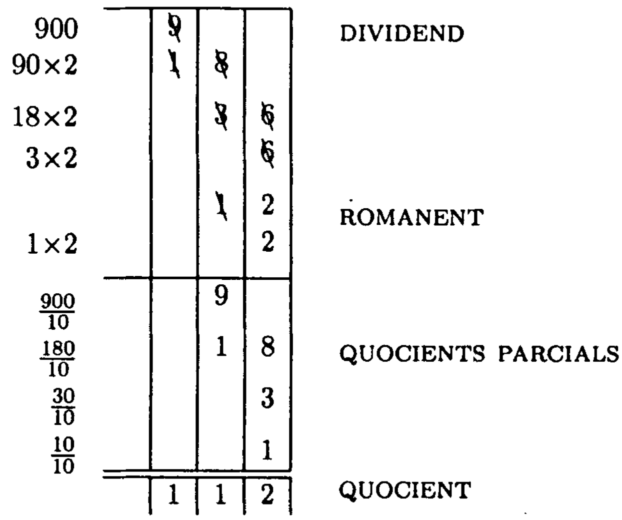
El quocient que li'n resulta és: $90 + 18 + 3 + 1 + \frac{1}{2} = 112\,\frac{1}{2}$".[173] Així doncs, la tècnica amb l'àbac de Gerbert per dividir 900 per 8 és la següent:[174]

[171] Vegeu nota 31.

[172] MILLÀS VALLICROSA, J. [1931], edició de 1983, 143.

[173] MILLÀS VALLICROSA, J. [1931], edició de 1983, 144.

[174] La dificultad per entendre la transposició rau en el fet que els *decimals no eren coneguts* —i no ho foren fins a la fi del segle XVI. Per tant, no podem dividir 36 per 10. Només podem dividir 30 per 10. S'obté el 3, però en resten 6. Cada un dels quocients exactes en les divisions per 10 —90, 18



i en queden 4.

Les xifres àrabs eren conegudes a la península IBÈRICA, però no tenim gaire documents de l'època en què GERBERT va visitar BARCELONA per tal de poder saber quina era la forma de les xifres utilitzades. És possible que GERBERT intentés d'unificar les noves xifres amb el sistema dels *àpexs* de l'àbac ja existent.[175] Aquest pas el donaria, però, JUDÀ, dit *el barceloní*.[176] És difícil de creure que "els àpexs de BOECI, que són del segle XI, poguessin haver donat origen als numerals indis, que eren coneguts des del segle X"[177] i, potser fins i tot, d'abans.

D'aquesta forma ens trobem, doncs, en una situació d'interrelació de contextos i mètodes; d'una banda, la poca agilitat del sistema numèric romà per a càlculs llargs i complexos; d'una altra, l'aparició del sistema de procedència índia amb nou xifres [i, eventualment, el zero] i, per fi, d'un *algorisme* de càlcul, l'*àbac* o *taula de sorra* que, sent originalment semita, havia tingut acceptació a la MEDITERRÀNIA grecoromana. Aquesta combinació de fets té, a la península IBÈRICA, les conseqüències ja

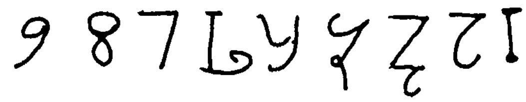
i 3— són quocients acceptables que cal sumar. Un cop aconseguit un quocient, per tal de calcular el següent, hem de multiplicar-lo per 2. Així el quocient 3 ens proporciona un 6, que cal sumar al 6 que ha quedat després de treure'n 30 —per això hem passat ratlla al 3 del 36. Ara hem de sumar els dos sisos. S'obté el 12. Només podem considerar el 10, que dividit per 10, donarà 1. És el darrer quocient que, multiplicat per 2, dóna 2. El dos que queda del 12 en treure'n 10 i aquest nou 2 sumen 4. És el valor del romanent. Aleshores, sumant tots els quocients parcials, obtindrem 112, que és el valor del quocient de la divisió. El romanent és 4.

[175] MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 325: aquesta, si més no, és l'opinió d'e PIHAN, A. P. [1860].

[176] És possible veure un bon grapat d'*àpexs* i de les formes que presenten a SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 114–116, o IFRAH, G. [1981], 506, que en comenta, a més, la procedència i la data.

[177] SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. [1949], 116.

indicades.[178] L'única qüestió que no queda gaire clara és saber si GERBERT va tenir coneixement de les nou xifres aràbigues durant la seva estada a la península IBÈRICA; dit altrament, s'havien consolidat ja les xifres *gubar*, donant lloc a un sistema de grafisme? La resposta és afirmativa. Sabem que, a mitjan segle X, les xifres gubar eren ja conegudes. Això ho posa de manifest l'existència del *Còdex Vigilanus*; el text més antic conegut d'origen europeu. Fou copiat l'any 976 per un monjo del convent d'ABELDA, que es deia VIGILA.[179] La figura de les xifres és la següent:[180]



És, doncs, possible que GERBERT n'hagués pogut tenir coneixement durant la seva estada a la península atès que, com hem dit, la seva arribada cal situar-la a l'any 967. "No és, doncs, improbable —diu Smith— que hagués pogut veure el manuscrit del 976".[181]

A partir d'aleshores les xifres de tipus *gubar* s'estenen arreu. Una còpia dels *Orígens* d'ISIDOR de SEVILLA [† 636],[182] datada l'any 992, conté també les xifres gubar sense el zero.[183]

A més, com fa notar G. MENÉNDEZ PIDAL, la situació a la península ibèrica era força rica i els textos "espanyols oblidats" són dignes de ser tinguts en compte. Així, ens parla del còdex de Sant Eulogi de Còrdova. Aquest còdex fou reclamat, catorze anys després de la mort per degollament d'EULOGI esdevinguda l'any 859, per ALFONS III d'ASTÚRIES [?–910], dit *el Gran*. Així fou com arribà a OVIEDO, sent dipositat a la catedral fins que, per ordre de FELIP II [1527–1598], fou traslladat a la Biblioteca de El Escorial. El foli 55 conté un petit tractat sobre la dimensió de terres, amb una nota marginal en què es computen les distàncies en anys, mesos i dies. Les quantitats estan escrites amb uns caràcters estranys, alguns dels quals tenen

[178] Recordem que, en aquest període, l'ensenyament de l'aritmètica formava part del *quadrivium* i és un fet que anem retrobant en qualsevol obra docent de l'època.

[179] Aquest text es conserva a la Biblioteca de El Escorial, document I.2.

[180] IFRAH, G. [1981], 504. Vegeu MENÉNDEZ PIDAL, G. [1959], 190–191.

Hi ha textos manuscrits àrabs un segle anteriors [874–888] en què també podem trobar-les. En un manuscrit del 970 a SHIRAZ i en una inscripció àrab d'Egipte, datada l'any 961. [Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, 75]. Són textos que no fan altra cosa que complicar l'embolicada situació.

[181] Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, 75–76.

[182] La seva obra havia intentat de transmetre sistemes de càlcul de manuals més antics. Aquesta tradició fou seguida per d'altres erudits entre els quals cal posar de relleu BEDA, dit *el Venerable* [† 375] [Vegeu IFRAH, G. [1981], 69–71.]

[183] La primera moneda que els conté és una moneda siciliana, acunyada l'any 1138.

valor absolut i d'altres posicional.[184]

Aquesta mena de manuscrits eren actes de tipus notarial. Res no ens permet de conjecturar que ningú s'adonés de les possibilitats que, des d'un punt de vista algorítmic, comercial o matemàtic, facilitava el nou sistema de numeració.[185]

* * *

El cercle quedaria així tancat. La qüestió que se'ns planteja ara és una altra. Com s'imposà el sistema de numeració a EUROPA? Quina fou la preocupació que havia de moure a aquesta implantació? La resposta no és tampoc immediata, però se'ns presenta força més clara. Podem dir que s'ha vist prou sòlidament que el coneixement dels numerals indoàrabs arribà als convents. No tant de l'estudi dels textos matemàtics àrabs, atès que aquesta era una activitat que no es duia a terme en els convents, sinó més aviat a través del contacte que tenien amb els comerciants que, al seu torn, mantenien un contacte fluid amb les zones orientals de la MEDITERRÀNIA. Tanmateix, l'àbac era suficient per tal que els comerciants poguessin resoldre les qüestions numèriques que els era necessari d'efectuar en les seves transaccions comercials. El seu esclat no fou, doncs, tan espectacular com podríem creure avui. Caldria esperar un cert temps de solatge i de consolidació per tal que, al segle XIII, amb l'establiment de les primeres universitats, la implantació de les traduccions de textos grecs, àrabs i jueus realitzats a les escoles de traductors, els estudiosos s'adonessin de la importància de les xifres gubar i, en definitiva, del sistema de numeració indi.[186] Sense oblidar, però, el paper transcendental que els comerciants tindrien en aquesta implantació, i això en un doble vessant. D'una banda, en l'intercanvi i interrelació comercial; d'una altra com a possibles usuaris dels textos d'aritmètica europeus dels segles XIII i ulteriors, en una situació anàloga a la que s'havia donat amb els textos àrabs d'Orient, ja esmentats.

3 La consolidació índia i la situació a Bizanci

A l'anàlisi feta fins ara hem posat de manifest principalment dos fets: les xifres indoaràbigues provenen indiscutiblement de l'ÍNDIA i són el fruit d'un complex procés de càlculs i de desenvolupament d'eines i tècniques astronòmiques i matemàtiques que trobem en textos independents per llurs orígens. Aquesta evolució es consolidà en un

[184] Aquest text, sempre que les anotacions siguin d'EULOGI, seria anterior al còdex Vigilanus. És, però, molt menys acurat.

[185] Vegeu el text de MENÉNDEZ PIDAL, G. [1959], 193–195.

[186] Ja hem indicat que, el text d'AL-ḪWĀRIZMĪ és, de fet, una traducció del segle XII o XIII.

període que hem de situar entre els segles III aC i III dC i portà a la notació dels nombres naturals en un sistema format per deu *guarismes*, entre els quals trobem el zero. A més s'aconseguí desenvolupar *algorismes numèrics* per tal d'efectuar les quatre operacions elementals i també l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques. L'intercanvi que possibilitaven les caravanes de comerciants, que unien ORIENT amb OCCIDENT, les conquestes d'ALEXANDRE, dit *el Gran* i l'establiment de nuclis grecs en diversos llocs d'ORIENT —des de la frontera més occidental de l'ÍNDIA fins a ALEXANDRIA— van fer que alguns erudits arribessin a tenir coneixement d'aquesta meravellosa troballa de la civilització índia. Però això, no comportà cap avenç notable en la matemàtica ni tampoc en la cultura popular. Finalment, la irrupció de l'islam amb la seva Guerra Santa va permetre de consolidar amb més força aquest intercanvi de cultures.

De fet, en els nuclis culturals potenciats pels califats de BAGDAD i CÒRDOVA, els erudits d'Orient i d'Occident, respectivament, van trobar un recer dels esdeveniments polítics i socials que els permetia d'aprofundir l'estudi de les arts i de les ciències i alhora potenciar l'intercanvi de coneixements. A l'orient islàmic es desenvolupà una astronomia i una matemàtica importants, hereves de les índies i, en part, de les gregues. Així, a partir del segle IX, ens trobem amb textos notables d'astronomia i àlgebra i amb d'altres, d'aritmètica, que incorporen amb naturalitat les xifres del poble indi. A OCCIDENT, en canvi, la situació és diferent. Els nuclis heterogenis que es formen a la península IBÈRICA, fruit del diàleg i la confrontació de les creences i coneixements dels àrabs del MAGRIB, dels jueus i dels cristians, esdevenen centres d'atracció dels erudits de l'EUROPA continental i d'ANGLATERRA. A les escoles de traductors de TOLEDO i de BARCELONA-RIPOLL, aquests homes notables hi descobreixen tresors que, de forma encara molt incipient, incorporen a les seves obres. Són obres enciclopèdiques que contenen els coneixements del *quadrívium* que s'ensenya a les escoles monàstiques. Aquestes aportacions, malgrat la importància que tenen en la situació cultural de l'EUROPA dels segles X al XII, no tindran gaire transcendència en el desenvolupament de la matemàtica del Renaixement.

Així doncs, per tal de poder conèixer les primeres conseqüències *pròpiament dites de la cultura europea cristiana*, cal fer una anàlisi de l'evolució de les xifres indoaràbigues i dels seus algorismes a l'EUROPA dels segles XII i XIII . Serà precisament aquesta evolució la que, amb el pas dels segles, portarà OCCIDENT a incorporar els numerals indoaràbics[187] i, més tard, el desvetllament d'una ciència que, al segle XVII,

[187]Val a dir que un dels fets més notables de la consolidació definitiva dels numerals indoaràbics a OCCIDENT fou el fet que permetia l'expressió *decimal* dels nombres *fraccionaris* o no enters i, més important encara, que els *algorismes operatius* en el cas dels nombres enters positius i dels nombres *fraccionaris* positius fossin els mateixos. Aquesta nova conquesta de l'esperit humà cal situar-la, com dèiem en la nota 12, a finals del segle XVI i a començaments del XVII. Fou l'obra, entre d'altres, de MICHAEL STIFEL [1486–1567], FRANÇOIS VIÈTE [1510–1603], SIMON STEVIN [1546–1620], JOHN

trobarà la línia de sortida cap a l'època actual. Aquesta anàlisi constitueix la batalla entre els *abaquistes* —defensors de l'àbac romà com a eina de càlcul— i els *algorismistes* —defensors de la tècnica, provinent de l'ORIENT, de les xifres indoaràbigues i dels seus algorismes de càlcul. Aquesta confrontació, que tingué lloc abans de la consolidació del RENAIXEMENT, perdurà durant els dos primers segles del RENAIXEMENT.

De tot això en parlarem més detingudament. Ara recordem sintèticament que l'EDAT MITJANA és el període de la història europea que es troba entre l'any 476 —que fixa la caiguda de ROMA en mans dels *bàrbars* de nord— i el 1453 —que fixa la caiguda, en mans dels turcs, de CONSTANTINOBLE, la capital fins aleshores imbatuda de l'IMPERI ROMÀ d'ORIENT. Matemàticament, segons C. B. BOYER,[188] aquest període s'inicia l'any 1436. És un any paradigmàtic que correspon a la mort d'AL-KASHI [† 1436], el darrer matemàtic àrab notable, i al naixement de JOHANN MÜLLER [1436–1476], conegut amb el nom de REGIOMONTANUS.[189] És a dir, l'any 1436 fixa el final de la matemàtica escrita en àrab i hebreu i dóna pas a la matemàtica de l'Europa cristiana que escriu en llatí.[190] És també en aquesta època que EUROPA comença a refer-se de la Pesta Negra i de la seqüela d'efectes destructors que havien sembrat, en tot el continent, la por i la desesperança . Calia fer quelcom per tal que *desastres* d'aquesta mena no es tornessin a repetir mai més. És també el moment en què l'home occidental incorpora la *imprempta dels caràcters mòbils* i el *paper.*[191] Això va permetre de produir gran quantitat de textos, i va fer possible la seva difussió d'una forma més àmplia, tot respectant-ne l'original.[192] La majoria dels textos editats estaven escrits originalment en llatí.[193] Nosaltres ens fixarem en els exemplars d'aritmètica editats fins l'any 1482.

És també en aquesta època quan OCCIDENT inicia la seva gran aventura marinera que l'haurà de portar a fixar les rutes de navegació més agosserades de tots els

NAPIER [1550–1617], i JOHANNES KEPLER [1571–1630]. Tanmateix SAIDAN, A. S. [1966], 484–487 defensa que les fraccions decimals es troben ja a l'obra d'AL-UQLĪDISĪ, datada l'any 952 [vegeu també SAIDAN, A. S. [1978], 110, 114, 117 i 259].

[188] BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 319.

[189] És la forma llatinitzada del seu lloc de naixement, KÖNIGSBERG.

[190] A poc a poc, però, s'aniran imposant les llengües dels diferents pobles d'EUROPA: l'alemany, l'anglès, el castellà, el català, el francès, el galaicoportugués, l'italià, etc.

[191] Tots dos havien vingut de la XINA, potser gràcies als viatges de MARCO POLO [1254–1324]. Recordem que la primera obra editada —la BÍBLIA GUTENBERG— està datada entre els anys 1447 i 1456, L'edició no fou pas duta a terme per JOHANN GENSFLEISCH [~1400–1468], conegut amb el nom de GUTENBERG, sinó pel seu soci JOHANN FUST.

[192] Ja durant els segles XIII i XIV s'havien establert les indústries dels copistes, sobretot als ducats italians i a certs indrets d'ALEMANYA i dels PAÏSOS BAIXOS actuals.

[193] A finals del segle XV es disposava ja de més de 30 000 edicions d'obres molt diverses i de temes força variats. Molt poques eren, de fet, matemàtiques.

temps.[194] És, en definitiva, el despertar d'EUROPA que CARL JACOBI [1804–1851] sintetitza en el seu *Discurs sobre Descartes* amb les paraules:

> Finalment, la cristiandat, cansada de resar davant l'ossam dels seus màrtirs, va acudir en massa a la tomba del seu Salvador, per tal de comprovar per segona vegada que el sepulcre era buit i que Crist ja havia ressucitat. Aleshores es va despertar del torpor de la mort. Europa va tornar a l'activitat de l'existència. Fou un renaixement febril de les arts i de les ciències. Les ciutats van tornar a florir. Cimbaue va descobrir de bell nou l'art, aleshores apagat, de la pintura i Dant, el de la poesia. Aleshores alguns esperits més audaços, com ara Abelard i Sant Tomàs d'Aquino, van gosar d'introduir en el catolicisme les idees de la lògica d'Aristòtil i així fou com crearen la filosofia escolàstica... A la fi va arribar l'alba i Europa, novament tranquil·litzada, va començar a treure profit dels seus dons i a crear el coneixement de la naturalesa, basat en la *independència del pensament*...[195]

Aquest RENAIXEMENT tindrà lloc amb la reaparició del saber i amb el floreixement de les grans universitats d'Europa i, a la vegada, amb la segona difusió de les xifres aràbigues. Però serà ara quan la divulgació d'aquestes xifres trobarà acollida en la totalitat de la societat —comerciants, erudits, astrònoms, matemàtics, navegants, etc.— i quan s'establirà la consolidació de les seves formes definitives.[196]

Però no fora pas possible d'entendre aquesta eclosió que fou el RENAIXEMENT sense fer una anàlisi a l'EUROPA occidental dels segles XII, XIII i XIV , de la lenta implantació dels numerals indoaràbics i dels seus algorismes. Cal aclarir com influiren, en tota aquesta història de progrés, les aportacions dels matemàtics àrabs d'Orient i com hi contribuí la tasca de les escoles ibèriques de traductors.

* * *

Hem vist que, al segle XII, l'algorísmia índia s'havia consolidat a la matemàtica islàmica oriental i ho havia fet en els textos matemàtics, pròpiament dits, i en els

[194] Sembla indiscutible que d'altres pobles havien aconseguit fer llargs viatges per mar, però no amb un objectiu comercial sinó polític, de conquesta i expansió: les rutes marítimes cap a ORIENT són pròpies del RENAIXEMENT. Vegeu BOORSTIN, D. J. [1983], edició castellana de 1989, 151–287; en particular, 163–174, on exposa la tasca viatgera dels portuguesos duta a terme per la visió i gosadia del príncep ENRIC DE PORTUGAL, dit *el Navegant* [1394–1460].

És ben cert que els camins a l'ORIENT per terra s'havien iniciat molt abans culminant, al darrer quart del segle XIII, amb els viatges de MARCO POLO.

[195] Citat a IFRAH, G. [1985], edició castellana de 1987, 294.

[196] Vegeu IFRAH, G. [1981], 510-511. Ens ofereix taules en les quals trobem l'evolució de les xifres en manuscrits que van des del segle XII fins el segle XVI i, més recentment, en obres editades, des del segle XV fins el segle XIX.

textos aritmètics adreçats als escribes i marxants. És, però, difícil fixar els nexes existents entre aquestes obres i el desenvolupament europeu.

També hem vist que, als segles X i XI, els nuclis de traductors de la península IBÈRICA i els nuclis conventuals més notables coneixien les deu xifres indoaràbigues. No és, però, gens clar que influïssin en la matemàtica, entesa com a ciència, atès que en aquests nuclis el desenvolupament matemàtic no era gaire important. Es reduïa a simples anècdotes i a introduccions força elementals. Tanmateix, hi hagué alguna excepció entre els erudits d'origen magrebí. La resta es trobava en una situació de perplexitat entre l'ús de l'àbac i de l'algorísmia vinguda d'ORIENT.

No obstant això, les escoles de traductors traduïen, de l'àrab al llatí, textos d'astronomia i matemàtica procedents de la cultura islàmica de BAGDAD i així, al segle XII, existia ja una traducció del *De Numero Indorum* d'AL-ẔWĀRIZMĪ i també de la seva obra algèbrica *Al-jabr wa'l muqābalah*.[197] És a dir, al segle XII hi havia ja prou material per tal que els numerals indoaràbics i els seus algorismes s'imposessin a EUROPA, però no fou pas així com van arribar a ser coneguts i a imposar-se.

En aquest intercanvi entre la cultura de l'islam i els estudiosos europeus hi intervenen sens dubte LES CROADES. Recordem que, dessota el signe de la Creu, la cristiandat —sota la direcció espiritual i política del VATICÀ— es plantejà la *recuperació* de TERRA SANTA, que es trobava sotmesa a l'islam. Calia, al preu que fos, alliberar el nucli espiritual de la cristiandat de la dominació *impia* de l'islam. Així, des de l'any 1095 que, sota l'ampara papal d'URBÀ II [~1040–1099], papa des de 1088 a 1099, s'inicià la primera croada dels exèrcits europeus per tal de recuperar la TERRA SANTA, fins al 1291 que la cristiandat, abandonà definitivament aquesta conquesta insensata i molt costosa, els cavallers de la cristiandat van intentar de trencar, per la força de l'espasa, la dominació àrab de JERUSALEM. La reconquesta de TERRA SANTA no s'aconseguí, però el que sí s'aconseguí, en canvi, fou un intercanvi cultural que resultà molt enriquidor per als pobles d'EUROPA.[198] El progrès que havia intentat GERBERT d'ORLHAC, dos o tres segles abans, infructuosament, vindria del contacte amb els pobles *infidels* de l'islam. Així, a més del contacte constant que es mantenia

[197] Sembla que la primera traducció llatina d'aquesta obra cal datar-la l'any 1145 i atribuir-la a ROBERT de CHESTER, [~1140], però la traducció més coneguda és la de GERARD de CREMONA [1114–1187], de 1170. Aquest s'havia desplaçat a TOLEDO, a la península IBÈRICA, per tal d'aprendre l'àrab i poder estudiar l'obra de PTOLEMEU, però després es va dedicar a traduir de l'àrab al llatí. Entre les seves traduccions —se n'hi atribueixen més de 85— hi trobem els *Elements* d'EUCLIDES, a partir d'una traducció àrab de ṮĀBIT IBN-QURRA [?–~901],que millorava sensiblement la que ja havia fet ADELARD de BATH. L'any 1175 traduiria l'*Almagest*. [Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 200–205; BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 322–326.]

[198] A la tercera croada, RICARD I, rei d'Anglaterra, dit *Cor de Lleó*, establí una treva de trenta anysque permetia l'accés dels pelegrins a TERRA SANTA alhora que reconeixia i confirmava el domini musulmà de JERUSALEM.

a la península IBÈRICA, les croades havien de permetre un flux i reflux entre el món cultural musulmà i la barbàrie dels nobles cristians, a través de la MEDITERRÀNIA. El contacte fou cada cop més ampli i fluid i va permetre un notable augment dels coneixements de la cristiandat en matemàtica, astronomia, medicina i altres ciències naturals, i en filosofia.

Els croats a JERUSALEM i els erudits a les escoles de traductors de la península IBÈRICA estaven assentant les bases necessàries que finalment aconseguirien, en un interval de temps força llarg, vèncer els *abaquistes*.

* * *

Però, mentre a EUROPA la situació de l'algorísmia s'anava imposant i desenvolupant lentament, a l'ÍNDIA s'havia consolidat definitivament i de forma indiscutible. Les obres de matemàtica i astronomia de BRAHMAGUPTA [?598–~660] i de BHĀSKARA [~1114–~1178] havien incorporat aquest sistema, alhora que oferien els algorismes de càlcul de forma clara i acurada. A més, els numerals indis trobarien ressó en un matemàtic bizantí. De fet, la cultura matemàtica i científica bizantina constitueix un pòsit molt petit de la cultura pagana grega. Amb la clausura justiniana de les escoles filosòfiques d'Atenas, els estudiosos es van dispersar i van buscar asil en pobles menys rígids i menys dogmàtics. Això els portà a establir-se a SÍRIA, a PÈRSIA i a d'altres llocs, entre els quals trobem les ciutats d'ALEXANDRIA, també en autèntic declivi, i CONSTANTINOBLE, coneguda amb anterioritat amb el nom de BIZANCI. Aquestes capitals són testimoni "d'un feble corrent de la vella tradició grega i del fet que aquesta, amb importants limitacions i mancances, es mantingué a l'IMPERI ROMÀ d'ORIENT fins a finals de l'EDAT MITJANA".[199] Com ja hem indicat amb anterioritat, és indubtable que, en aquestes seus, la cultura de procedència grega va rebre la influència d'altres cultures més orientals. Al segle XIII trobem un text que, pel que fa al tema dels numerals indis, permet de sostenir aquesta afirmació. És l'obra de MAXIMUS PLANUDES [?1255–?1310], un frare grec que fou ambaixador de l'emperador ANDRÒNIC II [1258–1332] a VENÈCIA, i que establí vincles d'intercanvi entre ORIENT i OCCIDENT.[200]

Per tal de posar de manifest aquesta consolidació oriental de les xifres indoaràbigues a l'ÍNDIA i a l'IMPERI BIZANTÍ i de poder cloure així, de forma definitiva, la situació fora d'EUROPA, farem una ràpida lectura del capítol II de l'obra de BHĀSKARA, *El Lilāvati*, que podem datar l'any 1150, i donarem una lleugera informació del text de MAXIMUS PLANUDES.

[199] BOYER, C. B. [1968], edició de 1986, 321.
[200] GILLISPIE, C. C. [1970–1980], XI (1975), 18.

El Lilāvati.[201] Aquesta obra és "essencialment un llibre d'aritmètica"[202]. És la primera part del *Siddhānta-siromani* —"Fi del sistema"— que consta de quatre parts ben diferenciades.[203] Aquesta obra és essencialment —ell mateix ho reconeix al final de la segona part— un text on recull i condensa tot el material que va poder recopilar dels seus predecessors BRAHMAGUPTA, SRIDHARA i PADMANABHA.[204]

El títol *Lilāvati* és el nom de la filla de BHĀSKARA, la qual segons la llegenda va restar soltera —un fet que era molt greu en la cultura índia de l'època— a causa d'una predicció fallida del seu propi pare.[205] El pare, entristit per l'esdeveniment nefast provocat, en part, per la seva pròpia predicció, decidí, en recompensa, fer que el nom de la seva filla esdevingués immortal. Així, per tal de pal·liar la desgràcia de la seva filla i el seu propi error, li va dedicar el primer llibre, d'una de les seves obres més notables. Com ja hem indicat, el text és força complet i el llibre I, o *Lilāvati*, conté la part aritmètica.[206]

Com és usual en els textos matemàtics indis és un llibre concís que, en la tradició posterior, trobem descompartimentat en 13 capítols "que no foren pas fixats per

[201] Vegeu COLEBROOKE, H. T. [1817], 1-127 ; especialment, 4-12.

[202] SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 79.

[203] Són: el *Lilāvati*, el *Vija-Ganita* que tracta d'àlgebra, el *Gōladhyāya*, relatiu a l'esfera en relació amb el globus celeste, i el *Crahaganita* que presenta matemàticament l'estudi dels planetes.

[204] Les obres d'aquests dos darrers s'han perdut totalment i això ens impossibilita de conèixer quines són les aportacions degudes a BHĀSKARA.

[205] La llegenda conta que, quan BHĀSKARA fa efectuar l'horòscop de la seva filla, va aconseguir esbrinar l'únic dia i hora que farien possible que el seu casament fos feliç. BHĀSKARA féu construir un rellotge d'aigua —una copa de volum ben determinat amb un orifici pel qual es podia escolar l'aigua lentament de tal manera que la darrera gota d'aigua determinés el dia i l'hora del casament. La impaciència de LILĀVATI, quan tot estava preparat ja per a les noces, la feu atansar-se al rellotge per veure com s'anava acostant el moment tant de temps esperat i ara tan desitjat. No s'adonà, però, que li queia una de les perles del vestit, que obturà el forat del rellotge i estroncà així el pas del temps. L'hora fixada passà i LILĀVATI ja no pogué casar-se. I per mor del destí, que havia predit el dia i hora de les seves noces, restà soltera. [Vegeu, per exemple, BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 287.]

[206] En aquest estudi, deixarem de banda totes les qüestions aritmètiques que estan directament vinculades amb la presentació dels sistema decimal posicional indi i els seus algorismes de càlcul. Això fa que esdevingui repetitiu, atès que gairebé totes les aritmètiques del període anterior al segle XV són força semblants en la seva estructura. Aquesta obra, però, n'és, como ho serà també le de FIBONACCI, una excepció. Deixarem de banda, però, la resta de qüestions aritmètiques que s'hi desenvolupen, com ara: la regla de tres simple i composta, el càlcul d'interessos, les fraccions, les progressions, l'aritmètica com a eina de càlcul de certs problemes de geometria, les permutacions. Moltes 'aquestes qüestions les retrobarem a les aritmètiques del segle XV però, como ja hem indicat, les deixarem de banda. Tampoc no ens endinsarem en el problemes de tipus *indeterminat*, tant de primer com de segon grau, malgrat la importància que tenen en la matemàtica índia, des del segle VI i, potser, fins i tot d'abans.

l'autor, sinó pels escribes posteriors".[207] La introducció posa de manifest que està dedicat al déu GAṆEṢA —amb cap d'elefant i cos d'home— i després diu:

> Proposo un text en què els processos de càlcul són fàcils, encantador per la seva elegància, d'una gran perspicàcia i breu en les paraules, suau i alhora correcte, i plaent a qui vol aprendre.[208]

El capítol II del *Lilāvati* —l'únic capítol al qual dedicarem la nostra atenció,[209]— s'inicia novament amb una pregària al déu GAṆEṢA

> Jo et saludo GAṆEṢA, resplendent com un lotus blau i pur; que et delites amb el moviment tremolós del serpent fosc que perpètuament trobem enrotllant-se en la teva gola.[210]

Després dóna "nom als llocs de les figures d'acord amb els que han usat els antics, uns llocs que creixen regularment d'acord amb la proporció deu".[211]

La presentació sistemàtica dels vuit algorismes de càlcul —suma, resta, multiplicació i divisió, quadrat d'un nombre, arrel quadrada, cub i arrel cúbica— constitueix la *secció II* d'aquest capítol.[212]

La regla de la suma i la resta. "Estimada i intel·ligent LILĀVATI, si ets hàbil sumant i restant, digue'm la suma de dos, cinc, trenta-dos, cent noranta-tres, divuit, deu i cent, un cop ajuntats; i el que queda, quan la suma la treus de deu mil".[213]

BHĀSKARA és succint. Ens dóna l'enunciat de cada operació i la solució respectiva: 360 i 9640. Tanmateix, els comentaristes indis del text de BHĀSKARA han suggerit certs algorismes per tal de fer mecàniques les operacions de sumar i restar. Així en un comentarista posterior, sense data, trobem el següent algorisme de la suma:[214]

---

207 SRINIVASIENGAR, C. N. [1967], edició de 1988, 81.

208 COLEBROOKE, H. T. [1817], 1. Aquest comentarista ens aclareix els termes sànscrits del text i el fet que "l'encant de l'elegància" és un terme doblement intencionat perquè fa referència alhora al text i a la seva filla LILĀVATI.

209 També dedicarem dues línies a un paràgraf del segon llibre, nomenat *Vija-Ganita*, que tracta d'àlgebra.

210 COLEBROOKE, H. T. [1817], 4.

211 Els trobem aleshores amb els noms sànscrits que ja coneixem: *eka, dasa, shata, sahasra, ayuta,...* [Vegeu la denominació de les potències de 10 del *Yajur-Veda*.]

212 Com ja hem indicat, H. T. COLEBROOKE ens ofereix, en notes aclaratòries, les paraules en sànscrit de l'original que nosaltres, com ell en anglès, traduïm lliurament al català.

213 COLEBROOKE, H. T. [1817], 5.

214 Vegeu la nota 5 de COLEBROOKE, H. T. [1817], 5, o bé SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 91. No obstant això, els historiadors sostenen que antigament la suma, basada en l'àbac, es feia d'esquerra a dreta i passant ratlla. Així, per exemple, segons H. EVES [EVES, H. [1953], edició de

Suma de les unitats:	2, 5, 2, 3, 8, 0, 0	···	20
Suma de les desenes:	3, 9, 1, 1, 0	···	14
Suma de les centenes:	1, 0, 0, 1	···	2
Suma de les sumes:	··· ··· ···	···	360

BHĀSKARA tampoc no ofereix cap informació relativa a la resta. S'ha dit, però, que la regla que seguien els matemàtics indis era:

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$ [215]

Aquesta metodologia, com veurem, la retrobem en els textos aritmètics occidentals posteriors.[216]

La regla de la multiplicació. Aquí BHĀSKARA és força més informatiu. D'antuvi, distingeix entre multiplicand, multiplicador i producte[217] i ofereix diverses regles.

Com veurem tot seguit, les aplica només a un sol exemple: 135 multiplicat per 12. Tanmateix, però, la metodologia concreta que desenvolupa en cada un dels quatre casos és vàlida en general i, per tant, pot ser aplicada a qualsevol altre multiplicació concreta. El que ofereix BHĀSKARA són, doncs, quatre *algorismes* de multplicació.[218]

1992, 223], per tal de sumar 65 391, 3279 i 10 420, procedien d'acord amb l'esquema següent: D'antuvi, sumavem les xifres o guarismes de l'esquerra: $6+1=7$. El resultat el posavem dessota de la ratlla a la columna del 6 i del 1. Després sumavem els guarismes de la columna següent, des de l'esquerra: $5+3+0=8$. El resultat el posaven al costat del 7. A continuació feien la suma $3+2+4=9$ i la col·locaven a la dreta. Ara li tocava el torn als guarismes 9, 7 i 2: $9+7+2=18$. El 8 el posavem a la dreta del 9, però l'1 s'havia de sumar al nou: $1+9=10$. Això els obligava a passar ratlla al 9 i, al seu lloc, posar-hi el zero. Però ara calia sumar l'1 al 8. Novament havien de passar ratlla al 8 i posar-hi un 9. Finalment sumavem $1+9+0=10$ i procedien com abans, fent les correccions oportunes. Així obtenien 79 090.

$$\begin{array}{r} 6\,5\,3\,9\,1\\ 3\,2\,7\,9\\ 1\,0\,4\,2\,0\\ \hline 7\,\cancel{8}\,\cancel{9}\,8\\ 9\,0 \end{array}$$

[215] TAYLOR, J. [1816], 7.

[216] Comparem-la amb la que hem trobat al *De Numero Indorum* d'AL-H̱WĀRIZMĪ.

[217] COLEBROOKE, H. T. [1817], 5, nota 7. Els dígits es comencen a considerar per l'esquerra. Així per exemple, a la regla 1 [vegeu, a la pàgina següent, la segona manera de representar-la], si féssim servir un algorisme anàleg a l'actual, escriuríem:

$$\begin{array}{r} 135\\ 12\\ \hline 135\\ 270\\ \hline 1620 \end{array}$$

[218] COLEBROOKE, H. T. [1817], 5-7.

REGLA 1.	Multiplicar la darrera figura del multiplicand pel multiplicador, i després les altres ordenadament fins que s'acaben.	12 1 3 5 12 60 3 6 16 60

També ho podríem representar:

$$\begin{array}{llll} 135 & 1 & \cdots & 135 \\ 135 & 2 & \cdots & \underline{\ \ 270} \\ & & & 1620 \end{array}$$

REGLA 2.	Dividir el multiplicador en parts i multiplicar cada part pel multiplicand i sumar els productes parcials. [Aquesta tècnica la podem fer amb negatius. Per exemple: $12 = 20 - 8$. Ara cal restar els productes parcials].	$12 = 8 + 4.$ 8×135 és 1080 4×135 és 540 1620
REGLA 3.	Buscar un divisor del multiplicador. I, alhora, multiplicar el multiplicand i dividir el multiplicador per aquest divisor. Després multiplicar el resultat obtingut pel nou multiplicador.	$12 = 4 \times 3$ 12×135 és $[3 \times 4] \times 135$ és $3 \times [4 \times 135]$ és 1620
REGLA 4.	Multiplicar cada figura del multiplicand per cada figura del multiplicador i després, tenint en compte els llocs que corresponen a les figures i a llurs productes, sumar els resultats parcials obtinguts.	

Aquesta darrera és la més difícil d'expressar de forma sintètica atès que BHĀSKARA no dóna cap pista. D'una banda podem pensar que, igual que en el cas de la suma, s'inspirava en l'àbac i passava ratlla.

Col·loquem el 135 a baix de tot. Com que el volem multiplicar per 12, el tornem a escriure corregut un lloc a l'esquerra. Ara, començant per l'esquerra, multipliquem aquest 135 desplaçat un lloc a l'esquerra per 1. Dóna 135 desplaçat un lloc a l'esquerra. Passem ratlla i ho escrivim damunt del multiplicador. Ara, començant per l'esquerra, multipliquem el 135 de baix de tot per 2. Primer tenim $1 \times 2 = 2$. El col·loquem al lloc del 3, sumant-lo, i passem ratlla al 3. Ara fem $3 \times 2 = 6$. El col·loquem al lloc del 5, sumant-lo: $6 + 5 = 11$. Per tant, col·loquem l'1 de la dreta i passem ratlla. L'1 de l'esquerra cal sumar-lo al 5 que hi ha a l'esquerra: $5 + 1 = 6$ i passem ratlla al 5. Finalment, $2 \times 5 = 10$. Posem el zero i afegim l'1 a l'1, passant ratlla. Els nombres sense ratlla són: el multiplicand, 135; el multiplicador, 12; el producte, 1620.

$$\begin{array}{cccc} & & 6 & 2 \\ & & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 1 & \cancel{3} & \cancel{5} & 0 \\ & & 1 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{5} & \\ & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

H. EVES afirma categòricament[219] que el mètode de les cel·les diagonals, ben conegut dels àrabs, era també conegut pels indis. Això ho sabem, segons H. T. COLEBROOKE, per un comentari del GAṆEṢA de data desconeguda.[220]

La regla de la divisió. La regla diu:

> El nombre pel qual el divisor és multiplicat en primer lloc i que equilibra el darrer dígit del dividend [i així successivament], és el quocient.[221]

Hi ha un mètode de simplificació, "quan és aplicable": la simplificació del dividend i del divisor.

Com a primer exemple ens ofereix el de la multiplicació. Diu: "Si dividim 1620 per 12 obtenim 135. I per comprovar-ho, multipliquem 135 per 12."[222] Ara bé, en aquest cas, BHĀSKARA observa que és possible procedir per divisions parcials:

> 1620 dividit per 12 és el mateix que 540 dividit per 4, que és el mateix que 135 dividit per 1.[223]

S'obté dividint el dividend i el divisor, en primer lloc, per 3 i, després, per 4.

El quadrat d'un nombre. Un quadrat és el resultat de multiplicar un nombre per ell

[219] EVES, H. [1953], edició de 1992, 224–225.
[220] COLEBROOKE, H. T. [1817], 7, nota 1. Vegeu, més endavant, la multiplicació a FIBONACCI.
[221] COLEBROOKE, H. T. [1817], 8.
[222] Caldrà esperar els comentaristes posteriors per tal de trobar l'algorisme que consisteix a dividir 1620 per 12; dóna 1 i en sobren 4 a les centenes, per tant, hem de dividir 42 per 12; dóna 3 i en sobren 6 a les desenes. Finalment, dividim 60 per 12 i dóna 5. S'obté 135 i no en sobra cap [vegeu COLEBROOKE, H. T. [1817], 8, nota 4].
[223] De fet, és la tècnica de la *simplificació* o *cancel·lació*.

mateix. BHĀSKARA usa la fòrmula del binomi al quadrat:[224]

$$[a+b]^2 = 2\,ab + a^2 + b^2.$$

L'aplica al càlcul dels quadrats de 9, 14, 297 i 10 005. En els dos primers fa el següent:[225]

$$\begin{array}{llll} 9 = \ 4+5 & \text{i} & 9^2 = 2\times 4\times 5 + 4^2 + 5^2 & = 40 + 41 = 81 \\ 14 = 10+4 & \text{i} & 14^2 = 2\times 10\times 4 + 10^2 + 4^2 & = 80 + 100 + 16 = 196. \end{array}$$

Però l'exemple més notable és el càlcul del quadrat de 297. Diu:

> Multiplico 297, disminuït de 3, que val 294 per 297, augmentat de 3, que val 300. El producte és 88 200. Ara li afegeixo 9, que és el quadrat de 3. La suma és el quadrat buscat i val 88 209.[226]

Aquí BHĀSKARA fa servir una altra identitat algèbrica.[227] De fet, usa l'expressió

$$294\cdot 300 = [297-3]\,[297+3] = 297^2 - 3^2.$$

Per tant, $297^2 = 9 + 294\cdot 300 = 88\,209$.

Regla per calcular el cub d'un nombre. Novament recorre a l'expressió del cub d'un binomi. És a dir, a la fórmula $[a+b]^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$. Aleshores s'adona del fet que, si $N = a+b, N^3 = 3\,abN + a^3 + b^3$.

Ens n'ofereix dos exemples,

$$\begin{array}{llll} 9^3 = [4+5]^3 = & 3\times 4\times 5\times 9 + 4^3 + 5^3 & = 540 + 64 + 125 = 729, \\ 27^3 = [20+7]^3 = & 3\times 20\times 7\times 27 + 20^3 + 7^3 = & 11\,340 + 8\,343 \ = 19\,683. \end{array}$$

Finalment ens diu que el cub de 125 és 1 953 125, però no n'especifica els detalls.[228]

---

[224] Usem la notació moderna amb l'objectiu de simplificar la presentació. BHĀSKARA no usa cap símbol algèbric. L'únic que usa són els numerals indis. La resta es descriu en paraules, com hem fet fins ara. A vegades l'aplica a l'expressió decimal del nombre N al qual pretén de calcular el quadrat.
Així, si $N = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10\,a_1 + a_0$, aleshores

$$N^2 = 2\,a_0[10^n\,a_n + \cdots + 10\,a_1] + a_0^2 + [10^n\,a_n + \cdots + 10\,a_1]^2.$$

Després reitera la fórmula aplicant-la a $M = 10^n a_n + \cdots + 10\,a_1$.

[225] I afegeix: "també podria haver fet $14 = 8+6$". [COLEBROOKE, H. T. [1817], 9.]

[226] COLEBROOKE, H. T. [1817], 9.

[227] És a dir, $[a-b]\,[a+b] = a^2 - b^2$; d'on: $a^2 = [a-b]\,[a+b] + b^2$.

[228] COLEBROOKE, H. T. [1817], 11, nota 1, suggereix fer $125 = [120+5]^3$, que, de fet, resoldria fent 12^3 i 5^3, col·locant però cada un al seu lloc abans de sumar. És a dir,

Tot seguit —amb un exemple concret— observa que el quadrat d'un cub és el mateix que el cub d'un quadrat.

Les arrels quadrada i cúbica. De fet, quan hem analitzat el possible coneixement que ĀRYABHATA tenia dels numerals indis amb zero, hem pogut constatar que l'algorisme d'extracció d'arrels era conegut a l'ÍNDIA força segles abans de l'obra de BHĀSKARA.[229] D'aquesta circumstància n'hem de deduir que, sense cap mena de dubte, també ho eren els altres algorisme. En el *Lilāvati*, però, els trobem ben sistematitzats i presentats en un mateix context, basat en l'escriptura decimal. Això els hi confereix un caràcter unitari amb la resta del capítol esmentat, que és precisament el que volíem posar de manifest.

* * *

No podem dubtar, doncs, del fet que els matemàtics islàmics d'ORIENT i els matemàtics indis coneixien el sistema decimal indi amb anterioritat al segle XIII i disposaven d'algorismes de càlcul ben determinats, senzills i alhora estàndards.

Ara, la qüestió rau a establir el procés de consolidació dins de l'EUROPA dels segles XIII i XIV i a esbrinar en quin context i amb quins objectius foren introduïts i defensats els numerals indoaràbics. A la cultura índia i islàmica formaven part del llenguatge dels textos matemàtics globals,[230] ja que el text de BHĀSKARA que acabem d'analitzar és un text de matemàtica i astronomia força complet, malgrat que la nostra anàlisi s'hagi limitat al *Lilāvati*.

---

	1 al cub és	1
	1, quadrat d'1, per 3 i per 2 és	6
	4, quadrat de 2, per 3 i per 1 és	12
	2 al cub és	8
	La suma és	1728
Aleshores		
	12 al cub és	1728
	144, quadrat de 12, per 3 i per 5 és	2160
	25, quadrat de 5, per 3 i per 12 és	900
	5 al cub és	125
	La suma és	1953125

[229] No obstant això, és curiós d'observar que BHĀSKARA ofereix, de forma lingüística, els algorismes d'extracció de les arrels quadrades i cúbiques que, encara avui, fem servir a l'escola. [Vegeu l'algorisme d'extracció de les arrels cúbiques en ĀRYABHATA descrit amb anterioritat, o bé COLEBROOKE, H. T. [1817], 9-10, notes 3 i 12, notes 2 i 3.]

[230] Aquesta no és pas la situació del text d'AL-HWĀRIZMĪ que hem esmentat anteriorment. Era un opuscle dedicat exclusivament al càlcul amb xifres índies i prou. No obstant això, d'altres textos àrabs posteriors, com per exemple el text d'AL-KHARHI, són textos de matemàtica i utilitzen ja amb naturalitat l'algorísmia índia.

No voldria acabar aquesta anàlisi del text de BHĀSKARA sense fer referència al zero i a alguna de les propietats aritmètiques que ens en ofereix. Sabem que BRAHMAGUPTA usava ja el zero amb força naturalitat i que havia establert les següents lleis aritmètiques del zero:

$$a + 0 = 0, \quad a - 0 = 0, \quad a \cdot 0 = 0.$$[231]

BHĀSKARA va més lluny i es planteja la possibilitat de *dividir per zero*. Així al llibre II, el *Vija-Ganita* —el tractat d'àlgebra—, podem llegir-hi:

> **Proposició.** Dividend 3. Divisor 0. Quocient $\frac{3}{0}$. Aquesta fracció de la qual el denominador és la xifra l'anomenem *quantitat infinita*. En aquesta quantitat, que consisteix en el fet de tenir la xifra com a denominador, no hi ha alteració possible per molt que li afegim o li traiem, de la mateixa manera que no hi ha canvi en Déu infinit i immutable.[232]

No obstant això, com fa notar C. B. BOYER,[233] aquesta regla de BHĀSKARA és, tot seguit, anul·lada per la pròpia incomprensió de l'autor, ja que estableix que $\frac{a}{0} \cdot 0 = a$. Però malgrat les limitacions, no podíem passar per alt, sense remarcar-lo de forma explícita, el fet, absolutament notable, aconseguit pels matemàtics indis. Ells havien assolit un element novedós en el desenvolupament de la matemàtica que, a diferència dels matemàtics grecs, entenien com una ciència de càlcul. Aquest element novedós era la incorporació dels guarismes $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ i 9 i de xifra —és a dir, del 0— i el convenciment que tots ells eren de la *mateixa naturalesa* i estaven *sotmesos a les mateixes lleis aritmètiques*.

L'obra de BHĀSKARA constitueix la síntesi i culminació de la matemàtica indioislàmica. Recull les aportacions matemàtiques —algunes absolutament originals i novedoses— d'aquest poble oriental amb grans coneixements en astronomia, matemàtiques, medecina, botànica, etc., d'una cultura impressionant i de grans sentiments religiosos. I, alhora, constitueix la fi d'aquesta era d'or de la matemàtica índia que va del segle VI al XII.

---

[231] Diu: "Positiu dividit per positiu, o negatiu per negatiu, és afirmatiu. La xifra dividida per la xifra no és res. Positiu dividit per negatiu és negatiu i negatiu dividit per positiu també és negatiu. Positiu o negatiu dividit per la xifra és una *fracció* que la té per denominador". [COLEBROOKE, H. T. [1817], 339–340.] Notem dos fets: BRAHMAGUPTA vol ser general i analitza tots els casos; però deixa de banda $\frac{a}{0}$, sobre el qual no "es pronuncia", i $\frac{0}{0}$ que ni tan sols esmenta.

[232] Podem veure com BHĀSKARA considera el *guarisme* 0 —xifra— com els altres i com intenta d'estendre-hi les quatre regles aritmètiques bàsiques. Introdueix el valor infinit actual, propi dels déus, a diferència del que establia l'actitud aristotèlica —molt allunyada de la concepció numèrica, com era usual al món grec. No tracta, però, el cas $\frac{0}{0}$. [Vegeu COLEBROOKE, H. T. [1817], 137–138.]

[233] Vegeu BOYER, C. B. [1943], o bé BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 287.

La matemàtica índia ha aconseguit, doncs, desenvolupar un sistema numèric i una algorísmia que incideix en la forma de representar els nombres i d'operar-hi i, de retruc, s'insereix en la manera d'entendre i desenvolupar la matemàtica. Aquesta manera de fer trobà ressó més enllà de les seves fronteres i, gràcies a les aportacions de la matemàtica islàmica, s'implantaria en l'àlgebra i aconseguiria consolidar-se també fora de l'ÍNDIA.

Hem d'indicar, però, que els matemàtics indis no s'adonaren de la possibilitat que oferia el sistema de representació decimal, amb els deu guarismes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, en relació amb la representació dels nombres fraccionaris decimals ni tampoc del fet que els algorismes de càlcul eren els mateixos, un fet que trobem, en canvi, de forma incipient, com ja hem indicat, en AL-UQLĪDISĪ.[234] No obstant això, caldrà esperar encara fins el segle XII per tal de trobar, en els textos àrabs, una utilització general de les fraccions decimals. El text d'AL-SAMAW'AL [1125–1180] conté, per exemple, la divisió de 210 per 13, que no és exacta. S'obté 16 i una part de deu, cinc de cent, tres de mil, 8 de deu mil, 4 de cent mil. També ens ofereix aproximacions decimals de certes arrels quadrades. Per exemple ens dóna l'aproximació fraccionària decimal de l'arrel quadrada de 10 amb sis xifres decimals exactes.

Malgrat tots aquests resultats —lloables i premonitoris— caldrà esperar l'obra de GHIYĀTH AL-DĪN JAMSHĪD AL-KĀSHĪ [† 1429] per tal de trobar un desenvolupament complet i general d'aquesta nova tècnica. Però a l'EUROPA OCCIDENTAL aquesta tècnica no s'incorporaria fins ben entrat el segle XVI.[235]

L'obra de Maximus Planudes.[236] Aquesta obra, d'influència reduïda, posa de manifest que els numerals indis havien arribat també finalment —ben entrat el segle XIII— a la cultura pagana d'herència grega.[237] Però,

> existeix un text més antic amb el títol *Αρχὴ τῆς μεγάλης καί Ἰνδικῆς ψηφιφορίας*, escrit l'any 1252...; sembla que PLANUDES l'havia estudiat.[238]

El text de PLANUDES comença fent una descripció dels símbols, dels quals diu que

> van ser inventats per alguns astrònoms distingits que els consideraven els més convenients i acurats per expressar els nombres. Hi ha nou símbols, als quals cal

[234] Per exemple, divideix el nombre 19 per la meitat, cinc vegades: 19, 9.5, 4.75, 2.375, 1.875, 0.59375.

[235] Ja ho hem indicat a la nota 186. Tanmateix vegeu KATZ, V. J. [1993], 226–228.

[236] Ens limitarem a comentar el text de HEATH, sir T. [1921], edició de 1981, II, 546–548. El lector interessat pot consultar l'edició del text grec feta per GERHARDT, l'any 1865, la traducció alemanya de H. WAESCHKE de 1878 o bé la francesa de A. ALLARD de 1981.

[237] El títol, en grec, és *Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς*, que significa literalment *Aritmètica d'acord amb el mètode indi*.

[238] HEATH, sir T. [1921], edició de 1981, II, 547. Se'n conserva un exemplar al Museu de París.

> afegir-ne un altre, anomenat *Tzifra*, representat per 0 i designat amb el nom de zero. Els nou símbols així com aquest altre són indis.[239]

Val la pena indicar que, com ja hem dit a bastament, no és pas el primer text que conté aquestes xifres. L'esmentem ara i aquí, malgrat ser un text de finals del segle XIII o bé de començaments del XIV —la data exacta és desconeguda—, perquè és un text aïllat i no l'hem volgut vincular amb els textos d'influència europea. PLANUDES usa les formes perses dels numerals, diferenciant-se de l'escriptura del tractat de 1252 que feia servir, en canvi, els numerals que s'usaven a ITÀLIA. No influí en absolut en la gairebé inexistent matemàtica grega, ni tampoc n'és un fruit, atès que no és possible de trobar-li altres antecedents que l'esmentat text de 1252.

PLANUDES es mostra molt satisfet del seu algorisme d'obtenció d'*arrels quadrades* que, en la seva opinió és diferent del *mètode indi* i del *mètode de Teó*. Podem analitzar quin és el seu mètode, ja que ens n'ofereix una descripció completa i detallada. Diu:

> Pren l'arrel quadrada del quadrat més proper, per defecte, al nombre donat, i dobla'l; aleshores resta al nombre al qual li busques l'arrel quadrada el quadrat més proper per defecte. Després [com a *primera aproximació*] agafa la fracció que té, com a numerador, el romanent i, com a denominador, el doble de l'arrel quadrada, que ja hem calculat.[240]

PLANUDES ens ofereix un exemple concret: la determinació de l'$\sqrt{18}$. Atès que 4^2 és el quadrat, per defecte, més proper, l'arrel quadrada aproximada és $4+\frac{2}{2\times 4}$, o bé $4\frac{1}{4}$. Ara PLANUDES calcula el quadrat de $4\frac{1}{4}$, obté $18\frac{1}{16}$ que posa de manifest que $4\frac{1}{4}$ no és gaire acurat. És per això que cal donar un mètode més acurat, un mètode "que ha trobat amb l'ajut de Déu". Per posar-lo de manifest l'aplica al càlcul de l'$\sqrt{6}$. Ara però, curiosament, PLANUDES abandona el mètode decimal i passa al mètode sexagesimal.[241] De fet calcula l'$\sqrt{21\,600}$, que és l'arrel quadrada de 6, reduïda a segons [o bé a unitats sexagesimals de segon ordre]. L'arrel quadrada, diu: "es troba entre 146 i 147."[242] Però $146'$ val $2\ 26'$. Ara tot rau a determinar el romanent de l'arrel quadrada aproximada. Obté $2\ 26'\ 58''\ 9'''$. El mètode que segueix és el mateix que trobem, però, a TEÓ per al calcul de l'arrel dels nombres 4500 i $2\ 28'$.[243]

[239] HEATH, sir T. [1921], edició de 1981, II, 547.

[240] De fet, l'algorisme de PLANUDES és, en el formalisme actual, $\sqrt{N}=\sqrt{a^2+h}=a+\frac{h}{2a}$, que és el mètode indi i també el mètode de Teó [si bé es conegut com a mètode d'Heró]. Vegeu la nota 36 i PLA, J. [1995].

[241] Era una tècnica ben usual de l'època. Quan hom volia donar valors aproximats no enters feia servir el sistema sexagesimal.

[242] Novament ens trobem amb el *teorema del valor mig.*

[243] Vegeu HEATH, sir T. [1921], edició de 1981, I, 60–63 o bé PLA, J. [1995]. PLANUDES ofereix també un exemple més complex: $\sqrt{1\,690\,196\,789}=41\,112+\frac{245}{82\,224}$.

4 L'EUROPA dels segles XII i XIII

És força difícil donar una visió, encara que sigui superficial, del desenvolupament sociopolític, econòmic, cultural i religiós d'EUROPA des de la ruptura de l'IMPERI ROMÀ, el 476,[244] i la desfeta de l'Occidental per mà dels guerrers provinents del nord.[245]

4.1 Els antecedents

Les migracions del nord —visigots, vàndals, alans, francs, alamans, germans, uns, ostrogots, etc.— són constants i van debilitant i esmicolant l'Imperi des de les darreries del segle IV fins a la fi del V. Així, l'any 376, els visigots, sota el comandament de FRITIGERN el qual, l'any 378, derrotà i occí l'emperador VALENT a la batalla d'ADRIANÀPOLIS i deixà el pas franc, travessaren el DANUBI i penetraren dins l'IMPERI ROMÀ. Després d'un segle de conquestes i de resistències fallides, el rei dels ostrogots TEODORIC I [$\sim$454–526], dit *el Gran*, va entrar a ITÀLIA, amb el seu poble. Era l'any 488.

Després d'aquesta desfeta —ja ho hem comentat— el fet més notable és la divisió d'OCCIDENT en dues grans àrees culturals. La primera, més oriental, però amb fortes ramificacions i una gran implantació al NORD d'ÀFRICA i a la península IBÈRICA i, de retruc, a la MEDITERRÀNIA, és una zona cultural d'influència islàmica. La segona —l'EUROPA continental que, després de les invasions nòrdiques, esdevé un mosaic de pobles i nacions— és una zona d'influència germanollatina amb una cultura pròpia. Seguint JAMIE H. EVES,[246] la divisió és el fruit de la influència dels pobles del nord, els pobles anomenats *bàrbars* pels romans, —alguns procedents del BÀLTIC— en la decadent cultura romana i de la creixent implantació de la religió judeocristiana, as-

[244]Tanmateix, però, el lector que en desitgi tenir una visió simple, però més detallada, pot consultar l'*Enciclopèdia Catalana*, entrada "Europa". A l'edició de l'obra de H. EVES en què JAMIE H. EVES hi ha afegit els *Cultural Connections* i, en particular, la *Cultural Connection VI, Serfs, Lords, and Poeples*, hi trobarà una visió d'aquest desenvolupament des d'un vessant més proper a la matemàtica [EVES, H. [1953], edició de 1992, 251–257]. També és possible trobar referències sobre el marc general a l'excel·lent text de BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 247–255. Si desitja, però, concretar-se més a la situació socioeconòmica i la seva relació amb els numerals indoaràbigs, pot veure BENOIT, P. [1989]: "Calcul, algèbres et marchandise".

Ara bé, si desitja una visió més àmplia pot consultar, per exemple, la *Histoire général des civilizations, III*: MOYEN AGE, publicada sota la direcció de MAURICE CROUZET.

[245]Val a dir que la ruptura entre OCCIDENT i ORIENT dins l'IMPERI ROMÀ és lenta però progressiva des de la mort de CONSTANTÍ, l'any 337. És, però, amb la dominació de l'IMPERI d'OCCIDENT pels pobles procedents del nord que aquesta ruptura esdevé definitiva, atès que, si més no nominalment, l'IMPERI d'ORIENT es manté unit, però l'IMPERI d'OCCIDENT es fa miques.

[246]EVES, H. [1953], edició de 1992, *Cultural Connection VI*, 251.

sentada a ROMA, cada cop més influent en tots els ordres. Una divisió que, tanmateix, no és pas aliena en absolut a l'alè cultural de l'islam. A més, persisteix la cultura pagana o ortodoxa, que amb capital a BIZANCI —ciutat que fou batejada amb el nom de CONSTANTINOBLE per l'emperador CONSTANTÍ [272–237][247]— constitueix el refugi de la cultura d'influència grega i eslava.[248] La península IBÈRICA —geogràficament europea— queda al marge d'aquesta nova refundació cultural europea, atesa la gran influència islàmica a què està sotmesa. Però, com ja hem indicat abans, aquesta influència serà molt important en el renaixement d'EUROPA i ho serà a través dels estudiosos i erudits que, àvids de coneixements de tota mena, s'apropen a la cultura jueva i islàmica en els nuclis ibèrics més cultes i en les escoles de traductors.[249]

En definitiva i sintèticament podem dir que a EUROPA s'ha produït una doble ruptura: la ruptura est-oest i la ruptura nord-sud. Aquestes ruptures perduren encara avui. Al nord hi trobem aglutinats, simplificant, els pobles que voregen l'OCEÀ BÀLTIC, el MAR del NORD, etc. Són FRANÇA, ANGLATERRA, PAÏSOS BAIXOS, ALEMANYA, POLÒNIA i RÚSSIA. Al sud, els països anomenats llatins: ITÀLIA, GRÈCIA, ROMANIA, etc. i, més tard, ESPANYA i PORTUGAL.[250] Són països que reben una influència més mediterrània; és a dir, són influïts pels països de l'ORIENT PRÒXIM i del nord d'ÀFRICA. A la zona més oriental d'EUROPA trobem, però, països la influència dels quals és, com dèiem, més ortodoxa i eslava, com ara TXECOSLOVÀQUIA, IUGOSLÀVIA,[251] ROMANIA, TURQUIA, etc.

Al costat d'aquests fets d'ordre polític ens trobem amb la creixent influència del poder políticoreligiós de la ROMA dels papes. Amb un cert fanatisme religiós —i també, a voltes, polític— l'ESGLÉSIA CATÒLICA intenta d'imposar el seu poder com a estat, convertint-se a voltes en l'àrbitre de situacions conflictives, i també les seves creences. Aquest poder sorgeix damunt les runes de ROMA, amb tot el que això significa. La ROMA imperial era poc amant de l'estudi teòric i va oblidar gairebé del tot el desenvolupament filosòfic i científic del món grec. Si a aquest fet afegim les aportacions dels pobles del nord, ens trobem amb una situació de pobresa cultural molt gran, situació que perdurarà durant tota l'anomenada *època de la foscor* i que els historiadors de la ciència situen entre els anys 476 i els segles XI i XII.[252] Aquesta

[247]Recordem que la seva construcció fou decidida per CONSTANTÍ I, dit *el Gran* [~280–337]. S'inicià l'any 324, damunt l'antiga ciutat de BIZANCI. Fou consagrada l'11 de maig de 1330.

[248]Aquesta situació de complexitat cultural i política encara avui és vigent i és la causa profunda de molts dels conflictes viscuts a la vella EUROPA durant els segles XIX i XX.

[249]Les SANTES CROADES, com hem esmentat tot de passada, no són alienes tampoc a la influència dels coneixements islàmics a l'EUROPA germanollatina.

[250]La PROVENÇA també jugà un paper important en aquest període de la història d'EUROPA.

[251]Recordem que recentment TXECOSLOVÀQUIA s'ha dividit en dues nacions —ESLOVÀQUIA i TXÈQUIA—, mentre que IUGOSLÀVIA es troba en un violent procés de disgregació.

[252]Vegeu EVES, H. [1953], edició de 1992, 258. També BOYER, C. B. [1968], edició de 1986, 321–322.

situació era ben acceptada pels *pares de l'Església* perquè els permetia d'imposar el coneixement d'acord amb els principis de la seva doctrina, arrelada en la revelació bíblica i en la interpretació que en feien. Una frase sintetitza perfectament aquesta idea: "No cal cap altre coneixement. Tot el que ens cal saber i conèixer ja ens ha estat revelat."[253]

Aquest període d'invasions, el segueix un període de consolidació que, si bé des del punt de vista científic no és massa rellevant, és important perquè és el que configura aquest trencaclosques que coneixem com EUROPA.[254] Si deixem de banda l'imperi bizantí, la zona sud-oriental d'EUROPA i la península IBÈRICA, ens trobem que el primer poder polític sòlid que es configura a EUROPA és el de la GÀL·LIA, un cop conquerida pels guerrers del nord; és a dir, el que avui coneixem amb el nom de FRANÇA. El fet s'esdevé l'any 481 quan els francs, amb CLODOVEU I [~466–511], senyor de la guerra, aconsegueixen unificar les tribus disperses. Després, l'any 486, derrota els darrers reductes de l'imperi romà de la GÀL·LIA i esdevé el cabdill d'una zona que va des de la BRETANYA a TOURS i de tots els països entre el LOIRA i el MOSA. Entre els anys 496 i 506 es convertí al catolicisme i, amb ell, tot el seu poble. Va ser el primer i únic cap d'un estat catòlic en tot l'OCCIDENT, un fet important per al futur del país gal. A més, els francs i els celtes de la GÀL·LIA van creuar-se entre ells i forjaren una societat plural que unificava els elements culturals francs, celtes i romans de la ROMA llatina. El seu líder va establir-se a PARÍS i trobà la mort poc després de presidir, a ORLEANS [511], el primer concili general de l'església franca. Els seus successors eixamplaren els dominis annexionant-se la PROVENÇA i foren els primers reis bàrbars que van encunyar monedes d'or amb la seva efígie.

Malgrat que van imposar als habitants *lliures*, romans o celtes, el servei de les armes i d'apel·lació, no van plantejar-se en absolut continuar l'obra cultural de la Roma imperial. Van establir un sistema de *noblesa hereditària* que els permetés de mantenir-se en el poder, atesa la dificultat que representava dominar un territori tan extens. Però no aconseguiren imposar, ni acabaren d'entendre, el sistema de recaptació d'impostos —realment complex i que requeria uns coneixements que no tenien. Això féu que aquest sistema es mantingués menys de dos-cents anys.

A la península IBÈRICA els visigots aconseguiren imposar els seu poder, a causa

[253]BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 247–248. M. KLINE atribueix a AGUSTÍ [354–430], ""un home molt instruït i molt influent en la difusió del neoplatonisme", una frase realment frapant: "Qualsevol coneixement que l'home hagi adquirit fora de les Sagrades Escriptures, si és perjudicial, hi serà condemnat; si és slaudable, hi serà present." Aquesta cita, si bé no és pas representativa d'AGUSTÍ, síq eu ho és de l'actitud que, a l'ALTA EDAT MITJANA, hi havia envers el coneixement de la naturalesa." [KLINE, M. [1972], edició castellana de 1992, I, 276.]

[254]Fins que EUROPA no entra en contacte amb la cultura islàmica, la situació de la ciència es manté estàtica i en una situació d'una gran pobresa.

del fet que dominaven l'art de la guerra millor que la població hispanoromana. A més els visigots es van veure obligats a replegar-se cap a la península quan van ser derrotats pels francs a l'entorn del 507 a VOUILLÉ. La noblesa visigòtica, fortament corrompuda, oprimia la gran massa camperola hispanoromana. La complexitat de la situació i la incapacitat dels mandataris féu que es perdés qualsevol resta de cultura romana. Quna l'any 587 RECAREDO I, un segle després dels francs, dugué a terme la conversió del visigots al catolicisme, la decisió no tingué cap efecte positiu ni cap ressonància entre la noblesa i la jerarquia eclesiàstica visigòtica, arriana, fins tres segles més tard. Per fer-se càrrec de la situació cultural és suficient de repassar les *Etimologies* d'ISIDOR DE SEVILLA [?–636]. En aquest text enciclopèdic trobem un inventari de l'herència intel·lectual de ROMA. És el darrer text d'aquestes característiques. Després d'ell es deixaren de llegir els autors de l'antiguitat i es perdé l'ús del llatí.

En aquest interval de temps els papes de Roma —fins aleshores sotmesos a l'autoritat de CONSTANTINOBLE i dels seus caps polítics i religiosos— s'adonen que l'únic camí que tenen per tal de poder-se alliberar d'aquest vassallatge és convertir-se en els líders religiosos i en els àrbitres polítics de l'EUROPA OCCIDENTAL. Una manera d'aconseguir-ho consistia a recollir l'herència romana, si més no l'herència espiritual, consolidar-la en monestirs, a ROMA, i després difondre-la en una activitat missionera amb el nucli a ROMA, que s'estengués per tot EUROPA fins a ESCÒCIA, passant per la GÀL·LIA i la península IBÈRICA. En aquesta línia tingué un paper preeminent el primer gran papa de l'Edat Mitjana, GREGORI, dit *el Gran* [590–604]. El seu objectiu fou clar i concret: convertir-se en el "pastor de l'Occident bàrbar". Això no obstant, al començament, els primers monjos benedictins, responsables de la revitalització d'Occident, no tingueren cap mena de sensibilitat pels coneixements dels textos *profans*. Caldria esperar fins a començaments del segle VIII per tal que els benedictins s'adonessin de la importància de convertir els seus monestirs en autèntics nuclis intel·lectuals. És en aquesta època que alguns monestirs, com el de YORK, es van convertir en centres importants de la cristiandat llatina. Aquesta tasca fou iniciada per CASSIODOR [†585] que imposà el coneixement del llatí com a eina indispensable per a la comprensió de les *Escriptures* i amplià l'àmbit dels estudis monàstics. Com va dir d'ell BEDA, dit *el Venerable* [∼673–735], "regava dia a dia els cors dels homes amb dolls de coneixements profitosos". És possible que aquesta petita reforma preparés la vida monàstica per acollir, copsar i entendre l'enorme cabal de coneixements que, de mans dels erudits de l'islam, anirien arribant a OCCIDENT.

4.2 L'imperi carolingi i les seves conseqüències

És també a FRANÇA on trobem el primer intent seriós de refer intel·lectualment

EUROPA. Precisament quan EUROPA es troba en una situació d'absoluta degradació cultural, llevat de petits nuclis aïllats de cultura, quan la barbàrie sembla imposar-se i el paganisme sembla començar a fer efecte en els avenços del cristianisme, apareix l'amenaça de l'islam. Petits contingents berbers passen els PIRINEUS i s'apoderen del ROSSELLÓ i de la part més propera a la península IBÈRICA de la regió d'OCCITÀNIA. Aleshores l'ISLAM mira de conquerir FRANÇA des de BORDEUS. Però CARLES MARTELL[255] derrota les tropes musulmanes a POITIERS. Ens trobem a l'any 732. Aquest fet el convertí en l'heroi de FRANÇA, i en el seu salvador. CARLES MARTELL [~688–741], posant homes de la seva confiança i parents al capdavant dels comtats de la GÀL·LIA, aconsegueix fer renéixer i reforçar el sentit de FRANÇA com a unitat política. Els seus fills i descendents són educats en monestirs i això fa que la influència de l'Església de Roma retorni a la vida política i cultural de FRANÇA. Un dels seus néts és CARLEMAGNE [742–814]. Aquest du a terme una política d'ajut al papa davant de l'expansionisme llombard que pretén d'annexionar-se ROMA.[256] D'aquesta manera CARLEMAGNE aconsegueix annexionar una part important d'ITÀLIA sota el domini franc, alhora que restaura els poders i possessions pontifícies. Pretén d'evitar les incursions de l'islam ampliant els límits fronterers amb la península IBÈRICA, però troba una resistència inesperada a RONCESVALLES [778].

No obstant això, l'any 800 "l'autoritat del rei dels francs s'ha estès de tal forma que, per tal d'afavorir-lo, els medis eclesiàstics decideixen de restablir la *magistratura imperial i reprendre la tradició perduda l'any 476*".[257] I el dia de NADAL de l'any que inicia el segle IX, CARLEMAGNE rep a la basílica de SANT PERE de ROMA, de mans del PAPA LLEÓ III [† 816], la diadema i és aclamat emperador dels romans de la *nova Roma.* La coronació es fa seguint el mateix ritu que s'usava per nomenar l'emperador d'ORIENT. Aquesta restauració de l'imperi romà d'occident fou acceptada i reconeguda dotze anys més tard per BIZANCI. Així, amb l'art de les armes i de la política, s'havia aconseguit un imperi —sota el domini dels francs i amb la connivència de ROMA— que incloïa la FRANÇA actual, parts d'ÀUSTRIA, ITÀLIA fins a ROMA i una petita franja del sud dels PIRINEUS.

Un fet notable de l'imperi carolingi és que, ja des de l'època mateixa de CARLEMAGNE, hi ha una clara consciència que cal restaurar la cultura, aixecar les condicions d'ignorància del clergat i dels servidors de l'aparell governamental. És el *renaixement*

[255]Era fill natural de PIPÍ d'HERISTAL [† 714], a qui es deu la reunificació de FRANÇA i una petita expansió cap a GERMÀNIA, així com haver frenat momentàniament les ambicions expansionistes dels *llombards*, un poble que volia mantenir vius els records de la ROMA imperial.

[256]Trenca la política de CARLES MARTELL que era una política de no intervenció contra els llombards.

[257]CROUZET, M. [1967], edició castellana de 1969, III, 134–135.

carolingi. Aquesta tasca fou encomanada, entre d'altres,[258] a un erudit anglès, ALCUÍ de YORK [735–804]. Aquests erudits van ajudar CARLEMAGNE a fixar la línia mestre d'uns plans d'ensenyança metòdica, que s'efectuarien en escoles depenents dels abats monàstics, dels bisbats catedralicis, i també del palau imperial. ALCUÍ fixà un programa d'estudis —les *set arts liberals*— que ampliava el de l'antiguitat clàssica.[259] Envià emissaris a la península IBÈRICA, a la ITALIANA i també a IRLANDA, per tal d'aconseguir manuscrits que fossin didàctics i llegibles.[260] Imposà una escriptura rodona, clara i fàcil de llegir, de la qual l'actual és hereva: la *minúscula carolíngia*. Fixà el text de la BÍBLIA i, per tal de mantenir-lo, va imposar a TOURS la tècnica dels *scriptoriums*. Abans ja havia establert a AIX-LA CHAPELLE [AACHEN] un centre cultural important, al qual assistien el propi emperador, la seva família i erudits d'arreu. L'any 795 fou nomenat abat del monestir de SANT MARTÍ de TOURS que, si bé ja era un centre notable, ell convertí en el centre d'estudis més important de l'època.[261] Reuní una col·lecció considerable de manuscrits i la seva biblioteca fou molt notable per als estàndards de l'època.

També es produí un renaixement en el món de les arts, possiblement més independent i autòcton, que incorporà trets de la cultura indígena i popular, i les allunyà de l'estil clàssic. De fet, aquest petit renaixement preparava la gran revolució arquitectònica, escultòrica i pictòrica romànica.

Però on la renovació carolíngia tingué menys incidència fou en les condicions soci-

[258]Com ara PERE de PISA, PAULÍ d'AQUILEYA i PAU DIÀCON de la cort llombarda i TEODULF, de procedència hispànica.

[259]El quadrivi —aritmètica, música, geometria i astronomia— formava part dels programes clàssics; el trivi —retòrica, filosofia i gramàtica— s'incorporà al nou currículum. Aquesta divisió donaria lloc a la ruptura entre ciències i humanitats que encara avui perdura. Cal indicar que *les set sarts liberals* no contenen cap estudi específic, com ara l'art, l'arquitectura o art de la construcció, la medicina, la jurisprudència, etc. Algunes d'aquestes arts s'aprenien directament en tallers i en nuclis en què s'exercien, tot participant-hi com aprenents o auxiliars.

[260]La gramàtica —entesa com l'aprenentatge del llatí— esdevé la pedra de toc del sistema carolingi.

[261]Malgrat que el contingut del quadrivi podria fer-nos creure el contrari, els continguts matemàtics no constituïen pas un centre d'interès de les arts liberals. L'aritmètica era pobra i, en molts casos, es confonia amb la numerologia —l'estudi de les propietats místiques dels nombres i no pas les seves propietats com a membres d'un sistema formal ideat per l'home. Aquestes propietats místiques es vinculaven, a voltes, amb textos bíblics. La Geometria era molt pobra i, de fet, no tenia res a veure amb les grans conquestes de la geometria grega. Els *Elements* d'EUCLIDES no hi eren pas presents —era un dels grans desconeguts— i, en el millor dels casos, es reduïen al llibre I de forma cataquètica: s'establien les definicions i els enunciats dels teoremes, que calia aprendre de memòria, tot ometent-ne les demostracions i fins i tot les figures. L'obra clau i senyera fou la *Geometria* de GERBERT d'ORLAC, molt pobra.

Una qüestió, vinculada indirectament ls coneixements matemàtics que preocupaven el clergat era el calendari eclesiàstic; calia disposar d'un sistema per poder calcular la data de les festes mòbils i, en particular, la de la festa clau: la PÀSQUA de RESURRECCIÓ.

opolítiques: va mantenir una organització agrícola essencialment esclavista i, malgrat que tot home batejat no podia ser considerat un esclau, el fet no repercutí essencialment ni efectiva en el canvi estructural.[262] Malgrat que la situació de vassallatge no establia la dominació incondicional del senyor sobre els seus súbdits i servents, ben al contrari, i que el paper de l'emperador era un paper apaivagador basat en la "raó i l'equitat" atès que concedia a cada u, "fos quina fos la seva dignitat", el "dret a conservar la seva llei", s'establí un triple poder —el de l'emperador, l'eclesiàstic i el del poble— que va permetre que s'anés consolidant un sentiment d'autonomia a l'entorn de famílies importants o de caps militars exitosos. Aquesta tricotomia debilità i finalment esgotà, al segon terç del segle IX, l'imperi carolingi. Aquest esgotament carolingi afectà, tot perjudicant-la, la unitat de l'Església. Amb la desfeta de l'imperi carolingi s'estingí també l'incipient renaixement cultural que s'havia pretès de dur a terme, sense que aconseguís consolidar-se.

A finals del segle IX i començaments del X EUROPA es veu sotmesa a noves invasions. D'una banda els sarraïns, des de la península IBÈRICA i, sobretot, des del nord d'ÀFRICA. Del nord arribaren importants invasions dels clans de les costes escandinaves; aquests clans havien perfeccionat l'art de la navegació. Fou la invasió *normanda*. Aquesta invasió culminà amb la conquesta de les illes del nord d'EUROPA —ANGLATERRA [810], IRLANDA [834] i ISLÀNDIA. Els normands aconseguiren vorejar la península IBÈRICA, alhora que feren incursions puntuals a LA CORUNYA, LISBOA, CÀDIS i SEVILLA, i entraren a la MEDITERRÀNIA, on conqueriren SICÍLIA. L'any 911, els normands es feren reconèixer pel rei de FRANÇA. Endemés EUROPA hagué de suportar la invasió dels hongaresos. Eren genets arribats de les estepes. L'any 937 assolaren el centre del continent i, l'any 951, arribaren a ROMA i a AQUITÀNIA. Aquestes invasions van accelerar la descomposició de les institucions monàrquiques alhora que provocaven importants pèrdues materials. EUROPA s'empobrí tant en béns materials com culturals. Les zones rurals, menys protegides, varen ser les que van rebre més fortament la fuetada dels invasors. Això féu decréixer l'augment demogràfic que s'insinuava a principis del segle IX al nord de la GÀL·LIA. Els altres afectats per les invasions foren els monestirs, rics en béns materials valuosos, i mal defensats. Això repercutí de forma important i directa en l'empobriment cultural, ja que foren saquejats i destruïts la majoria de nuclis monàstics d'IRLANDA, ANGLATERRA, el nord del regne FRANC i ITÀLIA.

Tanmateix aquestes invasions no foren només destructives. Van permetre d'estendre els contactes entre els pobles del nord i els pobles d'influència cristiana. Això permeté una extensió més àmplia de la comunitat cristiana. A més, els invasors,

[262] No ens endinsarem pas en l'anàlisi dels factors econòmics, polítics i socials, deixant al lector interessat la recerca d'una informació més àmplia.

un cop establerts, esdevingueren sedentaris i cultivaren l'agricultura i, sobretot, la pesca. Així s'establiren camins comercials entre pobles amb tradicions diferents i que produïen béns diversos. No obstant això, aquests fets van forçar els països invadits a consolidar-se d'alguna manera per tal de poder-se defensar. Així, per exemple, els anglosaxons es van refugiar a WESSEX —el més occidental dels regnes insulars. Allà, ALFRED, dit *el Gran* [871–899] resistí les invasions normandes i aconseguí consolidar un nucli anglosaxó important. Importà erudits del continent, sobretot eclesiàstics, i en el seus dominis intentà de refer la cultura, imposant la llengua popular davant del llatí. Volia que, durant el seu regnat, el seu regne assolís un nivell cultural innexistent. Impulsà la traducció d'obres escrites en llatí i així consolidà la *prosa anglosaxona*.

Però el nucli de resistència i consolidació més notable el trobem a GERMÀNIA, on el rei OTÓ, el GRAN [936–976], es marcà l'objectiu de restaurar l'imperi romà d'Occident, seguint l'exemple del renaixement carolingi. Després de sotmetre els eslaus i els hongaresos, va afavorir l'expansió del cristianisme cap a les terres del nord, fundant bisbats a MAGDEBURG i PRAGA [972]. S'imposà com a àrbitre en els conflictes de l'imperi carolingi, ja ben esmicolat. Es féu reconèixer rei d'ITÀLIA i, finalment, l'any 962 el papa JOAN XII [937–964] li conferí la dignitat imperial a AQUISGRAN, atès que havia aconseguit sotmetre la LLOMBARDIA.[263] Així formà l'imperi romà d'Occident més sòlid i extens des de la seva desfeta al segle V i es convertí en àrbitre de la cristiandat. Intentà de sostreure el poder papal del sotmetiment a l'aristocràcia romana, destituint el papa JOAN i designant un nou papa. A més imposà la dignitat imperial a la seva família, garantint així el dret de successió i el manteniment de l'imperi durant un període força extens. OTÓ III [980–1002] aconseguí una estreta i fructífera unió amb la SANTA SEU, que aleshores ocupava precisament SILVESTRE II, amic seu, home d'una gran cultura, el nom del qual era GERBERT d'ORLHAC.

En aquest període, a mitjan segle X, es produeixen a més, un cop calmades les invasions del nord, avenços molt importants en la tècnica de l'explotació agrària i això permetés la formació de certes agrupacions de cultius en extensions més àmplies. Aquest increment de la producció agrícola va propiciar l'augment dels intercanvis comercials entre els nuclis rurals de l'EUROPA central i septentrional, els països nòrdics —productors de sal i de productes marins— i la península IBÈRICA musulmana, que aporta teixits, lli, fruits secs, animals més aptes per a la producció agrícola, etc. S'inicia així una via comercial que s'anirà consolidant durant el segle XI.

[263] Així es formaria un nucli al centre d'EUROPA d'una gran importància cultural i econòmica, una unitat que, amb més o menys dificultats, es mantindria durant segles fins que fos esmicolada per NAPOLEÓ l'any 1806.

4.3 El feudalisme dels segles XII i XIII

L'any mil, lluny de ser el segle de la fi de la civilització occidental, com predeien certes premonicions basades en textos bíblics, fonamentalment de l'APOCALIPSI, és un segle de recuperació europea que es manifesta en tots els terrenys. Tanmateix, els efectes del creixement en la situació del quadre polític i social no es fan palesos fins ben entrat el segle XII. Es manté, doncs, el mateix quadre politicosocial que s'havia format durant el predomini carolingi.

L'estructura que es consolida és l'estructura *feudal*. Peró ja no existeixen sobirans que, per mitjà de *fidels agents locals*, garanteixin el manteniment de l'ordre i la pau, imposant el sotmetiment a la monarquia. Això obliga la *plebs* —la majoria de la població—, formada pels pagesos, els camperols, els grangers i els pobres, que legalment són *servents*, a posar-se sota l'empara de la casta dels guerrers, l'obligació dels quals és combatre i protegir-los de les invasions foranes. Així s'estableix una situació de *dependència* que té com a àrbitre el poder eclesiàstic. Aquest poder dóna raó de l'estatus establert: és "la voluntat divina" el que justifica la situació socioeconòmica de cadascún dels membres de la societat. De fet, els altres dos estaments respectaven l'eclesiàstic perquè era l'única garantia d'una situació d'equilibri polític, basada en la *pau de Déu*. Així doncs, la societat és el fruit de l'equilibri d'aquestes tres classes: la classe dels que resen, la classe dels que combaten i la classe dels que treballen i produeixen. Aquests darrers han d'aconseguir queviures suficients per a ells mateixos i per als altres dos estaments.[264] En aquesta època l'Església depèn, en gran part, de l'almoina i de les donacions laiques que, ofrenades a Déu, forneixen el patrimoni de l'Església i proporcionen la sustentació dels seus servidors terrestres. Inicialment, la classe dels cavallers estava oberta a tothom prou ric per disposar de cavall i armes, de temps per dedicar-se a la guerra i de béns propis per mantenir-se. Però, a poc a poc, es convertirà en un estatus hereditari, clos i carregat de privilegis, amb un poder militar notable i, de retruc, amb un poder destructiu i aniquilador terribles.

L'estructura sociopolítica de l'EUROPA dels segles XII i XIII s'estintola en el respecte clar que les classes esmentades mantenien entre si. És precisament aquest respecte el que possibilita una situació d'equilibri, sense la qual el sistema hauria esdevingut del tot inoperant i s'hauria autodestruït. El fet que les invasions del nord hagin anat minvant paulatinament fins a desaparèixer gairebé del tot, porta els cavallers a cercar nous camps de batalla i d'acció. Els obliga a dur a terme noves

[264] Cal indicar que l'estament guerrer no és, en cap circumstància, productiu. A l'estament eclesiàstic la situació és més complexa: els clergues depenents dels bisbes no produeixen béns materials i depenen de les altres classes a través de les donacions i almoines; en canvi, els frares, depenents de les abadies, són menys uniformes i n'hi ha de totes menes: alguns es procuren la pròpia sustentació, mentre que d'altres, no.

conquestes o bé a organitzar i arbitrar tornejos entre ells. Els *servents* són de dues menes: els que tenen terres pròpies o cedides i poden mantenir-se, i els pobres que no tenen res i viuen de la *caritat* dels monestirs o bé dels treballs domèstics que duen a terme a les residències de caça, els castells i els palaus dels senyors i de la clerecia amb poders polítics i religiosos notables.[265]

L'avenç dels mitjans per a la producció dels cultius és decisiva per a la progressiva transformació del panorama sociopolític d'EUROPA als segles XI i XII. Una millora de la força motriu dels corrents d'aigua i de la tracció animal, dels mètodes d'enganxament com ara el jou, de les eines de conreu, i la paulatina implantació dels sistemes de reg, iniciat a FRANÇA, provoquen una renovació molt important de la vida rural. La producció creix. És, per tant, possible d'augmentar el comerç, l'intercanvi i l'exportació. Un terreny més petit és suficient per satisfer amb escreix les pròpies necessitats i això propicia l'arrendament de terres, un fet que produeix beneficis. Quan aquests són en *diner* permeten d'efectuar noves compres i l'empresa patrimonial pot obrir-se cap enfora.

Tots aquests fets provoquen un creixement en els béns de consum i els intercanvis es reanimen. Les classes superiors —cavallers, bisbes, abats, etc.— augmenten el seu nivell de vida i afavoreixen la producció de productes superflus, no necessaris ja per a la subsistència. Això fa que el comerç i l'artesania augmentin de forma notable. En aquest nou sistema de producció el diner —la *moneda*— adquireix una importància en la vida quotidiana que fins aleshores no tenia. De retruc, però, produeix una inflació —un creixement dels preus— "lenta però contínua".[266]

També tingué lloc un augment dels desplaçaments. Els uns viatgen per trobar nous mercats, els altres per trobar terres de conreu noves, uns altres per plaer i, fins i tot, hi ha qui fa pelegrinatges a llocs amb una connotació religiosa singular. Tot això suscita una situació nova: possibilita l'intercanvi cultural, posa de manifest l'existència de

---

[265] El sistema feudal planteja, però, problemes d'autoritat i de respecte mutu. Aquest fet es veu agreujat quan existeix un poder global —un emperador o rei— que per tal de mantenir el control de punts allunyats del seu centre i del seu exèrcit —normalment lent—, necessita en ocasion l'ajut i l'obediència dels seus barons o cavallers. Això porta a una doble situació, que arriba a crear dificultats. D'una banda, el rei permet excessos als seus barons per tal de garantir-ne la fidelitat, amb el conseqüent descontentament del *poble* i possibles revoltes. I, d'una altra, els barons s'aixequen contra un poder que consideren massa absolut o asfixiant. Així per exemple, a l'ANGLATERRA del rei JOAN I d'ANGLATERRA [~1167–1216], dit *el Sense Terra*, es produí una revolta dels nobles que, després de derrotar-lo el juny de 1215 a la batalla de RUNYMEDE, l'obligaren a signar la *Carta Magna*, en què el rei es comprometia a mantenir el sistema tradicional —la *llei comuna*—, la llei no escrita que regia els lligams entre els barons, la plebs, el clergat i els comerciants i que, segons J. H. EVES, és la base "de la jurisprudència actual anglesa i americana" [EVES, H. [1953], edició de 1992, 255].

[266] A les darreries del segle XIII, a FRANÇA els cereals costen aproximadament 20 vegades més del que valien l'any 1100.

monedes diverses, d'unitats de mesura diferents, de maneres alternatives de fixar les dates atès que els calendaris són diferents, posa en contacte homes que tenen formes de comportament i d'expressió diverses, etc. Però, i això és important, posa en circulació el diner que, en definitiva, va a parar a les mans dels senyors, de l'Església i dels comerciants. Cal, doncs, un sistema d'intercanvi de monedes i, amb el pas del temps, de regulació i protecció del propi sistema monetari.

L'augment de la producció agrícola provoca, a més, l'abandó de les terres per part de molts que busquen una forma de vida alternativa. Així sorgeixen els *burgs*. Són llocs de circulació, de contacte, de defensa i de protecció sobretot de les riqueses. Generalment s'edifiquen en indrets ben comunicats, fàcils de defensar i, en molts casos, s'hi estableix la residència d'un bisbe o d'un canonge. El nucli bàsic el formen un grup de famílies nobles o de comerciants, artesans i canvistes. A vegades es col·loquen al costat de castells importants, garantint així la protecció dels cavallers i facilitant l'exercici de la jurisprudència en les situacions conflictives. La seva riquesa principal no és, com en el nucli rural, la terra, sinó la reserva d'or i plata i de fons importants de mercaderies, valors més mòbils i alhora més fútils. Les fortunes es fan i es desfan més ràpidament i els lligams familiars no són tan forts, atès que l'activitat de cada un i la naturalesa del patrimoni ciutadà no s'acomoda pas a les obligacions familiars.

En aquest context, davant la creixent puixança i empenta turca que amenaçava CONSTANTINOBLE i OCCIDENT, la cristiandat es planteja la protecció del flanc oriental. Aprofitant aquesta conjuntura favorable, el papa URBÀ II [~1040–1099] planteja a tota la cristiandat la possibilitat d'una àmplia expedició comuna. L'any 1095 invita tots els cavallers a partir cap a JERUSALEM, sota el signe de la creu. L'èxit de la seva crida és molt gran i va més enllà dels plantejaments papals. D'arreu acudeixen cavallers disposats a conquerir el nucli de la cristiandat. Aquesta empresa durarà dos segles i tindrà, com ja hem indicat, moments de tot. La primera croada es prepara detalladament i conscient. Quatre grups armats, per camins diferents, decideixen de reunir-se davant les muralles de CONSTANTINOBLE. No hi ha cap rei.[267] Tanmateix els guerrers més preparats i agosarats —els que finalment prenen JERUSALEM— provenen de FRANÇA. A partir d'aquesta primera croada s'aconsegueix establir nuclis cristians fora del que, fins aleshores, havia estat la cristiandat. Els assentaments llatins de les ribes orientals de la MEDITERRÀNIA es mantindran força temps, al marge de les circumstàncies favorables o desfavorables dels resultats bèl·lics de les pròpies croades, com ja hem esmentat en parlar de la importància que, en aquest aspecte, tingué la tercera croada.

El comerç marítim de BARCELONA i MARSELLA i, sobretot, la tasca dels comerciants de PISA, GÈNOVA i VENÈCIA que, des de la primera croada dugueren a terme

[267] Les monarquies, en aquest moment, o són inexistents o tenen un poder minso.

diverses formes d'associació financera —companyies familiars o societats en comú entre nuclis de famílies o de comerciants—, havien de resoldre les qüestions econòmiques que plantejaven la distància geogràfica i la disparitat monetària. Hàbilment fomentaven les croades fins i tot econòmicament, usant-les com un recurs per a l'establiment de factories i bases comercials. S'establí un entramat, molt ben lligat, entre les ciutats cristianes més importants i certs nuclis de l'altra banda de la MEDITERRÀNIA i de l'ORIENT PRÒXIM. I així fou com s'aconseguí invertir el paper que regia fins a mitjan segle XI. Ara és la cristiandat llatina, i bàsicament la italiana, però també la catalana i la provençal, la que té a les seves mans les claus del comerç de la façana asiàtica més occidental i de la MEDITERRÀNIA i és la que s'endú gairebé tot el fruit d'aquest intercanvi comercial.

Les croades, conjuntament amb la situació de la península IBÈRICA, van permetre d'establir relacions amb països que tenien una cultura més desenvolupada i coneixements científics —de medicina, astronomia, aritmètica, àlgebra, geometria—, filosòfics, artístics, etc., més avançats. Això va propiciar un cert interès per aquestes matèries en alguns cavallers, clergues i homes erudits i féu que, durant el segle XII, la cultura més oriental trobés un ressò, cada cop més ampli a l'EUROPA cristiana. Va permetre de redescobrir certs aspectes de la ciència, la filosofia i l'art de la GRÈCIA clàssica, aspectes que OCCIDENT havia oblidat del tot, així com certs costums i comportaments més refinats i civilitzats. A poc a poc tot això s'imposà a les corts, a les seus episcopals, als monestirs, etc. i donà un impuls molt vigorós al patrimoni cultural de l'EUROPA cristiana. De fet, alimentà el caliu, gairebé apagat, de l'intent de renaixement carolingi.

Aquesta nova situació trobà ressó principalment a les ciutats que intentaven d'acrèixer, conjuntament amb el poder econòmic, el seu prestigi cultural, competint en la magnificència de les seves obres d'art i arquitectòniques. Sembla que, en un primer moment, les ciutats o centres urbans formats a l'entorn d'una seu episcopal o d'una catedral important trobaren millor ressó que les ciutats que depenien de l'autoritat dels cavallers o *barons*. No ens ha d'estranyar, doncs, l'avenç que, d'antuvi, tenen les ciutats més liberals, com ara COLÒNIA, MAINZ, VENÈCIA o TOURS, en què la cultura, l'art, la ciència, etc. són més ben acollides. S'hi estimula l'estudi de la religió, però també de la filosofia; es protegeixen les arts, però són encara un xic contràries a incorporarar entre les seves prioritats, l'estudi de les ciències. No obstant això, en protegir i defensar l'art, l'enginyeria, l'escultura, l'artesania del metall i d'altres materials fan possibles la recerca de nous materials i tècniques, que porten a l'art romànic, tant important des de tots els punts de vista als segles XI i XII. S'afavoreixen certs avenços tècnics imposats per la necessitat de fer xarxes de reg, ponts, camins, clavaguerams, ports comercials, drassanes, etc. Tot això impulsa la competència entre les ciutats, tant entre les de predomini eclesiàstic com entre les més civils. Per tant, afavoreix l'enriquiment de certs nuclis que, fins aleshores, no havien tingut un paper gaire important. Es constitueix una classe mitjana més àmplia —un factor nou molt important tant en el futur més immediat com en el més llunyà— que, malgrat que no aconsegueix pas prendre el lloc a l'aristocràcia, és cada cop més rica —fins i tot més rica en béns materials i en *diners* que l'aristocràcia feudal. En aquesta classe els comerciants, els viatgers i els banquers tenen cada cop més importància.

És aleshores quan els prohoms d'aquestes ciutats prenen consciència d'un fet nou: cal un renaixement cultural sostingut que faci més efectiva la competència. Sorgeixen les escoles, moltes d'elles vinculades a nuclis monàstics. No obstant això, en sorgeixen també de seculars, malgrat que inicialment estan vinculades amb les catedrals i el seu entorn geogràfic. Apareix la figura del mestre que "comenta les lectures" amb els que, asseguts al seu voltant, l'escolten. El quadrivi es converteix en la base damunt la qual cal assentar coneixements apresos del contacte amb d'altres nuclis culturals més sòlids, sobretot de l'islam. N'apareixen a LIEJA, TOURS, CHARTRES, REIMS, PARÍS, etc. I és en aquestes escoles on la matemàtica i l'astronomia, en llavor, comencen a trobar un cert lloc que fins aleshores els havia estat vedat. Els estudis fets a TOLEDO i CATALUNYA per GERBERT, ADELARD de BATH, GERARD de CREMONA [1114–1187], entre d'altres, són transmesos, després de ser llatinitzats. Aquesta tasca de llatinització té lloc també a la SICÍLIA normanda, on és impulsada enèrgicament per dos defensors de la ciència: FREDERIC II [1194–1250] i el seu fill MANFRED [~1231–1266].[268] S'inicia així una situació que lentament entra en crisis amb la doctrina fins aleshores indiscutida i indiscutible dels pares de l'Església. Es comencen a veure fisures i escletxes en el ***dogmatisme de l'Escriptura bíblica***. És l'inici del que, un cop consolidat, coneixerem com el RENAIXEMENT.

Al costat d'aquest avenç cultural més vinculat a l'Església i als homes erudits, es desenvolupa una cultura popular, per boca dels trobadors i els seus cantars de gesta, en l'artesania dels orfebres, dels artesans del cuiro, del ferro forjat, dels vitralls, etc. que va assentant les bases d'un floreixement que es consolidarà definitivament al segle XIII.

Ningú no dubta que el període situat entre la meitat del segle XII i l'any 1320

[268]Per la seva situació geogràfica, SICÍLIA és en un lloc privilegiat d'encontre entre l'est i l'oest, i també entre les dues mediterrànies: l'europea i la islàmica. Després de ser conquerida pels àrabs, que s'hi mantingueren cinquanta anys, fou reconquerida pels grecs que l'havien perdut quan el general romà MARC CLAUDI MARCEL [~270 aC–~202 aC] la conquerí. A aquests els fou arrebatada pels normands. Durant la dominació normanda, a la illa s'empraven el grec, l'àrab i el llatí, un fet que la convertia en un nucli ideal de llatinització dels textos clàssics grecs i dels textos àrabs. A més, els normands mantingueren relacions diplomàtiques amb CONSTANTINOBLE i BAGDAD. Això va possibilitar que tinguessin un coneixement força bo de les obres gregues i islàmiques.

constitueix l'època clàssica de l'EDAT MITJANA d'OCCIDENT. És el moment en què la civilització medieval assoleix, a EUROPA, el seu apogeu i troba el seu equilibri. Aquest equilibri, però, és fràgil, sobretot políticament, atès que entren en joc, en la situació política del feudalisme, la consolidació de les monarquies absolutes. Cada cop més sòlides i potents, creen alhora una situació de més estabilitat i de major tensió, com ja hem posat de manifest en parlar, tot de passada, de la situació a l'ANGLATERRA de JOAN I, germà de RICARD I D'ANGLATERRA, dit *Cor de Lleó*.

La moneda, el tràfic de mercaderies i de diners aquireixen una importància cada cop més gran en un món fins aleshores gairebé rural. Això fa trontollar les bases de l'ordre social de la plebs i, de retruc, dels nobles i del clergat. Si bé l'economia i la situació agrícola s'estabilitzen, el propi creixement de la producció agrícola provoca migracions a les viles i ciutats. Creixen els burgs i, amb ells, el seu sistema socioeconòmic, basat en el diner i el comerç. S'enforteix la rivalitat entre les ciutats importants, un fet que obliga a una especialització dels nuclis urbans i, fins i tot, dels països. Sorgeixen dos nuclis centrals: un al nord, borejant el MAR DEL NORD; un altre a la MEDITERRÀNIA,i sobretot, a la península ITALIANA. Es desenvolupa la fabricació dels teixits, que constitueixen un element d'intercanvi notable. Les ciutats del nord, dedicades a la fabricació i elaboració de teixits, s'enforteixen i arriben a tenir poblacions de 30 000 habitants, un nombre realment important.

Pel que fa a la península ITALIANA, el nucli central de l'activitat econòmica és molt més complex que el de la nòrdica, més restringida a una certa indústria textil. La seva base principal és el comerç marítim, concentrat en els ports de VENÈCIA i GÈNOVA que s'havien imposat als de BARCELONA i MARSELLA, i també al de PISA. Aquestes empreses marítimes van saber aprofitar les croades en favor propi, proporcionant l'ajut material necessari per dur-les a terme, a canvi de poder establir factories comercials i d'altres privilegis econòmics. A més, a l'inici del segle XIII, van aconseguir que se'ls obrís el MAR NEGRE, fins aleshores dominat pels comerciants bizantins. Les seves línies comercials sortiren de la MEDITERRÀNIA i, borejant la península IBÈRICA, anaren cap al sud, paral·lelament a la costa africana, i també cap al nord. A finals del segle XIII, els italians tenien seus comercials, entre d'altres indrets, a EL CAIRE, ALEXANDRIA, TUNÍCIA, CEUTA, IRLANDA, ESCÒCIA, ELS PAÏSOS BAIXOS, etc. Importaven espècies i objectes de luxe d'ORIENT i venien teixits i altres productes produïts a l'EUROPA continental.

Aquesta activitat s'institueix al voltant de famílies poderoses o bé en associacions compostes per comerciants disposats a aportar fons econòmics suficients per tal de fer front a les despeses, repartint després els guanys o les pèrdues. Aquestes companyies practicaven una activitat financera importantíssima: les transferències de fons, el comerç d'or, el canvi de moneda, els pagaments a crèdit, els prèstecs a interessos que anaven del 7 al 33 %, etc. A les acaballes del segle XIII i a començaments del XIV, l'economia italiana, si més no la de la part més *meridional* d'ITÀLIA, estava en mans dels banquers florentins. S'havia arbitrat un sistema *fiscal*, cada cop més elaborat i, també, cada cop més absorbent, al servei del *papat*. Aquestes empreses bancàries depenien, però, dels prestecs que feien a les cases reials que, com ja hem indicat, s'havien anat consolidant. Aquest fet era delicat i, a voltes, deixava les empreses que havien fet els préstecs sense cap mena de cobertura. A FLORÈNCIA, les fallides eren freqüents. Tanmateix, els comptes es portaven molt escrupulosament en centres sedentaris i això obligava a confiar, cada cop més, en l'escriptura i en una *comptabilitat exacta*. Segons M. CROUZET,[269]

> Malgrat que, a partir de 1260 s'usaven amb naturalitat les xifres àrabs i el zero, el sistema de comptabilitat encara era força rudimentari.

I així retrobem el fil del nostre estudi: la implantació i consolidació, a EUROPA, de les xifres indoaràbigues i dels seus algorismes de càlcul.

A tot això cal afegir, sens dubte, l'aparició de les universitats.[270] El papat intentà de recuperar la direcció del moviment intel·lectual, cada cop més puixant, de les escoles. Així, a la primera meitat del segle XIII, INNOCENCI III [1160–1216] i els seus successors van donar suport als professors i als seus oients, en contra dels *capítols catedralicis* i del poder civil. S'involucraren, doncs, en la reagrupació d'aquests col·lectius en associacions permanents i estables, més coherents i cohesionades. Sorgiren les *universitats* —corporacions d'estudiants i alumnes que es mantenien associats sota jurament. I així fou com les universitats anaren guanyant privilegis i una autonomia administrativa més àmplia. Les primeres Universitats italianes del nord d'ITÀLIA, com ara les de BOLONYA [1158] —la més antiga i protegida pels emperadors—, PÀDUA [1222] i MÒDENA, es mostraven rebels a la influència pontifícia. En canvi, entre els anys 1212 i 1246, el cos de mestres i estudiants parisins —que s'havien constituït en universitat l'any 1200— van sol·licitar la protecció de la SANTA SEU, davant de les reticències del rei i del prebost catedralici. El papat creà, a ITÀLIA, les Universitats de ROMA, SIENA i PLASÈNCIA i, a FRANÇA, protegí les de PARÍS [1289], MONTPELLER i TOLOSA [1229]. El propòsit papal era restaurar la difusió de les *doctrines sanes* davant l'heretgia càtar.[271] També va afavorir la creació d'OXFORD [1214], on els erudits anglesos van introduir els mètodes d'ensenyament i estudi implantats a

[269] CROUZET, M. [1967], edició castellana de 1969, 393.

[270] Vegeu BURTON, D M. [1985], edició de 1991, 276–287, o bé SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 212.

[271] Conjunt de doctrines que té el seu origen en el *bogomilisme* de BULGÀRIA. S'estengué a la LLOMBARDIA i OCCITÀNIA, d'on va passar als PAÏSOS CATALANS. Segons aquest corrent hi ha dos principis irreductibles: el bé i el mal. Aquest dualisme té les seves arrels en el *maniqueisme* i el *gnosticisme*, però en la síntesi bogomilista. Predica el menyspreu del cos, refusa el matrimoni i tota

PARÍS. La Universitat de CAMBRIDGE [1231] fou el resultat de certes tensions entre l'autoritat civil d'OXFORD i un grup de professors i alumnes. S'inicia així, d'una banda, l'ensenyament com a activitat remunerada. I, de l'altra, el convenciment que cal *repensar* els coneixements dels pares de l'Església fins aleshores acceptats sense cap mena de dubte, a la llum de les aportacions del món islàmic. Un món que està impregnat de conceptes propis de l'islam i de la GRÈCIA clàssica, així com també de conceptes orientals, fonamentalment indis. Així EUROPA, com dèiem, va assentant les bases del RENAIXEMENT.[272] Les Universitats, en consolidar els coneixements de l'EUROPA llatina, contribuiren indirectament a la consolidació definitiva del sistema decimal indoaràbig i dels seus algorismes de càlcul, però els seus efectes no es notarien fins ben entrat el segle XIV i sobretot en el segle XV.[273]

* * *

Tot aquest entramat de circumstàncies va propiciar, durant els darrers segles de l'EDAT MITJANA i en el context que hem intentat de sintetitzar, un lent canvi en la forma d'entendre el fet cultural, econòmic, científic, comercial, social i religiós. L'EUROPA dels senyors, dels bisbes, dels *burgmestres*, de les grans catedrals, de les ciutats comercials importants i de les grans famílies amb poder econòmic i, de retruc, de decisió política, en estret contacte amb la cultura islàmica que es trobava cada cop més esgotada a ORIENT i cada cop més compromesa a la península IBÈRICA i a la MEDITERRÀNIA, havia de portar a la nova etapa del RENAIXEMENT, les arrels del qual trobem ja a mitjan segle XIV. Aquesta EUROPA que viu encara d'esquena a la cultura bizantina, va incorporant lentament les aportacions d'ORIENT i de la GRÈCIA clàssica a través dels seus contactes i intercanvis amb l'islam. S'ha iniciat l'era dels grans comerciants i, sobretot, l'era del comerç de les zones properes a la MEDITERRÀNIA i també l'era de la competència comercial i artesanal d'EUROPA.[274] El desgavell dels sistemes de mesures, de monedes, de calendari, feia difícil l'intercanvi. Es feia, doncs, cada cop més urgent un mètode que fos ben acceptat i conegut per

mena de relació sexual, així com el consum d'alguns aliments. [Vegeu a l'*Enciclopèdia Catalana*, l'entrada "càtar", o bé l'entrada "bogomilisme".]

[272] BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 276–287.

[273] No foren, però, les universitats les vertaderes impulsores d'aquesta consolidació, si bé hi van participar indirectament.

[274] Com a exemple paradigmàtic d'aquesta nova expansió comercial d'EUROPA, a voltes propiciada pel papat i, a voltes, dificultada per l'excès evangelitzador de l'Església, podeu consultar a D. J. BOORSTIN, per exemple, l'aventura terrestre de MARCO POLO [1254-1294] i després l'aventura marítima europea, molt més lenta i complexa, però també molt més enriquidora en tots els aspectes. Aquesta darrera és més tardana i s'iniciant ben bé a mitjan segle XIV, si deixem de banda alguns fets precursors. [Vegeu BOORSTIN, D. J. [1983], edició castellana de 1986, 140–147, 161–182, 205–254, 255–287.]

tothom, si més no a la MEDITERRÀNIA i a l'EUROPA llatina, i que resultés útil i còmode per tal d'efectuar càlculs i intercanvis.

Podem resumir la situació que ens interessa de ressaltar tot reproduint l'excel·lent text de P. BENOIT:

> El creixement de l'Europa medieval, l'abundància de la producció agrícola, el desenvolupament de les ciutats i la difusió de la moneda, van acompanyades d'una expansió comercial a tots els nivells. La multiplicació dels mercats locals va de bracet amb l'establiment d'un red internacional. L'Europa occidental comercia, en particular, amb l'orient bizantí i musulmà. Exporta teixits, metalls i plata i importa productes de luxe com ara la seda o les espècies provinents de l'Orient Pròxim i també algunes matèries necessàries per a la pròpia indústria com ara l'alum,[275] un mordent indispensable en la preparació de la tintura dels teixits, o dels productes de tint. L'Occident europeu també comercia amb l'Orient islàmic: el blat del nord d'Àfrica i Sicília, la llana, el cuiro i el corall del Magrib, els teixits d'Itàlia i Catalunya, l'or i les espècies d'Àfrica, i la plata europea animen el tràfic comercial. Itàlia, per la seva posició geogràfica i per les seves tradicions, té un lloc privilegiat en el comerç internacional, que féu que les seves grans ciutats, Venècia, Gènova, Pisa o Florència, s'enriquissin.
>
> Des del segle XII, tant els venecians com els genovesos s'associen per dur a terme operacions a ultramar. Un capitalista és el que subministra els fons a un comerciant itinerant que hi aporta el seu treball i, a voltes també, una part dels fons. Cal saber comptar, repartir beneficis, avaluar i repartir pèrdues tot en funció del que s'hagi contractat. A partir del segle XIII, a l'interior de la península italiana s'organitzen grans companyies, creades amb la intenció de perdurar. En aquesta nova estructura, els membres d'un grup familiar i dels seus aliats proporcionen el capital, el *corpo*, es reparteixen els beneficis a prorrata d'acord amb les inversions i assumeixen les càrregues que produeixen les pèrdues eventuals. La companyia accepta també imposicions de particulars, a les quals correspon amb una renda fixa. Algunes d'aquestes associacions assoleixen una gran preponderància i així, al segle XIII, ens trobem, entre d'altres, amb les dels Bonsignori di Siena i, en el XIV, les dels Barbi, i Peruzzi a Florència. Les grans empreses florentines tenen sucursals a tota la Mediterrània i als països de l'Europa més occidental. El comerç va sempre acompanyat d'una gran activitat bancària que els permet d'introduir-se entre els més grans: el papa i els sobirans dels països europeus que n'utilitzen els serveis.
>
> A mitjan segle XIV, una crisi d'una amplitud excepcional colpeix Europa. La crisi demogràfica: després de segles de creixement ininterromput, la població s'estabilitza i, fins i tot, regredeix fortament quan és fuetejada per la Pesta negra

[275] *Alum*: sulfat doble que s'utilitza com a *mordent* en la indústria tèxtil. El tint agafava bé en el teixit o en els filats després d'haver-lo tractat amb *alum*. A l'EDAT MITJANA, aquesta matèria auxiliar, però indispensable, de la indústria tèxtil fou un objecte de comerç molt important.

> [1348]. Europa perd en un segle, segons les estimacions més versemblants, la meitat de la població. Aquest ensorrament s'insereix en un context de depressió econòmica i de conflictes polítics. En un moment en què les guerres, en particular la guerra dels Cent Anys, assolen el continent, la producció i els preus s'enfonsen. El fenòmen és complex. Ja abans que la Pesta es manifestés a Florència, els Bardi i els Peruzzi havien fet fallida, víctimes de préstecs importants fets a prínceps, entre els quals es trobava el rei d'Anglaterra, incapaços de retornar-los.[276]

De fet podem dir que, a mitjan segle XIV, EUROPA sencera cerca nous models polítics, econòmics i socials, però també culturals i espirituals. S'adona que cal posar en marxa tot el que sigui necessari per tal d'evitar situacions de crisi, desesperació, empobriment o mort com els que sent a la seva pell després del fuetejada produïda per la Pesta Negra i la crisi estructural. Però deixem de banda el desenvolupament sociopolític europeu i fixem la nostra atenció en la implantació de l'aritmètica.

5 Les aritmètiques llatines del segle XIII: Fibonacci [Leonardo da Pisa] i Sacrobosco [John de Halifax]

No ens ha d'estranyar doncs que, en aquest context, que hem descrit, de les darreries del segle XII i començaments del XIII, amb la importància que havia assolit l'intercanvi comercial i els contactes amb l'islam i, a través d'ell, amb la matemàtica índia i islàmica, apareguessin les primeres aritmètiques llatines importants.

I així, al segle XIII, ens trobem amb autors llatins, procedents de països i sectors socials diversos —i alhora, com ja hem esmentat abans d'ocupar-nos de l'EUROPA llatina, amb autors no llatins— que contribueixen a popularitzar l'"art de l'algorísmia". Ara ens limitarem a esmentar-ne tres, autòctons de l'EUROPA llatina i fruit d'aquest preludi reinaxentista: un mercader italià, LEONARDO da PISA [~1180–1250], conegut com FIBONACCI; un mestre anglès, JOHN de HALIFAX [~1200–1256], conegut amb el nom de SACROBOSCO, i un franciscà francès, ALEXANDRE de VILLEDIEU [~1225].

Aquests tres personatges van escriure, respectivament, textos l'objectiu primordial dels quals era la introducció dels numerals indoaràbigs a l'EUROPA llatina occidental, i dels algorismes de càlcul associats a les operacions aritmètiques elementals. Els textos dels dos darrers —*Algorismus vulgaris* de SACROBOSCO i *Carmen de Algorismo* d'ALEXANDRE de VILLEDIEU— són força anàlegs en el seu propòsit. Pretenen de facilitar la comprensió dels numerals i dels algorismes de forma senzilla i didàctica. SACROBOSCO elaborà un manual de càlcul *pràctic* i *directe* que tingué molta influència

[276] BENOIT, P. [1989], edició castellana de 1991, 226–227.

per la seva qualitat didàctica.[277] VILLEDIEU, en canvi, per tal de fer-lo memoritzable, el va escriure en *forma de poema*; hi descriu, amb tota mena de detalls, les operacions fonamentals usant els nombres enters indoaràbics amb zero.[278]

JOHN de SACROBOSCO [† 1256] és un erudit anglès de finals del segle XII del qual es coneixen pocs detalls de la vida. Hom dubta, fins i tot, de la seva nacionalitat —irlandesa o escocesa— i del lloc de naixement. Sembla que entrà a l'orde de SANT AGUSTÍ i ho féu al famós monestir de HOLYWOOD a NITHSDALE, ESCÒCIA. Però l'any 1220 marxà a PARÍS on passà la major part de la vida. Allà fou acceptat com a membre de la Universitat, potser el 5 de juny de 1221. Ben aviat fou elegit professor de matemàtiques i, pels seus coneixements de l'aritmètica i àlgebra àrabs, adquirí gran renom. L'any 1231 fou considerat, a més, astrònom. Es desconeix la data exacta de la seva mort [potser l'any 1244, potser l'any 1256]. Fou enterrat al claustre d'un convent parisenc. Va escriure llibres elementals d'astronomia i matemàtica. La seva *De sphæra*, un llibret basat en el text de PTOLEMEU i dels seus comentaristes àrabs,

[277] Va rivalitzar en èxit amb la seva *De Sphæra*, un tractat d'astronomia que s'usà àmpliament en les escoles de l'EDAT MITJANA del segle XIII.

[278] No he pogut localitzar cap còpia d'aquest text. Malgrat tot és clar que reprèn la tradició de la traducció d'ADELARD de BATH, en agafar el nom d'*algorisme* que prové d'AL-ḪWĀRIZMĪ. Ell, però, l'atribueix a un rei indi anomenat ALGOR, del qual afirma que fou qui inventà aquesta "art" nova. Això és, amb tota certesa, erroni. [Vegeu MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 412.]

Era un frare franciscà menor que ensenyava a PARÍS a l'entorn de l'any 1240. El seu text de 1203 conté 244 versos —en *hexàmetre dactílic*— de lectura fàcil, però no sempre de comprensió fàcil. Els primers versos són:

Hinc incipit algorismus.
Haec algorismus ars praesens dicitur in qua
talibus indorum fruimur bis quinque figuris
0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.
Prima significat unum; duo vero secunda;
tertia significat tria; sic procede sinistre
donec ad extremam venias, quæ cifra vocatur.
...
Unum dat prima, secunda decem, dat tertia centenum
quarta dabit mille, milia quinta decem,
...
chifra nil condit, sed dat signare sequentem.

Els podem traduir lliurament:

Aquí comença l'algorisme.
Aquest nou art s'anomena de l'algorisme i d'ell,
a partir d'aquestes dues vegades cinc figures
0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
índies, en podem treure molt de suc.

fou adoptat com a text fonamental d'astronomia per la seva claredat d'exposició.[279] Però el text que ens interessa és l'*Algorismus vulgaris* en què discuteix l'art del càlcul amb enters positius. És un text concret amb deu capítols ben precisos —numeració, addició, substracció, divisió per dos, duplicació, multiplicació, divisió, progressions i extracció d'arrels quadrades i cúbiques. Hi ofereix *sis regles* de multiplicar. Com veurem, és un text elaborat de forma sintètica que conté, de forma evolutiva i didàctica, les regles d'escriptura i de càlcul amb el nou sistema d'enumeració. No conté, però, ni exemples concrets, ni exercicis d'aplicació.[280] La primera vegada s'edità en lloc i data desconeguts [~1490], però després fou àmpliament reeditat: l'any 1517, a VIENA, per HIERONYMUS VIETOR, els anys 1551 i 1552, a CRACÒVIA i, l'any 1523, a VENÈCIA, conjuntament amb el text *De Sphericæ*. És amb tota probabilitat el manual d'aritmètica més usat a l'EDAT MITJANA.[281]

Aquests dos prohoms i aritmètics formen part del que en podríem anomenar la línia eclesiàstica de la societat de l'època. Ambdós van ensenyar a PARÍS. SACROBOSCO fou, a més, un docent de la naixent Universitat de París. En canvi el tercer

---

La primera significa u; la segona, vertaderament, dos;
el significat de la tercera és tres; i així successivament
a mesura que ens desplacem cap a l'esquerra, fins
que arribem a l'extrem, i trobem la xifra.
...
el primer dígit ens dóna les unitats,
el segon, les desenes, el tercer, les centenes,
el quart, el milers, el cinquè, les desenes de mil,
...
La xifra tota sola no val res ni fa res, però acompanyada
fa que el dígit següent [cap a la dreta] tingui un valor més gran.

I després encara aclareix *cifra nêl significát, dat significáre sequénti*: "la xifra [zero] no significa res, però serveix per donar significat a les que segueixen". És per això que "el primer dígit ens dóna les unitats, el segon, les desenes, el tercer, les centenes, el quart, el milers, el cinquè, les desenes de mil ..." Perquè "la xifra tota sola no val res ni fa res, però acompanyada fa que el dígit següent [cap a la dreta] tingui un valor més gran". [Vegeu MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 412 i 423–424.]

279 El lector interessat pot veure'n una petita ressenya a l'entrada "Sacrobosco" del *Dictionary of Scientific Biography*, editat per C. C. GILLISPIE [GILLISPIE, C. C. [1970–80], XII (1975), 60–63].

280 En això, s'assembla molt més al text de VILLEDIEU que a l'obra, molt més renaixentista, de FIBONACCI. Tanmateix, però, PIETRI PHILOMENI de DÀCIA en féu un comentari força extens en el qual les regles són aclarides amb exemples. Tanmateix, no conté tampoc exercicis d'aplicació a qüestions i problemes concrets. Vegeu l'edició feta per M. CURTZE l'any 1897. El comentari de DÀCIA és, però, segons CURTZE, M. [1987], ix, del 19 de febrer de l'any 1448, és a dir, força tardà, si bé hom creu que fou escrit al segle XIII.

281 Del text de SACROBOSCO se'n conserven 200 manuscrits llatins i disset edicions realitzades en el primer segle d'impremta [vegeu la nota 4 d'ALLARD, A. [1995], o bé SMITH, D. E. [1923], edició de [1958], I, 222].

personatge prové de la classe dels comerciants.[282] Des del punt de vista matemàtic és, de tots tres, el més notable. El podem considerar "el primer matemàtic de la cristiandat occidental".[283]

LEONARDO da PISA [~1170–1240] era membre de la família BONACCI i per aquesta raó és conegut com FIBONACCI —"figlio" o "filius BONACCI". El seu pare, home públic i comerciant, fou designat a la factoria pisana de BUGIA, a l'ALGÈRIA actual. Ben aviat s'adonà que calia que el seu fill es traslladés a aquella localitat a *on podria aprendre l'art del càlcul, una eina cada cop més necessària en el món del comerç.* I no hi ha pas cap mena de dubte que fou a la banda sud de la MEDITERRÀNIA on LEONARDO entrà en contacte amb els "nous numerals indis" i també on va rebre una educació excel·lent. El seu pare, vinculat amb l'administració de la República de Pisa —*diputato della patria pubblica*— aviat l'envià, per raons de caire comercial, a EGIPTE, SÍRIA, BIZANCI, GRÈCIA, SICÍLIA i PROVENÇA.[284] En aquests viatges LEONARDO adquirí un coneixement notable en matemàtiques, gràcies al seu contacte amb nadius erudits. Fou tan notable que excel·lí per damunt dels estàndards matemàtics europeus de l'època. No solament pogué conèixer i dominar amb tota naturalitat el nou sistema numèric —del que n'esdevindria un defensor infatigable—[285] sinò que els aplicà amb èxit a cada un dels àmbits de l'activitat comercial.[286] Però, deixeble àvid d'aprendre, assoleix també un coneixement acurat dels algorismes de l'àlgebra islàmica —l'àlgebra de primer i segon grau— i s'endinsa en els problemes de geometria, als quals aconsegueix donar un tractament algèbric. L'obra d'aquest insigne pisà —matemàtic preclar i insigne del segle XIII i de la història de la matemàtica— palesa una qualitat matemàtica impròpia de l'època i promonitòria del desenvolupament

[282]Segons D. E. SMITH, "malgrat que Fibonacci no el podem considerar fruit de les universistats, ell ens parla del seu mestre i en diu que havia estudiat a Oxford i a París. Li dedica el segon manuscrit del *Liber abaci*. Es tracta de Michael Scott, el qual no solament havia estudiat a les universitats esmentades, sinò que havia après directament dels matemàtics àrabs i havia realitzat observacions d'astronomia a Toledo. Fou nomenat per Frederic II, que l'havia contractat per tal que contribuís a difondre entre els erudits, a través de les traduccions àrabs, els textos grecs que s'acabaven de descobrir" [SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 220–221].

[283]GILLISPIE, C. C. [1970–80], IV (1971), 604.

[284]És potser aquesta activitat viatgera la que féu que, ocasionalment en algun indret, es donés a conèixer com a LEONARDO BIGOLLO, atès que, a la TOSCANA, *bigollo* significa precisament *viatger* [SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 216].

[285]Segons podem llegir a GILLISPIE, C. C. [1970–80], IV (1971), 605: "Tots els mètodes [de càlcul] —segons diu el mateix FIBONACCI— tant els "algorísmics" com els dels "arcs pitagòrics" (referint-se aparentment a l'àbac de Gerbert) se'ns presenten com "erronis" davant dels mètodes provinents de l'Índia".

[286]En aquest aspecte, com veurem més endavant, l'obra de FIBONACCI és essencialment diferent de les de JOHN SACROBOSCO i ALEXANDRE de VILLEDIEU i constitueix un precedent, amb més de dos segles d'anticipació, de les primeres aritmètiques del RENAIXEMENT.

futur de la matemàtica. Aconseguí de retornar la importància deguda a l'estudi dels problemes *diofàntics*[287] que, després de DIOFANT [?–∼250], EUROPA havia oblidat completament. De retruc, doncs, retorna a l'aritmètica entesa com una ciència,[288] i no simplement com un art de calcular més o menys elemental.[289] Així doncs, el podem considerar amb VILLEDIEU i SACROBOSCO un *logístic* notable del segle XIII, però, dels tres, és l'únic *aritmètic*, en el sentit clàssic grec del terme. S'adonà també del fet que els teoremes del llibre II de *Els Elements* d'EUCLIDES són, de fet, teoremes algèbrics i n'ofereix la transcripció algèbrica idònia amb la demostració corresponent. Malgrat que, de totes les seves obres, la més notable és el *Liber quadratorum* [1225], nosaltres solament ens interessarem pel seu *Liber abaci* [1202, 1228].[290] I malgrat que desitjo pasd'estendre'm excessivament fent un panegíric de FIBONACCI atès que l'objectiu d'aquest apartat és la *introducció del sistema indoaràbic* a l'EUROPA llatina del segle XIII i primera meitat del XIV, tampoc no voldria passar per alt almenys dos fets notables de l'obra del pisà.

* * *

[287] *L'àlgebra* té com a objecte la resolució de problemes *determinats* —és a dir, amb una solució ben determinada— i no es preocupa excessivament de la naturalesa numèrica de la solució. *L'anàlisi diofàntica* —una part de la matemàtica que pren el nom de les recerques del matemàtic grec DIOFANT— analitza problemes en els quals la solució *no està pas determinada*. És a dir, problemes que poden tenir diverses solucions i, en molts casos, infinites, que han de ser *enteres* o, en el pitjor dels casos, *racionals*.

[288] Cal indicar, no obstant això, que aquesta mena de problemes havien interessat als matemàtics xinesos, entre d'altres, la influència dels quals és nul·la a OCCIDENT; als indis, que havien resolt l'equació diofàntica de primer grau i l'equació de Pell, entre d'altres; i als àrabs que, sense cap mena de dubte, havien resolt certes equacions diofàntiques de primer i segon grau. Tots ells influïren en FIBONACCI. [Vegeu KATZ, V. J. [1993], 204–211; YOUSCHKEVITCH, A. P. [1976], 66–70.]

[289] Els grecs havien dividit l'estudi dels nombres naturals en dues branques: l'*aritmètica* o *estudi teòric* de les propietats numèriques dels naturals i la *logística* o *art pràctica* de calcular amb ells.

[290] El *Liber quadratorum* ha estat traduït al francès, l'anglès, el castellà, l'italià, etc. i ha estat objecte d'estudi i anàlisi profunds.

El *Liber abaci* és una obra que, com lamenta CARL B. BOYER, en una nota a peu de pàgina, quan parla de FIBONACCI, no ha rebut mai l'atenció que es mereix. No s'ha traduït a cap llengua. Actualment, per sort per als estudiosos de la matemàtica del segle XIII, A. ALLARD està treballant en una traducció comentada. Però, per ara, només la podem consultar en l'edició dels escrits de LEONARDO, feta per B. BONCOMPAGNI, *Scritti di Leonardo Pisano*.

A més va escriure *Practica Geometrica* [1220–1221], un petit text sense títol que s'identifica amb el nom de *Flos Leonardi Bigolli pisani* [1225] i una carta, sense data, adreçada al filòsof imperial THEODOR.

El lector interessat a disposar d'una informació més àmplia de l'obra d'aquest matemàtic pot consultar LORIA, G. [1950], edició de 1982, 219–235; BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 328–331; BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 256–269, 282–285 i KATZ, V. J. [1993], 273–275.

Vegem, doncs, una síntesi succinta, absolutament condensada, del *liber quadratorum* i un resultat realment innovador del *Flos Leonardi*. De fet,

I. El *Liber quadratorum*. FIBONACCI va escriure una obra aritmètica amb el propòsit de resoldre un *problema concret* que li havia plantejat *màster* GIOVANNI da PALERMO [~1230]:

> Trobar un nombre quadrat del qual, tant si li sumem com si li traiem cinc unitats, s'obtenen quadrats.

És a dir, cerquem un x tal que $x^2 \pm 5 = \square$. Per tal de resoldre'l FIBONACCI elabora el *Liber quadratorum*, un llibre important, com acabem de dir, perquè va retornar, a la matemàtica, el gust per les qüestions teòriques que hi ha dessota un problema concret i per la recerca del mètode general a l'hora de resoldre'l. Així la matemàtica redescobria que, a vegades, un problema concret permet d'establir generalitzacions insospitades.[291] EUROPA recuperava així una activitat intel·lectual —l'activitat matemàtica— que durant segles havia oblidat.

II. *L'existència de nombres irracionals no euclidians*. L'altre fet és de naturalesa numèrica més concreta. FIBONACCI s'adona de l'existència de *nombres irracionals*, que no són pas de la forma

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},$$

que eren els únics que EUCLIDES havia considerat al llibre X de *Els Elements* i que, d'alguna manera, tothom creia que eren els únics possibles.[292] A *Flos Leonardi* [1224], FIBONACCI considera la cúbica $x^3+2x^2+10x = 20$.[293] Estableix que la seva solució és irracional —tot avançant una tècnica per reconèixer condicions necessàries per tal que una equació tingui *arrels racionals*—, que no és de cap de les formes indicades per EUCLIDES. Estableix així l'existència d'irracionals més *sofisticats*, més *complicats* que els euclidians. I finalment n'ofereix una solució aproximada: 1; 20, 7, 42, 33, 4, 40.[294]

[291] FIBONACCI [1225]. Aquest text ha estat traduït a les llengües més comunes d'EUROPA: francès, anglès, italià, castellà, etc.

[292] De fet, una anàlisi algèbrica de la resolució dels problemes geomètrics de *Els Elements* d'EUCLIDES mena solament a nombres irracionals de les formes: $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ i $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

[293] Aquesta cúbica la trobem resolta a l'àlgebra de 'UMAR HAYYĀM [1050–1123], però geomètricament; és a dir, tallant una circumferència i una hipèrbole [vegeu WOEPCKE, F. [1851], 78]. Recordem que el poeta 'UMAR HAYYĀM, autor de les *Rubā'iyyāt* (quartetes), fou també matemàtic, astrònom i que va dedicar el seu text d'àlgebra a la resolució de les cúbiques, en un clar intent d'anar més enllà del que havia aconseguit AL-ḪWĀRIZMĪ. La seva resolució, però, és geomètrica i no *algorísmica*. La seva resolució geomètrica no es basa pas en l'ús de les coordenades, sinó en les propietats geomètriques de les còniques.

[294] PICUTTI, E. [1983], 299, 342–348.

Aquesta solució la dóna en forma *sexagesimal* —seguint l'escriptura numèrica babilònica.[295] Això posa de manifest —i em sembla d'interès remarcar-ho— que a FIBONACCI li passà per alt la possibilitat d'usar el sistema decimal en la seva forma fraccionària o *decimal*, un fet que, no obstant això, ja havia estat observat pels matemàtics àrabs.[296]

En resum, doncs, hem de reafirmar el que hem dit abans: FIBONACCI excel·leix amb escreix respecte als altres matemàtics del segle XIII i a molts del segle XIV. La seva obra sobre l'*algorisme* és molt més completa i abasta molt més que les d'ALEXANDRE de VILLEDIEU i de JOHN de HOLYWOOD. Aquesta és, potser, la raó per la qual la seva obra —força coneguda a la segona meitat del segle XIV i al segle XV— no tingué ni el ressò ni la influència que hauria d'haver assolit quan va aparèixer, a començaments del segle XIII.

* * *

Dedicarem la resta del paràgraf a comentar els textos de FIBONACCI [297] i de SACROBOSCO[298] relatius al sistema indoaràbic i als algorismes de càlcul corresponents a la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i l'extracció d'arrels quadrada i cúbica.

5.1 El *Liber abaci*

El títol del text és una mena d'ironia. Per a FIBONACCI, l'àbac, l'autèntic àbac, és el *nou sistema*. L'obra és excessiva en extensió per als estàndards de l'època així com per a la capacitat dels lectors possibles. Això pot explicar, i alhora justificar, l'escassa difusió que va tenir, molt inferior a la dels altres dos autors mencionats. Sabem que va elaborar-ne dos manuscrits, el primer l'any 1202 i el segon l'any 1228. Al darrer

[295] Això posa de manifest que FIBONACCI coneixia el sistema de numeració que s'havia desenvolupat a la MESOPOTÀMIA entre el 3000 i el 2000 aC i també una tècnica aplicada pels àrabs i xinesos, coneguda avui com a *mètode de Hörner*, per *determinar bones aproximacions* d'una equació. [Vegeu, per exemple, TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, III, 512, o bé BURTON [1985], edició de 1991, 260–261.]

[296] Però com una simple transformació del cas sexagesimal. No hi ha cap constància que, fins al segle XVI, ningú s'adonés d'un fet absolutament revolucionari: els algorismes de càlcul que s'apliquen als nombres enters expressats en sistema decimal i els que s'apliquen als nombres fraccionaris, expressats en sistema decimal, són els *mateixos*.

[297] El *Liber abaci*, com ja hem dit, el trobem a BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I. Nosaltres, però, hem consultat la còpia en microfitxa dels *Landmarks of Sciences*, I. La paginació farà referència, en tots els casos, a aquesta còpia microfitxada.

[298] De l'obra de SACROBOSCO disposem de l'edició de CURTZE, M. [1897] que conté els comentaris de P. P. di DÀCIA i que usarem per tal de clarificar, amb exemples, les regles de l'original de SACROBOSCO. N'existeix una traducció anglesa parcial —omet, per exemple, l'algorisme de l'arrel cúbica— a GRANT, E. [1974], 94–101.

hi va "afegir material nou que no es trobava en el primer i alhora va suprimir-hi el que li semblava superflu".

En l'actualitat n'existeixen dotze còpies manuscrites, un fet que contrasta amb la poca ressonància que ha tingut entre els estudiosos de la història de la matemàtica i amb el fet que mai no hagi estat editat separadament de les altres obres de FIBONACCI ni estudiat amb profunditat.[299] Però reafirma el fet, ja esmentat, que fou àmpliament conegut en els segles XIV i XV. No ens ha de sorprendre, doncs, que textos força posteriors siguin d'estructura semblant al *Liber abaci* i, fins i tot, continguin exemples d'aquest text singular de començaments del segle XIII. El manuscrit de 1228 que es conserva té 459 pàgines. L'obra està dividida en quinze capítols, que, per tal de fer-ne una presentació sistemàtica, agrupem en quatre seccions, seguint la breu, però clara, exposició de K. VOGEL.[300]

A la Secció I, capítols 1 al 7,[301] FIBONACCI fa referència a la notació romana i al càlcul fent servir els dits, sobretot "per aquells que els costa de retenir els nombres de memòria; els caldrà *guardar-los a les mans*".[302] Hi introdueix les xifres indoaràbigues i la *barra horitzontal* per a les fraccions.[303] Els nombres es llegeixen d'esquerra a dreta: les unitats de cada grup són a la dreta del grup, després vénen les desenes i, en tercer lloc, les centenes del grup. Les fraccions, en canvi, les escriu a l'esquerra del nombre enter. Aquesta part del *Liber Abaci* té, per a nosaltres, un interès particular atès que fa referència a les xifres indoaràbigues i als quatre algorismes de càlcul més elementals: sumar, restar, multiplicar i dividir. Més endavant en farem una anàlisi que ens permetrà de comparar-lo amb el text de SACROBOSCO que analitzarem en el § 5.2. És precisament en aquesta part on trobem una de les aportacions originals de FIBONACCI: les *fractiones in gradibus*. En general, els nombres fraccionaris s'escrivien

[299] Ja hem esmentat que A. ALLARD està treballant en un estudi del *Liber abaci*, que esperem que sigui editat ben aviat.

[300] Vegeu l'entrada "Fibonacci, Leonardo o Leonardo of Pisa", a GILLISPIE, C. C. [1970–80], IV (1971), 604–613. La redacció és de KURT VOGEL. G. LIBRI publica la introducció i el capítol 15 a LIBRI, G. [1838–1841], II, nota 1, a partir de la pàgina 287, i nota 3, a partir de la 307. A la nota 2, ens ofereix la introducció de la *Practica geometricæ*.

[301] Els capítols són:

1. Les nou figures índies, les xifres i la numeració.
2. La multiplicació d'enters.
3. L'addició.
4. La substracció.
5. La divisió.
6. La multiplicació d'enters i de fraccions, la multiplicació de fraccions.
7. L'addició, substracció i divisió d'enters i de fraccions i la reducció a denominador comú.

[302] Vegeu l'article de síntesi d'ALLARD, A. [1995], 744–745.

[303] Els matemàtics indis feien servir els nombres fraccionaris sense barra de separació. Els àrabs adoptaren la notació índia [BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 261].

directament separant el numerador i el denominador amb una barra o bé, seguint la tècnica egípcia, usant fraccions unitàries.[304] Però LEONARDO da PISA introdueix la notació

$$\frac{1\ \ 5\ \ 7}{2\ \ 6\ \ 10}$$

que significa

$$\frac{7}{10}+\frac{5}{10\times 6}+\frac{1}{10\times 6\times 2}=\frac{\frac{\frac{1}{2}+5}{6}+7}{10}.$$

Són les fraccions contínues ascendents finites.[305] Nosaltres, però, com hem fet fins ara, evitarem les fraccions i solament ens preocuparem de la representació dels nombres enters positius i dels seus algorismes.

La Secció 2, capítols 8 al 11,[306] consta de tota mena de problemes relatius a l'*art del comerç*: el canvi de monedes, càlcul d'interessos, aliatges de metalls, barreges de productes d'una mateixa espècie però de preus diferents, transformació d'unitats de mesures dels països de les costes mediterrànies. És la part aplicada i hi dedica un centenar de pàgines.[307]

La Secció 3, capítols 12 i 13,[308] és la menys concreta. Conté problemes de tota mena. És un calaix de sastre. Hi ha problemes de tipus recreatius i problemes més clàssics com ara els problemes dels dipòsits. És un ventall de problemes senzills provinents de *totes* les cultures precedents: la grega, la xinesa, l'Índia, l'àrab, etc. El

---

[304] El lector interessat pot consultar BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 328, o bé BURTON, D. M. [1985], edició de 1991, 261.

[305] Vegeu BREZINSKI, C. [1991], 51–57, o bé VIADER, P. [1994], 8–11. Segons RENÉ TATON, les pràctiques d'expressar "les fraccions ordinàries en fraccions simples, el numerador de les quals és la unitat, d'origen egipci, fou potser el que van portar l'autor del *Liber abaci* a estudiar les fraccions contínues: $\frac{13}{20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{1\,1\,1}{2\,5\,2}=\frac{1+\frac{1+\frac{1}{2}}{5}}{2}$" [TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 640]. Recordem que FIBONACCI les introdueix a la "Pars sexta, septimi capituli. De gradatione partium in singulis partibus".

[306] Aquests capítols els titula:

8. Les compres i les vendes.
9. Les barates o canvis.
10. Les societats.
11. El canvi de monedes.

[307] Conté problemes indeterminats com ara el "problema xinès dels ocells". En aquest aspecte, ja ho hem dit diverses vegades, és pioner. Caldrà esperar les aritmètiques del segle XV per trobar un allau tan gran de problemes. A l'època de FIBONACCI això no era típic.

[308] Els titula:

12. La solució de múltiples problemes.
13. La regla de chatayn que permet de resoldre problemes diversos.

darrer de tots és el problema dels conills, un problema que faria famós FIBONACCI dins la matemàtica, perquè condueix a la *successió de Fibonacci*.[309] L'habilitat de FIBONACCI per plantejar i resoldre els problemes posa de manifest un gran coneixement de les tècniques àrabs i, en particular, de la resolució algèbrica d'equacions de primer i segon grau i dels sistemes lineals.

La darrera secció, capítols 14 i 15,[310] és probablement la que posa de manifest, de forma més clara, l'habilitat de FIBONACCI a l'hora d'usar les tècniques algèbriques i la seva utilitat en la resolució de problemes de geometria. En aquesta secció es posa de manifest, a més, que LEONARDO coneixia bé l'obra d'EUCLIDES —un fet que retrobem a la *Practica Geometricæ*. Al capítol 14 ofereix l'algorisme d'extracció d'arrels. Segueix la tècnica dels àrabs d'afegir zeros al radicand per tal d'aconseguir "valors aproximats força acurats".[311] El capítol s'acaba amb una presentació del càlcul amb irracionals seguint, també en aquest cas, els passos dels matemàtics àrabs. Cada igualtat s'acompanya de la seva demostració geomètrica.[312] El darrer capítol és fonamentalment un capítol dedicat a les equacions de segon grau i a la seva resolució, tot atribuint-ne la paternitat a "MAUMEHT" —és a dir, a AL–H̱WĀRIZMĪ. No s'imposa cap mena de limitació a l'hora d'usar irracionals. Els exemples són copiats textualment de les àlgebres d'AL–H̱WĀRIZMĪ i d'AL–KHARKHĪ. També és aquí on estudia problemes que provenen d'aplicar el *teorema de Pitàgoras* i de fer-ne una lectura algèbrica.

La matemàtica d'Occident deu a FIBONACCI una obra pionera —històricament molt important, perquè és una síntesi aritmeticoalgèbrica de tota la matemàtica precedent— i, alhora, la introducció d'una certa terminologia pròpia, que inaugu-

[309] "Suposem que posem una parella de conills en una conillera tancada. Quantes parelles de conills s'hauran produït de la primera parella en un any, si la naturalesa dels conills és tal que cada parella produeix exactament una parella de conills, a partir del segon mes de la seva existència que és quan esdevé fèrtil" [BONCOMPAGNI, B. [1857], I, 351].

[310] Els seus títols són:

14. L'extracció d'arrels quadrades i cúbiques i les operacions amb arrels.
15. La geometria i les qüestions d'àlgebra [vegeu LIBRI, S. [1838-1841], II, nota 1, 287].

[311] Fa servir l'antiga tècnica d'aproximació d'Heró d'Alexandria, ben coneguda pels matemàtics de l'islam. Si $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$, la primera aproximació és $a_0 = a$; com a segona aproximació, obté: $a_1 = a_0 + \frac{r}{2a_0}$. L'error comès és $r_1 = a_1^2 - A$. Després es torna a repetir el procés.

Pel que fa a l'arrel cúbica $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{a^3 + r}$, la primera aproximació és $a_1 = a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3}$ i $r_1 = A - a_1^3$. Aleshores obté $a_2 = a_1 + \frac{r_1}{3a_1 \cdot (a+1)}$ [vegeu GILLISPIE, [1970–80], IV (1971), 607–608].

Aquestes tècniques les trobem ja en matemàtics de l'islam, com ara AL–NASAWĪ [vegeu YOUSCHKEVITCH, A. P. [1976], 22].

[312] És d'interès fer notar que, per a FIBONACCI, un irracional a voltes representa un segment i a voltes una superfície. En aquesta part es posa de manifest el coneixement que tenia dels llibres II i X de *Els Elements* d'EUCLIDES.

ra la simbologia algèbrica.[313]

* * *

Fem ara una anàlisi del sistema indoaràbic i dels algorismes que trobem al *Liber abaci*.

Capítol primer. Les xifres índies són nou:

$$9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Amb elles, i amb una altra, que els àrabs anomenen *zephirum*, s'escriuen tots els nombres. El primer lloc, començant per la dreta, designa les unitats; el segon, les desenes i el següent —"segon de les desenes"— les centenes. El lloc següent està ocupat pels milers, després les desenes de milers i les centenes de milers i així indefinidament. Cada xifra —la xifra d'un lloc donat— és un múltiple de deu de la mateixa xifra col·locada en el lloc precedent —el lloc de la dreta.

Després d'una descripció lingüística de com cal escriure els nombres i del significat del *zephirum*, ens ofereix uns quants exemples, basant-se en el sistema romà:[314]

M.I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMMDC	MMM
1001	2023	3022	3020	5600	3000

MCXI	MCCXXXIIII	MMMMCCCXXI	
1111	1234	4321	

La primera figura, és de primer grau, i s'anomena un; la segona, de segon grau, deu; la tercera, de tercer grau, cent; la quarta, mil. Després vénen els llocs deu mil; cent mil, mil mils, deu mil mils, cent mil mils, mil mil mils, etc. En cada grup de tres, considera que la tercera és la que es troba en la *part superior* [del grup] i la següent en la *part inferior* [del grup següent]. Donat un nombre —una tirallonga de xifres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ i 9—, el considerem, començant per la dreta, en grups de tres. Són els grups de les unitats, de les unitats de mil, de les unitats de mil mils, etc. Per llegir, per exemple, el número de figures 678 935 784 105 296, diem "sis-cents setanta-vuit mil mil mil de mils, [que és el que es troba en el quart grup o arc a partir de la dreta], nou-cents trenta-cinc mil mil de mils [que trobem dessota el tercer arc], etc."[315]

[313] Usa *radix* o *res* —cosa— per referir-se a la incògnita que avui representem amb una lletra com ara x; usa també *pars*. Això li permet d'usar *tres incògnites* en un mateix problema. *Quadratus, census, avere* serveixen per indicar x^2, *cubus, census de censu* i *cubus cubi* per indicar, respectivament, x^3, x^4 i x^6. Les constants reben el nom de *numeris, denarius* o *dragma*.

[314] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 3. Recordem que la paginació correspon als *Landmarks of Sciences*, I [1979].

[315] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], 4–5.

Tot seguit FIBONACCI estableix la "taula de sumar i multiplicar nombres" que reproduïm a la pàgina següent.[316] Aleshores disposa ja de l'eina indispensable per començar a descriure les operacions. Curiosament, FIBONACCI inicia la presentació dels algorismes començant amb el producte.

Capítol segon. Hi tracta la multiplicació dels nombres enters. El divideix en vuit parts per tal de fer-lo més intel·ligible. Tot consisteix a donar algorismes per multiplicar *dos contra dos* o *un contra molts; tres contra tres* o *contra dos; quatre contra quatre* o *menys*; etc.

La millor manera de seguir el seu mètode és fixar-se en els exemples. Cal indicar, però, que recorre a la tècnica de "retenir o guardar a la mà" certs resultats intermedis. Segons A. ALLARD això palesa el coneixement que tenia de la tècnica desenvolupada per BEDA, dit *el Venerable*, "per efectuar els càlculs manuals".[317] A més, fa servir una tècnica basada en el *creuament*, que avui simbolitzaríem algèbricament de la forma següent: si volem multiplicar els nombres a i b, amb

$$\begin{aligned} a &= a_m\,10^m + a_{m-1}\,10^{m-1} + \cdots + a_2\,10^2 + a_1\,10 + a_0, \\ b &= b_n\,10^n + b_{n-1}\,10^{n-1} + \cdots + b_2\,10^2 + b_1\,10 + b_0, \end{aligned}$$

hem decalcular:

- les unitats: $c_0 = a_0\,b_0$,
- les desenes: $c_1 = a_0\,b_1 + a_1\,b_0$,
- les centenes: $c_2 = a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0$,
- els milers: $c_3 = a_0\,b_3 + a_1\,b_2 + a_2\,b_1 + a_3\,b_0$,
- etc.

El producte és el nombre

$$c = c_n\,10^n + c_{n-1}\,10^{n-1} + \cdots + c_2\,10^2 + c_1\,10 + c_0.$$

És el *mètode polinòmic*. Cal retenir "a la mà" les unitats d'ordre superior de cada producte creuat per tal de poder-les afegir allà on calgui, sense deixar-se res.[318]

Els exemples ens serviran per entendre-ho. D'antuvi posem un nombre dessota de l'altre, el més gran damunt del més petit, i multipliquem.[319]

Suposem que volem multiplicar 12 per 12:

[316] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], 6.

[317] Vegeu ALLARD, A. [1995], 744–745. Vegeu EVES, H. [1953], edició de 1992, 13.

[318] A. ALLARD fa notar que "és molt versemblant que el mètode li fos suggerit com aplicació del càlcul del producte o del quadrat d'un polinomi" [vegeu ALLARD, A. [1995], 746].

[319] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 7.

Taula de sumar i multiplicar nombres

suma binària				
2	i	2	són	4
2		3		5
2		4		6
2		5		7
2		6		8
2		7		9
2		8		10
2		9		11
2		10		12

suma ternària				
3	i	3	són	6
3		4		7
3		5		8
3		6		9
3		7		10
3		8		11
3		9		12
3		10		13

suma quarta				
4	i	4	són	8
4		5		9
4		6		10
4		7		11
4		8		12
4		9		13
4		10		14

suma cinquena				
5	i	5	són	10
5		6		11
5		7		12
5		8		13
5		9		14
5		10		15

suma sisena				
6	i	6	són	12
6		7		13
6		8		14
6		9		15
6		10		16

suma setena				
7	i	7	són	14
7		8		15
7		9		16
7		10		17

suma vuitena				
8	i	8	són	16
8		9		17
8		10		18

suma novena				
9	i	9	són	18
9		10		19

10	i	10	són	20
10		20		30
10		30		40
10		40		50
10		50		60
10		60		70
10		70		80
10		80		90
10		90		100
20	i	20		40
20		30		50
20		40		60
20		50		70
20		60		80
20		70		90
20		80		100
20		90		110
30	i	30	són	60
30		40		70
30		50		80
30		60		90
30		70		100
30		80		110
30		90		120
40	i	40	són	80
40		50		90
40		60		100
40		70		110
40		80		120
40		90		130
50	i	50	són	100
50		60		110
50		70		120
50		80		130
50		90		140
60	i	60	són	120
60		70		130
60		80		140
60		90		150
70	i	70	són	140
70		80		150
70		90		160
80	i	80	són	160
80		90		170
90	i	90	són	180

Funcions explícites per fer multiplicacions

De dos				
2	vegades	2	són	4
2		3		6
2		4		8
2		5		10
2		6		12
2		7		14
2		8		16
2		9		18
2		10		20

De tres				
3	vegades	3	són	9
3		4		12
3		5		15
3		6		18
3		7		21
3		8		24
3		9		27
3		10		30

De quatre				
4	vegades	4	són	16
4		5		20
4		6		24
4		7		28
4		8		32
4		9		36
4		10		40

De cinc				
5	vegades	5	són	25
5		6		30
5		7		35
5		8		40
5		9		45
5		10		50

De sis				
6	vegades	6	són	36
6		7		42
6		8		48
6		9		54
6		10		60

De set				
7	vegades	7	són	49
7		8		56
7		9		63
7		10		70

De vuit				
8	vegades	8	són	64
8		9		72
8		10		80

De nou				
9	vegades	9	són	81
9		10		90

De deu				
10	vegades	10	són	100
10		20		200
10		30		300
10		40		400
10		50		500
10		60		600
10		70		700
10		80		800
10		90		900
10		100		1 000

Primer multipliquem les xifres d'ordre inferior: 2×2 dóna 4. Són les unitats. Les posem a l'ordre inferior.

Ara multipliquem la d'ordre inferior de baix per la d'ordre superior de dalt i la d'ordre superior de dalt per la d'ordre inferior de baix i les sumem. És a dir: 1×2 i 2×1, que sumades donen 4 (que són desenes). Ara les col·loquem al seu lloc.

Finalment multipliquem les d'ordre superior; és a dir, 1 per 1, que dóna 1, i el resultat el col·loquem al seu lloc.

PRIMERA DESCRIPCIÓ	4 12 12
SEGONA	44 12 12
TERCERA	144 12 12

Aquest exemple és senzill i no ens ha fet falta guardar res a la mà.

A l'exemple següent —la multiplicació de 37 per 37— farem el mateix, però "guardant a la mà".

Primer fem $7 \times 7 = 49$. Col·loquem el 9 damunt del 7 i "en guardem 4 a la mà".

Ara fem $7 \times 3 = 21$ i $3 \times 7 = 21$ i els sumem. S'obté 42. Hi sumem els 4 que tenim guardats a la mà. Dóna 46. Posem el 6 damunt del 3 i "en guardem 4 a la mà".

Finalment fem $3 \times 3 = 9$. Hi sumem els quatre que tenim a la mà. Dóna 13, que col·loquem al seu lloc.

PRIMERA DESCRIPCIÓ	9 37 37
SEGONA	69 37 37
TERCERA	1369 37 37

FIBONACCI ens ofereix, a més, una *prova* que garanteix la validesa del resultat. En el cas del 37×37, fa el següent: $3 + 7 = 10$, $10 - 9 = 1$. Aleshores $1 \times 1 = 1$. D'altra banda, $1 + 3 + 6 + 9 = 19$. Sumant les xifres obté: $9 + 1 = 10$ i, finalment, 1. "Els nous no compten".[320]

[320] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 8. Heus aquí la *prova del nou*. La prova, com és sabut de tothom, consisteix a sumar separadament les xifres significatives del multiplicand i del multiplicador, repetint el procés fins a obtenir una sola xifra. [Això equival, de fet, a buscar el *romanent* d'un nombre quan el dividim per nou, però FIBONACCI encara no ens ha parlat de l'algorisme de divisió i, un cop ho hagi fet, no ens dirà mai que el que fem és treure el màxim nombre possible de múltiples de nou.] Després multipliquem les dues xifres d'unitats, la que s'ha obtingut del multiplicand i la que s'ha obtingut del multiplicador, un cop aplicada la prova dels nous. Al producte li traiem tots els múltiples de nou possibles i ens ha de donar el mateix que s'obté traient, al producte obtingut en l'operació de multiplicar, tots els múltiples de nou possibles que, com hem dit, equival a sumar *les xifres reiteradament* fins aconseguir una sola xifra. Així doncs, si volem aplicar la prova a $37 \times 49 = 1813$,

Un exemple més complex ens ajudarà a comprendre totalment el mètode de FIBONACCI. Volem multiplicar 345 × 345:

Fem 5 × 5 = 25. Posem el 5 i en guardem 2 a la mà.

La suma de 5 × 4 = 20 i 4 × 5 = 20 dóna 40. N'hi afegim 2. Dóna 42. En posem 2 i en guardem 4 a la mà.

Ara, ¡fem atenció!, sumem 3 × 5 = 15 i 5 × 3 = 15. Dóna 30. A més, 4 × 4 = 16. El total és 50: 46 que s'obtenen sumant 30 i 16 més els quatre que tenim a la mà. Posem el zero i en guardem 5.

Ara fem 3 × 4 = 12 i 4 × 3 = 12. Sumant-los donen 24, i 5 que en guardem a la mà, 29. Posem el 9 i en guardem 2 a la mà.

Finalment, fem 3 × 3 = 9 i hi sumem els 2 que tenim a la mà. Total 11.

El resultat de multiplicar 345 per 345 és, doncs, 119025.

PRIMUS	
	325
	325
SECUNDUS	
	5
	345
	345
TERTIA	
	25
	345
	345
QUARTA	
	025
	345
	345
QUINTA	
	9025
	345
	345
ULTIMA	
	119025
	345
	345

A l'exemple 37 × 49 simplement escriu:

	1813
	37
Prova és ·4·	49

També ens ofereix 607 × 607 i 456 × 223. El segon dóna:

	101688
	456
Prova ·6·	223

La bondat del seu mètode queda ben palesa quan l'aplica a exemples més complexos, com ara 12345 × 12345 i 12345678 × 87654321.[321]

---

fem el següent: reduïm els múltiples de 9 del multiplicand, del multiplicador i del producte:

multiplicand	multiplicador	producte
$3+7=10;\ 1+0=1$	$4+9=13;\ 1+3=4$	$1+8+1+3=13;\ 1+3=4$.

D'això resulta que 1 × 4 = 4.

[321] FIBONACCI és generós en exemples de multiplicacions. Hi dedica, a partir de la pàgina 7, onze

Aquesta tècnica de multiplicar, coneguda com *la multiplicació en creu*, és la que trobem també al text de MAXIMUS PLANUDES de 1282, esmentat amb anterioritat.

Capítol 3. Curiosament la suma la introdueix en el capítol 3, després de la multiplicació.[322] També és sorprenent que sigui en aquest context on trobem la multiplicació en *gelosia, cel·les* o *quadrilàter*.[323] La idea d'aquest mètode és la següent: volem multiplicar 567 per 4321. Col·loquem el nombre més gran horitzontalment i el més petit, verticalment, de baix cap a dalt.

4	3	2	1	
				7
				6
				5

Tot seguit fem una quadrícula amb tantes files com el nombre més petit i tantes columnes com el més gran o amb una columna més si el càlcul ho requereix. Ara multipliquem el número 4321 per 7, retenint a la mà allò que calgui. El resultat el col·loquem a la primera fila de la quadrícula, posant ordenadament una xifra a cada cel·la. Fent-ho pas a pas, s'obté el següent:

$7 \times 1 = 7$: posem el 7 a la cel·la superior esquerra.
$7 \times 2 = 14$: posem el 4 a la segona cel·la superior cap a l'esquerra i retenim l'1 a la mà.
$7 \times 3 = 21$ i $21 + 1 = 22$: col·loquem el 2 a la tercera cel·la superior i en retenim 2a la mà.
$7 \times 4 = 28$ i $28 + 2 = 30$: col·loquem el zero a la quarta cel·la superior i el 3 a la cinquena. Cal, doncs, una cel·la més.

	4	3	2	1	
3	0	2	4	7	7
					6
					5

Ara repetim de forma anàloga el procés descrit amb el 6 i el 5. Obtindrem:

pàgines. Hi ha, en total, una vintena d'exemples. A la pàgina 10, ofereix exemples d'una xifra contra moltes. Tampoc hi manquen exemples com ara 70 x 70, 780 x 780 i 900 x 900 en els quals fa notar que solament cal multiplicar, respectivament, 7×7, 78×78 i 9×9. Després, al producte, cal afegir-li, en els dos primers casos, dos zeros a la dreta i, en el tercer, quatre.

[322] BONCOMPAGNI, B. [1857-62], I, 18.

[323] Segons G. R. KAYE aquest mètode arribà a OCCIDENT a través dels àrabs, però era ben conegut pels matemàtics indis [KAYE, G. R. [1914], 348]. Aquest és un detall que posa de manifest que FIBONACCI havia après el sistema indoaràbic i els seus algorismes dels matemàtics islàmics.

	4	**3**	**2**	**1**	
3	0	2	4	7	**7**
2	5	9	2	6	**6**
2	1	6	0	5	**5**

Un cop efectuades *totes* les multiplicacions, cal fer les sumes. Es fan en diagonal, de dreta a esquerra, començant per la cel·la superior que hi ha a la dreta: $7, 6+4, 5+2+2$, etc. Així s'obté:[324]

2	4	5	0	0	0	7			
				4	**3**	**2**	**1**		
			3	0	2	4	7	**7**	
			2	5	9	2	6	**6**	
			2	1	6	0	5	**5**	

[324]BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 19. El procediment detallat és el següent: primer de tot col·loquem el 7 a la cel·la de la dreta; després sumem el 6 i el 4 —que es troben a la segona diagonal—; el resultat és 10; col·loquem el 0 i retenim l'1. Ara sumem $5+2+2=9$ —que pertanyen a la tercera diagonal— i, com que en reteníem 1, l'afegim. Total $1+9=10$. Col·loquem el 0 al seu lloc i retenim l'1. Sumem $0+9+0=9$ —els de la quarta diagonal— i afegim el que reteníem. S'obté novament 10. Col·loquem el zero i en retenim 1. Aleshores fem $3+5+6=14$ i $14+1=15$. Col·loquem el 5 i en retenim 1. Tot seguit col·loquem un 4 que s'obté sumant $2+1+1$. Finalment, col·loquem el 2, que correspon a la setena diagonal.

Cal indicar que el àrabs usaven un mètode lleugerament diferent que consistia a dividir, per mitjà de les diagonals, els rectangles de la quadrícula en cel·les triangulars. Aquest mètode evita haver de retenir res a la mà, durant la multiplicació, atès que cada producte de dues xifres o dígits s'escriu completament. Solament cal retenir a la mà en l'operació de sumar. Els exemples que oferim corresponen, però, a aritmètiques posteriors com són l'*Aritmètica de Treviso* i la de LUCA PACIOLI. A l'*Aritmètica de Treviso* es multiplica 934 per 314 i a la de LUCA PACIOLI, 987 per 987:

	9	3	4	
2	2/7	0/9	1/2	3
9	0/9	0/3	0/4	1
3	3/6	1/2	1/6	4
	2	7	6	

De l'*Aritmètica de Treviso*, 1478

	9	8	7	
9	8/1	7/2	6/3	9
7	7/2	6/4	5/6	8
4	6/3	5/6	4/9	7
	1	6	9	

De l'*Aritmètica* de LUCA PACIOLI, 1494

Notem que, en ambdós casos, el multiplicador s'escriu de dalt cap a baix. Són, respectivament, 314 i 987. Les sumes diagonals s'efectuen seguint les diagonals, que devallen de dreta a esquerra. Els resultats respectius són, òbviament, 293 276 a l'exemple de l'*Aritmàtica de Treviso*, i 974 169 al de l'*Aritmètica* de LUCA PACIOLI.

Un cop aclarit el mètode de les cel·les és quan FIBONACCI ens ensenya a sumar i ho fa, com és habitual en ell, basant-se en exemples concrets.[325] Així, si volem sumar 25 i 49, fem el següent:

> Col·loquem els nombres, l'un damunt de l'altre, de manera que els ordres de les seves xifres es corresponguin per la dreta. Aleshores sumem els nombres de *la darrera columna* —és a dir, $5 + 9 = 14$— col·loquem el 4 per damunt del nombre que hi ha a la part superior i en guardem 1 a la mà. A continuació sumem el 2 i el 4 i, a la suma, li afegim el que tenim guardat a la mà. S'obté: $2 + 4 + 1 = 7$.

7 4
2 5
4 9

D'altres exemples són:[326]

5 1 1 1 1 0	0
4 3 2 1	1
5 0 6 7 8 9	8

4 6 9 0
1 2 3
4 5 6 7

i

1 8 5 4 2	2
2 5	7
4 6 1	2
6 7 8 9	3
5 8	4
1 0 7 1 8	8
4 9 1	5

A fora del rectangle d'alguns d'aquests exemples, hi hem escrit unes xifres. Són les xifres que corresponen a la *prova del nou* de la *suma*.[327]

[325] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 19.

[326] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 20.

[327] Com en el cas del producte, FIBONACCI suma *totes* les xifres de cada fila i treu, del resultat obtingut, tots els múltiples de nou possibles. Així, per exemple, el darrer exemple, correspon a:

1 8 5 4 2	$\longrightarrow$	$1+8+5+4+2=20$	$\longrightarrow$	2
2 5	$\longrightarrow$	$2+5=7$	$\longrightarrow$	7
4 6 1	$\longrightarrow$	$4+6+1=11$	$\longrightarrow$	2
6 7 8 9	$\longrightarrow$	$6+7+8+9=30$	$\longrightarrow$	3
5 8	$\longrightarrow$	$5+8=13$	$\longrightarrow$	4
1 0 7 1 8	$\longrightarrow$	$1+0+7+1+8=17$	$\longrightarrow$	8
4 9 1	$\longrightarrow$	$4+9+1=14$	$\longrightarrow$	5

Ara fem la suma de les xifres que corresponen al sumands: $7+2+3+4+8+5=29 \longrightarrow 2+9=11 \longrightarrow 1+1 \longrightarrow 2$ i observem que, un cop reduïda de nous, coincideix amb la xifra que correspon a la suma.

Un cop acabada la suma i abans de passar al capítol següent —el capítol 4— ens ofereix un exemple força curiós. Fa referència a la suma de monedes i és una suma *heterogènia*, en la qual cal sumar *lliures, sous* i *denaris*. És un exemple estrany i fora de context, atès que no ha introduït, en cap moment, ni les sumes *heterogènies* ni les equivalències entre lliures, sous i denaris. No obstant això, és un tipus d'exemple que retrobem en les aritmètiques del segle XV i, en particular, en la de SANTCLIMENT.

De fet, vol determinar la quantitat total que s'obté quan es disposa de certes quantitats, expressades en monedes de tipus diversos. El seu exemple concret és:

							368	2	1
							LLIURES	SOUS	DINERS
1.	libra	LII	et soldi	IIII	et denari	II	52	4	2
2.		XII		XV		V	12	15	5
3.		LIII					53		
4.		LXXX					80		
5.				XV				15	
6.				XVIII				18	
7.				VIII		X		9	10
8.						XI			11
9.						VII			7
10.		V		VI		XI	5	6	11
11.		VIII		VII		V	8	7	5
12.		LXXXVII				VIIII	87		9
13.		VIII		VI			8	6	
14.		XXVII		XV		VI	27	15	6
15.				XIII				13	
16.						VII			7
17.		XXX		VIII			30	8	

Sumes: libres CCCLXVIII et soldi II et denari I.

Així doncs, el resultat que s'obté és:

362 lliures 116 sous i 73 diners.[328]

[328] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 22. És clar que, a l'època de FIBONACCI, les equivalències entre lliures, sous i diners eren ben conegudes per als comerciants. Nosaltres les podem deduir fàcilment del problema que ens proposa. Són: 1 sou=20 diners i 1 lliure=12 sous.

Notem, a més, la barreja del sistema de numeració romà, a l'enunciat i a la solució, i el sistema indoaràbic en l'algorisme de la suma. Potser no està fora de lloc recordar que, "l'ús dels numerals indoaràbigs fou prohibit a certes ciutats europees. L'argument que s'aduïa és que se'ls considerava més fàcilment adulterables. De fet, en un manuscrit, és fàcil de convertir un 0 en un 6 o en un 9. Només cal afegir una petita ratlla." [SMITH, D. E.-GINSBURG, J. [1956], edició castellana de 1968, 40.]

El capítol 4. Fa referència a la resta.[329] Volem restar o treure un nombre d'un altre que és més gran. I, com sempre, els exemples són l'element didàctic bàsic. El primer exemple és força elemental. Consisteix a treure 35 unitats de 89.

> Per fer-ho, col·loquem el nombre més gran —el 89— damunt del més petit —el 35—, tot respectant l'ordre de les xifres. Aleshores, a la primera columna, traiem 5 unitats al9. En queden 4, que col·loquem al damunt. A la segona columna, traiem 3 unitats al 8. En queden 5 que col·loquem al damunt.

5 4
8 9
3 5

El segon exemple és més interessant. Es volen treure 39 unitats de 85. Ara, però, un cop hem col·locat el nombre 85 damunt del 39, trobem que "no podem treure 9 unitats de 5".[330]

> Cal afegir-ne deu al 5. Així en tenim 15. Aleshores traiem 9 unitats de les 15 que tenim. Dóna 6. Ho escrivim al damunt de la ratlla de separació al lloc de les unitats. "En retenim, però, una a la mà, que sumem al 3. I aleshores en traiem 4 del 8". N'obtenim 4 que col·loquem per damunt de la ratlla de separació, al lloc de les desenes.

4 6
8 5
3 9

D'altres exemples són:[331]

3 1 2	2 8 8	4 8 2	1 4 8 9 7		5 3 3 3 7	**3**
3 9 2	3 8 0	9 3 9	1 5 7 3 8	i	8 1 7 2 8	**8**
8 0	9 2	4 5 7	8 4 1		2 8 3 9 1	**5**

Només comentarem el darrer de tots, en què aplica la prova del nou:

> Primerament, de 8 en trec 1; dóna 7;
> En segon lloc, de 12 en trec 9; dóna 3 i en retinc una a la mà;
> En tercer lloc, de 7 en trec 3 + 1; dóna 4;
> En quart lloc, d'11 en trec 8; dóna 3 i en retinc una a la mà;
> Finalment, de 8 en trec 2 + 1; dóna 5.

---

[329] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 22.

[330] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 22. Fixem-nos que, de fet, el que fa FIBONACCI és manllevar una desena del 8, que òbviament val deu unitats. Això fa que disposi de 15 unitats, de les quals pot treure'n còmodament 9. Aleshores li queden 7 desenes. Ara bé, FIBONACCI, en lloc de pensar que li queden ja 7 desenes, pensa que el que cal fer és *treure una desena més* a les 8 inicials; és a dir, a les 8 desenes inicials els hi ha de treure les 3 desenes del 39 i la desena que ha manllevat.

[331] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 23.

Per tal de constatar la correcció del resultat aplica la prova del nou que, com sempre, consisteix a efectuar l'operació de restar amb les xifres que s'obtenen traient tots els nous possibles. És a dir, cal fer els càlculs següents:

$$\begin{array}{lll} 2+8+3+9+1=23; & 2+3=5 & \text{(que correspon al substraend)} \\ 8+1+7+2+8=26; & 2+6=8 & \text{(que correspon al minuend)} \\ 5+3+3+3+7=21; & 2+1=3 & \text{(que correspon a la diferència)} \end{array}$$

Aleshores cal constatar que $3 = 8 - 5$. La resta és correcta.

El *capítol cinquè*. És el darrer de la primera part que ens interessa. Està dedicat a la divisió.

D'antuvi ofereix una taula de dividir força curiosa:[332]

DIVISIONS PER DOS	DIVISIONS PER TRES	DIVISIONS PER QUATRE
$\frac{1}{2}$ d'1 és 0 i en sobra 1	$\frac{1}{3}$ d'1 és 0 i en sobra 1	$\frac{1}{4}$ d'1 és 0 i en sobra 1
$\frac{1}{2}$ de 2 és 1	$\frac{1}{3}$ de 2 és 0 i en sobren 2	$\frac{1}{4}$ de 2 és 0 i en sobren 2
$\frac{1}{2}$ de 3 és 1 i en sobra 1	$\frac{1}{3}$ de 3 és 1	$\frac{1}{4}$ de 3 és 0 i en sobren 3
$\frac{1}{2}$ de 4 és 2	$\frac{1}{3}$ de 4 és 1 i en sobra 1	$\frac{1}{4}$ de 4 és 1
$\frac{1}{2}$ de 5 és 2 i en sobra 1	$\frac{1}{3}$ de 5 és 1 i en sobren 2	$\frac{1}{4}$ de 5 és 1 i en sobra 1
$\frac{1}{2}$ de 6 és 3	$\frac{1}{3}$ de 6 és 2	$\frac{1}{4}$ de 6 és 1 i en sobren 2
$\frac{1}{2}$ de 7 és 3 i en sobra 1	$\frac{1}{3}$ de 7 és 2 i en sobra 1	$\frac{1}{4}$ de 7 és 1 i en sobren 3
$\frac{1}{2}$ de 8 és 4	$\frac{1}{3}$ de 8 és 2 i en sobren 2	$\frac{1}{4}$ de 8 és 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{2}$ de 19 és 9 i en sobra 1	$\frac{1}{3}$ de 25 és 8 i en sobra 1	$\frac{1}{4}$ de 39 és 9 i en sobren 3
$\frac{1}{2}$ de 20 és 10	$\frac{1}{3}$ de 26 és 8 i en sobren 2	$\frac{1}{4}$ de 40 és 10.

La taula segueix amb les divisions per cinc, sis, set, vuit, nou i deu i després segueix amb les de l'onze, el dotze i el tretze. És a dir:

[332] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 25 i 26.

DIVISIONS PER ONZE	DIVISIONS PER DOTZE	DIVISIONS PER TRETZE
$\frac{1}{11}$ d'11 és 1	$\frac{1}{12}$ de 12 és 1	$\frac{1}{13}$ de 13 és 1
$\frac{1}{11}$ de 22 és 2	$\frac{1}{12}$ de 24 és 2	$\frac{1}{13}$ de 26 és 2
$\frac{1}{11}$ de 33 és 3	$\frac{1}{12}$ de 36 és 3	$\frac{1}{13}$ de 39 és 3
$\frac{1}{11}$ de 44 és 4	$\frac{1}{12}$ de 48 és 4	$\frac{1}{13}$ de 52 és 4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{11}$ de 99 és 9	$\frac{1}{12}$ de 108 és 9	$\frac{1}{13}$ de 117 és 9
$\frac{1}{11}$ de 110 és 10	$\frac{1}{12}$ de 120 és 10	$\frac{1}{13}$ de 130 és 10.

Un cop ha establert la taula de dividir ens ensenya a dividir *per casos*: primerament per una xifra,[333] després per dues,[334] i després per tres, quatre, etc.[335]

La divisió la comença per l'esquerra i estableix la part fraccionària a l'esquerra del quocient.[336] Com sempre, utilitza els exemples per mostrar-nos el mètode que segueix.[337]

Comença amb el mètode de divir per una xifra: si volem dividir 365 per 2, fem el següent:

Primerament escrivim el 365 damunt del 2. Aleshores $\frac{1}{2}$ de 3 és 1 i en queda 1 que "retenim a la mà". El quocient el posem a sota de tot, al lloc d'ordre del 3 i el que tenim a la mà el col·loquem damunt del 3. Ara calculem $\frac{1}{2}$ de 16, que dóna 8. El col·loquem a sota de tot, al lloc d'ordre del 6. Finalment, $\frac{1}{2}$ de 5 és 2 i en queda un. Repetim el procés descrit abans.
El quocient el trobem col·locat al seu lloc: a la part inferior i el romanent, al seu lloc, a la part superior. Ara bé, el darrer romanent, dividit per 2, dóna $\frac{1}{2}$. Aquest valor el col·loquem a l'esquerra del quocient enter.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ & & 2 \\ 1 & 8 & 2 \end{array}$$

Resultat: $\frac{1}{2}\,182$.

[333] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 27–28.
[334] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 29–30.
[335] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 30–35.
[336] Notem que el mètode, igual que els altres que hem vist fins ara, és gairebé igual al que s'efectua actualment.
[337] En tots els casos, dóna el valor exacte del quocient. Per aconseguir-ho introdueix les fraccions.

FIBONACCI ofereix d'altres exemples de divisió per una xifra.[338]

Després analitza la divisó per un nombre de dues xifres:

1. Volem dividir 12 532 per 11; és a dir, volem dividir un nombre per un nombre de dues xifres. Aquest exemple és força més interessant que l'anterior.

En primer lloc, col·loquem l'11 dessota del 12 532. Dividim 12 per 11. Dóna 1, que col·loquem dessota del 2 del 12, i en queda 1, que col·loquem damunt del 2 del 12. En segon lloc, copiem la part anterior tal qual i dividim 15 per 11. Dóna 1 i en queden 4. Ara, per comoditat, caldria passar ratlla a les xifres que ja s'han usat, atès que en endavant l'1 que hi ha damunt del 2 ja no tindrà cap més paper a la divisió. Però FIBONACCI no passa mai ratlla gràfica a les xifres. [De fet, com que a la tercera part copia la segona, podria *deixar de copiar allò que ja no té interès*, però no ho fa. Sempre copia exactament la part anterior abans de procedir a efectuar la divisió següent.] Col·loquem l'1 i el 4 al lloc que els corresponen. Ara fem la tercera divisió que consisteix a dividir 43 per 11. Dóna 3 i en queden 10. Col·loquem el 3 al seu lloc —el lloc del quocient— i el deu també al seu lloc —el lloc dels romanents—; ara bé, cal col·locar-lo de la forma següent: l'1 damunt del 4 [al qual caldria passar ratlla] i el 0 damunt del 3. Finalment dividim 102 per 11. Dóna 9 i en sobren 3. Aquest últim romanent el dividim per 11 i obtenim $\frac{3}{11}$.

PRIMERA					
		1			
	1	2	5	3	2
				1	1
		1			
SEGONA					
		1	4		
	1	2	5	3	2
				1	1
		1	1		
TERCERA					
			1		
		1	4	0	
	1	2	5	3	2
				1	1
		1	1	3	
QUARTA					
			1		
		1	4	0	
	1	2	5	3	2
				1	1
		1	1	3	9
$\frac{3}{11}$		1	1	3	9

2. Vegem dos exemples més de divisió per dues xifres:[339] els casos 18 456 dividit per

[338]Per exemple, 1346 dividit per 4, 5439 dividit per 5, 9000 dividit per 7; 10 000 dividit per 8, 12 037 dividit per 9.

[339]BONCOMPAGNI, B. [1857–62], I, 27–36. Alguns dels exemples són: 123 586 dividit per 13; 18 456 dividit per 17; 18 456 dividit per 19; 13 976 dividit per 23; 780 005 dividit per 59, 5 917 200 per 97. Després divideix per tres xifres: 30 749 per 307; 574 930 per 563; 5 950 000 per 743, etc. [BONCOMPAGNI. B. [1857–62], I, 44–47].

17 i 780 005 dividit per 59. L'interès d'aquests dos exemples rau en el fet que els quocients parcials poden ser zero.

PRIMERA	
	1
	18 456
	17
	1 08
SEGONA	
	6
	1 49
	18 456
	17
	1 08
ÚLTIMA	
	1 49
	18 456
	17
	1 085
$\frac{11}{17}$	1 085

	143 2
	2 913 122
	780 005
	59
	13 220
$\frac{25}{59}$	13 220

També ens ofereix la prova del nou de la divisió.

Cal notar, com dèiem, que sempre dóna els quocients exactes. Això l'obliga a introduir les fraccions i, per tant, no ens ha d'estranyar que dediqui els capítols següents al seu estudi. És, en aquest estudi, quan recorre als divisors primers, al càlcul del mínim comú denominador, i a d'altres fets relatius a les fraccions, i on introdueix les *fractiones in gradibus*.[340] Però, en cap cas, recorre a les expressions fraccionàries en forma decimal que, com ja hem indicat abans, és una descoberta força tardana.

L'extracció de les arrels quadrades i cúbiques es fa esperar. FIBONACCI no en fa cap esment fins al *capítol 14*, el penúltim de la seva obra que, com ja hem indicat, forma part de la secció algebraicogeomètrica. Vegem, amb exemples concrets, com ho fa:

[340] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], secció I, 24.

1. Volem calcular l'arrel quadrada del nombre 743.[341]

D'antuvi calculem l'arrel quadrada per defecte de 7: és 2. El quadrat de 2 val 4. El restem de 7 i obtenim 3 desenes com a diferència.	3 743 2
El segon pas consisteix a determinar les unitats de l'arrel quadrada. Per aconseguir-ho, hem de dividir 34 per 4. Agafem el valor 7 i multipliquem 27 × 27 paulatinament, pel mètode de la creu.	3 743 27 27
De fet, el valor $2 \times 2 = 4$ ja l'hem calculat prèviament i ja l'hem restat. Ara determinem el valor de les desenes: $2 \times 7 + 2 \times 7 = 28$. Restem i s'obté $34 - 28 = 6$. El 6 el col·loquem damunt del 4.	36 743 27 27
Ens queden 63 unitats i només ens falta multiplicar 7 × 7. La diferència final és, doncs, 14. L'arrel quadrada de 743 és, doncs, 27 i en queden 14. Així doncs el valor aproximat, per excés, de l'arrel quadrada s'obté afegint a 27 la fracció $\frac{7}{27}$.	1 364 743 27 27

És a dir: $\sqrt{743} = \frac{14}{2\times 27}\ 27$.

2. Volem calcular l'arrel quadrada de 10.

L'arrel de 10 és 3 i la diferència és 1. Ara doblem l'arrel; s'obté el valor 6. Divideixo 1 per 6 i obtinc finalment $\frac{1}{6}\,3$.	1 10 3

[341] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], 352–355, 358–365. De fet, un nombre de tres xifres decimals que és un quadrat, s'expressa en la forma:

$$N = 100A + 10B + C = (10a + b)^2 = 100a^2 + 2a \cdot 10b + b^2.$$

El quadrat de a és de l'ordre de les desenes. Cal restar $A - a^2$. S'obté

$$100(A - a^2) + 10B + C = 2a \cdot 10b + b^2.$$

Ara dividim $10(A - a^2) + B$ per $2a$ de forma que, per tanteig, puguem conèixer el valor de b. Cal anar en compte, atès que $2ab < 10(A - a^2) + B$, però encara hem de poder treure el valor de b^2 de

$$10(10(A - a^2) + B) - 2ab \cdot 10 + C.$$

3. Volem calcular l'arrel quadrada de 8754.

L'arrel quadrada de 87 és 9. La col·loquem en la forma adjunta, en la qual el 6 s'obté en efectuar la resta 87 − 81.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 8754 \\ 9 \end{array}$$

Ara dividim 65 per 18: s'obté el valor 3. Provem-ne la bondat:

$$9 \times 3 + 9 \times 3 = 54.$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 8754 \\ 93 \\ 93 \end{array}$$

Els restem dels 65 i obtenim:

Ara cal treure $3 \times 3 = 9$ unitats del 114.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 61 \\ 8754 \\ 93 \\ 93 \end{array}$$

L'arrel quadrada és doncs: $\frac{105}{2\times 93}\ 93 = \frac{35}{62}\ 93$.

4. L'arrel quadrada de 12 345 és, segons FIBONACCI, $\frac{4}{37}$ 111 i l'única informació que dóna és:

$$\begin{array}{r} 24 \\ 2\,345 \\ 12\,345 \\ 111 \\ 111 \end{array}$$

També ens ofereix l'arrel quadrada del número 927 435. Diu que és 963 i el romanent 587. Un altre exemple és:

$$\sqrt{72\,340\,000} = 8503\,\frac{4975}{2 \times 8505}.$$

Tot seguit, durant vuit pàgines, ens ofereix la justificació geomètrica, que ometem.

Acabarem l'anàlisi de l'algorísmia de FIBONACCI analitzant una *arrel cúbica*. L'autor hi dedica un grapat de pàgines i una justificació geomètrica.[342] En concret l'arrel cúbica del número 56 789. En aquest cas, FIBONACCI procedeix també en base al cub del binomi:[343]

[342] BONCOMPAGNI, B. [1857–62], 382–392.

[343] Recordem que $(10\,a+b)^3 = 1\,000\,a^3 + 3\cdot 100\,a^2\,b + 3\,b^2 \cdot 10\,a + b^3$. Juguem amb la determinació de dues xifres: la xifra a i b. El cub de la xifra a, que és una desena, dóna una quantitat de l'ordre dels milers. Ara bé $3\,a^2 b$ dóna una quantitat de l'ordre de les centenes. $3\,a\,b^2$ de l'ordre de les desenes i b^3, de les unitats. Això és el que determina el lloc en el qual cal col·locar les xifres i també les operacions que cal fer.

Escrivim el nombre 56 789 i busquem una xifra, el cub de la qual s'apropi al màxim al 56. Serà una desena i per tant cal col·locar-la al lloc de les desenes.

56 789
3

Ara l'aixequem al cub. Obtenim 27 a l'ordre dels milers. Cal doncs restar-lo del 56. Obtenim 29.

29
56 789
3

Ara, per tal de determinar l'altra xifra, ens fa falta conèixer el valor del triple de l'arrel cúbica al quadrat i posar-lo al lloc de les centenes. Tot seguit hem de dividir 297 per 27, però amb molta cura ja que hi intervé el tanteig. La divisió dóna 11 però les operacions ulteriors ens obliguen a prendre el valor 8. Així obtenim les unitats de l'arrel.

29
56 789
3
2 7

Ara hem de multiplicar 27 per 8 [que correspon a $3a^2b$]. Ho fem començant pel davant i ho anem restant:

$2 \times 8 = 16$ que, tret de 29, dóna 13
$7 \times 8 = 56$ que, tret de 137, dóna 81.

29
56 789
38
2 7
3
1
29
56 789
38
27

8
3
1
291
56 789
38
27

El següent pas consisteix a calcular el quadrat de 8. Dóna 64 unitats. Ara les multipliquem per 3. Total 192. Ho col·loquem així:

8
3
1
29 1
56 789
38
27
192
64

Ara hem de multiplicar 192 per 3 [ja que havíem calculat $3b^2$ i necessitem $3b^2a$]. Ho fem pel davant i restem. Les xifres són desenes:

$3 \times 1 = 16$ que restat de 8 dóna 5
$3 \times 9 = 27$ que restat de 51 dóna 24
$3 \times 2 = 6$ que restat de 8 dóna 2.

	1
	2
2	5
5	89
8	3 1
3	1 44
1 4	29 127
29 12	56 789
56 789	38
38	27
27	192
192	64
64	

El darrer pas consisteix a multiplicar 64 per 8 i restar el resultat del romanent:

$6 \times 8 = 48$ que restem de 242 i dóna 194
$4 \times 8 = 32$ que restem de 49 i dóna 17.

L'arrel cúbica és, doncs, en primera aproximació, 38.

Així és com FIBONACCI clou la presentació dels algorismes aritmètics en el sistema decimal posicional indi. La resta de la seva obra, ja ho hem dit a bastament, és un exercici d'aplicació del càlcul de l'època als camps més diversos i constitueix un text que s'anticipa en un segle i mig a les aritmètiques del segle XV.

5.2 L'*Algorismus vulgaris* de SACROBOSCO

Aquest text és succint i directe: va al gra. Com ja hem dit, no conté exemples i només es preocupa de fer una presentació breu i clara del sistema de numeració indi i dels algorismes de càlcul associats.

La seva síntesi és la següent. D'antuvi atribueix l'art de la numeració a un text, també rònec i breu, d'un *filòsof* anomenat ALGUS i "és per *aquesta raó* que l'art de la numeració rep el nom d'*Algorismus*."[344] Distingeix dues maneres d'entendre un nombre: *materialment* i *formal*, una distinció més aviat fosca.[345] Seguint EUCLIDES, introdueix la *unitat* com "allò en virtut del qual podem dir que quelcom és u."[346]

[344]Segons E. GRANT [GRANT, E. [1974], 94], ALGUS és una degeneració d'AL-ḪWĀRIZMĪ. Aquesta afirmació, no obstant això, contrasta amb el qualificatiu de filòsof que li atribueix SACROBOSCO, atès que AL-ḪWĀRIZMĪ és considerat astrònom, algebrista, geòmetra, però no filòsof.

[345]És una explicitació de la definició que dóna BOECI a l'*Arithmetica* [vegeu GRANT, E. [1974], 18].

[346]Vegeu la definició 1 del llibre VI de *Els Elements* d'EUCLIDES [a VERA, F. [1970], I, 829].

Aleshores dóna tres menes de nombres: els *dígits*, que són més petits que deu; els *articles*, que són múltiples de deu i els *mixtos*, que estan formats d'un dígit i un article. A continuació estableix la proposició següent: "tots els nombres que hi ha entre *dos articles successius* són mixtos".[347] I tot seguit enumera les *nou espècies* de l'art de l'enumeració: l'enumeració, l'addicció, la substracció, les operacions de dividir per la meitat i doblar un nombre, la multiplicació, la progressió i l'extracció d'arrels, que poden ser de dues menes segons que s'apliqui a *nombres quadrats* o *cúbics*.[348]

"La numeració d'un nombre qualsevol per mitjà de *figures adequades* és una representació artificial".[349] Després introdueix les *figures* que "representen els nou dígits." Són les següents:

$$9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

La desena figura, 0, té diversos noms: *teca, cercle, xifra* o *figura del no-res*, atès que no val res.[350] És aquesta figura la que fa que les altres figures adquireixin significats diversos. Sense ella no fóra possible aconseguir *articles purs*. Amb les nou figures i la xifra, repetida —quan faci falta— tantes vegades com calgui, és possible representar qualsevol nombre i no cal res més.[351]

Tot seguit fa notar que cada dígit és representable amb una sola de les figures; cada article es representa mitjançant una xifra col·locada en la primera posició seguida d'un dígit que "és el que li dóna nom". Així doncs "cada article ve designat per un dígit —el deu per la unitat, el vint pel dos, etc."[352] Un nombre, si és un dígit, es troba a la primera diferència [en primer lloc]; si és un article, a la segona, etc. De tot això en resulta que

> tots els nombres entre el deu i el cent, exclòs el cent, es poden representar amb dues figures.[353]

En el cas dels nombres mixtos o compostos, el dígit que forma la part s'escriu primer i, com en el cas dels articles, l'article s'escriu a l'esquerra.[354] Els nombres entre el cent

[347] CURTZE, M. [1897], 1; GRANT, E. [1974], 95.

[348] Aquestes nou espècies són les que donen nom als nou capítols de l'*Algorismus vulgaris*.

[349] CURTZE, M. [1897], 1; GRANT, E. [1974], 95.

[350] El mot "xifra" és una *transcripció* del terme àrab *ṣifr*, que vol dir "buit". El mot *teca* és el més estrany de tots. Segons PIETRO P. de DÀCIA prové de la forma rodona del ferro.

[351] SACROBOSCO distingeix la *figura*, la *diferència*, el *lloc* i el *límit*. La figura és el dibuix, "que podem fer d'un sol traç" dels dígits (i el zero). La diferència és el que fa que una figura valgui deu vegades la figura de la seva dreta: "és el que fa que una figura difereixi de la que la precedeix, si la mateixa figura es trobés en el lloc precedent." El "lloc" és l'espai en què s'escriu un nombre. El "límit" és el sistema global que s'obté en representar un nombre.

[352] CURTZE, M. [1897], 2; GRANT, E. [1974], 95.

[353] CURTZE, M. [1897], 2; GRANT, E. [1974], 95.

[354] E. GRANT ens fa notar que aquesta manera d'escriure els nombres segueix la forma d'escriure i

i el mil, exclòs el mil, es representen per mitjà de tres figures, de les quals dues, com a màxim, poden ser xifres i així successivament. Després aclareix tot això precisant que:

- tota figura, col·locada en primera posició, significa el dígit al qual es refereix,
- la segona posició indica deu vegades el dígit que l'ocupa,
- la tercera posició indica cent vegades el dígit que l'ocupa,
- la quarta posició indica mil vegades el dígit que l'ocupa,
- la quinta posició indica deu mil vegades el dígit que l'ocupa,
- la sisena posició indica cent mil vegades el dígit que l'ocupa,
- la setena posició indica un milió de vegades el dígit que l'ocupa,

i així successivament. Tenim sempre tres múltiples: deu, cent, mil.[355] "Tota figura val deu vegades el que val la figura en el lloc precedent".[356]

Podem adonar-nos, a través de la descripció detallada que acabem de fer, que SACROBOSCO recorre a la descripció lingüística. Aquest fet es manté en tot el seu opuscle. No ofereix cap exemple concret que li permeti de clarificar, i alhora d'abreujar, les descripcions. Tanmateix, aquest fet seria pal·liat, un segle i escaig més tard, en el *Comentari* de PIETRO P. de DÀCIA a l'*Algorismus vulgaris* de SACROBOSCO. En ell, P. P. de DÀCIA ofereix l'exemple següent:

$$\mathring{9}\,8\,7\,\mathring{6}\,5\,4\,\mathring{3}\,2\,1\,0.$$

> Cal comptar les figures a partir de la dreta i marcar la xifra que hi ha al quart lloc i després anar-les marcant de tres en tres cap a l'esquerra. Un cop fet això, llegirem el nombre de la forma següent: nou mil mils de mil, vuit-cents setanta-sis mils de mil, cinc-cents quaranta-tres mil dos-cents deu.[357]

Tot seguit, sense més preàmbuls, SACROBOSCO ens ofereix l'algorisme de sumar. "Es tracta d'ajuntar en un sol nombre diversos nombres".[358] Això, en la nova representació numèrica, es tradueix en *dues files de figures que formen les parts de l'addició* i que cal escriure-les l'una damunt de l'altra, escrivint a sota la que correspon al més petit dels nombres que volem sumar i, al damunt, la que correspon al més gran. Això cal fer-ho, a més, de forma que els dígits d'ambdós nombres coincideixin. Després ja es pot sumar:

---

llegir dels àrabs. Tanmateix alguns matemàtics islàmics escrivien els numerals d'esquerra a dreta i això és, segons GRANT, una clara reminiscència de l'origen indi, atès que el sànscrit s'escrivia i llegia de dreta a esquerra [GRANT, E. [1974], 95–96, nota 10].

355 CURTZE, M. [1897], 2-3; GRANT, E. [1974], 96.

356 CURTZE, M. [1897], 2-3; GRANT, E. [1974], 96.

357 CURTZE, M. [1897], 29-30.

358 CURTZE, M. [1897], 3; GRANT, E. [1974], 96.

> La primera figura de la fila inferior és afegida a la primera figura de la fila superior. D'aquesta addició en resulta un dígit, un article o un nombre mixt. Si és un dígit, el col·loquem al lloc de la figura superior, a la qual *passem ratlla* [o borrem prèviament]; si és un article, col·loquem la xifra al lloc de la figura superior a la qual prèviament hem *passat ratlla* i aleshores afegim l'article a la figura de l'esquerra; així obtenim la nova figura de la fila superior.
>
> Si no hi hagués cap figura a l'esquerra de la figura superior que estem sumant, l'article el col·locaríem en un lloc buit.[359] Si s'esdevé que la figura següent és xifra, el dígit de l'article es col·locarà al seu lloc, després de passar ratlla a xifra. Finalment, si la figura següent és un nou i cal afegir-li una unitat, al lloc del nou hi posarem xifra i afegirem una unitat a la figura següent al nou. Cal notar que, en l'addició i en els altres algorismes, quan es col·loca una figura damunt d'una altra [o en el mateix lloc de l'altra, passant ratlla], d'aleshores endavant cal usar la nova figura com la figura que correspon a aquell.[360]

Aquesta descripció no va acompanyada pas de cap exemple. De fet, el capítol titulat "De Additione" es redueix a aquesta regla. L'hem transcrit com a exemple de la presentació lingüística dels algorismes. Aquest és l'estil que SACROBOSCO usarà en la resta d'algorismes. P. P. de DÀCIA ofereix un exemple concret i en fa l'anàlisi, tot basant-se en l'exemple en qüestió.[361] Volem sumar 18 i 158. D'antuvi escrivim les figures ordenadament de la forma següent:

$$\begin{array}{r} 1\,5\,8 \\ 1\,8 \end{array}$$

La més gran al damunt i la més petita al dessota; es fan correspondre els ordres, començant per l'ordre primer o dels dígits. Però —i això és ben curiós— no efectua pas la suma d'aquests dos nombres, sinó que els usa per analitzar què passaria si els nombres fossin uns altres. Per exemple si damunt del 8 hi hagués un 2; o bé si volguéssim sumar 397 i 3 o 349 i 7; etc. Per tal de fer-nos adonar de la complexitat de l'algorisme, ens ofereix un cas anàleg que, de fet, tampoc no suma:

[359] Una traducció anglesa de l'EDAT MITJANA, titulada *The Art of Nombryng* i reeditada per ROBERT S. STEELE per l'Oxdord University Press, l'any 1922 [vegeu GRANT, E. [1974], 95–96, notes 1 i 12], ofereix un aclariment:

$$\begin{array}{r} 1\,0 \\ 7 \\ 3 \end{array}$$

[360] CURTZE, M. [1897], 3–4; GRANT, E. [1974], 96. Observem la complexitat de la presentació lingüística. SACROBOSCO ha de descriure *totes* les possibilitats: els casos en els quals no cal "guardar res a la mà", en termes de FIBONACCI, i els casos en els que sí que cal, casos que distingeix segons que donin un article o un nombre mixt. També ha de distingir el que s'esdevé quan "se'n porta un" i la figura a la qual cal afegir-lo és un nou, atès que aleshores s'adultera la figura següent de la següent. No obstant això, no analitza pas directament el cas en què la suma dóna un nombre mixt, si bé indirectament es troba inclós en la descripció que fa.

[361] CURTZE, M. [1897], 33–34.

$$\begin{array}{r} 1\,7\,6 \\ 9\,8 \end{array}$$

L'únic exemple que ens ofereix de forma detallada, analitzant-lo pas a pas, és la suma de 12 345 i 98 706. És interessant observar detalladament la suma de P. P. de DÀCIA: consisteix a sumar el de baix amb el de dalt. Un cop l'hem sumat, a baix queda xifra —ja no tenim 45 sinó que tenim 40 perquè el 5 l'hem afegit a dalt, que s'ha transformat en 98 711. Aquesta tècnica és la que cal anar repetint fins aconseguir que el nombre de baix sigui 00 000:[362]

$$\begin{array}{c} 98706 \\ 12345 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} 98711 \\ 12340 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} 98751 \\ 12300 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} 99051 \\ 12000 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} 101051 \\ 10000 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} 111051 \\ 00000 \end{array}$$

Restar dos nombres és el mateix que calcular "l'excès que el més gran té respecte del més petit".[363] De fet, consisteix a trobar un nombre que afegit al petit doni el gran. "Ara bé, diu SACROBOSCO, pot succeir que hi hagi algunes figures concretes del gran que siguin més petites que la corresponent del petit".[364] Això no és el que importa per saber quin és el més gran: "el més gran és el que té més figures o, si ambdós tenen les mateixes, el que té la darrera més gran. Ara bé, si les darreres són iguals és més gran el que té la penúltima més gran, etc..."[365]

La diferència de dos nombres s'obté restant les *diferències* de cada nombre —és a dir, les figures d'un mateix ordre— i la solució [o diferència] s'escriu al lloc que ocupava la figura del nombre més gran, el qual hem col·locat ordenadament des de la dreta, damunt del més petit. Ara cal descriure el que cal fer segons com siguin les figures de cada diferència: si la de dalt és més gran o igual que la de baix; si la de dalt és xifra; si la de dalt és més petita que la de baix, etc. P. P. de DÀCIA ho aclareix amb exemples concrets, segons els casos.[366]

[362] CURTZE, M. [1897], 36–38. Notem que aquest mètode de *reescriptura* en una taula de sorra podríem dur-lo a terme borrant i substituint. En un text escrit, si volguéssim estalviar espai, podríem presentar-lo "passant ratlla":

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & & 5 & \\ & \cancel{0} & \cancel{9} & 0 & \cancel{1} & 1 \\ 1 & \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{0} & \cancel{6} \\ & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[363] CURTZE, M. [1897], 4; GRANT, E. [1974], 96.
[364] CURTZE, M. [1897], 4; GRANT, E. [1974], 96.
[365] CURTZE, M. [1897], 4; GRANT, E. [1974], 96–97. Heus ací l'*ordre lexicogràfic* que, en el cas de la representació decimal d'enters positius, coincideix amb l'ordre numèric. P. P. de DÀCIA fa notar que 1111 és més gran que 999 i que 983 és més gran que 973. [CURTZE, M. [1897], 39].
[366] CURTZE, M. [1897], 40–41.

CAS 1. Si una diferència del nombre gran és igual a la diferència corresponent del nombre petit, al restar-les s'obté xifra.

$$\begin{array}{c}688\\248\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}680\\248\end{array} \Longrightarrow ?$$

CAS 2. Totes les diferències del nombre gran són més grans que les corresponents diferències del petit. Aleshores cal restar de la figura gran la petita.

$$\begin{array}{c}469\\248\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}461\\248\end{array} \Longrightarrow ?$$

CAS 3. Si alguna diferència del gran és més petita que la corresponent del petit, aleshores cal manllevar una unitat de la figura següent —que de fet és un article en relació amb la figura anterior i que, conjuntament amb ella, dóna un article o un nombre mixt. Ara li restem la figura del nombre inferior.

$$\begin{array}{c}463\\348\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}455\\348\end{array} \Longrightarrow ?$$

CAS 4. Si alguna diferència és xifra, porcedim com en el cas 3.

Tot seguit ofereix dos exemples parcials més:[367]

$$\begin{array}{c}413\\348\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}405\\348\end{array} \Longrightarrow ? \quad \text{i} \quad \begin{array}{c}405\\348\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}397\\348\end{array} \Longrightarrow ?$$

Finalment ens ofereix un exemple complet, detallant cada un dels passos:[368]

$$\begin{array}{c}10222\\5432\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}10220\\543\cancel{2}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}10190\\54\cancel{3}\cancel{2}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}9790\\5\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}4790\\\cancel{5}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\end{array}$$

Val a dir que, segons SACROBOSCO, les operacions de sumar i restar estan íntimament relacionades: un nombre és la resta de dos nombres donats, si la suma de la resta i del petit dóna el gran. "Així doncs la substracció és la prova de l'addició, i recíprocament".

Les següents operacions que proposa SACROBOSCO són: l'obtenció de la meitat d'un nombre i del seu doble. Són operacions senzilles i no les detallarem.[369] Solament

---

[367] CURTZE, M. [1897], 41–42.

[368] CURTZE, M. [1897], 43. P. P. de DACIA no passa ratlla. Escriu el resultat, substituint la figura del minuend —el nombre que hi ha a la part superior. Al final li queda, a la part superior, el valor de la resta i, a la inferior, el valor del substraend —el més petit d'ambdós nombres—, que no ha alterat en cap moment de l'operació.

[369] El lector interessat pot consultar CURTZE, M. [1897], 5–7; 44–49 i GRANT, E. [1974], 97–98.

cal indicar certs fets notables. SACROBOSCO indica el fet que hi ha nombres que es poden dividir per la meitat: són els *nombres parells*. D'altres, en canvi, no. Són els *nombre imparells*. Quan intentem de dividir-los per la meitat, queda una unitat que cal dividir per la meitat. Aquesta unitat, diu, "equival a seixanta minuts" i "la seva meitat és de trenta minuts". Aquest valor —*trenta minuts*— l'indica amb el símbol ∂. No ens ha d'estranyar, doncs, que P. P. de DACIA, quan ens ofereix la meitat del nombre 510 321, procedeixi d'acord amb l'esquema següent, tot comentant cada pas:

$$510\,321 \implies 510\,320\partial \implies 510\,310\partial \overset{*}{\implies}.$$

Quan arriba a aquest punt s'adona que el 3 —que és la figura que ara li cal dividir— és senar: la meitat de 3 és 1 i en sobra 1 que val *deu unitats d'ordre inferior*. De fet, aquest 1 és un article.[370] La seva meitat, que és 5, cal afegir-la a l'1. Així doncs, el càlcul segueix en la forma

$$\overset{*}{\implies} 510\,160\partial \implies 510\,160\partial \implies 505\,160\partial \implies 255\,160\partial.^{371}$$

En canvi, doblar un nombre és el mateix que "sumar-lo amb si mateix" i per tant, de fet, no aporta res de nou, malgrat que SACROBOSCO hi dedica la regla de còmput corresponent. Acaba observant que "la prova de doblar un nombre és dividir-lo per la meitat i recíprocament".[372]

Al paràgraf següent s'ocupa de la multiplicació. Entén que "multiplicar un nombre per un altre és obtenir un tercer nombre que conté el primer tantes vegades com indica el segon".[373] Calen dos nombres: el nombre que volem multiplicar i el nombre que multiplica. El primer es "designa nominalment" i el segon, "adverbialment".[374] El resultat que s'obté "quan apliquem l'un damunt l'altre" —és a dir, després de multiplicar-los— és el *producte*. I aleshores indica la validesa de la *propietat commutativa* del producte:

> Cal observar que un multiplicand pot ser considerat com a multiplicador i un multiplicador com a multiplicand, i recíprocament, i s'obté el mateix resultat [*summa*].[375]

[370] Relativament, és clar, a la figura d'ordre immediat superior.

[371] CURTZE, M. [1897], 46. Notem que SACROBOSCO recorre a la notació sexagesimal per expressar la part no entera de la divisió per la meitat. De fet, anticipa la divisió.

[372] CURTZE, M. [1897], 7; GRANT, E. [1974], 98.

[373] CURTZE, M. [1897], 8; GRANT, E. [1974], 98.

[374] CURTZE, M. [1897], 8; GRANT, E. [1974], 98. Són respectivament el *multiplicand* i el *multiplicador*.

[375] CURTZE, M. [1897], 8; GRANT, E. [1974], 98.

Després ofereix sis regles per efectuar la multiplicació:[376]

REGLA 1. Multiplicació de dos dígits. Suposem que els dígits són a i b i que $b > a$. La regla és:

> Busquem la diferència entre el gran, b, i 10. Obtenim un cert nombre $n = 10 - b$. Calculem l'article del petit, $10\,a$, i restem-li el petit tantes vegades com indica n.

Així doncs: $8 \times 4 = 4 \times 10 - [10 - 8] \times 4 = 40 - 8 = 32$.

REGLA 2. El multiplicand és un article i el multiplicador és un dígit. En aquest cas cal multiplicar simplement els dígits i després afegir xifra a la dreta.

REGLA 3. Multiplicació d'un nombre mixt per un dígit. Cal aplicar la primera regla al dígit i la segona a l'article, i després sumar els productes obtinguts.

---

[376] A la regla 1, ofereix un exemple concret: la multiplicació de 8 per 4. Algèbricament, la podem simbolitzar: $a\,b = 10a - (10 - b)a$ [vegeu CURTZE, M. [1897], 8 i 49–51; GRANT, E. [1974], 98]. Observem tanmateix que, a diferència de FIBONACCI, evita haver de recórrer a la *taula de multiplicar*. Aquesta regla només és útil, si b —que és més gran que a— és alhora més gran que cinc. Suposem que volem multiplicar 3 per 2. La regla ens porta a $20 - 7 \times 2$. Cal saber quan val 7 per 2 que és, malgrat la seva simplicitat, més complex que 3 per 2. Si ara li apliquem novament la regla, obtindrem $20 - 3 \times 2$ i retornem al principi.

La regla 2 és elemental, atès que correspon al cas de multiplicar un dígit per un article. Solament cal efectuar el producte dels dígits i afegir xifra a la dreta del producte. No obstant això, distingeix dos casos: quan el producte dels dos dígits és un dígit i quan és un nombre mixt. No en dóna cap exemple, però distingeix casos com ara 40×2 i 40×3 [CURTZE, M. [1897], 8 iGRANT, E. [1974], 98].

A la regla 3 vol multiplicar, per exemple, 39 per 9. Calcula 9×9 i 30×9 i després suma ambdós productes. De fet la regla es basa en la *llei distributiva*: $(10a + b)\,c = 10\,a\,c + b\,c$. [Vegeu CURTZE, M. [1897], 8; GRANT, E. [1974], 98.]

La regla 4, la multiplicació de dos articles, és també elemental, atès que funciona com la regla 2, però ara cal afegir dos zeros a la dreta. Com abans, n'explicita dos casos: 40×10, 40×50 [CURTZE, M. [1897], 8–9; GRANT, E. [1974], 98].

La regla 5 no necessita més comentaris, atès que tracta el cas de la multiplicació d'un nombre mixt per un article.

La regla 6 és, de fet, la regla definitiva i recull i inclou les anteriors, en les qual es basa. És la regla que serveix per multiplicar $\alpha = 10a + b$ per $\beta = 10c + d$. Formalment és l'aplicació reiterada de la *llei distributiva*. S'obté:

$$\alpha\beta = (10a + b)\beta = 10a\beta + b\beta = 10a(10c + d) + b(10c + d) = 100ac + 10\,(a\,d + b\,c) + b\,d.$$

[Vegeu CURTZE, M. [1897], 9; GRANT, E. [1974], 98.] És la regla polinòmica de FIBONACCI.

REGLA 4. Multiplicació de dos articles. Multipliquem els dígits corresponents i afegim xifra a la dreta, dues vegades seguides.

REGLA 5. Multiplicació d'un article per un nombre mixt. S'aplica, de bell nou, la propietat distributiva i les regles ja descrites.

REGLA 6. Multiplicació de dos nombres compostos. S'aplica la propietat distributiva dues vegades.

Un cop fixades les sis regles anteriors s'entreté a explicar *verbalment* com cal fer una multiplicació entre dos nombres. La millor manera d'entendre-ho és acompanyant la descripció amb l'exemple de P. P. de DÀCIA.[377] Volem multiplicar 45 060 per 2 030.

D'antuvi posem les figures de la forma següent: escrivim el multiplicand al damunt i el multiplicador al dessota. La primera figura de la figura inferior es correspon amb la darrera de la figura superior.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & & & & \end{array}$$

La multiplicació comença per l'esquerra i, com és habitual en ell, SACROBOSCO distingeix tres casos: quan el multiplicador és un dígit, quan és un article o quan és un nombre mixt.

Si és un dígit, multipliquem cada figura del multiplicand pel dígit i el resultat de cada multiplicació l'escrivim a sobre de la figura corresponent, fent les sumes pertinents. Després de cada multiplicació parcial, el multiplicador es desplaça un lloc cap a la dreta. Cal fer-ho, a poc a poc, figura a figura, tot corrent el multiplicador un lloc cap a la dreta després de cada multiplicació.

$$\begin{array}{ccccc} 4&5&0&6&0\\ 2&&&& \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} 8&5&0&6&0\\ &2&&& \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} 9&0&0&6&0\\ &&2&& \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc} 9&0&0&6&0\\ &&&2& \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} 9&0&1&2&0\\ &&&&2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc} 9&0&1&2&0\\ &&&&2 \end{array}$$

Si és un article, solament cal que afegim tantes xifres com té l'article al resultat obtingut després de multiplicar el multiplicand pel dígit de l'article.

$$\begin{array}{r} 45060\\ 200 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 9012000\\ 200 \end{array}$$

[377] CURTZE, M. [1897], 9 i 54–58.

Si és un nombre compost [com és el cas de l'exemple original], multipliquem la figura més alta del multiplicand, començant per l'esquerra, per cada una de les figures del multiplicador, col·locant el primer resultat damunt de la figura que multiplica, el segon a la seva dreta i així successivament, realitzant però totes les sumes que calguin.

Un cop completada l'operació amb la primera figura del multiplicador, el desplacem un lloc cap a la dreta.

Aleshores tornem a començar, però ara ho fem amb la segona figura més alta del multiplicand [que, a l'exemple, és el 5].

Observem que, si al fer la primera multiplicació, s'obté un article, el resultat cal col·locar-lo de manera que el dígit estigui damunt la primera xifra del multiplicador [vegeu la segona multiplicació]

$$\begin{array}{l}
45060\\
2030\\
\Downarrow\\
8\ 45060\\
2030\\
\Downarrow\\
80\ 45060\\
2030\\
\Downarrow\\
81245060\\
2030\\
\Downarrow\\
81205060\\
2030
\end{array}$$

Segons que diu, per tal de poder continuar la multiplicació, el primer que cal fer és corre el multiplicador un lloc cap a la dreta:

$$\begin{array}{l}81205060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91205060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91205060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91355060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91350060\\ 2030\end{array}$$

$$\begin{array}{l}91350060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91350060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91350060\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91471800\\ 2030\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l}91471800\\ 2030\end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l}91471800\\ 2030\end{array}$$

La regla quedaria més clara, potser, fent servir la tècnica de passar ratlla, però no és pas aquest el mètode que aplica P. P. de DÀCIA a l'hora d'exemplificar la regla de SACROBOSCO.[378]

La divisió és el tema del paràgraf següent. Dividir un nombre per un altre és esbrinar quantes vegades [senceres] el petit cap dins del gran. Disposem, doncs, de

[378] CURTZE, M. [1897], 54-58. Una manera més còmoda de fer la multiplicació fóra presentar-la de forma *esglaonada*. La part inferior s'esglaona després d'efectuar la multiplicació per cada una de les figures del multiplicand per totes les del multiplicador; al damunt s'hi van col·locant els resultats de les multiplicacions parcials, un cop efectuades les sumes, adequadament. És una forma més compacta que respon, de fet, a la tècnica de passar ratlla que, al seu torn, respon a la tècnica d'esborrar en

tres nombres: el *dividend*, el *divisor* i el *quocient*. Aquest darrer indica quantes vegades el divisor és dins del dividend.[379] Deixem de banda la lectura detallada de la regla i fixem-nos en els exemples de P. P. de DÀCIA.[380]

P. P. de DÀCIA comença amb el següent enunciat: "Si un rei ofereix 9876 lliures franceses als 543 soldats d'una expedició, quantes lliures franceses els tocaran a cada un?"[381] Col·loquem el dividend al damunt i el divisor al dessota, de manera que la figura més gran del superior sigui més gran o igual que la del divisor; altrament, el divisor el col·loquem un lloc a la dreta.[382]

$$\begin{array}{l} 9876 \\ 543 \end{array}$$

Ara veiem que 987 conté 543 una sola vegada. Per tant, el primer quocient parcial —que col·locarem damunt del 7— és 1. Multipliquem 543 per 1 i el resultat el restem de 987. S'obté la configuració següent:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 4446 \\ 543 \end{array}$$

Fet això, traslladem el divisor un lloc cap a la dreta:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 4446 \\ 543 \end{array}$$

taules de sorra.

$$\begin{array}{l} 91471800 \\ 9147180 \\ 913500 \\ 91350 \\ 8120 \\ 45060 \\ 2030 \\ 2030 \\ 2030 \\ 2030 \\ 2030 \end{array}$$

[379] CURTZE, M. [1897], 11; GRANT, E. [1974], 91.

[380] CURTZE, M. [1897], 58–66.

[381] CURTZE, M. [1897], 58.

[382] P. P. de DÀCIA distingeix aquesta situació considerant els casos: 654 dividit per 99; 654 dividit per 69 i 6254 dividit per 629. Si volem dividir, per exemple, 1352 per 25, els col·loquem en la forma $\genfrac{}{}{0pt}{}{1325}{25}$; en canvi, si volem dividir 9876 per 543, els col·loquem en la forma $\genfrac{}{}{0pt}{}{9876}{543}$.

És clar que el 543 cap 8 vegades dins del 4445. Col·loquem el 8 a la dreta de l'1; multipliquem 543 per 8 i el resultat el restem del 4445. Finalment s'obté:[383]

$$\begin{array}{rcl} 18 & \longrightarrow & \text{quocient} \\ 102 & \longrightarrow & \text{romanent} \\ 543 & \longrightarrow & \text{divisor.} \end{array}$$

Veiem ara un exemple en què apareix xifra.[384] Es tracta de dividir 78 876 per 38.

78876
38

78 dividit per 38 toca a 2. Per tant, podem escriure:	2 78876 38
Ara multipliquem 38 per 2 i el resultat el restem de 78; dóna:	2 2876 38
Ara correm el 38 un lloc cap a la dreta:	2 2876 38

[383] CURTZE, M. [1897], 62.

$$\begin{array}{rrl} 10 & & \\ \cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}2 & & \\ 18 & 18 & \text{quocient} \\ \cancel{9}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{6} & 102 & \text{romanent} \\ 543\; & 543 & \text{divisor} \\ 543 & & \end{array}$$

[Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 139.] Aquesta tècnica l'anomena la *tècnica de anterioratio*, és a dir, la tècnica que consisteix a col·locar, després de cada divisió, el divisor en el lloc anterior. En l'exemple de D. E. SMITH es divideix 2852 per 12. Però, de fet, ho fa al revés que P. P. DACIA; és a dir, ho fa per la dreta

$$\begin{array}{rrl} 12 & & \\ 493 & & \\ 237 & 237 & \text{quocient} \\ 2852 & 8 & \text{romanent} \\ 12\;\; & 12 & \text{divisor} \\ 12\; & & \\ 12 & & \end{array}$$

Multiplica el 2 del 12 per 2, dóna 4, i el treu del 8 del 28. Dóna 4. Ara multiplica l'1 del 12 per 2 i dóna 2 que treu del 2 del 28. No queda res i *no escriu res*. Ara té 45 dividit per 12, dóna 3. Aleshores $2 \times 3 = 6$ que traiem de 5, dóna 9 i en guardem un a la mà. Aleshores $1 \times 3 = 3$ i un que se'n porta dóna 4 que traiem de 4. I prossegueix l'operació pas a pas fins a obtenir el valor del quocient i del romanent.

[384] CURTZE, M. [1897], 63.

2876
38

De fet, cal dividir 2876 per 38. Però ara resulta que 28 no conté pas el 38. En aquest cas el quocient parcial és xifra. Així doncs, cal escriure:

20
2876
38

Ara l'únic que cal fer és córrer el divisor un lloc cap a la dreta:

20
2876
 38

2876
 38

Ara cal veure quantes vegades el 38 cap dins del 287. Són 7. Per tant, s'obté:

207
2876
 38

Ara multipliquem 38 per 7 i el resultat el restem de 287. S'obté 287 − 266 = 21:

207
 216
 38

216
 38

Finalment, correm el divisor un lloc cap a la dreta. Hem de veure quants cops el 38 cap dins del 216. Són 5. Multipliquem 38 per 5 i el resultat el restem de 216. Dóna 26. És a dir:

2075 quocient
  26 romanent
  38 divisor

Fixem-nos que, amb aquest algorisme, s'obté el quocient exacte, si pensem que $\frac{26}{38}$; és la fracció $\frac{26}{38}$.[385]

SACROBOSCO acaba la divisió fent algunes observacions. "Si el romanent és xifra, la divisió és exacta; en cas contrari, ha de ser sempre més petit que el divisor". Aleshores diu que podem considerar-lo com les parts fraccionàries del divisor. Tampoc no atina a introduir la part fraccionària en forma *decimal.* La darrera observació fa referència a la correcció de la divisió.

> Un cop feta la divisió, si volem constatar-ne la validesa el que hem de fer és el següent: multipliquem el quocient pel divisor. Això ens ha de donar el dividend, si el romanent és xifra. En canvi, si el romanent és una certa quantitat, l'afegim al producte anterior. Si s'obté el dividend, la divisió és correcta.[386]

Després afegeix que la multiplicació i la divisió són operacions oposades en el següent sentit: donats tres nombres, l'un és el producte dels altres dos si, i només si, dividint el producte per un d'ambdós dóna l'altre.

[385] Recordem que els àrabs escrivien les fraccions sense ratlla.
[386] CURTZE, M. [1897], 12.

El següent capítol —que ometrem— fa referència a les progressions. El text s'acaba amb dos capítols que fan referència, respectivament, a l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques. Hi dedicarem un xic d'atenció, basant-nos, però, en els exemples de P. P. de DÀCIA.[387]

Primerament aclareix què és el *quadrat* d'un nombre, què és l'arrel d'un nombre quadrat i què cal entendre per *calcular l'arrel quadrada*. Estableix la mateixa classificació que havia donat ja BOECI a l'*Arithmetica*: hi ha nombres lineals, superficials [o plans] i sòlids. La classificació està lligada amb la *multiplicació*.

> Els nombres *lineals* consten d'un sol nombre de la mateixa manera que una línia té una sola direcció: longitud. Un nombre és *superficial* [o *pla*] si s'obté multiplicant dos nombres; s'anomena així perquè conté dos nombres que l'amiden de la mateixa manera que una superfície té dues dimensions: longitud i amplada...[388]

Aleshores fa una sèrie de consideracions de les quals solament retindrem que un "nombre és un quadrat quan s'obté de la multiplicació d'un altre nombre per si mateix".[389] De fet, mesura la superfície d'un quadrat el costat del qual té com a longitud el nombre que es multiplica per si mateix. Un nombre, en canvi, "no és quadrat" quan s'obté multiplicant un nombre per un altre diferent de si mateix.[390] L'arrel d'un quadrat és el nombre que cal multiplicar per si mateix per aconseguir el quadrat.

Tot seguit repeteix aquesta mena de definicions en relació amb els nombres sólids, però em sembla que no cal donar-les perquè el lector pot reconstruir-les fàcilment. Després estableix algunes proposicions elementals.[391]

I un cop aclarida la part més teòrica del tema, SACROBOSCO diu què hem d'entendre per *trobar l'arrel quadrada* d'un nombre. "Si el nombre és un quadrat, entenem

[387] CURTZE, M. [1897], 14–17, 17–19 i 79–84, 84–92; GRANT, E. [1974], 100–101, solament conté l'extracció d'arrels quadrades i la traducció no és pas completa, si bé és suficient.

[388] CURTZE, M. [1897], 14; GRANT, E. [1974], 100.

[389] CURTZE, M. [1897], 14; GRANT, E. [1974], 100.

[390] Cal notar la imprecisió de la definició, atès que $2 \times 8 = 16$. No indica que un nombre "és no-quadrat" quan *no es pot aconseguir multiplicant un nombre per ell mateix*.

[391] Vegeu CURTZE, M. [1897], 15; GRANT, E. [1974], 100: un mateix nombre és alhora arrel quadrada i cúbica, però els seus quadrat i cub són diferents, llevat en el cas de la unitat. Segons BOECI, ens recorda SACROBOSCO, la unitat multiplicada per si mateixa tantes vegades com vulguem sempre dóna 1. També estableix dues proposicions que trobem a *Els Elements* d'EUCLIDES i que estableixen que "entre dos quadrats successius solament hi ha una mitja proporcional, que s'obté multiplicant les arrels respectives" [E. VIII, 11] i "entre dos cubs successius solament és possible de col·locar-hi dues mitges proporcionals, una més petita i una altra més gran [és a dir, diferents]. La més petita s'obté multiplicant l'arrel gran pel quadrat de l'arrel petita i la més gran, multiplicant l'arrel petita pel quadrat de la gran" [E. VIII, 12].

precisament la seva arrel; però si no ho és, entenem l'arrel del quadrat més gran contingut en el nombre".[392] El primer que cal fer, diu, és veure si té un nombre parell o senar de figures; si és parell, l'operació comença considerant la penúltima figura; si és senar, l'última.[393] L'exemple de P. P. de DÀCIA consisteix a calcular l'arrel quadrada del número 9 548 198.

Cerquem l'arrel quadrada de 9, que val 3. L'aixequem al quadrat i el resultat el restem del 9. En resulta la configuració:

548 198
3

Ara doblem el dígit obtingut [el 3] i el col·loquem entre la figura més alta [el 5] i l'arrel quadrada [el 3]:

548 198
6
3

Tot seguit cerquem quin dígit hem de col·locar sota la figura següent [el 4] per tal que, en col·locar-la també al costat de la figura doblada obtinguda [el 60] i multiplicar-la pel dígit que hem trobat, s'obtingui el màxim producte contingut en la següent parella [el 54]. En aquest cas és xifra. És a dir, s'obté xifra [0] perquè el 6 no cap dins del cinc. Això ens obliga, d'una banda, a col·locar xifra dessota del 6 i, d'una altra, a la dreta del 3 deixant un lloc buit enmig.

548 198
60
3 0

Ara cerquem un altre dígit que sigui adequat per tal que, col·locant-lo al costat del nombre doblat i multiplicant el nou nombre obtingut pel dígit, ens proporcioni el màxim producte contingut dins del nombre format per dos grups de dues figures cadascun. És el 9, que col·loquem al costat del 60 i també al costat del 30, però dessota del 9. El producte obtingut [609 x 9 = 5481] el col·loquem, momentàniament, al damunt de les quatre figures més altes.

5481
548198
609
30 9

Ara restem i obtenim:

98
609
30

[392] CURTZE, M. [1897], 16; GRANT, E. [1974], 101.

[393] De fet, separem les figures de dues en dues i comencem amb el bloc que queda a l'esquerra del tot.

Doblem el darrer dígit [el 9], i tot plegat ho col·loquem de la forma adjunta:

98
6018
30 9

Hem de desplaçar el 60 i el 30 un lloc a la dreta per tal que tot estigui al seu lloc.

98
618
309

Finalment, com que 618 és més gran que 98, hem d'afegir xifra i hem acabat.

98
6180
3090

L'arrel quadrada [per defecte] de 9 548 198 és 3090. Ara bé, el quadrat de 3090 val 9 548 100; per tant, hi ha un romanent de 98 unitats.[394] El mètode de SACROBOSCO no difereix en res del que actualment s'ensenya a les escoles, llevat de la disposició.

L'arrel cúbica és més llarga i complexa. D'antuvi dividim el nombre en grups de tres i comencem pel grup més alt que pot tenir una, dues o tres figures. El primer exemple que ofereix P. P. de DÀCIA consisteix a calcular l'arrel cúbica del número 751 089 429.

Hem de buscar un dígit que elevat al cub s'aproximi al més possible al número 751. És el número 9. A més, el cub de 9 és 729, que restem de 751. S'obté en primera aproximació:

22 089 429
9

Ara tripliquem el dígit i el col·loquem dessota del 8.

22 089 429
27
9

[394] Observem que SACROBOSCO considera arrels aproximades. Primerament aproxima 9 000 000 i obté 3000; aleshores busca les centenes. És a dir, busca una figura [o bé xifra] tal que col·locada al lloc de les centenes aproximi millor l'arrel. És a dir, busca una figura a tal que $3000 + 100a$ al quadrat aproximi de la millor manera possible 9 540 000. Aleshores recorre al fet que

$$9\,000\,000 + 2 \times 3000 \times 100a + (100a)^2 = 9\,540\,000,$$

o sigui que $300\,000 \times (2a)$ ha de ser el màxim nombre contingut dins de 540 000. En aquest cas, a només pot ser xifra. Aleshores hem de buscar les desenes; és a dir, $(3000 + 10b)^2 = 9\,548\,100$ o, equivalentment, $(300 + b)^2 = 95\,481$. Això dóna $300 \times (2b) + b^2 = 5481$, que podem posar en la forma $b(600 + b) = 5481$, que s'obté dividint 5 481 per 600; o millor encara 54 per 6.

Notem que qualsevol dígit situat al costat del 9 i multiplicat per 27 supera el número 2208.

24 57
22 089 429
27
9 1

Això fa que el següent valor de l'arrel cúbica sigui xifra. És a dir, tenim:

22 089 429
2 70
90

Ara calculem 909 × 27 = 24 543 que multiplicat per 9 dóna 220 887. Així doncs, tenim:

22 088 7
22 089 429
2 709
90

Restant, s'obté:

729
2 709
90

Ara hem de calcular el cub de 9 i restar-lo. Obtenim romanent 0.

L'arrel cúbica de 751 089 429 és exacte i val 909.

P. P. de DÀCIA eleva 909 al cub i veu que efectivament s'obté el nombre donat inicialment. Però, tanmateix el mètode de SACROBOSCO li sembla massa difícil i poc clar i ens ofereix un mètode que va detallant a mesura que l'aplica al càlcul de l'arrel cúbica del número 1 234 567 890.[395]

En primer lloc separem el nombre 1 234 567 890 en grups de tres figures cada un, començant per la dreta. El grup més alt solament conté el dígit 1.

1 234 567 890

L'arrel cúbica d'1 és 1. El seu triple és 3. Així doncs, restem el cub d'1 del nombre donat i obtenim:

234 567 890
3
1

[395] De fet, cal notar que la llei d'aixecar un nombre escrit en el sistema decimal al cub respon a la regla $<< 810a + b << 9^3 = 1000a^3 + 3 \times 100a^2 b + 3 \times 10ab^2 + b^3 = 1000m + 100n + 10p + q$. El valor d'$a$ el determinem de manera que s'ajusti el millor possible al valor $1000m$. Després hem de conjecturar el valor de b, observant que $3 \times 100a^2 b + 3 \times 10ab^2 + b^3 = 1000(m - a^3) + 100n + 10p + q$, que podem posar en la forma $3ab(100a + 10b) + b^3 = 3ab(10a + b)10 + b^3$. Hem de buscar b de manera que $3a(10a + b)$ estigui inclós dins $100(m - a^3) + 10n + p$ i que sigui el més gran possible.

Observem, no obstant això, que la regla que segueix P. P. de DÀCIA és molt menys clara que la que hem trobat en ĀRYABHATA.

La següent aproximació solament pot ser xifra atès que qualsevol altre valor ens donaria, al multiplicar-lo per 3 un nombre superior al 23. Cal, doncs, posar xifra i passar al grup següent:

234 567 890
30
10

Ara desplacem el 10 dos llocs a l'esquerra col·locant-hi de moment un zero per tal que es correspongui amb el 3.

234 567 890
30
10 0

Seguidament multipliquem l'1 pel 3, i obtindrem:

3
234 567 890
30
10 0

Però ara cal un dígit tal que, en multiplicar-lo per 3, doni un resultat que estigui contingut en el 23. L'adequat sembla el 7. El col·loquem doncs al seu lloc i calculem el triple de l'arrel. És a dir:

32 1
234 567 890
30
10 7

Ara multipliquem 321 per 7, i el resultat el restem del nombre 234 567 890. S'obté:

9 867 890
30
10 7

Cal restar el cub de 7, que val 343:

9 524 890
30
10 7

Ara passem al grup següent, tot col·locant l'arrel i el seu triple al lloc corresponent.

9 524 890
3 21
1 07

Fem el desplaçament tres llocs a l'esquerra i col·loquem un zero a la dreta del 107.

9 524 890
3 21
1 070

Multipliquem 107 per 321. El resultat, que val 34 347, el col·loquem al damunt de tot. Aquest número cap 2 vegades en el 9524.

3 434 7
9 524 890
3 21
1 070

La propera aproximació de l'arrel cúbica és el 2. Tenim, doncs:

9 524 890
3 21
1 072

Multiplicant 1 072 per 321, s'obté:

3 441 12
9 524 890
3 212
1 07

El seu doble és 688 224 que, un cop restat del nombre original, dóna 2 642 650. Ara hi hem de treure el cub de 2. Com a arrel cúbica del nombre 1 234 567 890, s'obté finalment 1 072 i, com a romanent, el 2 642 642.

Per tal de constatar-ne la validesa, cal aixecar 1072 al cub. S'obté 1 231 925 248, que és el cub més gran contingut dins del 1 234 567 890. El romanent dóna la diferència entre ambdós. Si al número 1 231 925 248 li afegim 2 642 642 obtindrem el nombre inicial. Finalment ens fa notar que el cub de 1073 —que val 1 235 376 017— excedeix el nombre inicial en 808 127 unitats. És el cub més petit que és més gran que 1 234 567 890.

* * *

Els dos textos que acabem d'analitzar són força diferents, com ja hem indicat a la introducció. Si ens limitem, però, a la presentació estricte dels numerals indoaràbics i els seus algorismes de càlcul, les diferències són menors. Potser cal remarcar el fet que SACROBOSCO, seguint la forma expositiva de l'*Arithmetica* de BOECI, intenta de ser més acurat en les definicions. Això el porta a *definir cada una* de les operacions, un fet que FIBONACCI passa més pel damunt. Aquesta presentació li permet d'agrupar les operacions aparellant-les: addició-diferència; multiplicació-divisió; potència-arrel. D'aquest aparellament en dedueix el caràcter oposat de les operacions de cada parella. Això li permet d'establir la *comprovació* d'una operació, efectuant l'operació inversa corresponent. Introdueix els noms dels components de cada operació. Evita, en canvi, les taules. En això es diferencia de FIBONACCI que recorre a les *taules elementals de sumar, multiplicar* i *dividir*.

Els algorismes de FIBONACCI, basats en la tècnica de "retenir a la mà" —que avui en diem "portar-ne"—, són més senzills i idonis per al llenguatge escrit, si no podem esborrar. SACROBOSCO, en canvi, basa la seva tècnica en el fet de "passar ratlla", o "de copiar novament" els resultats previs, per tal de tornar a començar.

Deixant, però, de banda aquestes qüestions, ben poc importants, ambdós ofereixen de forma clara, precisa i correcta els numerals indoaràbics i els algorismes de sumar, restar, multiplicar, dividir i treure arrels quadrades i cúbiques. Com hem indicat amb anterioritat, la utilitat d'aquesta nova *algorísmia* queda completament demostrada en alguns centenars de pàgines del *Liber abaci*.

* * *

Els dos matemàtics que hem analitzat, FIBONACCI i SACROBOSCO introdueixen el zero, però li donen noms diferents. FIBONACCI l'anomena *zephirum* i SACROBOSCO, *cifra*.[396] La història del nom del zero i la seva evolució ha estat estudiada àmpliament i podem trobar-la en molts textos d'història de la matemàtica.[397] No obstant això, ens ha semblat coherent amb la present anàlisi fer-ne un resum succint, que serveixi per completar aquesta exposició que vol ser, si més no, una visió panoràmica de l'evolució de les xifres indoaràbigues.

Ja hem indicat que els símbols emprats per designar el zero han estat diversos. Entre d'altres, un punt, un petit cercle, un lloc buit, aquest darrer més freqüent en els àbacs i taules de sorra. Ara ens preocuparem del nom i de les seves variacions a l'EUROPA llatina. Ja hem indicat també que, en sànscrit, els noms eren diversos però, entre tots, trobem *śūnya*, que vol dir "el buit".[398] Els àrabs van adoptar el mateix significat —"el buit"— per designar la xifra desprovista de valor. Ara bé, en àrab, aquesta paraula s'escriu

صفر

la transcripció fonètica de la qual és *as-ṣifr*, o simplement *ṣifr*. No és, doncs, estrany que, en els textos d'aritmètica indoaràbiga llatinitzats, trobem la paraula *xifra*, o alguna variant, per designar la figura sense valor. SACROBOSCO, com ja hem comentat, utilitza tres o quatre noms diferents, entre els quals trobem *cifra*. ALEXANDRE de VILLEDIEU usa també la mateixa llatinització que, al seu torn, és força anàloga al terme grec *τζίφρα* [*tzyphra*], utilitzat per MAXIMUS PLANUDES. En canvi, LEONARDO da PISA prefereix el nom de *zephirum*.[399] Aquest nom es manté entre els autors

[396] I també, recordem-ho: *theca*, *circulus* o *figura nihili*.

[397] El lector interessat pot consultar CAJORI, F. [1928], edició anglesa de 1993, 48–52; SMITH, D. E. [1923], edició anglesa de 1958, II, 71–72; IFRAH, G. [1981], 509–518; MENNINGER, K. [1957], edició anglesa de 1992, 400–406.

[398] A voltes se l'anomenava *śūnya-bindu*

[399] És el nom que trobem al text de PHILIPPI CALANDRI [~1491], *De Arithmetica Opusculum*, editat a FLORÈNCIA, l'any 1491.

italians fins al Renaixement. Després és sotmès a diverses variacions entre les quals cal esmentar *zefiro*.[400]

Sànscrit (segle VI)	*śūnya* (="buit")	
Àrab (segle IX)	*as-ṣifr*	
Llatí (segle XIII)	cifra	zephirum
Francès (segle XIV)	chiffre	zefiro-zeuero-zero (italià)
Alemany (segle XV)	Ziffer	zero (anglès, francès)
Català (Santcliment, segle XV)	chifra	cero (castellà, segle XVI)

Malgrat que el significat inicial de *xifra* era el que actualment té la paraula "zero", el mot àrab *Ṣifr* donaria lloc, de fet, als mots *chifra, sifra, cifra, cyfra, cifre, cyfre*, etc. que, després del seu significat original, prendria el significat actual de *xifra*, el mateix sentit que Sacrobosco va donar al mot *dígit*, que incloïa també el zero.[401]

Així com encara avui dia, en català, usem l'expressió "un zero a l'esquerra" per indicar una pesona de la qual no esperem res ni de bo ni de dolent, sense caràcter, al segle XIII, a França, l'expressió "*Cyfre d'angorisme*" es feia servir per indicar un home covard. Aquest significat, adaptat a la llengua francesa, es manté fins el segle XV.

[400] D'altres variacions són: *zeuero*, *ceuero*, *zefiro*, i també *sipos*, *tziphron*, *zeron*, *zero*. Notem que la variació *tziphron* sembla un híbrid entre els dos originals *zephirum* i *cifra*.

Al segle XVI, va passar a França i fou adoptat dins l'ús corrent de la llengua francesa. Com diu F. Woepcke: "És un dels efectes de la gran influència que dins França tingué la civilització italiana durant el segle XVI" [Woepcke, F. [1863]]. En un text francés de l'any 1885 podem llegir:

> Et en chiffres ne sont pas dix figures, des quelles les neuf on valeur et la dixieme ne vaut rien mais elle fait valloir les autres figures et se nomme zero ou chiffre.
>
> Vegeu l'entrada "zero" a l'*Enciclopèdia Catalana*: "Nom de la xifra 0, numeral cardinal que designa l'absència d'unitats".

[401] L'any 1801, a l'obra clau d'aritmètica *Disquisitiones arithmeticæ*, editada a Leipzig, Carl Friedrich Gauss usarà encara el mot *cifra* per designar el zero. És un dels darrers genis de la matemàtica que escriu les seves obres en llatí.

A ALEMANYA, el mot actual *Ziffer* té el mateix significat que el mot *xifra* en català, però inicialment significava *zero* —a través dels mots llatins *Ziphra* o *Ziffra*. Avui el zero, en alemany, és el mot femení *die Null*.

És, però, difícil saber amb tota mena de detall perquè s'imposà zero a xifra i perquè xifra va adquirir el significat que avui té i que recullen els diccionaris. Una xifra és "cadascun dels signes gràfics utilitzats en els diversos sistemes de numeració per expressar tots els nombres".[402]

Ens trobem, doncs, davant una aportació indiscutible de la cultura índia, a través de l'islam, a les llengües que es desenvolupaven en la plural EUROPA llatina.

* * *

Malgrat la importància d'aquestes obres aritmètiques llatines del segle XIII escrites en llatí, la seva influència serà molt més limitada de la que hauria d'haver estat. Caldrà esperar fins a les acaballes del segle XV, quan a l'EUROPA medieval, que estava agònica, es va descobrir la impremta de caràcters mòbils, perquè aquesta nova tècnica de càlcul —l'*algorisme*— trobi el resò que mereix.

6 Les primeres edicions d'aritmètiques europees

El segle XIII es pot considerar el segle més esplendorós de l'EDAT MITJANA. Pel que fa al seu desenvolupament cultural i científic hem de posar l'accent en alguns fets importants. La fundació i, sobretot, la consolidació de les universitats que, com ens fa notar G. BEAUJOUAN, "està relacionada amb la relaxació del sistema feudal, l'augment de la població i el moviment de les ciutats".[403] N'hi ha prou amb el fet que els estudiants i els mestres siguin suficients per poder-se agrupar en una associació organitzada. Amb aquest sol fet, ja neix una "universitat"; però, quines diferències d'una ciutat a una altra! El caràcter laic i democràtic de BOLONYA és molt idoni per a la vocació jurídica dels seus estudis i explica també la contribució preeminent que, uns anys més tard, tingué en els progressos de l'anatomia i la cirurgia. PARÍS, en canvi, serà objecte constant de la sol·licitud pontifícia i, per tant, la capital de la teologia i un feu dels dominics. En aquesta època, MONTPELLER es trobava sota la sobirania del regne d'ARAGÓ i, per aquesta raó, estava fortament sotmesa i impregnada de la influència cultural judeoaràbiga. Això pot explicar que cultivés una medecina més raonada i racional que la que s'estava desenvolupant a BOLONYA. Els mestres de la Universitat d'Oxford, la majoria franciscans, seguiran, en general, fidels al platonisme

[402] Vegeu l'entrada "xifra" de l'*Enciclopèdia Catalana*. També és interessant l'entrada "xifra" que dóna COROMINAS, J. [1991], IX, 541–543.

[403] TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 644.

agustinià, que consideraven més compatible i concordant amb el misticisme de la seva orde que no pas l'aristotelisme.[404] L'entrada de l'aristotelisme a la Universitat de París provocà un enfrontament realment punyent entre la raó i la fe. Els ensenyaments de l'estagirita pretenen d'identificar ciència i raó i aquesta síntesi col·loca el déu de l'església catòlica de Roma en un lloc molt més insignificant del que li havien reservat els pares de l'Església. A més, alguns punts de la ciència aristotèlica entren en contradicció clara amb el cristianisme. No ens ha d'estranyar, doncs, l'enfrontament entre la Facultat de les Arts, defensora de les noves idees, i la de Teologia, guardiana de la fe, ni tampoc que aquestes noves idees fossin condemnandes a PARÍS entre els anys 1210 i 1215. En aquesta discussió hi tingueren un paper realment notable homes de gran vàlua, com ara ABELARD [1079–1142], ALBERT, dit *el Magne* [1206–1280], TOMÀS d'AQUINO [1225–1274], que defensaven que "la veritat no pot contradir-se" i, per tant, la fe i la raó havien d'estar necessàriament d'acord; i ROGER BACON [1214–1294], conegut com *el doctor mirabilis*, més radical, que sostenia que el valor de la ciència té el seu fonament i troba les seves raons en l'experiència i en l'experimentació i, en absolut, en l'acceptació de l'autoritat.[405] S'elaboren textos enciclopèdics en la línia de les obres de CASSIODOR [480–575], ISIDOR de SEVILLA [560–636], BEDA, dit *el Venerable* [673–735] i d'altres. Però les enciclopèdies del segle XIII, a diferència de les dels segles VI al VIII, no es limiten només a donar resposta a algunes qüestions científiques elementals relacionades amb la interpretació de les Escriptures. Pretenen d'incorporar, a més, dades que provenen de l'observació directa de la naturalesa i de les lleis i principis en què es sustenten les tècniques implantades durant els segles XII i XIII.[406]

Aquesta situació, no obstant això, no es mantindrà pas fins a la fi de l'EDAT MITJANA ja que, a mitjan segle XIV, alguns esdeveniments crítics porten a una situació diferent en gairebé tots els àmbits. Això propicia plantejaments nous que, amb el pas del temps, permetran de consolidar allò que de positiu havia tingut el segle XIII. La consolidació, però, no s'iniciarà fins a la meitat del segle XV, un segle més tard d'aquell en què s'hauria esdevingut, si no s'hagués donat una situació crítica molt notable que produiria un trencament en la línia ascendent del progrés. Aquesta crisi la resumirem enumerant-ne alguns dels trets més notables sense entrar, però, a fer-ne una exposició específica massa detallada. D'una banda, les famílies burgeses arriben al poder i introdueixen un element nou, inicialment desestabilitzador, en el fràgil equilibri establert entre els cavallers, el clergat i el poble. L'element desestabilitzador és donat, entre d'altres aspectes, pel fet que són precisament aquestes famílies burgeses

[404] TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 644–645. Vegeu també SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 212, o BURTON, D. [1985], edició de 1992, 281–285.
[405] Vegeu BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 334.
[406] TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 643–670

de nou encuny les que detenen el poder econòmic i, per tant, poden influir de forma important en les decisions polítiques, en les guerres i el seu finançament i, fins i tot, en les decisions de l'Església Catòlica. I ho fan sempre que tenen el pressentiment que algun esdeveniment, fet, directriu, norma o llei pot afectar directament o indirecta l'estabilitat econòmica i l'arrelament social assolits. Són, també, els únics nuclis que poden suportar el pes econòmic de les despeses d'infraestructura i modernització dels burgs amb tot el que això suposa en el desenvolupament de l'arquitectura, les arts, l'enginyeria, la indústria, l'artesania, l'educació, etc.[407] Un altre factor que incidí en aquesta situació de desequilibri, posant en perill el que s'havia assolit des del segle X al XIII, fou la consolidació de les monarquies com a poders polítics absoluts en les naixents nacions europees. Això forçà un nou estatus en el qual els cavallers es trobaven entre el poder del monarca, cada cop més sòlid però que s'estintolava en la seva fidelitat i lleialtat, i el compromís que els lligava amb els seus propis vassalls que, amb el seu treball, les lleves, els servents, les doncelles, els artesans i els artistes els proporcionaven tot allò que els calia per poder-se mantenir en la categoria dels cavallers. Els subministraven queviures, homes per als seus exèrcits, servents que cuidaven i mantenien els castells, palaus o vivendes, així com les propietats agrícoles, forestals i de caça. Els artesans els fabricaven i mantenien els ginys de la guerra. Les doncelles, quan així ho exigien, els satisfeien les necessitats que tenien en els temps de pau. Els artistes els distreien en els moments d'oci i de recés. A voltes, però, es veien obligats a ofegar els seus súbdits, trencant allò que justificava la seva raó de ser, per poder satisfer les ambicions desmesurades dels seus "senyors per la gràcia de déu" —els monarques—; a voltes, s'havien d'enfrontar amb el monarca, trencant el jurament de fidelitat, per tal de protegir llurs feus i els drets dels seus súbdits. En un altre indret ja hem indicat com, a ANGLATERRA, els cavallers, autèntics "senyors feudals", van obligar el rei JOAN I, dit *el Sense Terra*, a acceptar la "carta magna".

Ultra aquests fets d'ordre polític, en l'ordre cultural i de les idees, ens trobem amb un creixent esperit laic que, malgrat que encara està fortament vinculat a la fe i a l'Església, s'endinsa cada cop més en la literatura, el dret, l'art i, a poc a poc, va influint en els costums i els comportaments.[408] L'autoritat, tota mena d'autoritat,

[407] "Entre els anys 1282 i 1292, la república de FLORÈNCIA, governada per la classe dels comerciants, va aconseguir modificacions de la constitució. Aquest fet tindria repercussions molt importants entre les quals cal remarcar que, al segle XIV, s'ensenyés, a les escoles, l'aritmètica florentina. Si l'acumulació de riqueses assolida per la classe burgesa s'hagués mantingut durant el segle XIV, s'haurien pogut nodrir amb més vigor, de forma natural, les arts i les ciències. Però això solament fou una esperança fallida. Caldria esperar fins al RENAIXEMENT per aconseguir-ho. No tingué lloc abans perquè dos factors, fonamentalment, van fer miques la consolidació esperada" [SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 230–231].

[408] A ITÀLIA es descobreixen els textos literaris clàssics i això porta els escriptors i poetes a imitar-los. Així DANTE ALIGHERI [1265–1321], prenent a PUBLI VIRGILI MARÓ [70 aC–19 aC] com a mestre,

inclosa la del papa, va perdent prestigi i cada cop inspira menys respecte. Els erudits aconsegueixen de trencar definitivament amb l'esperit dels pares de l'Església —un fet que s'havia iniciat ja de forma incipient, com hem indicat, al segle XIII—, els quals sostenien que tots els coneixements de l'home [la ciència, el dret, l'art, la filosofia, la medicina, l'astronomia, etc.] havien de concordar totalment amb els ensenyaments que emanen de la BÍBLIA i mai no els podien contradir. Però, a més, la BÍBLIA havia de ser interpretada adequadament i aquest paper estava reservat a l'autoritat incontestable de l'Església. No obstant això, els savis dels segles XIV i XV —i els que vindrien darrera seu— defensaven que els ensenyaments bíblics s'havien de limitar a l'ordre de la fe i del dogma i, en alguns aspectes, de la moral, però que, en canvi, no tenien res a dir en relació amb el coneixement de l'home en general i, molt menys encara, en les qüestions relatives a la ciència.[409] A més calia, i fins i tot era lícit, dubtar de les interpretacions de l'Església, sobretot en aquelles qüestions que no pertanyien estrictament al dogma.

Ens trobem, a més, davant d'una crisis molt important del sector agrícola deguda fonamentalment a dos fets. D'una banda, al creixement de la població durant tot el segle XIII i la primera quarta part del XIV i, d'una altra, a l'abandó del camp per part de gent que fins aleshores havia viscut del seu conreu, en busca de les formes alternatives de vida que els oferien les ciutats. A més, tingué lloc la GUERRA dels CENT ANYS [1338–1435, si bé hi ha qui la situa entre els anys 1328 i 1491], que dugué l'EUROPA del segle XV a una situació gairebé apocalíptica. La destrucció de les collites, el bestiar i algunes poblacions es convertí en una nova arma que pretenia de debilitar l'enemic, en privar-lo dels recursos més indispensables i dels béns més preuats. El resultat que s'aconseguí fou, en definitiva, la debilitació de la situació d'estabilitat i creixement assolida al segle XIII. En aquest context, l'any 1345 EUROPA s'hauria d'enfrontar amb la primera fallida bancària, els efectes de la qual foren importants perquè influïren d'una forma notable en el futur del sistema bancari i dels seus usos. S'imposaren condicions molt més rígides, que podem considerar d'autèntica usura. A més, dos anys més tard, fruit del desgavell provocat per una situació cada cop més depauperada per la guerra i la fam, va aparèixer la PESTA NEGRA [1347–1349] que, amb menys de dos anys, va reduir entre un terç i la meitat la població europea. Aquesta reducció tan notable de població va afectar també les ordes monàstiques i, de retruc, tot el que havien significat en l'equilibri social i cultural del segle XIII.

---

escriu la *Divina Comèdia*, una obra clau de l'Edat Mitjana italiana; PETRARCA [1304–1374] impulsa el coneixement dels clàssics grecs i llatins, aconseguint una col·lecció notable de manuscrits dels literats d'ambdues cultures clàssiques; BOCCACIO [1313–1375] porta a terme un estudi aprofundit i ple de zel d'aquestes obres.

[409] TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 643–670.

Aquesta situació de guerra, fam, mort i enfermetat —els quatre genets de l'APOCALIPSI recorren EUROPA d'un extrem a l'altre— fan que la BAIXA EDAT MITJANA [1350–1450] sofreixi una regressió econòmica i demogràfica importants. Però alhora és el que provoca una creixent veu crítica envers les elits intel·lectuals que no han estat prou hàbils per evitar-la. La població es tomba amb força cap al misticisme més desordenat i cap a les supersticions més absurdes. Les universitats entren en una situació de crisi i decadència importants que no afavoreix gaire l'estudi de les matemàtiques.[410] Malgrat tot, el convenciment que l'home pot aconseguir que aquesta situació no es torni a produir mai més, porta la ciència a comprometre's molt més estretament amb la vida pràctica, abandonant l'excessiu classicisme del segle XIII. S'imposa la medicina i la comptabilitat. L'enginy humà i les teories desenvolupades a les universitats es posen al servei de grans descobriments. Això obliga a millorar les tècniques de navegació, fabricant vaixells més idonis per a grans viatges, la cartografia, l'astronomia aplicada i, per tant, la trigonometria, etc.[411] Podem, doncs, afirmar que el darrer segle de l'EDAT MITJANA és el segle de la tècnica.[412] Esmentem, encara que sigui de passada, algun dels èxits de la tècnica dels segles XIV i XV. Al segle XV, a l'ALEMANYA meridional trobem el sistema de biela-manivela que permet un rendiment sensiblement més òptim en l'ús de la politja. Al segle XIV, a FRANÇA, s'introdueix la roba blanca —*linge*— que permet de millorar la higiene i fa retrocedir la lepra. A més, proporciona, a un cost baix, matèria primera per a la indústria del paper. Aquesta indústria l'havien portat de la XINA, al segle XIII, els presoners de SAMARCANDA i els àrabs.[413] Així doncs, com diu G. BEAUJOUAN, "la invenció del botó i de la camisa va condicionar la impremta".[414] Entre els anys 1350 i 1450, apareixen a LIEJA els primers "alts forns". També és en aquest període que es descobreix el procés de "xampanyització" del vi blanc, així com el torn per filar, amb el corresponent impuls que això va suposar per a en la indústria del vi i el tèxtil. Amb l'art de la guerra es consolida l'aplicació creixent de la pólvora: apareixen els canons, els coets i la granada de mà. Tanmateix, la pirotècnica va simplificar enormement el treball de la mineria i això va permetre una millora molt important de l'explotació minera. També es va fer un pas de gegant amb el descobriment dels àcids que havien de permetre noves tècniques en l'orfebreria i en la tècnica i l'ús del vidre. No ens ha

[410]Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 231.

[411]RAMON LLULL [1232/33–1315/16] diu que "els mariners disposen de mapes, compassos, brújula i l'estrella marina" però amb això no en tenen prou. Els cal saber també que "la navegació marina neix i es deriva de la Geometria i l'Aritmètica". Afirma, per exemple, que un vaixell que avança 8 milles cap el sud-est solament en recorre sis cap a orient". De fet, estableix que $8 \cos 45° = 5.64 \sim 6$ [TATON, R., [1966], edició castellana de 1988, III, 685].

[412]TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, III, 670–696.

[413]Hi ha també qui sosté que la va portar MARCO POLO [1254-1324], juntament amb la pólvora.

[414]TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, III, 672.

d'estranyar, doncs, ni l'aparició de les vidrieries de MURANO ni l'ús de les vidrieres com a element ornamental en l'arquitectura gòtica. També les lupes i les primeres lents es consoliden durant aquest període final de l'EDAT MITJANA. Els primers rellotges mecànics amb peses hi troben la seva època d'expansió. L'ús del carretó va facilitar la tasca de la construcció. Van aparèixer, sobretot als PAÏSOS BAIXOS, les rescloses, les dragues i la utilització del cargol d'Arquimedes que permeté d'eixugar els *pòlders*. És també al darrer segle de l'EDAT MITJANA quan les llengües vernacles traspassen el llindar dels usos col·loquials per incorporar-se als textos científics que pretenen una difusió més àmplia, sobretot en nuclis de població laics, que tenen un coneixement menys acurat, i fins i tot nul, del llatí.[415]

Moltes d'aquestes tècniques foren el resultat d'aplicar els coneixements teòrics impartits a les universitats, o a les escoles especialitzades. La música, sobretot l'estudi de l'harmonia, per exemple, estava vinculada a les matemàtiques. S'abandonà el *cant pla* i es passà a l'*organum*, el *discanto* i la *polifonia actual*, que s'escriu nota per nota. L'astronomia i la trigonometria entren a formar part del corpus de matèries que s'ensenyen a la Universitat d'Oxford. La primera està íntimament lligada amb l'astrologia, que té una importància notable no només entre la classe popular, sinò també entre els mandataris polítics i religiosos. Els primers títols que s'imparteixen són els de "*mestre en arts i medicina*" i "*batxiller en teologia*". La geometria solament es desenvolupa per la seva relació amb l'astronomia, la trigonometria i l'agrimensura, però no com una disciplina teòrica d'interès per si mateixa. En aquest període els artistes més teòrics descobreixen els principis de la perspectiva, però caldrà esperar el RENAIXEMENT perquè aquesta s'imposi. Ho farà gràcies als estudis de LEON BAUTISTA ALBERTI [1404–1472] i LEONARDO DA VINCI [1452–1519]. També és l'època en què apareixen les primeres cartes marines i els mapes. Així, l'any 1436, ANDREA BIANCO elabora el seu *Atlas*.

Cal indicar, finalment, que l'EDAT MITJANA s'acaba precisament amb l'aparició de la impremta de caràcters mòbils, que tingué la virtut de facilitar una difusió més àmplia dels textos i alhora originà l'establiment d'una lexicografia i una iconografia més extenses. Això ajudaria a consolidar les llengües vernacles: el lèxic, l'ortografia, la sintàxi, etc., però també fou decisiu en la divulgació i implantació de les tècniques esmentades més amunt.

Indiquem finalment que, a les darreries de l'EDAT MITJANA, l'islam es troba ja en una situació de total decadència, tant política com cultural. Les derrotes sofertes pels

[415] Recordem, per exemple, la situació d'inferioritat en què es troba NICOLO FONTANA [~1500-1557], conegut també com NICOLO TARTAGLIA, de família humil, autodidacta i desconeixedor del llatí, en la disputa amb GIROLAMO CARDANO [1501–1576] i el seu deixeble LUDOVICO FERRARI [1522–1565], en relació amb la *prioritat en la resolució de la cúbica per radicals*. Aquest fet és usat, amb mala volença, per deixar-lo en ridícul en més d'una ocasió.

musulmans a la península IBÈRICA a mans dels *reconqueridors*, els quals l'any 1492 van aconseguir d'expulsar-los-en definitivament, i les derrotes davant les tropes bizantines, els pobles del nord d'Europa i, finalment, els turcs, van aconseguir de minar la seva puixança, provocant escisions i lluites internes que finalment van anorrear l'islam, com a element decisiu de la història dels segles XIV i XV. D'altra banda, les croades, amb tot el que tenien de positiu, feia ja més d'un segle que s'havien acabat. EUROPA s'havia quedat aïllada de les influències orientals i el seu futur depenia del propi esforç. Havia de trobar, doncs, dintre seu l'impuls necessari per fer un pas endavant tant políticament com socialment i culturalment. Aquest pas endavant és el RENAIXEMENT, un període en el qual els pobles d'EUROPA i, en particular, els d'ITÀLIA, FRANÇA, ALEMANYA i els PAÏSOS BAIXOS aconseguiren consolidar les ciències i les arts, la medicina, la navegació, l'art de la guerra, la filosofia, el dret, la literatura, etc. Aquesta naixença vindrà alimentada per les obres clàssiques llatines, però sobretot per les de la GRÈCIA clàssica, molt més desconegudes. Són obres que, l'any 1453, amb l'emigració provocada per la caiguda de CONSTANTINOBLE en mans dels turcs, arriben parcialment a EUROPA. Moltes s'havien perdut definitivament. Però, pel que fa a les matemàtiques, es donaria un pas molt important precisament a les acaballes de l'EDAT MITJANA. Aquest pas consistiria en la consolidació el sistema de numeració indoaràbic.

6.1 *Les escoles de l'abbaco*

La crisi econòmica del segle XIV va portar a una reestructuració i reorganització del sistema comercial i bancari. Així, per exemple, COSME DE MÈDICIS [1389–1464] aconseguia aixecar un imperi comercial i industrial basat en el model nou. Aquest nou model consistia fonamentalment en el fet de substituir les companyies amb sucursals per companyies amb filials. Això significa que un mateix grup capitalista —que, com abans, és essencialment un grup familiar— controla companyies que, des d'un punt de vista jurídic, són independents: és el que avui anomenem un *holding*. El sistema resultava més flexible en el sentit que un fracàs local no comportava necessàriament la fallida del conjunt.

Però la complexitat dels negocis obligava a mantenir una correspondència i comptabilitat importants. A més els capitals que s'arriscaven s'havien d'assegurar. Això féu que apareguessin les companyies d'assegurances que, amb el pas del temps, forçarien l'estudi estadístic aprofundit de certs fenòmens naturals —la vida i la mort, la tempesta i els naufragis dels vaixells, els riscos de robatoris, les pèrdues accidentals i les mermes de tota mena en els llargs viatges a què es veien sotmeses les mercaderies— i de les possibilitats d'èxit i fracàs en qualsevol mena d'empresa —l'establiment d'un negoci, la realització de viatges transoceànics, l'eventualitat de la victòria o de la derrota en una guerra, etc.[416] De tot això se'n segueix que no sigui gens estrany que, a les darreries de l'EDAT MITJANA, els contractes d'assegurances sofrissin un creixement notable, ni tampoc que aparegués un nou sistema per dur a terme els comptes: la "comptabilitat per partida doble". En aquesta tècnica comptable cada operació té "dues entrades"; en una es col·loca allò que es té —és l'haver— i, en l'altre, allò que es deu —és el deute. Cal que el saldo sigui sempre nul. Una de les originalitats de l'aritmètica de LUCA PACIOLI [1494] no és pas el coneixement de la comptabilitat de *partida doble*, sinó el fet d'introduir una tècnica més que secular en el seu manual, adreçat fonamentalment als comerciants, com una nova eina de càlcul imprescindible. Feien falta, dins del sistema comercial de l'època, formes de pagament, i això féu que les grans companyies comercials italianes i, més tard, les holandeses, fonamentalment, fossin alhora companyies bancàries dedicades al préstec i a l'intercanvi. Cal tenir present la diversitat de monedes i de llengües a EUROPA a les darreries de l'EDAT MITJANA. Aquest fet féu que entressin en joc les *lletres de canvi* amb l'objectiu de fixar la devolució, en una data, lloc i moneda determinats, d'un préstec fet en un moment anterior, en un altre indret i amb una moneda diferent. Així doncs, les lletres de canvi esdevenen alhora una forma de canvi de moneda, de transferència bancària i de crèdit.[417]

Aquest nou sistema econòmic, de préstec i mercat necessitava l'escriptura i també un coneixement clar de les tècniques de càlcul. Això darrer ho proporcionava l'*art de l'algorísmia* o *art de l'algorisme*. Calia dominar l'art de "les lletres i les xifres". Era un ofici que calia aprendre i que, per tant, calia ensenyar. I, malgrat que el pare de LEONARDO da PISA ja s'havia adonat d'aquesta necessitat a finals del segle XII

[416] Recordem que el primer tractat pròpiament estadístic fou elaborat per JONH GRAUNT [1620–1674], l'any 1662. Fou el tractat *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, un text en el qual, de l'anàlisi de les partides de defunció de la ciutat de LONDRES i la seva rodalia, GRAUNT aconseguia establir algunes conclusions sobre l'esperança de vida.

[417] BENOIT, P. [1989], 228, ens ofereix un exemple de lletra de canvi:

> En el nom de Déu, el 18 de desembre de 1399, per aquesta lletra de venciment, pagareu a Brunancio di Guido i Cia, al seu venciment, CCCCLXXII lliures X sous de Barcelona. Aquestes 472 lliures i 10 sous, que valen 900 escuts a 10 sous i 6 cèntims per escut m'han estat pagades per Ricard degl'Alberti i Cia. Pagueu-les de bona gana i de forma correcta i poseu-les al meu compte. Que Déu us guardi. Ghuiglielmo Barbieri. Salut des de Bruges.

El venciment d'una lletra era el termini habitual del seu cobrament d'un lloc a un altre. Al segle XV, entre BRUGES i BARCELONA, el venciment habitual era de trenta dies. Una lletra de canvi com la que descriu P. BENOIT servia per satisfer operacions de canvi de moneda: la moneda era entregada en una ciutat amb la moneda pròpia d'aquella ciutat i, en un altre lloc, hom cobrava un valor equivalent a l'entregat però amb la moneda local. També servia per fer transferències i era una eina adequada per establir crèdits. Es convertí en un dels instruments essencials del comerç italià de finals de l'EDAT MITJANA.

i havia fet tot el que calia per tal que el seu fill l'aprengués, podem afirmar que fou una preocupació aïllada que no trobaria el ressò degut fins als segles XIV i XV, quan l'EDAT MITJANA es trobava ja a les acaballes. FIBONACCI, amb el seu *Liber abaci*, va elaborar un text que pretenia de satisfer aquesta necessitat i alhora omplir un buit existent a l'EUROPA llatina de la seva època. La comprensió del text "exigia dels mercaders una formació massa elevada"[418] Era, no ens cansarem de repetir-ho, una obra notable i fou precisament la seva pròpia vàlua, excessiva per als estàndards del segle XIII, el que la va perjudicar. El *Liber abaci* no tingué el ressò que li corresponia i els seus continguts restaren gairebé oblidats del tot, malgrat que, com indica G. BEAUJOUAN,

> l'obra del pisà no seria superada fins als anys 1556–1660, amb la publicació del *Trattato* de Nicolo Tartaglia [~1506-1559].[419]

Això va fer que se n'efectuessin resums en italià que afavorissin la difusió i comprensió dels apartats fonamentals que, als segles XIV i XV, eren estrictament *algorísmics*. Les qüestions algèbriques superaven amb escreix els interessos immediats dels calculistes i dels mercaders. Però, en canvi, nasqué tot un sistema de formació dels futurs mercaders italians de PISA, GÈNOVA, VENÈCIA i, sobretot, FLORÈNCIA. Als set anys, els nens entraven en una escola en la qual, en dos o tres anys, aprenien a llegir, a escriure i les parts més rudimentàries de la gramàtica. Després, un cop assimilat aquest primer aprenentatge, venia l'estudi de l'àbac, entenent amb aquesta paraula "l'art de calcular". Ens trobem, doncs, que la paraula àbac va adquirir precisament el significat que FIBONACCI li havia atribuït, irònicament, al *Liber abaci*. L'àbac no és ja la tècnica de càlcul basada en el giny físic conegut com a *àbac*. És l'*art de l'algorisme*, basat en l'escriptura i en les xifres indoaràbigues. S'ensenyava l'aritmètica i, també, tot allò que "era útil per al comerç". Aquest ensenyament el duien a terme preceptors o mestres, però sempre a grups reduïts. PAUL BENOIT ens ofereix una descripció força detallada i clara de la situació que repetim aquí *in extenso*:

> Nicolàs Chuquet, abans de ser qualificat d'"algorismista" en els llibres fiscals de Lió, apareix com a "escriptor", un nom que s'acostumava a donar a Lió a aquells que ensenyaven als fills dels patricis i dels grans comerciants. Luca Pacioli [~ 1445–~ 1517], autor d'una *Summa Arithmetica* impresa a Venècia l'any 1494, va començar la seva carrera com a preceptor dels fills Antonio Rompiani, un mercader venecià ric.
>
> Però, a les ciutats italianes, els futurs comerciants passaven gairebé tots per l'escola. A Florència, segons el cronista Giovanni Vilani, l'any 1338, "... els nens que estaven aprenent l'àbac i l'algorísmia a sis escoles eren de mil a mil doscents". Unes xifres realment impressionants per a una ciutat amb menys de cent

[418] TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 675.
[419] TATON, R. [1966], edició castellana de 1988, 675.

mil habitants i, probablement, excepcionals a causa de la importància de Florència com a ciutat mercantil i com a centre intel·lectual. Però, l'any 1345, a Lucca hi havia escoles públiques de l'àbac; a Milà, l'any 1452, trenta-set homes de negocis van enviar una petició al duc per tal que financés l'ensenyament de la comptabilitat dels seus fills; l'any 1486, a Gènova, l'Art de la Llana, agrupació de productors i comerciants de productes tèxtils de llanes, va obrir una escola.

Les escoles florentines són les més conegudes a causa, sens dubte, de la importància de la ciutat, però també perquè l'ensenyament de les matemàtiques hi tenia un lloc especial. Àdhuc els venecians, competidors de Florència i sovint enemics seus, reconeixen la superioritat de la ciutat toscana pel que fa a aquesta matèria. D'acord amb el que sabem, sembla que les escoles florentines, les *botteghe dell'abbaco*, les botigues del càlcul, eren privades. A mitjan segle XIV, Maestre Paolo dell'Abbaco era propietari de la seva escola. La va llegar a un amic i col·lega seu. L'herència comprenia un local i el material útil per a l'ensenyament. Aquest testament, millor que cap altre font, ens mostra amb prou claredat la vida d'un matemàtic florentí del segle XIV. Redactat l'any 1637, probablement poc temps abans de la seva mort, ens mostra un home acomodat, propietari de dues cases a la ciutat i d'una tercera, al camp, amb un capital estimat d'aproximadament uns 1000 florins, en una època en què un servent guanyava anualment 10 florins; un paleta, 40; i un notari, aproximadament, 300. Una fortuna gens menyspreable. Entre els marmessors del seu testament hi figura un mestre de l'àbac i també un ric mercader de sedes. Els documents posen de manifest que Paolo no era pas cap excepció entre els seus col·legues. Amb menys fortuna que els grans mercaders que acostumaven a freqüentar, els mestres de l'àbac amb renom posseïen rendes superiors a les dels artesans, un fet que els col·locava entre els rics de la classe mitjana.

D'altres, al contrari, tenien un nivell de vida inferior... Un contracte de 1517 mostra les condicions de contractació d'un jove docent per part d'un mestre de major renom, Francesco Galigai, que necessitava un adjunt: la condició del que comença és d'allò més mediocre. El sou mínim que se li garanteix és el d'un peó de la construcció. A Florència hi ha un grup de professors professionals, que viu de les matemàtiques i, més concretament, del càlcul. La seva posició és reconeguda i estimada a la ciutat. A finals del segle XV, un florentí, Luca Landucci, al definir els homes "més notables i valuosos" de la seva ciutat, cita, al costat de Cosme de Mèdicis, set artistes, dos bisbes, però també dos mestres de càlcul.[420]

No ens ha, doncs, de sorprendre que, durant els segles XIV i XV, les aritmètiques per a mercaders proliferessin. L'any 1340, PAOLO DAGOMARI dell'ABBACO [~ 1340], en va escriure una —no fou pas l'única ni molt menys—, que seria amb diferència la "més cèlebre".[421] Però, amb l'aparició de la impremta, les aritmètiques van ser considera-

[420] BENOIT, P. [1989], edició castellana de 1989, 229–230.

[421] A SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, I, 211–265, hi podem trobar una exposició detallada de les aritmètiques des del segle XIII fins al segle XV i també d'altres obres matemàtiques d'aquell moment

des prioritàries a l'hora d'editar obres matemàtiques.[422] Són atractives socialment i cultural però, a més, resulten econòmicament rendibles per als editors.

ANY	CIUTAT	AUTOR	TÍTOL	NACIÓ
1430*	PAMIERS	–	–	FRANÇA
1478	TREVISO	–	–	ITÀLIA
1482	BAMBERG	ULRICO WAGNER	–	ALEMANYA
1482	BARCELONA	FRANCESC SANTCLIMENT	*Suma de la art de Arismetica*	ESPANYA
1484	VENEZIA	PIERO BORGHI	*Nobel opera de la arithmetica*	ITÀLIA
1484*	LYON	NICOLAS CHUQUET	*Triparty en la Science des Nombres*	FRANÇA
1485*		JEHAN CERTAIN	*Le Kadran aux marchands*	FRANÇA
1489	LEIPZIG	JOHANNES WIDMAN	*Algorithmus linealis*	ALEMANYA
1490	FLORENCIA	FILIPPO CALANDRI	*De Arithmetica Opusculum*	ITÀLIA
1492	TURIN	FRANCES PELLOS	*Compendion del abaco*	FRANÇA
1494	VENEZIA	LUCA PACIOLI	*Suma de arithmetica, geometria, proportioni et proporcionalita*	ITÀLIA

El primer llibre de matemàtiques que es va imprimir va ser un tractat d'aritmètica comercial, publicat a TREVISO, ITÀLIA, l'any 1478. Segons consta al *Catalogue of Books Printed in the Fifteenth Century*,[423] de la trentena de llibre d'aritmètica impresos abans del 1500, 14 foren editats a ITÀLIA, 11 a ALEMANYA, 2 a FRANÇA, 1 a ESPANYA i un altre als PAÏSOS BAIXOS. La majoria d'aquests llibres eren d'aritmètica mercantil adreçada als comerciants.[424] De fet, les edicions d'aquesta mena d'obres

històric. Vegeu també MENNINGER, K., [1957], edició anglesa de 1992, 332–366 i KARPINSKI, L. C. [1965], 65–70.

[422] La primera obra matemàtica que s'imprimí fou l'*Arithmetica* de TREVISO [1478]. La primera edició de *Els Elements* d'EUCLIDES no tingué lloc fins quatre anys més tard. Es publicaria a la impremta de RATDOLF de VENÈCIA. No obstant això, la publicació d'aritmètiques mercantils constituirà un degoteix constant durant la segona meitat del segle XV, un fet que posa de manifest la consideració que se'ls va concedir.

[423] El lector interessat pot consultar també l'obra de D. E. SMITH, *Rara Arithmetica*, on es troba una descripció de les aritmètiques comercials del segle XIII al segle XVI de la PLIMPTON COLLECTION LIBRARY.

[424] Com ja hem esmentat, l'edició de llibres s'inicià amb la publicació de la BÍBLIA GUTENBERG. A ITÀLIA l'edició de llibres s'inicià l'any 1464 i fou introduïda per un espanyol de VALLADOLID, JUAN de

aritmètiques està vinculada a les "ciutats més riques i econòmicament més desenvolupades, és a dir, a les ciutats del nord d'ITÀLIA i a les d'ALEMANYA que són les ciutats en què treballen els autors més notables d'aquest període".[425] Algunes de les obres aritmètiques més notables d'aquest període les hem posat de relleu al quadre anterior.

Les obres marcades amb un * no foren editades. Se n'han conservat els manuscrits. No obstant això, són textos que hem considerat d'interès. Uns, com ara la *Triparty* de NICOLÀS CHUQUET, per la seva importància i qualitat. Recordem que la darrera part —és a dir, la tercera part— es titula concretament *Comment la science des nombres peut servir au fait de merchandise*, un fet que palesa la voluntat explícita de l'autor d'aconseguir que fos útil als qui estudiaven l'art del comerç.[426] L'obra de 1430 l'hem considerat d'interès pel que fa a la llengua. Aquesta mateixa raó és la que ens ha portat a incloure-hi el text de FRANCES PELLOS. Notem que moltes d'aquestes obres estan escrites en llengua vulgar i no en llatí, a diferència de la literatura científica precedent i, fins i tot, de gran part de la que es publica a la segona meitat del segle XV. Això posa de manifest que no anaven dirigides al públic universitari, coneixedor del llatí, ni tampoc als erudits que començaven a aparèixer, sinò a un públic pel qual "conèixer i saber" no es confon amb "conèixer i saber la cultura heretada de l'antiguitat". Els textos de 1430 i de F. PELLOS estan escrits en llengua d'oc.[427] A més, el darrer, malgrat haver estat editat l'any 1492, fou escrit l'any 1460, és a dir vint-i-dos anys abans de la publicació del text de SANTCLIMENT.

Hi ha interrelacions clares entre aquestes obres. Així per exemple, entre les obres franceses hi ha lligams evidents que podem constatar perquè alguns dels problemes i mètodes de resolució es repeteixen. Els dos textos escrits en llengua d'oc influiren, sens dubte, a SANTCLIMENT. Els textos italians estan influïts pel de TREVISO i pel de G. ÇHIARINO, però el de LUCA PACIOLI té, al seu torn, influències de la TRIPARTY.

TORQUEMADA [1388–1488], el qual era abat del monestir de SUBIACO, a prop de ROMA. Tanmateix, el primer llibre editat a ITÀLIA està datat a l'any 1465.

L'aritmètica de Treviso s'editá a la petita ciutat de TREVISO, situada a un dia de camí de VENÈCIA. DOMENICO MARIA FECERICI MANZOLINO va establir-hi tres impremtes i féu nombroses edicions. Entre aquestes es troba la famosa aritmètica anònima, de la qual es conserven encara vuit exemplars.

[425] MALET, A.-PARADÍS, J. [1984], 47.

[426] La primera aritmètica, purament mercantil, fou editada tres anys després de la de TREVISO. El seu autor fou, segons que sembla, GIORGIO CHIARINO, del qual no se sap res. L'obra és una simple compilació de les mesures i dels usos dels canvis de moneda. Està desenvolupada d'acord amb les necessitats dels comerciants de FLORÈNCIA. És possible que PACIOLI n'adoptés parts notables.

[427] El text manuscrit de 1430 està escrit en occità i és l'única aritmètica escrita, durant el segle XV, en llengua d'oc antiga, deixant de banda el text més actual de F. PELLOS. Aquest manuscrit ha estat estudiat per JACQUES SESIANO a SESIANO, J. [1984]. Segons ell "hi ha quatre tractats que tenen alguns trets en comú amb aquesta aritmètica". Tres són els de PELLOS, SANTCLIMENT i CHUQUET.

Manca un estudi comparatiu aprofundit de les interrelacions de les aritmètiques europees d'aquest període, una tasca força interessant però no pas elemental. Tampoc no hi ha cap estudi aprofundit que estableixi les dependències amb el *Liber abaci* de FIBONACCI que, com ja hem indicat, s'havia avançat un segle i mig. De fet, el *Liber abaci* està més a prop dels textos de F. SANTCLIMENT, N. CHUQUET, F. PELLOS o L. PACIOLI que no pas dels textos de SACROBOSCO i VILLEDIEU. Encara que nosaltres, en estudiar-lo, ens hàgim limitat a la presentació simplement algorísmica i hàgim deixat de banda les aplicacions aritmètiques i geomètriques del *Liber abaci*, aquestes són —ja ho hem indicat— moltíssimes i van influir sense cap mena de dubte en les aritmètiques ulteriors.[428]

Tots aquests llibres, però, eren escrits amb finalitat pràctica. N. CHUQUET volia aplicar la ciència dels nombres al comerç; JEAN CERTAIN volia que el seu text fos "guia, ensenyament i aclariment per als comerciants en el saber de l'art de comptar...". BORGHI escriu que pretén d'elaborar una obra adreçada "als joves que volen dedicar-se al comerç". F. SANTCLIMENT, si bé no fa cap manifestació d'aquesta mena, ho deixa ben clar des de bon començament quan enumera les quinze parts de què consta l'obra. De fet, el tronc d'aquestes obres és comú. Tanmateix, però, entre les unes i les altres trobem diferències essencials. N'hi ha algunes que es limiten a l'aritmètica en el sentit més estricte de la paraula. Aquestes per resoldre els problemes més diversos recorren solament a la *regla de tres* i a les *regles de falsa posició* i de *doble falsa posició*. Aquestes regles són, de fet, els recursos de l'aritmètica quan s'eviten els recursos algèbrics. No cal, doncs, introduir ni el llenguatge ni les tècniques de l'àlgebra, malgrat que implícitament hi siguin presents de forma encara oculta. D'altres, en canvi, recorren a l'*àlgebra de les incògnites* —una tècnica que havien introduït i consolidat els matemàtics àrabs— i la seva manera de resoldre els problemes era, en essència, diferent de la dels altres textos. Això obligava els seus autors a introduir una *simbologia* més idònia a la resolució algèbrica.[429]

[428]Val a dir que, a les obres de SESIANO, J. [1984], de FLEGG, G.–HAY, C.–MOSS, B. [1985] i de L'HUILIER, H. [1979] es poden trobar certs lligams entre aquests textos i el *Liber abaci*.

[429]En aquest sentit és d'interès l'obra de MALET, A.–PARADÍS, J. [1984]. En aquest text, el títol del qual és prou suggerent, els autors pretenen de fer una presentació històrica dels orígens de l'àlgebra simbòlica a EUROPA. Això els porta a fer una anàlisi succinta d'alguna d'aquestes aritmètiques i a veure com s'estableix una clara diferenciació entre aritmètiques com ara la de SANTCLIMENT, en què no hi ha encara l'ús explícit de l'àlgebra, i la de CHUQUET, en què l'àlgebra juga un paper clau. Aquest autor introdueix, a més, una simbologia que li permet un ús més àgil de les tècniques algèbriques. Serà gràcies a aquesta recerca de símbols adequats com anirant apareixent els signes algèbrics actuals. Així, per exemple, els signes $+$ i $-$ els trobem per primera vegada a l'aritmètica de J. WIDMAN [~1460]. No tenen pas el significat d'operadors aritmètics, sinò que són simples abreujaments tipogràfics que indiquen l'excés o defecte de determinades quantitats de mercaderies. El signe de $\sqrt{\ }$ per indicar les arrels s'introdueix a l'obra *Coss* [1525] de CHRISTOF RUDOLFF [~1499–~1545]. Els signes per

Algunes d'aquestes obres han estat objecte d'un estudi individualitzat.[430] Nosaltres acabarem aquesta presentació panoràmica de l'aparició i consolidació del sistema indoaràbic fent una ressenya breu, però clara, de la *Suma de l'Art de Arismetica* de SANTCLIMENT.

6.2 La *Suma de la Art de Arismetica* de Francesc Santcliment

De FRANCESC SANTCLIMENT només sabem el que ell mateix diu a la cloenda de la seva *Suma*

> ... fonch acabada la suma present sobre lart de arismetica per mi Francesch Sant climent en la insigna ciutat de Barcelona aquella ensenyant: iatsia no ab aquell stilat scriure que entrels doctes es acustumat/ mas be satisfet a la feruor de aquells: qui de tal art ignorants tenen desig: sien adoctriats tant quant la flaquesa de la mia intelligensia ma consentit...[431]

Aquestes paraules posen de manifest que la *Suma* fou escrita per FRANCESC DE SANTCLIMENT a la ciutat de BARCELONA, on ensenyava aritmètica. Però J. PARADÍS i A. MALET fan notar que BOHIGAS i AMADEUS afegeixen que "malgrat alguns intents, no ha estat encara demostrat que Francesc de Santcliment sigui, també, el traductor del *Fiore di virtú*".[432] També ens recorden que el text restà en l'oblit durant els segles XVII i XVIII. Això no obstant, l'obra és d'un interès innegable, atès

a les incògnites sofreixen diverses variacions —cada autor adopta un simbolisme propi— fins que finalment, amb FRANÇOIS VIÈTE i RENÉ DESCARTES [1596–1650], es consolida el simbolisme actal. El símbol = per designar la *igualtat*fou introduït, l'any 1557, per ROBERT RECORDE [1510–1558] de CAMBRIDGE en el primer tractat d'àlgebra anglès, *The Whetstone of Witte*. Usa aquest símbol, diu, "perquè no hi ha res més igual que dues línies paral·leles iguals". Aquest camí s'inicia, doncs, a la fi del segle XV i s'acaba l'any 1637 amb l'aparició de *La Géométrie* de RENÉ DESCARTES

[430] Ja hem esmentat l'estudi de SESIANO del manuscrit en llengua d'oc de 1430. Pel que fa a l'aritmètica de TREVISO podem trobar-ne exposicions més o menys detallades a BONCOMPAGNI, B. [1862–1863] i a SMITH, D. E. [1924] i [1926]. Hi ha una traducció anglesa parcial a SMITH, D. E. [1908], edició de 1959, I, 1–12. La *Suma* de SANTCLIMENT fou analitzada per primera vegada per L. C. KARPINSKI a KARPINSKI, L. C. [1936], però en ocasió del seu cinc-cents aniversari aparegueren dos treballs, en català, d'aquest tractat. Foren realitzats per ANTONI MALET i JAUME PARADÍS. [Vegeu MALET, A.–PARADÍS, J. [1982] i PARADÍS, J.–MALET, A. [1982].]

L'aritmètica de PIETRO BORGHI la trobem sintetitzada a SMITH, D. E. [1926].

En relació a l'obra de FRANCES PELLOS podem veure PELLOS, F. [1492], edició de 1967 amb comentaris filològics de ROBERT LAFONT i, matemàtics, de GUY TOURNERIE.

Finalment, la *Triparty* de NICOLÀS CHUQUET la trobem editada i estudiada a MARRE, A. [1880], [1880a] i [1881] i, més recentment, a FLEGG, G.–HAY, C.–MOSS, B. [1985].

L'obra ja esmentada de A. MALET i J. PARADÍS sobre *els orígens de l'àlgebra* és d'interès perquè analitza algunes d'aquestes obres i, el que és més important encara, en destaca les aportacions algèbriques.

[431] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 135 *v*.

[432] PARADÍS, J.–MALET, A. [1982], 494.

que fou publicada tan sols vuit anys després de l'aparició de la impremta a ESPANYA. Aquest fet és confirmat en dues històries de la impremta aparegudes a finals del segle XVIII.[433] D'aquest fet en tenim constància gràcies al colofó de Santcliment:

> Stampada fou lapresent obra en Barcelona per Peres posa preuere en lany Mil quatrecents vytanta dos.[434]

També és important perquè dels 258 llibres impresos a l'Espanya catalanoparlant, 151 eren en llatí, 3 en castellà i 104 en català, un fet que contrasta amb la relació entre el llatí i el castellà a l'Espanya hispanoparlant. En aquesta, de les 583 edicions, 240 eren en llatí davant de les 343 en castellà.[435] Però malgrat això, fou la primera aritmètica que s'edita a la península IBÈRICA, incloent-hi l'actual estat de PORTUGAL i, a més, fou escrita en català i per un personatge de la terra. La següent obra autòctona, el *Tratado Subtilisimo de Arismetica y de Geometria*, del frare JUAN de ORTEGA [~1512], s'edità a LLEÓ l'any 1512. Havien passat, doncs, trenta anys des de l'edició de la *Suma* de SANTCLIMENT, i fou escrita en castellà. És "un bon llibre, de nivell molt superior al de Santcliment, però tampoc no tingué cap mena d'influència ni dins ni fora de la península".[436] Tanmateix, cal indicar que, l'any 1503, a VALÈNCIA, s'havien editat l'*Aritmetica* i la *Geometria* de THOMAS BRADWARDINE [~1290–1349], un escolàstic anglès del segle XIV.[437] Aquest fet és important perquè, com fa notar amb un gran encert L. C. KARPINSKI, "un dels misteris del progrés de l'aritmètica indoaràbiga a Europa és el fet que no es conegui cap tractat d'aritmètica hispànica anterior a la de finals del segle XV. Des del segle XII al XIV, els àrabs dominaven una part important de la península Ibèrica i havien aconseguit establir-se en alguns indrets aïllats d'Europa. Com ja hem indicat, això fou un dels elements que va permetre un contacte efectiu amb la matemàtica d'aquella època, ben coneguda pels àrabs que contribuiren a difondre-la. A Espanya i Portugal el camí estava ja preparat per descobrir les Amèriques i també per al descobriment, igualment revolucionari, de Nicolaus Copèrnicus [1473–1543]. I no obstant això, manquen els document en

---

[433] PARADÍS, J.-MALET, A. [1982], 495.

[434] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 136 *r*. Cal notar que SANTCLIMENT no escriu la data usant les xifres romanes, com era costum fins aquell moment, sinò que expressa l'any verbalment, i ho fa d'acord amb la descripció numèrica de les xifres indoaràbigues de la *Suma*.

[435] PARADÍS, J.-MALET, A. [1982], 495. És difícil saber si això fou degut a les noves lleis derivades de les reformes polítiques dels REIS CATÒLICS, o a la davallada del català enfront del castellà produïda per la unificació dels regnes, o a ambdues circumstàncies. Recordem que el títol de REIS CATÒLICS fou concedit l'any 1494 pel papa ALEXANDRE V [1430–1503] a FERRAN de CATALUNYA-ARAGÓ [1452–1516] i a la seva muller ISABEL I de CASTELLA [1451–1504] pels èxits en l'expansió del catolicisme a la península IBÈRICA, èxits que culminarien amb la reconquesta definitiva dels territoris hispànics que encara estaven sota la dominació sarraïna i amb l'expulsió dels moros i jueus no conversos.

[436] PARADÍS, J.-MALET, A. [1982], 495. L'obra, tanmateix, fou reediatada en 1534, 1537 i 1542.

[437] Vegeu GILLISPIE, C. C. [1970–80], II (1970), 390–396.

les llengües vernacles d'Espanya i Portugal".[438] Aquest sol fet confereix a l'obra de SANTCLIMENT una importància notable, que esdevé encara més valuosa quan constatem que "no és essencialment diferent" dels tractats italians de TREVISO, de BORGHI, de PACIOLI, ni tampoc del de CALANDRI, si bé aquest darrer "es diferencia de tots els altres, i això el fa únic, perquè s'estèn àmpliament en els problemes, tot evitant, però, discutir les subdivisions tècniques de l'aritmètica".[439] El valor de la *Suma* de SANTCLIMENT és, doncs, innegable.[440]

L'obra de SANTCLIMENT és una aritmètica concebuda com una eina útil per calcular i resoldre els nombrosos problemes numèrics associats a la vida comercial de l'època. Aquest esperit utilitari i didàctic és comú a totes les aritmètiques del moment. S'oblida la presentació teoricodeductiva de les obres clàssiques i la necessitat de basar-ho tot en axiomes.[441] Són obres, en la línia ja analitzada, dels textos aritmètics del segle XIII, però ara s'acompanyen de problemes que cal resoldre i d'exemples que facin el text ben entenedor. Les definicions, quan hi són, són semblants a les que hem trobat a l'obra de SACROBOSCO. Són definicions utilitàries i/o descriptives, que en cap cas pretenen de ser rigoroses. Pel que fa a les aplicacions, en canvi, són obres en la línia del *Liber abaci*, però amb la voluntat explícita de ser didàctiques i clares. Un fet indiscutible que palesa aquesta voluntat didàctica i divulgadora ens la posa de manifest el propi SANTCLIMENT a la cita esmentada anteriorment quan diu que vol "adoctrinar" a tots els que tenen "desig" i per això evita el llatí, la llengua dels erudits, i tria la llengua popular, el català. El problema rau, en tot cas, en la seva capacitat: "sien adoctriats, diu, tant quant la flaquesa de la mia intelligensia ma consentit...".

[438]KARPINSKI, L. C. [1936], 412.

[439]KARPINSKI, L. C. [1936], 412. CALANDRI omet la descripció dels algorismes que suposa ja coneguts i assimilats pel lector i s'endinsa directament en les aplicacions. Això no obstant, quan ha d'efectuar les operacions concretes, a voltes, ho fa detalladament. Per això podem reconstruir els seus algorismes. Notem, tot de passada, que l'algorisme de divisió de CALANDRI és exactament l'actual.

L'afirmació relativa a les semblances i diferències d'aquestes aritmètiques requeriria, com ja hem indicat abans, un estudi comparatiu detallat que posés de manifest, d'una banda, les possibles interrelacions que hi ha entre aquestes i, d'una altra, la diversitat de la qualitat, la complexitat, la generalització, el rigor i la metodologia que presenten.

[440]La vàlua de l'obra de Santcliment no és desconeguda al seu propia autor, atès que afirma que la "... suma fonch re/goneguda per lo reuerent mestre en aquesta e en les altres arts e en sacra theologia meritissimo laureat / e per lo h / noroble en Jackme serra oblim mestre a la seca de Perpinya" [SANTCLIMENT, F. [1482], foli 135 *v*].

[441]Sabem que JORDANUS NEMORARIUS [~1200–1237] havia elaborat una *Arithmetica* seguint l'esquema de *Els Elements* d'EUCLIDES, és a dir, presentant l'aritmètica com una ciència deductiva, basada en postulats propis. La resta calia demostrar-la. Aquesta aritmètica, escrita en llatí, no té, però, res a veure amb les aritmètiques comercials de què estem parlant en aquest treball. [Vegeu GILLISPIE, C. C. [1970–80], VII (1973), 171–179.]

Malgrat aquesta voluntad didàctica, l'obra és força extensa i densa per als nivells de l'època. Per tal de comprendre-la cal un bon domini de la lectura i l'habilitat de l'escriptura, perquè les operacions que s'han d'efectuar cal escriure-les. L'obra consta de 136 folis en quart —entre 24 i 28 línies cada foli i unes 38 lletres per línia. Això fa que sigui equivalent, en extensió, a un llibre actual d'unes 100 pàgines.[442] L'extensió és, en part, fruit de la voluntat didàctica que porta l'autor a detallar tots els passos i descripcions dels algorismes, a multiplicar els exemples amb *escreix*, desenvolupant-ne tots el detalls i a oferir un nombre important de problemes aclaridors. La millor manera que tenim de copsar aquesta voluntat didàctica i la "intelligensia" de l'autor en l'aspecte doctrinal és fer-ne una lectura ràpida.

* * *

L'autor és directe i en quatre línies deixa ben assentat l'objectiu de l'obra:[443]

> A Laor e gloria de deu e dela hu
> mil verge Maria mare sua co
> mença lo llibre appellat Suma
> de la art de Arismetica. Lo q̃l
> diuisirem en ·1 · parts. çoes en nombrar,
> aiustar/restar/multiplicar/dimidiar/par
> tir/regla de tres ab diuersitat de raons/ ç
> panyies/cambīs/barates tr$\overset{n}{e}$cats ab to/
> tes les ·4· species/son de fi ab diuersitat
> de billons/de una e dues falses posicions
> progressi$\overset{n}{o}$s/e proporci$\overset{n}{o}$s. Deles quals
> parts ho species breument empero a suf
> ficiencia aci enlo present tractat parlar$\overset{m}{e}$.

Ens presenta l'índex de l'obra que consta de 15 capítols. Per indicar-ne el número usa ja els símbols indoaràbigs que introduireix més tard. D'antuvi dedica 35 folis a explicar-nos la forma de "denominar" els nombres usant el sistema decimal posicional indoaràbic i els algorismes de les quatre operacions elementals, incloent-hi les seves proves.[444] Després ve la regla de tres, una eina indispensable per resoldre els problemes numèrics que consisteixen a determinar una quantitat desconeguda que depèn d'altres, sempre que hi hagi proporcionalitat. Amb aquesta eina de càlcul pot

[442] KARPINSKI, L. C. [1976], 413.

[443] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 1*r*. El símbol ç abreuja "com"; és a dir, —la part 8— es titula companyies. Hem transcrit el text tal com es troba a la *Suma*, però d'ara endavant el donarem sense les notacions abreujadores.

[444] No fa cap esment de l'extracció de les arrels, ni quadrades ni cúbiques.

resoldre ja força problemes mercantils. Més endavant —al capítol 11— introdueix els *trencats*[445] i les seves *espècies*.[446] El capítol 13 il·lustra la tècnica de la *falsa posició* —l'eina de càlcul que permetia resoldre els problemes *algèbrics lineals* abans de l'àlgebra.[447]

Abans d'endinsar-nos a l'anàlisi detallada del text, fem un comentari general, seguint A. MALET i J. PARADÍS:

> Els diferents algorismes i regles són descrits a base d'exemples concrets, i mai no se'n dóna la justificació teòrica. En canvi, és constant la preocupació per explicar el significat dels conceptes introduïts. Per exemple, quan Santcliment parla de la multiplicació de trencats sembla que serveix per contestar "... [*si et*] demanave: la mitat de la terça part de la quarta part de la quinta part de una liura que val?" (f. 62 *v*).[448]

Un altre tret que hem de destacar és l'absència de la simplificació teòrica que suposa presentar, d'entrada, el cas general, amb la conseqüent pèrdua, és clar!, de claredat didàctica. La divisió, per exemple, s'ensenya pas a pas: d'antuvi s'ensenya a dividir per (un nombre d') una xifra, després per un de dues, etc.;[449] o bé, a l'hora d'explicar les operacions amb trencats, un cas

> com $\frac{m}{n} + p$ mai no és considerat com un cas particular de $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$, i tots dos s'expliquen, sempre a base d'exemples concrets, per separat. Tampoc no és visible cap mena de preocupació per les propietats de les operacions.
>
> En aquests llibres es pot constatar, i això és un fet de la màxima importància, l'ampliació del concepte de nombre. Els autors ja podien distingir entre nombres *enters* (*iusts*, com diu Santcliment) i *amb escaig*; per a ells tant nombre és 3 com $3 + \frac{1}{2}$ com $\sqrt{2}$. Només per això, la més elemental d'aquestes obres ja hauria de ser considerada superior a qualsevol de les aritmètiques escolàstiques.[450]

De Nombrar e coneixer les figures.[451] SANTCLIMENT comença precisant els mots: "Nombrar es lo nombre preposat en algunes figures comunes de paraula perceptiblement exprimir. Altrament nombrar es lo nombre en len teniment concebut per figures

[445] KARPINSKI ens adverteix del fet que aquest mot és genuí de SANTCLIMENT, mentre que els altres són d'influència italiana.

[446] Per a F. SANTCLIMENT, les *espècies* són les operacions, tant en el cas dels enters com dels *trencats*.

[447] És un mètode molt antic, si bé fou introduït a EUROPA pels àrabs. El trobem ja a la matemàtica egípcia del segle XVIII aC. Podem consultar el PAPIR RHIND, per exemple, a EVES, H. [1953], edició de 1992, 54, o bé, *in extenso*, a CHANCE, A. B.–BULL, L. S.–MANNING, H. P.–ARCHIBALD, R. C. [1927–29], edició de 1979, 10–13.

[448] MALET, A.–PARADIS, J. [1982], 552.

[449] Val a dir que això era ben corrent, com hem pogut veure en les aritmètiques del segle XIII.

[450] MALET, A.–PARADÍS, J. [1982], 552.

[451] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 1 *r*–3 *v*.

comunes visiblement representar".[452] És a dir, passar a l'expressió amb paraules els nombres expressats simbòlicament mitjançant figures. I segueix:

> E has de saber: que no són més de ·10· chifres. Car axí com lo nombre de ·10· és lo primer nombre complit: lo qual conte en si tots los nombres: que passen ·10· car los nombres que passen ·10· no son sino moltes vegades dir o repetir ·10· ho ço que es conegut dins en a quell nombre: en axí no son sino ·10· figures comunes: ab les quals moltes vegades retornades tot nombre se pot escriure.[453]

És un text en el qual explica que, amb les 10 xifres, és possible representar tots els nombres possibles: els més petits de deu, usant les xifres; el deu, per mitjà de ı0, i els més grans de deu repetint el deu les vegades que calgui i afegint-li una part al deu; és a dir, un nombre inferior a deu.

SANTCLIMENT diu que les nou primeres "se appellen chifres", o més pròpiament encara "chifres significatives" i segueix, com és usual,

> e la deena se appella chifra ho figura de nores / ho altrement alguns la appellen zero, car no val res / mas fa valer les altres segons lo loch: en que es p(er) que es necessari: que hom ne hage una: q(ue) no valgue res per les deenes senceres: les quals nos poden scriure sens aquella, les quals ·10· chifres se fan en tal manera.

·1·2·3·4· · ·7· · ·0[454]

Introdueix les deu xifres o guarismes. Són ben iguals a les devanagari i, de retruc, a les de LEONARDO da PISA, SACROBOSCO i VILLEDIEU que les havien heretat, com ja hem comentat, via les *gubar* o, en tot cas, via el camí no gaire clar que havia conduït al *Còdex Vigilanus*, però en cap cas via les procedents de BAGDAD. Distingeix, com és habitual, la xifra —és a dir, el 0—, que també s'anomena zero, de les altres nou. Aquesta és la que, sense valdre res, dóna valor, segons la posició, a les altres i és, diu, indispensable. Les altres valen, respectivament, des de l'esquerra, com diu tot seguit, un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit, nou, fins que "entro a la deena que no val res". I després afegeix

> Item has de saber: que per nombrar no tenim sino ·3· nombres generals: que le nomenem simple deena centenar.[455]

Tot seguit ensenya a llegir un nombre escrit usant les xifres. Ho fa, com és natural, a poc a poc.

---

[452]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 1 *r*.
[453]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 1 *r*–1 *v*.
[454]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 1 *v*. D'ara endavant, usarem els símbols 5, 6, 8 i 9 en lloc dels propis de SANTCLIMENT , , , . En canvi, respectarem *ı* per representar l'1.
[455]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 1 *v*.

Lo nombre simple es lo valor deles figures . e tostemps es enlo primer loc del ternari deuers la mandreta . car en aquell loch no val sino simplament la significacio de la figura . E aquest tal se appella nos simple . Deena es tot lo nombre ques pot metre en ·10· partides eguals dins cent / ho que no val res . car es chifra . E tostemps es en lo segon loc del ternari: axicom dev se mostra

·10 · 20 · 30 · 40 · 50 · 60 · 70 · 80 · 90.

Centenar es lo nombre: que es pot metre en ·100· parts eguals fins en ·9· per partida / ho nores : si es chifra : e tostemps es enlo terç loc del ternari en respecte dela mandreta / ho enlo primer deuers la man sinestra.[456]

El text és, com podem veure, un degoteix clar, però lent, en el qual queda palès que els números s'han de considerar en grups de tres, començant per la mà dreta i aleshores, de dreta a esquerra, tenim unitats, desenes i centenes. Ara bé per poder-lo llegir cal tenir en compte que les unitats del segon grup de tres són milers [*milia*]; però "*milmilia* vulgarment se exprimxen per aquet vocable milion . car un milion es milmilia".[457] Aleshores diu que cal dividir el nombre en grups de tres i enumerar-los; els grups parells són milions i els senars són grups de mil. Si en tenim 4, 6, ... direm, respectivament, mil milions, mil milions de milions,... No cal seguir llegint el text. És suficient veure com cal llegir "lo eximp'l següent en les chifres:

$$7\overset{6}{5}\,/32\overset{4}{i}\,/89\overset{4}{7}\,/52\overset{3}{3}\,/48\overset{2}{9}\,/23\overset{i}{4}\,/567\text{''}.$$ [458]

I acaba aquesta part o capítol afirmant:

E axi appar manifestament: que tots los nombres se regeixen per lo nombre de ·10.[459]

La presentació és clara i precisa. Ara cal dedicar l'atenció a les operacions o com diu SANTCLIMENT a les 4 especies.

Aiustar. D'antuvi cal aclarir el significat del terme.

Aiustar es molts nombres metre en un lo qual solet val tant com tots los aiustats e no més ne menys.[460]

[456] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 2 *r*.
[457] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 3 *r*.
[458] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 3 *r*.
[459] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 3 *v*. Curiosament, però, no llegeix detingudament el nombre de l'exemple. No obstant això, d'acord amb les seves regles s'hauria de llegir:

setanta-cinc milions milions de milions tres-cents vint-i-un mil vuit-cents noranta-set milions de milions cinc-cents vint-i-tres mil quatre-cents vuitanta-nou milions dos-cents trenta-quatre mil cinc-cents seixanta-set.

[460] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 3 *v*.

Tot seguit explica com cal fer-ho i la seva explicació és clara. Introdueix un apartat que titula "Per metre la regla en pratica".[461] És aleshores quan precisa, d'antuvi, com cal escriure els nombres que cal sumar. Després dóna les regles que s'han de seguir per tal d'efectuar la suma. Finalment ho aclareix amb un exemple.

> Per metre les regles seguents en pratica es de saber: que totes les figures de un orde se deuen scriure de tal manera: que totes sien de dret la una desus laltra com totes les primeres començant a la mandreta sien deius la primera / e la segona deius la segona / la terça deius la terça / e axi de les altres començant al reuers . Çoes a la mandreta i continuant enuers la ma squerra . La qual manera de scriure seruada se deu aiustar segons la pratica: que ensenyen les ·3· regles seguents . de les quals es la primera aquesta.
>
> Si per lo aiustar de totes les figures de un orde ne venia nombre simple qualseuol que sia deles ·10· figures : deuen scriure la figura representat a aquell simple de dret aquell orde desus ho deius / mas communament se posa deius . E deu se fer primerament una linea entre les figures : que hom aiusta e aquelles que venen de la aiustacio, e aço segons deius se mostra en pratica.
>
> Si per lo aiustar de totes les figures de un orde ne ve mas que deena : se deu scriure tot : lo que es mes que deena dret aquell orde / e seruar la figura de la deena : la qual se deu aiustar en lo pus prop orde : que sen segueix / hos deu scriure per si a soles : si no sen segueix res en manera : que aquella faça un orde . Item si venia deena sencera : se deu scriure zero endret aquell orde e aiustar la deena : segons damunt he dit.
>
> Per aclaracio de la regla se veu : que tot lo primer orde son chifres : que es nombre simple perço scriu aquell nombre simple ho cifra (que es zero) en loprimer orde endret ella mateixa . çoes la primera enuers la mandreta.
>
> 5 7 3 2 0 ·
> 8 9 5 7 0 ·
> 3 2 5 7 0 ·
> *i* 7 9 4 6 0 ·
>
> Item aiusta lo segon orde : que son ·2/7/7· que son ·*i*6· e posals en lo segon orde. Empero per quant hia mes de deena : metras lo que auança mes de deena (que es ·6·) en lo segon orde . e tendras ·*i*0· que val una deena : la qual aiustaras ab les altres figures del tercer ternari. E diras *i* que tenia / e ·3· e ·5· e ·5· que son ·*i*4· posa ·4· que es mes de ·*i*0· e avances una deena. la qual aiustaras ab lo quart orde. e axi faras en tots los altres.[462]

Tot seguit explica la raó de la regla —del fet de portar-ne—, i aclareix què cal fer si la suma de les figures dóna més de dues, tres, etc. desenes i diu que aleshores "quan passam en lo grau mes auant ho propich: tinch ·1· ho ·2· ho ·3· ho ·4· e axi de les altres".[463] Observem l'analogia amb FIBONACCI i la tècnica de "guardar a la mà".

[461] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 4 *r*.
[462] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 4 *v* i 5 *r*.
[463] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 5 *r*.

A continuació, seguint les pautes del *Liber abaci*, ens diu com cal fer-ho per tal d'"aiustar moltes partides en una per liures sous e diners segons diverses quantitats". I ens ofereix un exemple:[464]

	5 732 081 ·$\overset{2}{\text{ll}}$·	15 · $\overset{2}{\text{ss}}$·	7·δ·
	9 370 894 ·ll·	13 · ss·	9·δ·
	8 573 201 ·ll·	19 · ss·	11·δ·
SUMA	23 676 178 ·ll·	9 · ss·	3·δ·

Tot seguit presenta la "proua general en les aiustacions" que és precisament la prova del nou i després de donar-ne una descripció clara, semblant a la de FIBONACCI, hi afegeix un exemple.[465]

Després aplica la suma a d'altres quantitats heterogènies. La més notable és potser la que realitza "aiustant" florins, ducats i alfonsis, on cada florí és igual a 17 sous i 3 diners, cada ducat a 24 sous i 5 diners i cada alfonsí igual a 36 sous i 9 diners.[466] I després de dedicar-hi set folis escrits pel davant i pel darrera, diu:

---

[464]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 5 *v*. Notem que 1 sou és igual a 12 diners, i una lliura és igual a 20 sous.

[465]És el que correspon a la suma de les lliures de l'exemple següent:

6	573 ·ll·	15 ·ss·	3 ·δ·
3	201 ·ll·	12 ·ss·	9 ·δ·
3	975 ·ll·	13 ·ss·	11 ·δ·
3			
3	*i*75*i* ·ll·	*i* ·ss·	*i i* ·δ·

"Aiustar ·5· e ·7· que fan ·12· ara leuant ·9· resten.los ·3· los quals aiustaras ab los altres ·3· que seran ·6· e axi lo proua de la primnera partida es ·6· Item a la segona partida aisuta ·2· e ·1· son ·3· e la segona liena es la proua ·3· Item ves a la tercera linea que es ·7· e ·5· que fan ·12· leuen ·9· resten ·3· e axi la proua de la tercera linea es ·3· ara aiusta totes les ·3· proues çoes ·6 · 3· e ·3· que fan ·12· leuen ·9· resten ·3· E axi ves a la suma de totes les figures e aiustales çoes *i* e ·7· fa ·8· e ·5· fan ·13· leuen ·9· resten ·4· e ·*i*· fan ·5· ara leuen ·2· per ·2· liures : que son exides a les sous e diners que uulgarment se diuen coses desemblants e resten 3 com appar manifestament la proua sfeer uerdadera."

És a dir, correspon a la suma:

6	573 ·ll·
3	201 ·ll·
3	975 ·ll·
3	
3	*i* 75 *i* ·ll·

Suma cinc i set, que fan 12. En treu 9 i en queden 3, que cal afegir al 3 que faran 6. Això li dóna la prova de la primera partida. Aleshores passa a la segona que dóna 3. La prova de la segona línia és 3. I, a la tercera línia, la prova del nou dóna també 3, perquè solament cal sumar el 7 i el 5 i treure'n nou. Ara ho fa amb la suma, que també dóna 3. Ara cal que la suma de les proves, un cop hi hagi tret els nous, sigui *semblant* a la prova de la suma. I això "appar manifestament".

[466]SANTCLIMENT, F. [1482], 7 *r*.

Ací acaba la primera specie que es de aiustació de la qual he mostrat quina cosa és aiustació he que hauem de aiustar etc on ho hauem de sumar e com ho hauez dordenar. Avans resta a veure: quina cosa es substractio. Es la qual specie donare algunes regles sufficients e profitoses.[467]

Ens hem entretingut a detallar la suma, ajustant-nos moltíssim al text original, per tal d'adonar-nos del rigor que té SANTCLIMENT en la presentació dels algorismes de càlcul. Els que vénen a continuació els donarem menys literalment.

De sostraure. També en aquesta ocasió calen dues qüestions: aclarir el significat de l'operació i establir-ne l'algorisme.

Capitol de sostraure. E es meste primer saber: que vol dir sostraure : e quina es la manera : com se deu sostraure : e qual es la suma : de qual deu fer la sustractio, e qual es la suma : que deu fer sostractio.

Que val dir sostraure.

Sostraure es leuar de vn altre : que sia maior. E aço per saber quant es maior.[468]

I segueix:

Per la qual cosa es de saber : que en lo sostraure no y ha sino dos nombres principals. çoes lo nombre quis deu sostraure e lo nombre : de ques sostrau. Los quals se deuen scriure figura per figura: com es stat dit en lo aiustar. es del maior del quals se fa la sustractio : lo sobrepus que te : se deu scriure deius en la terça linea. La qual sescriu deius figura per figura : com fa lo aiustar.[469]

Tot seguit recalca que la substracció s'ha de fer traient el petit del gran que és la suma d'ambdós. I aleshores ens ensinistra en l'art de restar —de substraure, en la seva terminologia. I diu

...ten donare dues regles ab les quals conexeras clarament : com es maior...[470]

i després ho vincula al comerç, quan diu:[471]

E sta lo nombre maior per emprestech. e lo menor per paga

Presta·	5732·
Paga·	5729·

A més, estableix les dues possibilitats que poden presentar-se en una resta, si tenim en compte que el nombre de dalt ha de ser necessàriament més gran que el nombre de baix.[472] O bé el més gran té més ordres que el més petit, *com succeeix* amb

[467]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 10 *r*.
[468]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 10 *r*–10 *v*.
[469]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 10 *v*.
[470]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 10 *v*.
[471]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 11 *r*.
[472]És l'ordenació dels nombres naturals escrits en base deu que, de fet, coincideix amb l'*ordre lexicogràfic*.

$$\begin{array}{r l l} 7324 & \longleftarrow & \text{4 ordres} \\ \underline{987} & \longleftarrow & \text{3 ordres,} \end{array}$$

o bé ambdós tenen el mateix nombre d'ordre i aleshores necessàriament hi ha un ordre de dalt, la xifra del qual és més gran que la corresponent del mateix ordre en el nombre de baix, "començant per la mà esquerra". Aquest és el cas de l'exemple del préstec i la paga, en el qual tots són iguals fins arribar al tercer ordre, a partir de la mà esquerra, on a dalt hi ha un 3 i a baix un 2.

Un cop col·locats els nombres correctament: el més gran al damunt, el més petit al dessota, ordre amb ordre, començant per la dreta, què pot passar? Calen 4 regles, que corresponen a les diferents possibilitats davant les quals ens podem trobar:

1. Si llevem d'una figura una altra d'igual posarem 0 sota el lloc de la figura;

2. Si llevem una figura d'una altra que és més gran, s'ha d'escriure allò que de major té, "de dret a aquella figura";

3. Si la xifra de dalt —per exemple el 5— és menor que la de baix que, en l'exemple és el 7, diràs que no es pot fer. Aleshores, cal anar fins a la "deena complida dient axi : quib leua de ·5· nos pot fer : empero de ·7· fins en ·10· ne ha anar ·3· los quals se deuen aiustar ab los ·5· e seran ·8· los quals ·8· se deuen metre en son dret orde ... e ab la deena que tenim : deuem aiustar al altre ordre aiustant la · com ara posant ; que seguent lorde fos ·3· e ·*i*· ferien ·4· los quals deus leuar de la figura que li es de damunt." [473]
   La desena que hem agafat l'hem d'aiustar a l'altre ordre; si és 3 aleshores 3 *ı ı* farien 4, los quals deus levar de la figura que té al damunt.

$$\begin{array}{r} 95 \\ \underline{37} \\ 58 \end{array}$$

4. Si es donés el cas que, a la figura de la dreta, o en qualsevol altre indret, hi trobessis un 0, aniràs a la desena corresponent i aleshores posaràs els que et quedin: és la resta; i la desena manllevada l'afegiràs a la figura que hi ha a sota a l'esquerra. Així

$$\begin{array}{r} 7520 \\ \underline{6497} \\ 1023 \end{array}$$

Heus ací una exposició claríssima de l'algorisme de restar, idèntic a l'actual, expressada de forma clara i didàctica i acompanyada d'exemples clarificadors. SANTCLIMENT,

[473] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 11 *v*.

a més, intenta de justificar el perquè de les seves regles: n'agafem 10 perquè és un nombre perfecte, del qual és fàcil restar qualsevol xifra. Això, afirma, "ho comprenem bé". En segon lloc, qualsevol nombre del davant val 10 dels que segueixen i, quan n'agafem deu, el que fem és augmentar en una desena les desenes que tenim al davant. Aquesta desena cal, doncs, treure-la.

Tot seguit ho aplica a quantitats monetàries —"per fer-ho calen dues sumes [quantitats], el préstec i la paga" i tot seguit estableix la prova de la sostracció, seguint SACROBOSCO. Vegem-ne l'exemple concret següent:[474]

Presta ·	572 · ll ·	12 · ss ·	4 · δ ·	Suma de la que cal fer la sostracció.
Paga ·	497 · ll ·	14 · ss ·	8 d	Suma que fa l'acció de sostreure.
Resta	074 · ll ·	17 · ss ·	8 · δ ·	Resta: quantitat amb què la major és major.
Proua ·	572 · ll ·	12 · ss ·	4 · δ ·	Prova: cal aiustar la paga i la resta.

No es limita pas a aquest únic exemple, sinó que en dóna d'altres en què entren en joc quarts, onzes, lliures, roues, quintars, carregaras, i posa de manifest que l'algorisme és una eina útil en problemes comercials. Aquest és, no ho oblidem, l'objectiu clau de l'obra.

De multiplicar. Al foli 18 *r*, SANTCLIMENT dóna pas a la multiplicació que, en SANTCLIMENT es basa en el coneixement de la *taula de multiplicar*.

> Per haver conexença e la pratica de multiplicar deuem notar que vol dir multiplicar. No es nenguna altra cosa multiplicar : sino un odre de figures posades damunt altres / e les unes per les altres esser multiplicades per son propesser. E has de saber : que en multiplicar són necessàries ·2· sumes . çoes a saber aquella ques deu multiplicar e la multiplicant . E aço senten de les coses semblants en nombre sencer totalment.[475]

I tot seguit ens diu que calen dues sumes: la més petita, el *multiplicant*; i la més gran, el *multiplicat*. La major es col·loca al damunt i la menor al dessota, sempre començant per la dreta ordre a ordre:[476]

5789	· Multiplicat ·
487	· Multiplicant ·

[474]Curiosament no dóna pas gaires explicacions sobre aquest exemple. Recordem que 1 lliura val 20 sous i 1 sou val 12 diners. Cal, doncs, que manllevem 1 sou que val 12 diners. Li traiem 8 diners i en queden 4 que, amb els 4 que teníem, fan 8. Ara, dels 12 sous que hi ha, cal terure'n 15 —els 14 de la paga i el que hem manllevat en fer l'operació anterior. Ens trobem que, de bell nou, no podem fer l'operació. Cal, doncs, manllevar 1 lliure, que val 20 sous. Li traiem els 15 i ens en queden 5 que afegits als 12 donen 17. Finalment, a les 572 lliures del préstec, els hem de treure 498, que corresponen a les 497 de la paga i a la que hem manllevat a l'operació anterior.

[475]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 18 *r*.

[476]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 18 *v*.

Tot seguit cal col·locar una ratlla de divisió que faci de separació amb les que s'aniran produint en la multiplicació. Aleshores diu que *cal aprendre* la *taula de multiplicar*, que transcrivim:[477]

> E com sia cosa molt necessaria en qualsevol : qui en aquest art desija entendre : la primera cosa en aquesta specie saber aquesta taula de cor : perço la he aci figurada que mitjençant nostre senyor deu e aquestà ha de saber multiplicar partir a totes les altres regles . car no seria possible en altra manera nengu pogues apprendre alguna specie ab perfeccio.[478]

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	12	15	18	21	24	27	30	
3	4	5	6	7	8	9	10	
16	20	24	28	32	36	40		
4	5	6	7	8	9	10		
25	30	42	48	54	50			
5	6	7	8	9	10			
36	42	48	54	60				
6	7	8	9	10				
49	56	63	70					
7	8	9	10					
64	72	80						
8	9	10						
81	90							
9	10							
100								
10								

Taula de multiplicar de la *Suma* de FRANCESC SANTCLIMENT

En el foli 19 *v* ens explica el significat de cada filera de la taula, d'altra banda ben obvi.

Ara tot rau a explicar l'algorisme de multiplicar. I SANTCLIMENT ho farà amb cura i tota mena de detalls.[479] En primer lloc ens diu que cal multiplicar cada una de

[477] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 19 *r*.
[478] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 19 *r*.
[479] Només cal observar que hi dedica 11 cares de foli en quart. Vegeu SANTCLIMENT, F. [1482], folis 20 *v*–25 v.

les figures del nombre de baix —"el multiplicant, que és el més petit"—, a partir de la mà dreta per totes les xifres del multiplicant —que és el nombre de dalt, que és el més gran—, començant per la dreta i avançant cap a l'esquerra. El que s'obté d'aquestes multiplicacions —que trobem a la *taula de multiplicar*— caldrà posar-ho sota la línia de separació, ordenadament: nom per nom, desena per desena, centena per centena i així totes. Quan s'hagi multiplicat per la primera figura del multiplicador, comencem amb la segona —"que està en deenes"—; la multiplicació es fa de forma anàloga a la primera. Però ara

> es necessari : que lo que proceira de la multiplicació : metes en lo dret loch de la deena . çoes comences ametre la primera figura : que eixira de la multiplicacio en lo segon orde de la mandreta . e auant tant com ne exira de totes les altres multiplicacions : seguiras l'orde com en l'altre damunt. E axi faras de totes les altres multiplicacions maiors e menors.
>
> Item apres que tu hauras multiplicat lo un nombre per laltre : has de aiustar tot quant ha proceit de la multiplicació baix en suma. E quant volras fer la aiustació fer una linia entre lo proceït de la multiplicacio i la suma. E faras segons se mostra en pratica per coses semblants[480]

I ofereix l'exemple que reproduïm tot seguit:

$$\begin{array}{r} 5\,7\,2\,3 \\ 3\,5 \\ \hline 2\,8\,6\,1\,5 \\ 1\,7\,1\,6\,9 \\ \hline 2\,0\,0\,3\,0\,5 \\ \hline \end{array}$$

Després es planteja el cas en el qual hi ha un zero en el multiplicador, com en el segon dels exemples anteriors. La regla és la mateixa si tenim en compte que la multiplicació d'una figura qualsevol per zero és sempre zero, un fet que SANTCLIMENT no explicita mai si bé està implícit en l'exemple indicat:

$$\begin{array}{r} 4\,5\,7\,3 \\ 2\,0\,i \\ \hline 4\,5\,7\,3 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 9\,1\,4\,6 \\ \hline 9\,1\,9\,1\,7\,3 \\ \hline \end{array}$$

[480]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 20 *r*–20 *v*.

Després d'aquestes consideracions d'ordre general, SANTCLIMENT fa una descripció del procés de multiplicar i la fa detalladament, seguint un exemple concret, al qual aplica la *prova del nou.* L'exemple és el següent:[481]

$$\begin{array}{r} 57324 \\ \underline{573} \\ 171972 \\ 401268 \\ \underline{286620} \\ \underline{32846652} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 0 & + & 0 \\ & 6 & \end{array}$$

Comença a multiplicar per la mà dreta i usa el mètode de retenir a la mà. Així doncs:

$3 \times 4 = 12$: es col·loca el 2 davall la línia que hi ha entre les sumes [quantitats] donades i les sumes que s'obtenen en multiplicar i es reté l'1.

$3 \times 2 = 6$ i l'1 que es reté fan, en total 7. Es col·loca a l'esquerra del 2 sota el 7 del multpilicador.

$3 \times 3 = 9$, que col·loca sota el 5.

$3 \times 7 = 21$: l'1 es col·loca al costat del 9 i es reté el 2.

$3 \times 5 = 15$, i dos que es retenen fan 17, que es col·loquen a l'esquerra de l'1.

En definitiva, doncs, la primera fila de les multiplicacions és 171/972. De forma anàloga la segona fila serà 401/268 i, la tercera, 286/620. Cal col·locar-les tal com hem indicat: la primera correspon a les unitats, la segona a les desenes i la tercera a les centenes. Finalment, ho sumem tot. S'obté 32 846/652.[482]

Un cop efectuada la multiplicació, explica com es fa la prova del nou. Al davall de la creu s'hi posa la prova del nou del "multiplicant"; al damunt, la del "multiplicat". S'efectua el producte d'aquestes dues xifres, se li aplica la prova del nou i el resultat es col·loca al braç dret. La prova del nou de "la suma general de la multiplicació" es posa al braç esquerra. Cal que el braços dret i esquerra seguin semblants.[483]

$$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 0 & + & 0 \\ & 6 & \end{array}$$

[481] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 21 *v*–23 *v*.
[482] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 23 *v*.
[483] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 23 v–24*r*.

Després ens ofereix exemples de multiplicacions de multiplicand *heterogeni.*[484] Per exempe, si volem conèixer el preu de "23 carregues a raó de 15 sous i 7 diners cada una", cal efectuar l'operació següent:

		·23· carregues a rao
		de ·15· sous ·7 · δ·
		·161· diners
	·13 ·ss·5 · δ·	
	·115·ss·	
	·23 ·ss·	
suma	·358·ss·5δ·	

Observem que, d'antuvi, s'obtenen 161 diners, que cal reduir a sous i diners per tal de poder-los afegir als $115 + 230 = 345$ sous. Això està íntimament vinculat a la divisió, ja que cal determinar el quocient i el romanent.[485] S'obtenen 161 diners que valen 13 sous 5 diners. Per tant, tenim 358 sous i 5 diners. Però, 358 sous valen 17 lliures 18 sous. En definitiva doncs,[486]

	·15·ss·	·7 · δ·
		·23·
·17·ll·	·8·ss·	·7 · δ·

De partir. La darrera espècie és la que més li costa de detallar. Com ja hem indicat segueix la tècnica de fer-ho lentament, primer quan el divisor té una figura, després dues, a continuació tres, etc. La seva tècnica és la de passar ratlla, malgrat que SANTCLIMENT no la passa mai físicament. S'obté doncs el mètode conegut com *mètode de la galera.*[487] Comença amb aquestes paraules:[488]

> Lemes de saber : que partir es contrari al multiplicar · perque lo multiplicar de poques figures fa proceir moltes · e lo partir de moltes torna a poques. E perço propiament podem dir / que lo partir no es altra cosa sino metre en ·2·, ho ·3·, hon moltes partides.
>
> E per declaracio de aquesta specia yo donare dues regles ab la pratica. La primera sera de migpartir. La segona sera per partir qualseuol suma en quantes

[484]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 25*r*–25*v*. SANTCLIMENT l'anomena multiplicació "per coses desemblants".

[485]És curiós constatar que no ha parlat encara de la cinquena espècie, o sigui de la divisió.

[486]De moment, però, SANTCLIMENT no fa pas aquesta reducció a lliures.

[487]Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició 1958, II, 137, o bé BOYER, C. B. [1968], edició castellana de 1986, 282–283.

[488]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 26*r*. Voldria fer notar que, a voltes, SANTCLIMENT utilitza tinta vermella per remarcar les ratlles i algune xifres que intervenen en les espècies que li sembla que cal remarcar perquè són més significatives que les altres.

parts se bulla. E per millor entendre la regla damunt dita : es necessari saber les condicions del partir les quals son ·4· çoes es sumar/restar/multiplicar/partir. E ans de totes aquestes coses hom ha de posar les sumes que volen partir e apres lo partidor. E entre la suma que sa de partir e la suma del partidor haurem de fer ·2· ratlles e en mig de aquelles ·2· posarem la part : que a qualcun ve : segons se mostra en pratica

0	
2 0 0	
5 7 3	Suma
1 9 1	Parts
3	Partidor

Tot seguit dóna les quatre regles que calen "per donar la pratica de aquesta specia":

La primera fa referència a la divisió d'un nombre en dues parts i ens l'explica tot aplicant-la al número 358. La meitat del nombre de l'esquerra —que és per on cal començar— és 1 i en resta 1. Aquest romanent val deu unitats de l'ordre de la dreta. En tenim 15. La meitat és 7 i en resta 1. Tenim doncs 18 unitats. La meitat és 9. En definitiva, doncs, la meitat del número 358 és el número 179.[489]

La segona fa referència a la divisió d'una suma per un número d'una sola figura, com ara 573 dividit per 3 o bé 589 dividit per 6.[490] Veiem com exposa la segona divisió. Primerament ho col·loquem en la forma indicada en la nota 490; és a dir, en la forma:

$$\begin{array}{c} 589 \\ \hline \\ \hline 6 \end{array}$$

Seguidament mirem quantes vegades el 6 és dins del 58. És fàcil veure que hi és 9 vegades. Aleshores, com que 9 per 6 és 54, un cop l'hàguim llevat del 58 en quedaran 4, que col·locarem en la forma:

$$\begin{array}{c} 04 \\ 589 \\ \hline 9 \\ \hline 6 \end{array}$$

[489]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 27 *r* i *v*.

[490]Abans d'explicitar l'algorisme de divisió diu com cal col·locar el partidor respecte de la suma i això tant si el partidor té una sola xifra com si en té moltes. Hi ha només dues possibilitats. Considerem, començant per l'esquerra, el número del mateix ordre que el partidor. Si és més gran o igual que el partidor, aquest es col·loca al seu dessota començant per la figura de l'esquerra de la suma; si és més petit, caldrà col·locar-lo també al dessota però començant per la segona figura de l'esquerra de la suma. Per exemple: $\begin{array}{l}573\\3\end{array}$ $\begin{array}{l}589\\\ 6\end{array}$ $\begin{array}{l}5734\\\ 9\end{array}$ $\begin{array}{l}38572\\12\end{array}$ $\begin{array}{l}38572\\\ \ \ 47\end{array}$ ... [vegeu SANTCLIMENT, F. [1482], 27 *v*-28 *r*.]

Ara, de fet, hem de dividir 49 per 6. Per fer-ho desplacem el partidor un lloc cap a la dreta i després fem la repartició. El número 6 cap 8 vegades dins del 49. Ara calculem $6 \times 8 = 48$ i ho llevem del 49. Dóna 1. Finalment resulta que[491]

$$\begin{array}{rr} & 0 \\ & 041 \\ & \underline{589} \\ \text{Parts} & \underline{98} \\ & 66 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \text{Prova} & \\ & \text{del nou} & \\ & 8 & \\ 4 & + & 4 \\ & 6 & \end{array}$$

Segons SANTCLIMENT, la part és exactament $98\,\frac{1}{6}$. Introdueix, doncs, igual com féu FIBONACCI, les fraccions, que encara no ha definit.

La prova del nou la fa col·locant el partidor al peu de la creu i la prova del nou de les parts al cim de la creu. Després multiplica ambdós nombres i el resultat el suma al romanent. Aleshores, a tot plegat li aplica la prova del nou. Obté 4, que col·loca a la dreta de la creu. A l'esquerra hi col·loca la prova del nou de la suma. Cal que els dos braços de la creu coincideixin.

Anàlogament, 7530 dividit en 9 parts, segons SANTCLIMENT, dóna:

$$\begin{array}{r} 00 \\ 0366 \\ \underline{7530} \\ \underline{836} \\ 999 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 8 & \\ 6 & + & 6 \\ & 0 & \end{array}$$

La tercera fa referència a l'operació de partir una suma per un número de dues figures. D'antuvi tracta de partir 38 572 en 12 parts. Ho fa de forma anàloga a l'anterior, detallant-ne, com és habitual, tots els passos. L'única diferència rau en què, a l'hora de fer les multiplicacions i les diferències del nombre que hi ha a la suma, ho fa *paulatinament* i *començant per l'esquerra*.

Primer de tot, ha de veure quantes vegades 12 cap dins del 38. És obvi que hi cap 3 vegades. Aleshores SANTCLIMENT procedeix de la forma següent: col·loca el 3 dessota del 3 del 38. Multiplica el 3 per 1 i ho resta del 3 de la suma; li dóna 0. Després multiplica el 3 pel 2 i el resultat el resta del 8. Li dóna 2. La primera partició s'ha acabat.

[491] Tanmateix, SANTCLIMENT fa notar que això no cal pas fer-ho. Que ho fa, en un nou intent d'oferir una presentació didàctica. perquè resulta més clar i entenedor.

$$
\text{Parts}\ \begin{array}{c} \\ \underline{38572} \\ \underline{} \\ 12 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \\ \underline{38572} \\ \underline{3} \\ 12 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 0 \\ \underline{38572} \\ \underline{3} \\ 12 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 02 \\ \underline{38572} \\ \underline{3} \\ 12 \end{array} \Longrightarrow
$$

Abans de començar la tercera partició li cal córrer el 12 un lloc cap a la dreta. Això ho fa per tal de tenir-lo situat sota el 25.[492] Ara li cal veure quants cops el 12 cap dins del 25. Hi cap 2 vegades. Aquest valor —de la segona partició— el col·loca al lloc de les parts, a la dreta del 3 que havia obtingut amb anterioritat. Ara, de bell nou, multiplica 2 per 1. Li dóna 2. El resta del 2 del 25 i obté el valor 0. A continuació multiplica 2 per 2 i el resultat el resta del 5. Li dóna 1. Abans de començar la tercera partició, desplaça el 12 un lloc cap a la dreta, per tal de col·locarlo sota el 17. Mira quants cops el 12 cap dins del 17. Hi cap 1 cop. L'1 el col·loca a la dreta del 2 de les parts. Després multiplica i resta tal com hem fet en els casos anteriors. Finalment desplaça el 12 un lloc a la dreta i mira quantes vegades el 12 cap dins del 52. Són 4. Aleshores 4 per 1 dóna 4, que restat de 5, dóna 1. Li queden 12 unitats, de les quals ha de restar 8 que obté de multiplicar 4 per 2. Finalment li'n queden 4.

$$
\Longrightarrow \begin{array}{l} \\ 02 \\ \underline{38572} \\ \underline{32} \\ 122 \\ \ 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 0 \\ 021 \\ \underline{38572} \\ \underline{32} \\ 122 \\ \ 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 00 \\ 0215 \\ \underline{38572} \\ \underline{321} \\ 1222 \\ \ 11 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} 001 \\ 02154 \\ \underline{38572} \\ \underline{3214} \\ 12222 \\ \ 111 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 7 & + & 7 \\ & 3 & \end{array}
$$

Després, seguint la forma descrita abans, fa la prova del nou.

Aquest mètode l'aplica també als casos: 99 750 dividit en 19 parts, 7850 en 40 i 7894 en 73:[493]

[492] Hi ha una lleugera diferència amb el *mètode de la galera* en la seva forma més habitual. En aquest, quan s'aplica de forma estricta, el partidor es corre també un lloc cap a la dreta, però situant-lo a la línia inferior. És a dir, a l'exemple que estem analitzant, la forma final que s'obtindria seria lleugerament diferent:

$$
\begin{array}{l} 001 \\ 02154 \\ \underline{38572} \\ \underline{3214} \\ 12 \\ \ 12 \\ \ \ 12 \\ \ \ \ 12 \end{array}
$$

[493] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 30 *r*–33 *v*.

00		
024	00	01
4490	321	0530
99750	7850	7894
5250	196	108
19999	4000	7333
111	44	77

I així queda establerta la divisió d'un nombre arbitrari en qualsevol nombre de parts sempre que aquestes estiguin compreses entre el 10 i el 99.

La quarta regla fa referència a la divisió per números de tres o més figures. Vegem succintament alguns dels exemples que ofereix SANTCLIMENT:

1. Dividir el número 72 102 en 237 parts:[494]

```
 005
0124
13084
72i02
-----
304
-----
23777
 233
  2
```

El 237 cap 3 vegades dins del 721. El possem dessota del 7. Aleshores fem:

$3 \times 2 = 6$, que restem de 7. Dóna 1.
$3 \times 3 = 9$, que restem de 12. Dóna 03.
$3 \times 7 = 21$, que restem de 31. Dóna 10.

Correm el 237 un lloc cap a la dreta i dividim 100 entre 237. Dóna 0, que col·loquem al costat de 3.

Correm el 237 un lloc cap a la dreta. Mirem quants cops cap el 237 dins del 1002. Hi cap 4 vegades, que col·loquem a la dreta del 0. Aleshores fem:

$4 \times 2 = 8$, que restem de 10. Dóna 02.
$4 \times 3 = 12$, que restem de 20. Dóna 08.
$4 \times 7 = 28$, que restem de 82. Dóna 54.

Primer restem el 2 del 8. Dóna 6.
Després restem el 8 del 62. Dóna 54.

Així doncs, 72*i*02 dividit per 237 dóna $304\,\frac{18}{79}$.

2. Dividir el número 5 732 894 en 45 738 parts:[495]

[494] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 34 *r*–35 *r*.

[495] La configuració de SANTCLIMENT té alguns abreujaments. Feta amb tots els passos, seria:

```
 0556
 2198
 34434
015548
126903
5732894
-------
125
-------
4573888
 45733
  457
```

Finalment hi trobem, com ja és habitual, la "proua del nou del partir"[496] i "lo partir" aplicat a quantitats heterogènies o "desemblants".[497]

En definitiva, doncs, l'obra de SANTCLIMENT és força anàloga, pel que fa a la presentació dels algorismes, a la de FIBONACCI. L'addició, la resta i la multiplicació les presenta en la forma actual. Solament la divisió, basada en la tècnica de passar ratlla, però sense passar-la físicament, és diferent i pren l'estructura d'un *vaixell.*

* * *

Amb aquesta exposició SANTCLIMENT acaba la presentació de l'escriptura en xifres indoaràbigues i la presentació dels algorismes de càlcul, que és l'objecte d'estudi d'aquest treball. Però, com hem exposat amb deteniment, l'objectiu de les aritmètiques de la segona meitat del segle XV i, en particular, de la *Suma* de SANTCLIMENT no era pas aquest. Era força més ambiciós. Aquesta afirmació és ben manifesta, si tenim en compte que SANTCLIMENT només dedica els primers 40 folis, dels 136 de què consta la *Suma*, *r* i *v*, a aquestes sis primeres operacions, és a dir, escassament una tercera part.

La resta de la *Summa* està dedicada a les aplicacions i, malgrat que les aplicacions no constitueixen pas l'objectiu d'aquesta presentació panoràmica de l'algorísmia in-

```
   56
 0167
 2298
 34434
015548
126903
5732894
-------
125
-------
4573888
 45733
  457
```

[496] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 35 *r*–36 *v*.
[497] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 37 *r*–40 *v*.

doaràbiga, no voldria tampoc passar-les completament per alt. La intenció, en fer-ho, és oferir un contrast amb el text de SACROBOSCO.[498]

SANTCLIMENT, un cop disposa de tots els algorismes de càlcul, estableix un *primer mètode* de resolució de problemes: la *regla de tres*. Aquesta tècnica que, juntament amb les *regles* de *de falsa posició* i de *doble falsa posició*, és d'ús corrent en les aritmètiques d'aquesta època, es basa en la teoria numèrica de la proporció i permet de resoldre un bon grapat de problemes. De fet, permet de resoldre tots aquells problemes en els quals cal determinar una quantitat, a partir de tres o més de donades, sempre que, entre aquestes, es pugui establir una llei de proporcionalitat: la quarta és a la tercera, com la primera és a la segona. S'evita el llenguatge algèbric en la resolució de les *equacions de primer grau* i dels *sistemes de dues equacions de primer grau amb dues incògnites*. Hi dedica des del foli 41 al 53 per ambdós costats.

> E comença la dita specia se contenen $\cdot 3 \cdot$ coses de les quals dos son semblants e la una es desemblant. La qual specia es general en tota mercaderia...
>
> ... en nostre vulgar, si tant val tant : que valra tant.
>
> La absolucio de aquesta regla que comunament se diu multiplica per seu contrari e parteix per son semblant.[499]

Un cop ha establert la regla, la pot aplicar, i ho fa de forma estensa a problemes relatius a monedes, mermes i peses.

Vegem-ne un exemple: "si $\cdot 3 \cdot$ florins e $\cdot \frac{1}{3} \cdot$ en tres mesos han guanyat $\cdot 7 \cdot$ ducats e $\cdot \frac{1}{4} \cdot$, $\cdot 7 \cdot$ florins e $\cdot \frac{1}{2} \cdot$ en $\cdot 5 \cdot$ mesos i tres dies que guanyaran?"[500]

Tenim:

a $\frac{10}{3}$ florins en 30 dies li corresponen $\frac{29}{4}$ ducats
a $\frac{15}{2}$ florins en 150 dies li correspondran x ducats

$$x = \frac{\frac{15}{2} \times 150 \times \frac{29}{4}}{\frac{10}{3} \times 30} = 85\,\frac{5}{16} \text{ ducats.}^{501}$$

[498]Hem evitat, como ja hem indicat, l'anàlisi de les analogies amb el *Liber abaci*, que són moltes.

[499]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 41 *r*. Notem que solament ens ofereix la regla de tres quan la *proporcionalitat és directa*. Permet de resoldre tota mena de problemes de la forma: si A_1 objectes de tipus a es corresponen amb B_1 de tipus b, quants de tipus b correspondran a A_2 objecte de tipus a? La resposta és, segons SANTCLIMENT, ben clara, li correspondran exactament

$$B_2 = \frac{A_2 \cdot B_1}{A_1}.$$

De fet, tenim que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

[500]SANTCLIMENT, F. [1482], foli 70 *r*.

[501]És una regla de tres *composta* que podem fer en dos passos. En el primer pas, fixem el temps i en el segon el deixem mòbil.

En particular a les *barates*, que són problemes en els quals es tracta de "permutar, intercanviar valors iguals". En molts casos es tracta d'intercanviar un tipus de mercaderia per un altre sense haver de passar per llurs valors monetaris.[502]

> Si · 57 · ducats · 3 · sous · 5 · diners valen · 39 · alfonsins · 7 · sous · 9 · diners : que val · 1 · alfonsi? ··· Deus primerament fer dels · 57 · ducats · 3 · sous · 5 · diners de tot diners · e aço per tant com la menor quantitat en la rao son diners. E quant los dits ducats hauras tornats a diners : aiustaras los · 3 · sous · 5 · diners als diners : que son eixits dels ducats. E quan la aiustacio sera feta leuaras de la dita suma dels diners los · 7 · sous · 9 · diners dels alfonsins · e los diners quan seran restats : partir los has per · 39 · alfonsins · e tant quant te exira de la partio : sera la valor del alfonsi.
>
> La pratica affigurada
>
> $$\begin{array}{rl} \overline{57} & \text{ducats 3 sous 5 diners} \\ \underline{24} & \text{sous} \\ 228 & \\ \underline{114} & \\ \underline{1368} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \overline{1371} & \text{sous} \\ \underline{12} & \text{diners} \\ 2742 & \\ \underline{1371} & \\ \underline{16452} & \text{diners} \end{array}$$
>
> $$\begin{array}{lrl} & \overline{16457} & \text{diners} \\ \text{sostracció} & \underline{93} & \text{diners} \\ \text{resta} & \underline{16364} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 0 & \\ 1 & \\ 32 & \\ 040 & \\ 04773 & \\ 16364 & \text{diners} \\ \hline 419 & \text{diners} \\ \hline 3999 & \\ 33 & \end{array}$$
>
> E axi appar en la pratica damunt affigurada : que valra quada alfonsi · 419 · diners e de les · 39 · parts de · 1 · diner les · 23 · parts : que sera per tot · 34 · sous · 11 · diners e · $\frac{1}{3}$ · e · 14 · trentanovens de pugesa e es sera.[503]

A $\frac{10}{3}$ florins li corresponen en un temps $\frac{29}{4}$ ducats

A $\frac{15}{2}$ florins li corresponen en el mateix temps z ducats

$$z = \frac{\frac{15}{2} \times \frac{29}{4}}{\frac{10}{3}}.$$

Ara bé z ducats s'obtenen en 30 dies. Quants n'obtindrem amb 150 dies? Òbviament, n'obtindrem

$$x = \frac{z \times 150}{30}.$$

[502] MALET, A.–PARADÍS, J. [1982], 553 posen de manifest el valor d'aquesta mena de problemes com a generadors de llenguatge algèbric. De fet, el que SANTCLIMENT fa és

$$\begin{aligned} 57 \text{ duc} + 3 \text{ sous} + 5 \text{ diners} &= 39 \text{ alf} + 7 \text{ sous} + 9 \text{ diners} \\ 16\,457 \text{ din.} &= 39 \text{ alf} + 93 \text{ din.} \\ 16\,364 \text{ din.} &= 39 \text{ alf} \\ \searrow\ 1 \text{ alf} &= \frac{16\,364}{39} = 419 \text{ din.} + \frac{23}{39} \text{ din.} \end{aligned}$$

[503] SANTCLIMENT, F. [1482], folis 93 *v*–95 *r*.

A partir del foli 54 *r* i fins el 83 *v*, per ambdues cares, SANTCLIMENT tracta la "setena specia que diem trencats":

> Perço primerament es a saber : que vol dir nos trencat. Nombre trencat es tot ço quant: no es un entegre / ho lo que ha part de vn entegre.
>
> E sapies : que en tot nom trencat hi ha 2 nombres · lo vn sescriu de baix, laltre dalt ab vna barra en mig. E aquell de dalt se nomena nombrador çoes que compte les parts trencades. E aquell de baix se appella denominador : que denomina e demostra les parts trencades.[504]

Després ensenya a *reduir-los a comú denominador, a sumar-los, restar-los, multiplicar-los i dividir-los, doblar-los, dividir-los per la meitat* i "abreuiar", que vol dir *simplificar-los*. Feta, com és ususal en ell, la presentació detallada dels "nombres trencats", els aplica —ja ho hem pogut veure— de forma extensa a problemes de monedes, peses i mesures. Un fet curiós és que ens diu que "quan volguem doblar una fracció" podem fer dues coses: 'doblar el nombrador o dividir per 2 el denominador".[505]

Les parts vuit [folis 83 *v*–91 *v*], novena [folis 91 *v*–105 *v*] i desena [folis 106 *r*–115 *r*] es dediquen, respectivament, a cercar intervals de temps —"quin temps cal per tal que ..."—, als canvis i a les barates. La majoria dels problemes, malgrat que a les barates ho evita, la resolució dels problemes es basa en la igualació dels valors monetaris de les mercaderies.

L'onzena part, la darrera que comentarem, "tracta de posicions".

> Posicions es vna de les pus forts species : que sia en totes la art de arismetica. E aços mostra : per quant comença ab falsia, e feneix ab veritat. E perços diu posicio : per quant posa vn nombre incert a sa voluntat. E es de saber : que de posicions ni ha en tres maneres, de les quals la una se appella de una falsa posicio. La segona de dues falses posicions. La terça se nomena de posicio e remocio...[506]

Aquesta tècnica —d'*una falsa posició* i de *dues falses posicions*— que, com ja hem dit, la trobem en textos egipcis del segle XVIII aC,[507] serveix per resoldre equacions de la forma $ax = b$. La idea, expressada en llenguatge actual, és la següent:

Regla de falsa posició: volem resoldre $ax = b$. Suposem que la solució és x_1. Aleshores substituïm i obtenim $ax_1 = b_1$. Cal fer una correcció proporcional, atès que l'equació és de primer grau. És a dir, cal multiplicar ambdós membres per b/b_1.

[504] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 54 *r*.

[505] Aquest capítol recorda molt el del *Liber abaci*. Recordem que, a l'obra de FIBONACCI, les fraccions són també d'una gran importància. A més, SANTCLIMENT, a l'hora d'escriure-les, adopta la forma que havia emprat FIBONACCI.

[506] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 114 *r*–115 *v*.

[507] Vegeu SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 437–441. Els àrabs li van donar el nom de *hisab al-Khataayn* que és el que retrobem al *Liber abaci* de FIBONACCI i a la *Suma* de LUCA PACIOLI: *el Cataym*.

Aleshores resulta que

$$a\left[x_1 \cdot \frac{b}{b_1}\right] = b.$$

La solució és, doncs, $x = \frac{b}{b_1} x_1$.

En les paraules de SANTCLIMENT: "Posa un nombre a ton plaer · lo qual deus multiplicar : per lo que vols saber · e aquel la multiplicacio deus partir : per lo quet sera vengut de la falsa posicio".[508]

Regla de doble falsa posició: Volem resoldre $a x + b = 0$. Ara donem dos valors diferents. Tenim:[509]

$$a x_1 + b = b_1 \tag{1}$$

$$a x_2 + b = b_2. \tag{2}$$

Aleshores $a(x_1 - x_2) = b_1 - b_2$; però, de (1), en resulta

$$a x_1 x_2 + b x_2 = b_1 x_2$$

i, de (2),

$$a x_1 x_2 + b x_1 = b_2 x_1$$

Si restem les dues darreres equacions, obtenim $b(x_2 - x_1) = b_1 x_2 - b_2 x_1$. Ara dividim aquesta darrera per $a(x_1 - x_2) = b_1 - b_2$ i obtenim:

$$-\frac{b}{a} = \frac{b_1 x_2 - b_2 x_1}{b_1 - b_2} = x.$$

Els àrabs l'aplicaven fent servir el *mètode de les escales* [*'Alm bi'b kaffatain*] que, en llatí, s'anomenà *Regula Balancis*, un nom que es deriva de la figura següent:

Per tal de comprendre'n el funcionament amb claredat, resoldrem un problema de BEHÂ EDDÎN [$\sim$ 1600].[510] El problema demana que trobem un nombre que afegit als seus dos terços i a la unitat, doni 10. És a dir, es pretén de resoldre l'equació

$$x + \frac{2}{3}x + 1 = 10.$$

[508] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 114 *v*.

[509] De fet, considerem el sistema d'equacions $\begin{cases} a x + b - 0 = 0 \\ a x_1 + b - b_1 = 0 \\ a x_2 + b - b_2 = 0 \end{cases}$ Volem que tingui solució i, per tant, de fet imposem que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & -b_1 \\ x_2 & 1 & -b_2 \end{vmatrix} = 0.$

[510] SMITH, D. E. [1923], edició de 1958, II, 440.

D'acord amb el mètode de doble falsa posició, fem $x_1 = 9$. Obtenem $b_1 = 6$. Si fem $x_2 = 6$, obtindrem $b_2 = 1$. El mètode de les escales consisteix a posar aquests valors de la forma següent:

1	10	6
6	X	9

Les línies ens ajuden a recordar la regla:

$$x = \frac{6 \times 6 - 1 \times 9}{6 - 1} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}.$$

És precisament en aquesta part on trobem problemes que provenen de fonts orientals. Però n'hi ha dos que, segons L. C. KARPINSKI,[511] són originals de FRANCESC SANTCLIMENT. Són els dos problemes següents:

> Aci ha una lança : que la $\cdot \frac{1}{2} \cdot$ esta en lo fanc e $\cdot \frac{1}{3} \cdot$ es en laygua / es defora layga $\cdot 7 \cdot$ palms e $\cdot \frac{1}{4} \cdot$ Deman : quant ha de larch aquella lança.[512]

> Sit fos proposat : que cercasses un nombre : que tant fos lo $\cdot \frac{1}{7} \cdot$ de $\cdot 1 \cdot$ com lo $\cdot \frac{1}{9} \cdot$ de laltre / e aquests nombres fossen tant aiustats com multiplicats.[513]

Notem la diferència d'aquests dos problemes. El primer és lineal. Sabem que $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ fan $\frac{5}{6}$ que són les parts submergides. La sisena part restant és la que es troba defora. És a dir, $\frac{1}{6}x = 7$ palms e $\frac{1}{4}$. Si fem $x_1 = 6$, obtenim 1 palm. Per tant, $x = 43$ palms e $\frac{1}{2}$.

El segon problema sembla força més complicat atès que, d'antuvi, sembla de segon grau:

$$\frac{1}{7}x + \frac{1}{9}x = \frac{1}{63}x^2.$$

Però de fet, es tracta de $16 = x$.[514]

* * *

L'obra és, doncs, ben explícita, clara i didàctica. SANTCLIMENT la clou amb les paraules

---

[511] KARPINSKI, L. C. [1936], 419. No obstant això, el primer dels problemes —el de la llança— si bé potser no prové de l'antigor el trobeu en manuscrits que precedeixen el de SANTCLIMENT.

[512] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 115 *r*.

[513] SANTCLIMENT, F. [1482], foli 117 *v*–118 *r*.

[514] "Trobeu lo nombre del $\cdot \frac{1}{7} \cdot$ lo qual es $\cdot 7 \cdot$ Ara perteix $\cdot 7 \cdot$ en $\cdot 1 \cdot$ metra $\cdot 7 \cdot$ per part. Item ves a la segina partida : trobe lo nombre del $\cdot \frac{1}{9} \cdot$ del qual es $\cdot 9 \cdot$ parteix $\cdot 9 \cdot$ per $\cdot i \cdot$ e ubten per pert / $\cdot 9 \cdot$ Item aiusta ensemps $\cdot 7 \cdot$ i $\cdot 9 \cdot$ que son $\cdot 16 \cdot$ los quals te feran la suma partidora. Ara parteix $\cdot 16 \cdot$ per $\cdot 7 \cdot$ i $\cdot 16 \cdot$ per $\cdot 9 \cdot$ e son els nombres. E volras prouar i veure lo que yot dich : si es veritat ..." [SANTCLIMENT, F. [1482], foli 118 *r*.]

Et si res en orde e modo de dir bo en aquella sera trobat : al donador de gracia deu eternal sia referit. E lo que defalliment e no ab aquella allegancia e orde a tal art pertanyent sera posat : sia referit al poch saber que en mi te loch / pregantlos qui mes de mi hi sabran tals erres ab amor coneguesquen, sotsmetent ma humilment a lur correccio. e per satisfaccio de tants treballs los prech : per caritas per mi a deu pregar vullen.

Stampada fou la present obra en Barcelona per Pere posa preuere en lany Mil quatrecents vuytanta dos.

7 Cloenda

En aquesta visió panoràmica de la implantació a OCCIDENT del sistema de numeració actual i dels algorismes de càlcul corresponents, des dels seus orígens indis, hem pretès de fer un recorregut complet. Des de l'ÍNDIA dels *Veda* fins a les primeres edicions de les aritmètiques comercials de l'EUROPA de la segona meitat del segle XV, escrites en llengues vernacles. L'hem fet intentant de lligar la seva aparició en cada país, amb les circumstàncies polítiques, culturals, religioses i econòmiques del moment històric en què s'implantaven, en una síntesi breu però que hem procurat que sigui clara.

Hem vist que el sistema de numeració indoaràbic té els seus orígens a l'ÍNDIA. Aquest fet és indiscutible. No obstant això, no és tan clar el moment precís de l'aparició de les nou xifres, amb el zero. Oscil·la entre el segle III aC —i potser abans— fins a començament de l'era cristiana. La dificultat per precisar l'època exacta és deguda a la dificultat de fixar les dates exactes dels textos matemàtics indis que permeten constatar-ne l'existència. A més, a l'ÍNDIA el procés fou lent i laboriós i no va seguir pas un camí lineal. Mentre que, en una època o en una escola, el sistema era conegut i s'usava amb fluidesa, en una època posterior o en una altra escola la situació era molt més precària. Amb tot, sembla que fou a partir d'un sistema lingüístic que contenia la idea lloc buit, quantitat buida, o quantitat sense valor, com s'introduí de forma definitiva el sistema indi de numeració i els algorismes corresponents. Sembla també indubtable que els numerals eren ben coneguts, en tot cas, abans del segle VI de la nostra era perquè es coneixien perfectament els *algorismes d'extracció d'arrels quadrades i cúbiques*. També fou abans d'aquest segle, força abans, que s'establí el sistema de numeració *devanagari*, després d'un procés d'evolució dels símbols *kharosti* i *brahmi*.

El vincle existent entre l'ÍNDIA i l'EUROPA romana a través de les rutes de comerciants i erudits a través de metròpolis importants com ALEXANDRIA i BIZANCI va permetre que, al segle VI, certs estudiosos en tinguessin coneixement molt abans que l'islam en copsés la importància i l'introduís en els textos matemàtics i d'astronomia. Tanmanteix aquests estudiosos no van ser capaços de copsar-ne el valor com a nova eina de càlcul i sembla que no s'adonaren tampoc de la necessitat de disposar del zero per tal que el sistema de numeració fos precís i definitiu. L'eina de càlcul revolucionària —que, amb el temps, havia de transformar els sistemes de numeració grec i romà— no s'els revelà amb prou claredat.

L'islam, en canvi, fou capaç de comprendre'n la utilitat i d'explotar-ne les possibilitats. I el desenvolupà en dos fronts: BAGDAD i ESPANYA. BAGDAD s'avançà i s'adonà de les possibilitats que tenia en la matemàtica i l'introduí en els textos d'àlgebra, però s'adonà també de les seves possibilitats com a àbac i elaborà textos didàctics adreçats als homes de comerç. Adoptaren, a més, els *guarismes* indis o uns de força semblants. A ESPANYA els guarismes que s'introduiren eren força diferents. Les discussions sobre el nexe entre el nou sistema, els guarismes utilitzats i els àpexs de GERBERT, en un sistema d'àbac més elaborat que el romà, són d'interès per comprendre la complexitat existent en relació amb la situació dels sistemes numèrics i llurs algorismes a la península IBÈRICA de finals dels segles XI i començaments del XII. Més difícil és aclarir la importància real que se'ls donà tant com a eina de càlcul matemàtic i d'astronomia com en l'àmbit comercial. Tampoc no és gaire clar el flux que féu que quan s'introdueiren a l'EUROPA llatina del segle XIII s'utilitzessin els numerals de BAGDAD i no els numerals ibèrics.

Sembla indiscutible que la seva utilitat com a eina de càlcul —com a àbac— no fou copsada a EUROPA i a l'IMPERI BIZANTÍ fins al segle XIII. És aleshores quan apareixen els primers manuscrits que introdueixen l'*algorsmia*. La seva implantació, malgrat el rigor i la claredat d'aquests manuscrits, no fou tan efectiva com hauria estat desitjable. Això fou degut fonamentalment a un fet: la pobresa total de la matemàtica i l'astronomia romana, tant a OCCIDENT com a ORIENT. La ciència havia desaparegut del panorama europeu. Però el comerç no era encara prou complex per tal que fos necessari un sistema àgil i potent. I malgrat que a ITÀLIA fonamentalment ja s'havia iniciat una situació d'expansió econòmica important que començava a necessitar eines de càlcul més potents que l'àbac i que, a més, poguessin "ser escrites", encara hauria de passar ben bé un segle per tal que la necessitat fos prou imperiosa per abocar a la implantació, la coneixença i el domini de l'*abaco*. Les universitats influirien poc en aquest desenvolupament, però les *escoles de l'abaco* serien decisives. Els seus mestres produirien manuscrits en els quals no solament es pretenia d'ensenyar el nou sistema i els seus algorismes, sinó també —i això era un element pràcticament nou— les possibilitats en l'àmbit del comerç i de l'intercanvi. Les obres es van multiplicar atès que la gent que volia aprendre el nou sistema era cada cop més nombrosa.

Amb l'aparició de la impremta aquesta mena d'obres trobà molt bona acollida entre els impressors. En mig segle, EUROPA n'imprimí un grapat considerable, si tenim en compte que eren textos "matemàtics" —i la matemàtica en el sentit més estricte de la paraula no era gaire apreciada— i que eren escrits en la llengua popular del lloc d'edició. S'havia abandonat el llatí. Aquestes obres aparegudes en totes les nacions importants d'EUROPA —ITÀLIA, ALEMANYA, FRANÇA, ESPANYA i PAÏSOS BAIXOS— serien decisives. Això no obstant, caldria esperar encara un xic per tal que els matemàtics s'adonessin de la possibilitat d'usar el sistema decimal i els seus algorismes per operar amb nombres *decimals*, és a dir, amb nombres no enters.

L'evolució va ser lenta però va resultar decisiva per al futur de la matemàtica, l'astronomia i l'art del comerç. Sense els numerals indis i els seus algorismes de càlcul el tractament algèbric no s'hauria desenvolupat de la forma espectacular que ho va fer, la geometria analítica no hauria trobat la seva raó de ser i el càlcul matemàtic no hauria disposat d'unes eines molt notables per obtenir *valors numèrics aproximats* força bons, sense esmentar d'altres disciplines matemàtiques i no matemàtiques.

Si als grecs els devem la preocupació pel rigor i la comprensió de la geometria, als indis els devem la possibilitat de comprendre els nombres, les seves diversitats i alhora la possibilitat de tractar-los tots —amb independència de la seva naturalesa numèrica— de forma anàloga. El camí, però, cap al segle XV solament havia començat.

Barcelona, febrer-novembre 1995

BIBLIOGRAFIA

ALLARD, ANDRÉ

[1981] *Maxime Planude. Le Grand Calcul selon les Indiens*. Louvain-la-Neuve. Lovaina.

[1987] "L'èpoque d'Adélard et les chiffres arabes dans les manuscrits latins d'arithmétique" a BURNETT, CH. (editor), 37–43.

[1992] *Le calcul indien (Algorismus)*. Albert Blanchard. París.

[1995] "La Revolution arithmètique du Moyen Age". *La Recherche, Spécial: Nombres*, **278**, juillet-août, vol. 26, 742–748. Traducció castellana de JOAN PERICAY, *La Revolución aritmética de la Edad Media*, a *El Mundo Científico. Especial: Números*, **161**, vol. 15, 822–828.

ARQUIMEDES

[III aC] "El Arenario" a VERA, F. [1970], **II**, 204–217, o bé NEWMAN, J. R. [1956], edició castellana de 1968, **IV**, 2–17. Traducció de MIGUEL MUNTANER, *El Aranario*.

BENOIT, PAUL

[1989] "Calcul, algèbre et merchandise", a SERRES, M. (editor) [1989], ediciós castellana de 1991, 197–221.

BENOIT, PAUL–CHEMLA, KARINE–RITTER, JIM

[1992] *Histoire des fractions, fractions d'histoire*. Birkhäuser-Verlag. Basilea.

BERGGREN, J.L.

[1986] *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. Springer-Verlag. Nova York.

BONCOMPAGNI, B. (editor)

[1857–62] *Scritti di Leonardo Pisano*. **I** i **II**. Roma. Hi ha una reproducció a *Landmarks of Science*, I. New Canaan, 1979.

[1862–63] "Intorno a un trattato d'aritmetica stampato nel 1478". *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei*, **14**.

BOORSTIN, DANIEL J.

[1983] *The Discoveres*. Random House. Nova York. Traducció castellana de SUSANA LIJTMAER, *Los Descubridores*. Editorial Crítica. Barcelona, 1986. Reeditat el 1987 i el 1989.

BOYER, CARL B.

[1943] "An Early Reference to Division by Zero." *American Mathematical Monthly*, **50**, 487–491.

[1968] *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons. Nova York. Traducció castellana de MARIANO MARTÍNEZ PÉREZ, *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1986.

BREZINSKI, CLAUDE

[1991] *History of Continued Fractions and Padé Approximations*. Springer-Verlag. Nova York.

BÜHLER, JOHAN GEORG

[1896] "Ancient Indian Numerals". *Indische paleographie*. Strassburg. Reproduït a CHATTOPADHYAYA, D. [1982], **II**, 717–738.

BURNETT, CHARLES (editor)

[1987] *Adelard of Bath. An english scientist and arabist of the early twelfth century*. Warburg Institute. University of London. Londres.

BURTON, DAVID M.

[1985] *The History of Mathematics. An Introduction*. Allyn and Bacon. Inc. Reeditat per Wm. C. Brown Publishing. Dubuque. Iowa, 1991.

CAJORI, FLORIAN

[1928] *A History of Mathematical Notations*, **I**. The Open Court Publishing Company. Illinois. Reeditat a Dover Publications. Nova York, 1993.

CAMPIGLIO, ALBERTO–EUGENI, VICENZO

[1990] *Dalla dita al calcolatore*. Grupo Editoriale Fabbri. Bompiani. Milà. Traducció castellana de JUAN CARLOS GENTILE VITALE, *De los dedos a la calculadora*. Ediciones Paidós Ibérica, S.A. Barcelona, 1992.

CARRA DE VAUX, BERNARD

[1917] "Sur l'origine des chiffres". *Scientia*, **21**, 273–282.

CHANCE, ARNOLD B.–BULL, LUDLOW S.–MANNING, HENRY P.–ARCHIBALD, RAYMOND C.

[1927–29] *The Rhind Mathematical Papyrus*, 2 vols. Mathematical Association of America. Nova York. Reeditat parcialment pel National Council of Teachers of Mathematics, 1979.

CHATTOPADHYAYA, DEBIPRASAD

[1982] *Studies in the History of Sciences in India*, **II**. Editorial Entreprises. Nova Delhi.

CHOUCHAN, MICHÈLE

[1995] *Nicolas Bourbaki. Faits et légends*. Edicions du Choix. Argenteuil.

COLEBROOKE, H. T.

[1817] *Algebra, with Arithmetic and Mesuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara*. Londres.

COLIN, GEORGE S.

[1933] "De l'origin grecque des "chiffres de Fès" et de nos "chiffres arabes"". *Journal Asiatique*, **225**, 193–195.

COROMINAS, JOAN

[1980-99] *Diccionari etimològic i complementari de la llengua catalana*, 9 vols. Curial edicions catalanes. Barcelona.

CROUZET, MAURICE (editor)

[1962] *Histoire général des civilitzacions*. Presses Universitaires de France. Hi ha una traducció castellana d'EDUARDO RIPOLL PERELLÓ, *Historia General de las Civilizaciones*, **III**: LA EDAD MEDIA. Ediciones Destino. Barcelona, 1963, reeditat en 1965, 1967 i 1969.

CURTZE, MAXIMILIANUS

[1897] PIETRI PHILOMENI DE DACIA in *Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius*, amb un prefaci de MAXIMILIANUS CURTZE. Nauniæ. Dinamarca.

DATTA, BIBHUTI BHUSHAN

[1926] "Literary evidence of use of zero in India". *American Mathematical Monthly*, **33**, 449–454.

[1927] "On Mûla. The hindu term for "root"". *American Mathematical Monthly*, **34**, 420–423.

[1929] "The Mathematical Achievements of the Jainas". *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, **21**, 115–145. Reproduït a CHATTOPADHYAYA, D. [1982], **II**, 684–716.

[1932] *The Science of the Sulbas: A Study in Early Hindu Geometry*. Calcutta University Press. Calcuta.

DAVIS, DONALD D.

[1993] *The Nature and Power of Mathematics*. Princeton University Press. Princeton.

DAVIS, PHILIP J.–HERSH, REUBEN

[1982] *The Mathematical Experience*. Birkhäuser. Boston. Traducció castellana de LUÍS BOU GARCÍA, *Experiencia Matemática*. Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1988.

[1986] *Descartes' Dream*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc. Traducció castellana de LUÍS BOU GARCÍA, *El sueño de Descartes*. Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1989.

DEVLIN, KEITH

[1988] *Mathematics: The New Golden Age*. Penguin Books. Londres.

EECKE, P. ver

[1952] *Léonard de Pise. Le livre des nombres carrés*. Bruges. Bèlgica

ENCICLOPÈDIA CATALANA

[1971] "Bogomilisme". *Enciclopèdia Catalana*, **III**, 658.

[1973] "Càtar". *Enciclopèdia Catalana*, **IV**, 750–751.

[1974] "Devanagari". *Enciclopèdia Catalana*, **VI**, 217.

[1974] "Europa". *Enciclopèdia Catalana*, **VII**, 204–212.

[1980] "Xifra". *Enciclopèdia Catalana*, **XV**, 729.

[1980] "Zero". *Enciclopèdia Catalana*, **XV**, 822.

EUCLIDES

[III aC] *Els Elements* a VERA, F. [1970], **I**, 687–980.

EULER, LEONHARD

[1849] *Commentationes Arithmeticæ Collectæ*, **II**. Petogrado.

EVES, HOWARD

[1953] *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing. Saunders College Publishing. Holt, Rinehart and Winston. The Dryden Press. Sisena edició amb les *Culturals Connections* de JAMIE H. EVES. CBS College Publishing. Nova York, 1992.

FIBONACCI [LEONARDO DA PISA]

[1202] *Liber abbaci* a BONCOMPAGNI, B. [1857–62], **I**.

[1224] *Flos Leonardo Bigollo* a BONCOMPAGNI, B. [1857–62], **II**. Existeix una traducció italiana PICUTTI, E. [1983].

[1225] *Liber quadratorum* a BONCOMPAGNI, B. [1857–62], **II**. Existeix una traducció francesa: EEKE, PAUL ver [1952]; una de castellana: NOGUÉS ACUÑA, PASTORA SOFIA [1973]; una d'italiana PICUTTI, E. [1979]; i una d'anglesa: SIGLER, L. E. [1987].

FLEET, JOHN F.

[1911] "Āryabhata's System of Expressing Numbers". *Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland*, 109–126. Reproduït a CHATTOPADHYAYA, D. [1982], **II**, 739–750.

FLEGG, GRAHAM–HAY, CYNTHIA–MOSS, BARBARA (EDITORS)

[1985] *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician.* D, Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holanda.

GAṄGULI, SĀRADĀKĀNTA

[1927] "The older Āryabhata and the modern arithmetical notation". *American Mathematical Monthly*, **34**, 409–415.

[1932] "The Indian Origin of the modern Placevalue arithmetical notation". *American Mathematical Monthly*, **39**, 251–256, 389–393.

GANDZ, SOLOMON

[1927] "Did the Arabs know the Abacus?" *American Mathematical Monthly*, **34**, 308–316.

[1931] "The origin of the gubhar numerals on the Arabian abacus and the Articuli". *Isis*, **16**, 393–424.

GILLISPIE, CHARLES COULSTON (editor)

[1970–1980] *Dictionary of Scientific Biography*, 14 vols. Charles Scribner's Sons. Nova York.

– Bradwardine. **II** (1970), 390–396.

– Fibonacci, Leonardo. **IV** (1971), 604–613.

– Jordanus de Nemore. **VII** (1973), 171–179.

– al-H̱wārizmī. **VII** (1973), 358–365.

– Planudes, Maximus. **XI** (1975), 18.

– Sacrobosco, John. **XII** (1975), 60–63.

GINSBURG, JEKUTHIEL

[1917] "New light on our numerals". *Butlletin of the American Mathematical Society*, **23**, 366–369.

GRANT, EDWARD (editor)

[1974] *A Source Book in Medieval Science.* Cambridge University Press. Cambridge.

HEATH, sir THOMAS

[1921] *A History of Greek Mathematics*, I. General Publishing Company. Canadà. Reeditat per Dover en dos volums. Nova York, 1981.

HILL, G. F.

[1915] *The Development of Arabic Numerals.* Clarendon Press. Oxford.

HOCCHEIM, A.

[1878] *Al Kāfi fil Hisāb des Abū Bekr Muhammed ben Alhussein Alkarkhī*, 1–3. Traducció alemanya. Halle.

HOERNLE, AUGUSTUS FREDERIC RUDOLF

[1888] "The Bakhshāli Manuscript". *Indian Antiquary*, **17**, 33–48, 275–279. Reproduït a CHATTOPADHYAYA, D. [1982], **II**, 653–683.

IFRAH, GEORGES

[1981] *Histoire universelle des chiffres.* Seghers. París.

[1985] *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention.* Editions Robert Laffont. París. Traducció castellana de DRAKMAN TRADUCCIONES, *Las cifras. Historia de una gran invención.* Alianza Editorial. Madrid, 1987.

JEAN, GEORGES

[1987] *L'escripture. L'histoire des alphabets et écritures.* Gallimard. París. Traducció anglesa de JENNY DATES, *Writing. The story of Alphabets and Scripts.* Thomas and Hudson, Ltd. Londres, 1992.

JOSEPH, GEORGE GHEVERGHESE

[1991] *The Crest of the Peackock.* IB Tauris. Londres.

[1993] "Multiplication Algorithms" a NELSON, D.–JOSEPH, G. G.–WILLIAMS, J. [1993], 85–118.

KARPINSKI, LOUIS CHARLES

[1965] *The History of Arithmetic.* Russell & Russell. Inc. Nova York.

KATZ, VICTOR J.

[1993] *A History of Mathematics. An Introduction.* Harper Collins College Publishers. Nova York.

KAYE, G. R.

[1914] "Indian Mathematics". *Isis*, **2**, 326–356.

KLINE, MORRIS

[1972] *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. Nova York. Traducció castellana de MARIANO MARTÍNEZ, JUAN TARRÉS i ALFONSO CASAL, *El pensamiento matemático desde la Antigüedad a nestros días* en 3 volums Alianza Editorial. Madrid, 1992.

LATTIN, HARRIET P.

[1933] "The Origin of Our Present System of Notation According to the Theories of Nicholas Bubnov". *Isis*, **19**, 181–194.

L'HUILLIER, HERVÉ (EDITOR)

[1979] *Nicolas Chuquet. La géometrie*. Vrin. París.

LIBRI, G.

[1838–41] *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, 4 vols. París.

LORENZO, JAVIER de

[1971] *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, S.A. Madrid. Reeditat l'any 1989.

LORIA, GINO

[1950] *Storia delle Mathematiche*. Editore Ulrico Hoepli. Milà. Reeditat a Milà, 1982.

MALET, ANTONI–PARADÍS, JAUME

[1982] "500 aniversari de la primera aritmètica impresa a Catalunya i a la península ibèrica". *Ciència*, **19**, 550–554.

[1984] *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*. E. U. Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona. Barcelona.

MARRE, ARISTIDE

[1865] "El Talkhis d'Ibn-Al Banna". *Atti dell'Accademia Pontificia de Nuovi Lincei*, **17**, 289–319.

[1880] "Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la Science des Nombres". *Bullettino di Bibliografia e della Storia de Scienze Mathematische e Fisique*, **13**, 555–592.

[1880a] "La Triparty en la Science des Nombres par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien". *Bullettino di Bibliografia e della Storia de Scienze Mathematische e Fisique*, **13**, 593–658, 693–814.

[1881] "Appendice au Triparty en la Science des Nombres par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien". *Bullettino di Bibliografia e della Storia de Scienze Mathematische e Fisique*, **14**, 413–460.

MAZAHERI, H.

[1975] *Les origines persanes de l'arithmétique. L'oeuvre de Kushiyar Abu'l Hasan Al-gili.* Ideric, études preliminaires **8**. Niça.

MEDOVOÏ, M. I.

[1960] "El tractat d'aritmètica d'Abu-l-Wafa". Traducció russa de l'aritmètica d'ABU-L-WAFA. IMI, **13**.

[1963] "El llibre suficient pel càlcul indi". Traducció russa de l'aritmètica d'AN-NASAWĪ. IMI, **15**.

MENÉNDEZ PIDAL, GONZALO

[1959] "Los llamados numerales árabes en Occidente". *Boletín de la Real Academia de la Historia*, **148**, 179–208.

MENNINGER, KARL

[1957] *Zahlwort and Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahlen.* Vandenhoeck & Ruprecht Publishing Company. Göttingen. Hi ha una traducció anglesa revisada de PAUL BRONEER, *Number Words and Number Symbols*. MIT Press. Cambridge. Massachusetts, 1969. Reeditada per Dover. Nova York, 1992.

MILLÀS VALLICROSA, J.

[1931] *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval.* Estudis Universitaris Catalans de Barcelona. Reedició a *Edicions Científiques Catalanes*, 1983.

NEEDHAM, JOSEPH

[1959] *Science and Civilization in China*, **III**. Cambridge University Press. Cambridge.

NELSON, DAVID–JOSEPH, GEORGE G.–WILLIAMS, JULIAN

[1993] *Multicultural Mathematics*. Oxford University Press. Oxford.

NEWMAN, JAMES R.

[1956] *The World of Mathematics*. Simon and Schuster, Inc. Nova York. Traducció castellana dirigida per MANUEL SACRISTÁN, SIGMA: *El mundo de las matemáticas*, 6 volúmens. Ediciones Grijalbo, S.A. Barcelona, 1968.

NOGUÉS ACUÑA, PASTORA SOFIA

[1973] *El Libro de los Números Cuadrados*. Eudeba. Editorial Universitaria de Buenos Aires. Argentina

PAULOS, JOHN ALLEN

[1989] *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*. Farrar, Straus & Giroux. Traducció castellana de JOSEP M. LLOSA, *El Hombre Anumérico*. Tusquets Editores. Barcelona, 1990.

PARADÍS, JAUME–MALET, ANTONI

[1982] "El primer llibre de matemàtiques a Catalunya". *L'Avenç*, **51**, 493–495.

PELLOS, FRANCÉS

[1492] *Compendion de l'abbaco*. Editions de la Revue des Langues Romanes. Université de Montpellier. Text de ROBERT LAFONT i comentaris matemàtics de GUY TOURNIERIE.

PETERSON, IVARS

[1988] *The Mathematical Tourist*. Freeman and Company. Nova York. Traducció castellana de JUAN RAMÓN CARBALLO, *El turista matemático*. Alianza Editorial. Madrid, 1992.

PICUTTI, ETTORE

[1979] "Il Libro dei Quadrati di Leonardo Pisano". *Physis*, **21**, 195–339.

[1983] "Il "Flos" di Leonardo Pisano". *Physis*, **25**, 293–387.

PIHAN, A. P.

[1860] *Exposé des signes de numeration ecrités dans les peuples orientaux ancients et modernes*. Imprimerie Impérial. París.

PLA I CARRERA, JOSEP

[1996] *El nombre real*. En premsa.

PLANUDES, MAXIMUS

[S. XIV] *Ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς*. Edició grega de GERHARDT. Halle, 1865. Hi ha una traducció alemanya a WAESCHKE, H. [1878] i una traducció francesa a ALLARD, A. [1981].

REY PASTOR, JULIO–BABINI, JOSÉ

[1984] *Historia de la matemática*, I. GEDISA. Barcelona.

RODET, LEÓN

[1879] "Leçons de calcul d'Āryabhata". *Journal Asiatique*, **13**, 393–434.

RONAN, COLIN A.

[1981] *The Shorter Science & Civilisation in China*, **II**. Cambridge University Press. Cambridge.

ROUSE BALL, W. W.

[1889] *History of Mathematics*. Cambridge. Reeditat per Dover, amb el títol *A Short Account of the History of Mathematics*. Nova York, 1960.

SAIDAN, A. S.

[1966] "The earliest extant arabic arithmetic Kitāb-al-Fuṣūl fi'l Hisāb al-hind of Abu'l Hasān Ahmad Ibu Ibrāhīm Al-Uqlīdisī". *Isis*, **57**, 484–487.

[1978] *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holanda.

SÁNCHEZ PÉREZ, JOSÉ AUGUSTO

[1949] *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto Miguel Asín. Madrid.

[1954] *La Ciencia Arabe en la Edad Media*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Estudios Africanos. Madrid.

SANTCLIMENT, FRANCESC

[1482] *Summa de la Art de Arismètica*. Barcelona.

SERRES, MICHEL (editor)

[1989] *Éléments d'Histoire des Sciences*. Bordas. París. Hi ha una traducció castellana de RAQUEL HERRERA–LUIS PUIG–ISABEL PARÍS–M. JOSÉ LÓPEZ–JERÓNIMA GARCÍA, *Historia de las Ciencias*. Ediciones cátedra, S. A. Madrid, 1991.

SESIANO, JACQUES

[1984] "Une Arithmètique médiévale en langue provençale". *Centaurus*, **27**, 26–75.

SIGLER, L. E.

[1987] *The Book of Squares*. Academic Press. Nova York.

SMITH, DAVID EUGENE

[1908] *Rara Aritmetica*. Ginn. Boston, Reeditat per Chelsea. Nova York, 1970.

[1923] *History of Mathematics*. General Publishing Company. Ltd. Ontario. Toronto. Reeditat per Constable and Company, Ltd. Regne Unit, 1951. I per Dover en 2 vols. Nova York, 1958.

[1924] "The first printed Arithmetic". *Isis*, **6**, 311–331.

[1926] "The first great commercial Arithmetic". *Isis*, **8**, 41–49.

[1929] *A Source Book in Mathematics*. MacGraw Hill. Nova York. Reeditat per Dover en dos volums. Nova York, 1959.

SMITH, DAVID EUGENE–GINSBURG, JEKUTHIEL

[1956] "From numbers to numerals and from numerals to counting" a NEWMAN, J. R. [1956], edició castellana de 1968, **IV**, 30–55. Traducció de BENJAMÍN CARRERAS, *De los números a los numerales y de los numerales al cálculo*.

SMITH, DAVID EUGENE–KARPINSKI, LOUIS CHARLES

[1911] *The Hindu-Arabic Numerals*. Ginn and Co. Boston.

SRINIVASIENGAR, C. N.

[1967] *The History of Ancient Indian Mathematics*. World Press. Calcuta. Reeditat en 1988.

SUTER, H.

[1901] "Die Rechenbuck des Abū Zakariya al-Hassar". *Biblioteca Mathematica*, **2**, 12–40.

[1906] "Über das Rechenbuch das Alī ben Ahmed al-Nasawī". *Biblioteca Mathematica*, **3**.

TANNERY, PAUL

[1887] *La géométrie grecque*. Gauthiers-Villars. Reeditat a Georg Olms Verlag. Zuric, 1988.

TATON, RENÉ (editor)

[1966] *La Science antigue et mèdieval (Des origines à 1450)*, **I**. PUF. París. Traducció castellana de MANUEL SACRISTÁN, *La ciencia antigua y medieval (De los orígenes a 1450)*. Ediciones Destino, S.A. Barcelona, 1971. Reeditada en 4 vols. a Ediciones Orbis. Barcelona, 1988.

TAYLOR, JOHN

[1816] *Lilavati or a Treatise of Arithmetica and Geometry by Bhascara Ackarga*. Bombay.

TIRTHAJ, S. B. KRISHNA

[1965] *Vedic Mathematics*. Motilab Barnasidass. Nova Delhi. Reeditat en 1992.

VERA, FRANCISCO

[1970] *Científicos griegos*, **I** i **II**. Aguilar. Madrid.

VALVERDE, LLORENÇ

[1994] *L'endoll foradat*. L'Eix editorial SL. Barcelona.

VERNET, JUAN

[1978] *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Editorial Ariel. Barcelona.

VIADER, PELEGRÍ

[1994] *Estudi d'alguns aspectes numèrics i mètrics del desenvolupament d'un nombre real en sèrie alternada de fraccions unitàries multiplicatives*. Tesi doctoral de la Facultat de Matemàtiques. UPC. Barcelona.

WAESCHKE, H.

[1878] *Rechenbuck des Maximus Planudes*. Halle.

WAERDEN, BARTEL LEENERT van der

[1903] *Science Awakening*. John Wiley and Sons. Nova York.

WOEPCKE, FRANZ

[1853] *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî*. Imprimerie Impérial. París. Reeditat a WOEPCKE, F. [1986], **I**, 267–426.

[1851] *L'algèbre d'Omar Al Kayyâmî*. Reeditat a WOEPCKE, F. [1986], **I**, 49–256.

[1858] "Traduction du traité arithmètique d'Aboûl Hasan Ali Ben Mohammed Al-Kalçâdî". *Atti dell'Accademia Pontificia de Nuovi Lincei*, **12**, 230–275, 399–438. Reeditat a WOEPCKE, F. [1986], **II**, 1–46.

[1863] "La propagation des chiffres indiennes". *Journal Asiatique*, 1, 27–79, 234–290, 442–529. Reeditat a WOEPCKE, F. [1986], **II**, 264–461.

[1986] *Études sur les mathèmatiques arabo-islamiques*, I i **II**. Institute für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität. Frankfurt i Main.

YOUSCHKEVITCH, ADOLF P.

[1976] *Les Mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*. VRIN. París. Traducció francesa de M. CAZENAVE - K. JAOUICHE.

Relació dels últims Preprints publicats:

- **216** *On the contributions of Helena Rasiowa to Mathematical Logic.* Josep Maria Font. AMS 1991 Subject Classification: 03-03,01A60, 03G. October 1996.

- **217** *A maximal inequality for the Skorohod integral.* Elisa Alòs and David Nualart. AMS Subject Classification: 60H05, 60H07. October 1996.

- **218** *A strong completeness theorem for the Gentzen systems associated with finite algebras.* Àngel J. Gil, Jordi Rebagliato and Ventura Verdú. Mathematics Subject Classification: 03B50, 03F03, 03B22. November 1996.

- **219** *Fundamentos de demostración automática de teoremas.* Juan Carlos Martínez. Mathematics Subject Classification: 03B05, 03B10, 68T15, 68N17. November 1996.

- **220** *Higher Bott Chern forms and Beilinson's regulator.* José Ignacio Burgos and Steve Wang. AMS Subject Classification: Primary: 19E20. Secondary: 14G40. November 1996.

- **221** *On the Cohen-Macaulayness of diagonal subalgebras of the Rees algebra.* Olga Lavila. AMS Subject Classification: 13A30, 13A02, 13D45, 13C14. November 1996.

- **222** *Estimation of densities and applications.* María Emilia Caballero, Begoña Fernández and David Nualart. AMS Subject Classification: 60H07, 60H15. December 1996.

- **223** *Convergence within nonisotropic regions of harmonic functions in B^n.* Carme Cascante and Joaquin Ortega. AMS Subject Classification: 32A40, 42B20. December 1996.

- **224** *Stochastic evolution equations with random generators.* Jorge A. León and David Nualart. AMS Subject Classification: 60H15, 60H07. December 1996.

- **225** *Hilbert polynomials over Artinian local rings.* Cristina Blancafort and Scott Nollet. 1991 Mathematics Subject Classification: 13D40, 14C05. December 1996.

- **226** *Stochastic Volterra equations in the plane: smoothness of the law.* C. Rovira and M. Sanz-Solé. AMS Subject Classification: 60H07, 60H10, 60H20. January 1997.

- **227** *On the Cohen-Macaulay property of the fiber cone of ideals with reduction number at most one.* Teresa Cortadellas and Santiago Zarzuela. AMS Subject Classification: Primary: 13A30 Secondary: 13C14, 13C15. January 1997.

- **228** *Construction of 2^m S_n-fields containing a C_{2^m}-field.* Teresa Crespo. AMS Subject Classification: 11R32, 11S20, 11Y40. January 1997.

- **229** *Analytical invariants of conformal transformations. A dynamical system approach.* V.G. Gelfreich. AMS Subject Classification: 58F23, 58F35. February 1997.

- **230** *Locally finite quasivarieties of MV-algebras.* Joan Gispert and Antoni Torrens. Mathematics Subject Classification: 03B50, 03G99, 06D99, 08C15. February 1997.

- **231** *Development of the density: A Wiener-Chaos approach.* David Márquez-Carreras and M. Sanz-Solé. AMS Subject Classification: 60H07, 60H10, 60H15. February 1997.

- **232** *Product logic and the deduction theorem.* Romà J. Adillon and Ventura Verdú. Mathematics Subject Classification: 03B50, 03B22, 03G99. March 1997.

- **233** *Large deviations for stochastic Volterra equations in the plane.* Carles Rovira and M. Sanz-Solé. AMS Subject Classification: 60F10, 60H20, 60H15. April 1997.

- **234** *On cardinal sequences of scattered spaces.* Juan Carlos Martínez. Mathematics Subject Classification: 54G12, 06E99. April 1997.

Editat pel Servei de Textos Matemàtics
E-mail: stm@cerber.mat.ub.es