



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

SÈRIES CIRCULARS I EL PORISMA D'STEINER

Autora: Tània Tomàs Ripollés

Director: Dr. Joan Carles Naranjo

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2019

Abstract

In this work, we will study projective geometry mainly in the plane, beginning by giving structure of projective line to a conic so we can work with projectivities on conics. This is useful to prove theorems such as Desargues' theorem for pencils of conics. We will also be studying metric projective geometry which will allow us to discuss about circles, orthogonality, angles, etc. in the projective plane. This will be used to on one hand, study classical results such as Euler's circle and, on the other hand, to prove a more advanced result, Steiner's porism. To see this theorem, algebraic geometry is generally used but on this project we will study it under the projective geometry framework.

Resum

En aquest treball estudiem geometria projectiva sobretot en el pla, començant per donar estructura de recta projectiva a les còniques per així poder treballar en projectivitats en còniques. Això és útil a l'hora de demostrar teoremes com ara el teorema de Desargues per feixos de còniques. També estudiem geometria projectiva mètrica que ens permet parlar de cercles, ortogonalitat, angles... en el pla projectiu. Això ens serveix, d'una banda, per estudiar resultats clàssics com el cercle d'Euler i, de l'altra, per demostrar un resultat una mica més avançat com és el porisma d'Steiner. Aquest teorema, usualment necessita resultats de geometria algebraica però aquí ho adrecem únicament amb tècniques de geometria projectiva.

Índex

1	Introducció	1
2	Còniques	4
2.1	Estructura projectiva en còniques	4
2.2	Projectivitats en còniques	6
2.3	Involucions en còniques	8
3	Feixos de quàdriques	10
4	Feixos de còniques	13
4.1	Sistemes lineals de còniques	14
4.2	Teorema de Desargues	16
5	Estructura mètrica en còniques	20
5.1	L'absolut	21
5.2	Ortogonalitat i angles entre parelles de rectes	21
5.3	Esferes i cercles	22
5.4	El cercle d'Euler	24
6	Cercles	28
6.1	El \mathbb{P}_3 dels cercles	28
6.2	El pla polar	29
6.3	El con tangent	30
6.4	Porisma d'Steiner	32
7	Conclusions	36

1 Introducció

La geometria projectiva va començar a aparèixer juntament amb l'estudi de la pintura, concretament la perspectiva, durant l'època del renaixement, tot i que algunes de les primeres propietats van ser ja estudiades durant el segle III per Pappus d'Alexandria. De fet, la geometria projectiva formalitza un dels principis centrals de la perspectiva en l'art: les línies paral·leles es tallen en l'infinit, això ens diu, que en la geometria projectiva no existeix el paral·lelisme. Durant els segles posteriors matemàtics i físics com Johannes Kepler i Gérard Desargues van desenvolupar simultàniament el concepte de punt impropri o punt a l'infinit, i Jean-Victor Poncelet va publicar un tractat de fonaments de la geometria projectiva on establia relacions entre propietats mètriques i propietats projectives. No va ser, però, fins finals del segle XIX, que Karl von Staud, Giuseppe Peano, Mario Pieri, Alessandro Padoa i Gino Fano van assentar les bases riguroses de la geometria projectiva tal i com es coneix avui en dia.

La geometria projectiva és una geometria no-mètrica, en la qual tots els teoremes i resultats són independents de la noció de distància o qualsevol estructura mètrica. Tot i així, la geometria Euclidiana està inclosa en el marc de la geometria projectiva, un cop s'han afegit les direccions com a punts de l'infinit. Aleshores, inclús alguns resultats euclidians generals es poden veure més fàcilment un cop s'han projectivitzat. Alguns exemples són teoremes clàssics com ara el cercle d'Euler, el qual enuncia que donat un triangle ABC qualsevol hi ha un únic cercle que passa per nou punts distingits del triangle ABC . Aquest teorema, es coneix també amb el nom del cercle dels nou punts o el cercle de Feurbach. Tot i així, va ser Poncelet i el seu company Briançon qui ho varen demostrar. Uns quants anys més tard, Karl Feurbach demostra independentment l'existència del mateix cercle i és qui rep tot el mèrit. Actualment es coneixen fins 25 punts rellevants pels quals passa el cercle.

Adicionalment, la geometria projectiva també permet un estudi complet de quàdriques i seccions de quàdriques, inclús té sentit parlar de cercles en el pla projectiu, o esferes en general, tot i que per fer-ho, cal considerar el paper d'una cònica especial que s'anomena absolut i està relacionada amb el producte escalar euclidià.

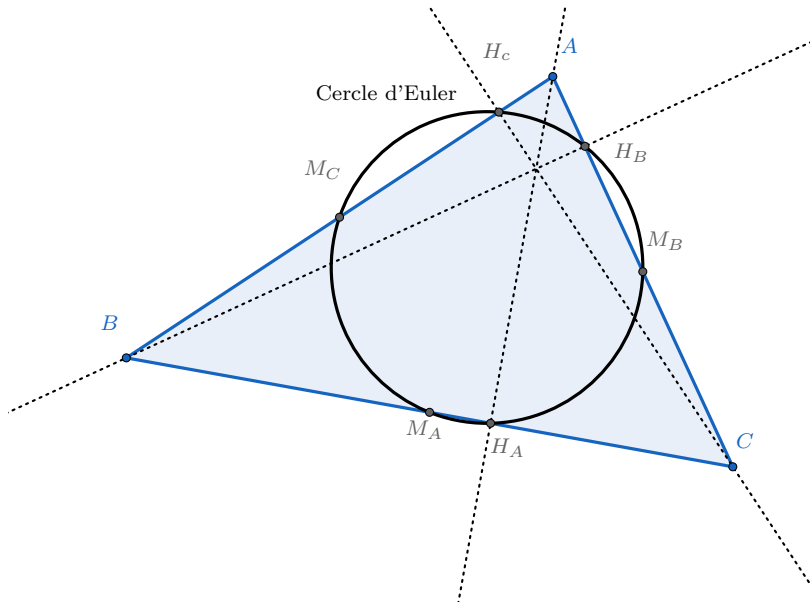
La geometria projectiva també està estretament lligada a la geometria algebraica ja que l'ús de coordenades homogènies permet reduir alguns problemes geomètrics a problemes algebraics. En aquest context, es poden trobar les demostracions dels porismes de Poncelet i d'Steiner, que requereixen corbes el·líptiques i estructures de grup.

El projecte

Aquest és un treball essencialment en el marc de la geometria projectiva; partint dels conceptes explicats i estudiats a classe en l'assignatura de geometria projectiva cursada en el grau. En el projecte, es comença donant estructura de recta projectiva a còniques del pla per tal de poder "passar" de projectivitats d'una recta al pla i a l'inrevés. Això esdevé útil per poder demostrar el teorema de Desargues, que també involucra feixos de còniques i un tipus especial de projectivitats, les involucions, que també s'estudien en els primers capítols. En concret, el teorema de Desargues diu:

Teorema 1.1. *Si sigui \mathcal{P} un feix de còniques de \mathbb{P}_2 i sigui $l \subset \mathbb{P}_2$ una recta que no contingui cap punt base de \mathcal{P} . Aleshores, les còniques de \mathbb{P} intersequen amb l en parelles de punts d'una involució en l .*

Aquest teorema té moltes aplicacions en teoremes clàssics, en concret, està relacionat amb el teorema del cercle d'Euler, ja esmentat prèviament, i es veu com, efectivament, el cercle passa pels sis punts corresponents als talls de les altures amb cadascun dels costats i els punts mitjos de cada costat, il·lustrats en el figura següent. Per tal d'arribar a aquest resultat cal abans donar estructura mètrica al pla projectiu, definir cercles i esferes en aquest context i veure els conceptes d'ortogonalitat i angles entre rectes en el pla. Aquestes són nocions de l'espai euclidià però, un cop incorporat el producte escalar com una cònica en la recta impòpia, tot queda lligat també en el pla projectiu.



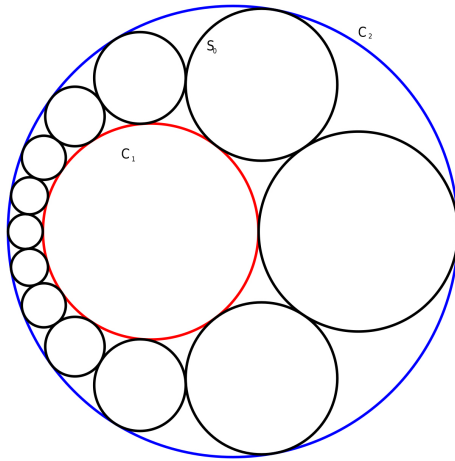
En la segona part del projecte, es defineix l'espai dels cercles \mathbb{P}_3 així com conceptes com el con tangent d'un cercle que correspon a la varietat lineal de cercles tangents a un cercle donat o l'hiperplà polar d'un cercle.

Tot això ens donarà les eines per finalment demostrar el porisma d'Steiner,

Teorema 1.2. (*Porisma d'Steiner*) *Si tenim dos cercles C_1 i C_2 en el pla en posició genèrica i un cercle inicial S_0 tangent a C_1 i C_2 alhora i anem construint una seqüència de cercles S_0, S_1, \dots, S_n de manera que cada cercle S_i sigui tangent a C_1 , C_2 i S_{i-1} , aleshores, si la seqüència de cercles tanca, és a dir $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $S_n = S_0$, aleshores tancarà sempre, independentment del cercle inicial S_0 . En canvi, si no tanca, aleshores no tancarà mai sigui quin sigui el cercle pel qual es comença.*

En la figura que hi ha a continuació es pot veure un exemple d'aquesta seqüència.

Aquest teorema és propi de la geometria algebraica i, de fet, es pot trobar demostrat en l'article de Barth-Bauer [2] utilitzant geometria algebraica. En aquest treball en canvi, es demostra únicament amb conceptes projectius; això és possible gràcies a què el porisma de Steiner, un cop transformat a un problema en l'espai dels cercles \mathbb{P}_3 , es converteix en un cas degenerat del porisma de Poncelet, que es pot comprovar directament sense tècniques avançades de geometria algebraica.



Per últim, m'agradaria aprofitar per donar les gràcies al doctor Joan Carles Naranjo, per tota la seva ajuda i el seu temps, i a la meva família per animar-me dia a dia, no nomès en els últims mesos, sinó durant tot el grau. Us estic molt agraïda.

2 Còniques

Un espai projectiu \mathbb{P} de dimensió n sobre un cos \mathbb{K} , és una terna (\mathbb{P}^n, E, π) , on \mathbb{P} és un conjunt, E és un \mathbb{K} -espai vectorial de dimensió $n + 1 < \infty$, $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$, una aplicació exhaustiva tal que $\forall u, v \in E$ vectors no nuls $\pi(u) = \pi(v)$ si i només si u i v són proporcionals. Posem $[u]$ enlloc de $\pi(u)$ als punts de \mathbb{P} .

En el que segueix, es donen per suposades les definicions i conceptes corresponents a l'assignatura de Geometria Projectiva.

2.1 Estructura projectiva en còniques

Tot seguit, veurem com donar estructura d'espai projectiu \mathbb{P} de dimensió 1 a una cònica.

Una cònica és un objecte que viu en el pla projectiu \mathbb{P}_2 , mitjançant la transformació que veurem a continuació, podem veure-la com una recta projectiva, i per tant, definir projectivitats, involucions, raó doble...

Sigui $C \subset \mathbb{P}_2$ una cònica no degenerada i $p \in C$ un punt qualsevol, considerem la bijecció

$$\begin{aligned} \varphi_p : C &\rightarrow p^* \\ x &\rightarrow x \vee p \\ p &\rightarrow t_p \end{aligned}$$

on t_p és la recta tangent a C en p . La inversa de φ_p és:

$$\begin{aligned} \varphi_p^{-1} : p^* &\rightarrow C \\ l &\rightarrow (l \cap C) - p \\ t_p &\rightarrow p \end{aligned}$$

Com p^* té estructura de recta projectiva, per tant, dóna estructura d'espai projectiu a la cònica C mitjançant la bijecció

$$\Pi \circ \varphi_p^{-1} : K^2 \setminus \{0\} \rightarrow p^* \rightarrow C$$

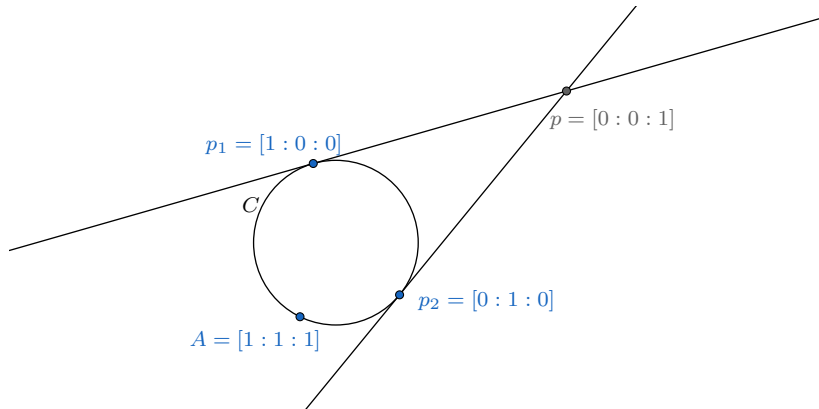
Proposició 2.1. *L'estructura projectiva de C no depèn del representant.*

Demostració. Siguin $p_1, p_2 \in C$ dos punts diferents de la cònica i considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f : p_1^* &\rightarrow p_2^* \\ l &\rightarrow (l \cap C) \vee p_2 \\ t_1 &\rightarrow p_1 \vee p_2 \\ p_1 \vee p_2 &\rightarrow t_2 \end{aligned}$$

Observació: L'aplicació f es pot escriure com $f = \varphi_{p_2}^{-1} \circ \varphi_{p_1}$.

Volem veure que és una projectivitat. Fixem una referència en \mathbb{P}^2 , $R = \{p_1, p_2, p; U\}$ on p_1, p_2 són punts diferents de C , $p \notin C$ és el pol de la recta $p_1 \vee p_2$ i $U \in C$ qualsevol $U \neq p_1, p_2$, tal i com es mostra en la figura a continuació. En aquesta referència la cònica té equació $xy - z^2 = 0$.



Les rectes per p_1 s'escriuen com $Ay + Bz = 0$ (els punts de p_1^* tenen coordenades $[A:B]$). Substituint a l'equació de C tenim

$$x\left(-\frac{B}{A}z\right) - z^2 = 0$$

que té solucions $z = 0$ i $z = -\frac{B}{A}x$, la primera solució no ens interessa, la segona permet escriure els punts de C com $[A^2 : B^2 : -AB]$. Unint un punt qualsevol $[A^2 : B^2 : -AB] \in C$ amb p_2 obtenim les equacions de les rectes de p_2^*

$$ABx + A^2z = 0$$

que com a punts de p_2^* s'escriuen com $[AB; A^2] = [B : A]$.

Per tant, acabem de veure que f transforma els punts de p_1^* de coordenades $[A:B]$ en punts de p_2^* amb coordenades $[B:A]$. És a dir, f és una projectivitat amb matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Cal fer notar que en la demostració anterior es veu exactament l'invers del teorema de Steiner, que dona un mètode de construcció de còniques a partir de cinc punts del pla, tres d'ells no alineats. El teorema diu:

Teorema 2.2. *Teorema de Steiner.* Sigui $f : p_1^* \rightarrow p_2^*$ una projectivitat entre els feixos de rectes d'un punt p_1 i els feixos de rectes d'un punt p_2 , aleshores, el lloc geomètric que descriuen les rectes $\{s \cap f(s)\}$ és una cònica.

Així, donats cinc punts diferents p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 de \mathbb{P}_2 , tres d'ells no alineats, prenent la projectivitat entre els feixos de rectes per p_1 i p_2

$$\begin{aligned} f : p_1^* &\longrightarrow p_2^* \\ p_1p_3 &\longrightarrow p_2p_3 \\ p_1p_4 &\longrightarrow p_2p_4 \\ p_1p_5 &\longrightarrow p_2p_5 \end{aligned}$$

el Teorema ens dona la cònica que passa pels cinc punts. En particular, en la demostració, s'ha fet el procediment invers, prenent la cònica C donada s'ha trobat la projectivitat

$f : p_1^* \rightarrow p_2^*$ sabent que els punts de C són les interseccions de les parelles de rectes $s \cap f(s)$.

Així doncs, acabem de veure que l'estructura projectiva d'una cònica $C \in \mathbb{P}_2$ no depèn del punt, per tant, d'ara endavant té sentit parlar de projectivitats, raons dobles, quaternes harmòniques... en còniques, atès que tenim les eines per passar-ho de C a una recta \mathbb{P}_1 . En l'apartat que següent caracteritzarem alguns resultats i propietats de les projectivitats en còniques.

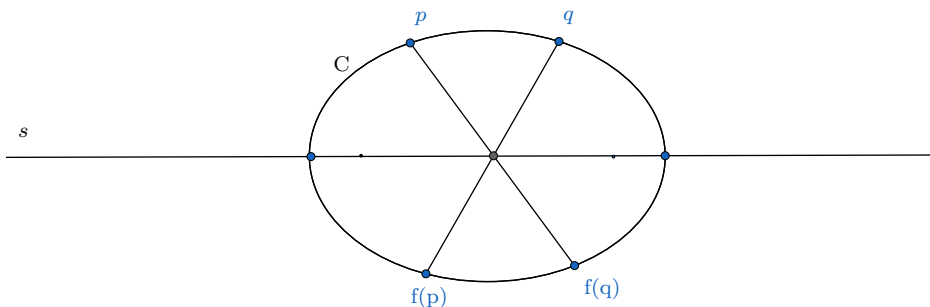
2.2 Projectivitats en còniques

Hem vist en l'apartat anterior que, fixant la referència adequada associada a una cònica C de \mathbb{P}_2 , els punts de C es poden escriure com $[A^2 : B^2 : -AB]$ on $[A : B]$ són les coordenades del punt de \mathbb{P}_1 corresponent a la parametrització projectiva. En els següents apartats, s'utilitzarà aquest resultat per definir i caracteritzar elements característics de les projectivitats en còniques com són l'eix d'una projectivitat, les involucions o el centre d'una involució.

Proposició 2.3. *Sigui C una cònica no degenerada i $f : C \rightarrow C$ una projectivitat, aleshores, $\forall p, q \in C$ no fixos el conjunt de punts*

$$(p \vee f(q)) \cap (q \vee f(p))$$

està alineat.



Demostració. Sigui σ una referència fixada en C i sigui R la referència en \mathbb{P}^2 associada. Siguin $p_1, p_2 \in C$ els dos primers vèrtex de la referència. Escrivim la projectivitat f amb la matriu

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

amb $ad - bc \neq 0$. Podem suposar que $f(p_1) = p_2$, això permet escriure la matriu de f com

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Aleshores, la imatge d'un punt qualsevol $[A : B]$

$$f(p) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha B \\ A + \beta B \end{pmatrix}$$

Mirant-ho en \mathbb{P}_2 , els punts $p = [A^2 : B^2 : -AB]$ es converteixen en $f(p) = [\alpha^2 B^2 : (A + \beta B)^2 : -\alpha B(A + \beta B)]$. Les rectes $p_1 \vee f(p)$ i $p_2 \vee p$ són:

$$(A + \beta B)z + \alpha B y = 0$$

$$Az + bx = 0$$

respectivament. Per $A = 0$ es té el punt $[0 : \beta^2 : -\alpha]$, per $A \neq 0$ es té el punt genèric $[1 : \frac{A+\beta B}{\alpha A} : -\frac{B}{A}] = [\alpha : 1 + \beta\theta : -\theta\alpha]$ on s'ha introduït la coordenada absoluta $\theta = \frac{B}{A}$. Si ho escrivim com una recta s'obté $x - \alpha y - \beta z = 0$.

Es prenen ara dos punts de C , es pot suposar $A = 1$ i escriure $q_1 = [1 : r^2 : -r]$ i $q_2 = [1 : s^2 : -s]$, aleshores $f(q_1) = [\alpha^2 r^2 : (1 + \beta r)^2 : -\alpha r(1 + \beta r)]$ i $f(q_2) = [\alpha^2 s^2 : (1 + \beta s)^2 : -\alpha s(1 + \beta s)]$. Unint cada punt amb la imatge de l'altre s'obtenen les rectes l_1 i l_2 que tenen equació:

$$(-\alpha s r^2(1 + \beta s) + r(1 + \beta s)^2)x + (\alpha s(1 + \beta s) - r\alpha^2 s^2)y + ((1 + \beta s)^2 - \alpha^2 r^2 s^2)z = 0$$

$$(-\alpha r s^2(1 + \beta r) + s(1 + \beta r)^2)x + (\alpha r(1 + \beta r) - s\alpha^2 r^2)y + ((1 + \beta r)^2 - \alpha^2 s^2 r^2)z = 0$$

Finalment, les rectes l_1 , l_2 i s són concurrents ja que el determinant següent és zero:

$$\begin{vmatrix} -\alpha s r^2(1 + \beta s) + r(1 + \beta s)^2 & \alpha s(1 + \beta s) - r\alpha^2 s^2 & (1 + \beta s)^2 - \alpha^2 r^2 s^2 \\ -\alpha r s^2(1 + \beta r) + s(1 + \beta r)^2 & \alpha r(1 + \beta r) - s\alpha^2 r^2 & (1 + \beta r)^2 - \alpha^2 s^2 r^2 \\ 1 & -\alpha & -\beta \end{vmatrix} = 0$$

□

Definició 2.4. *En les condicions de la demostració anterior, la recta s , que no depèn dels punts p i q , s'anomena **eix de la projectivitat**.*

Corol·lari 2.5. *Els punts fixos d'una projectivitat són els punts de $C \cap s$.*

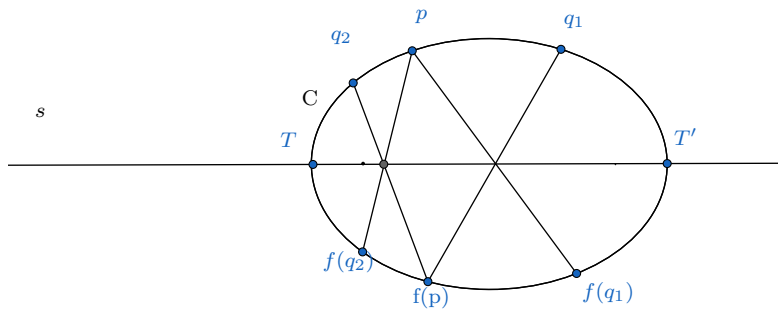
Una manera gràfica de determinar l'eix d'una projectivitat donats tres punts i les seves respectives imatges ens la dona la següent proposició.

Proposició 2.6. *Per a qualsevol punt $p \in C$ no fix, existeixen una parella de punts diferents $q_1, q_2 \in C$ de forma que*

$$(pf(q_1) \cap q_1f(p)) \vee (q_1f(p) \cap q_2f(p))$$

és l'eix de la projectivitat.

Demostració. Com que p no és fix tenim que $p \notin s$ i $f(p) \notin s$. Com q_1 i q_2 són punts diferents, les rectes $q_1f(p)$ i $q_2f(p)$ són dues rectes diferents que tallen l'eix en dos punts diferents. En la proposició anterior, s'ha vist que les rectes $pf(q_1)$ i $q_1f(p)$ tallen sobre l'eix, anàlogament, les rectes $q_1f(p)$ i $q_2f(p)$ tallen en un altre punt de l'eix, per tant, el formen. □



2.3 Involucions en còniques

Un cas particular de les projectivitats són les involucions, a continuació en veurem la definició i alguns resultats relacionats amb les involucions en còniques. Aquest tipus de projectivitat prenen importància més endavant en el treball quan s'estudia el Teorema de Desargues.

Definició 2.7. Una involució f en un espai projectiu de dimensió 1 és una projectivitat tal que $f^2 = Id$ però $f \neq Id$.

Lema 2.8. La matriu

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

és d'una involució τ en $\mathbb{P}_1 \iff \alpha + \delta = 0$

Demostració. Com $\tau^2 = Id$ tenim que

$$M^2 = \lambda Id$$

$$M^2 - \lambda Id = 0$$

per tant, el polinomi mínim (polinomi de grau menor que anul·la M) de M divideix $x^2 - \lambda$. De fet, el polinomi mínim i el polinomi característic coincideixen ja que el polinomi mínim no pot ser de grau 1 perquè $\tau \neq Id$. El coeficient amb x correspon a la traça de la matriu M , que és zero. \square

Corol·lari 2.9. Sigui τ una projectivitat de \mathbb{P}_1 i siguin $p, p' \in \mathbb{P}_1$ punts diferents tal que $\tau(p) = p'$ i $\tau(p') = p$ aleshores τ és una involució. Direm que p, p' és una parella involutiva de τ .

Demostració. Prenem una referència de \mathbb{P}_1 de manera que p i p' siguin els dos primers vèrtexs, aleshores, tenim que

$$\tau([1 : 0]) = [0 : 1]$$

$$\tau([0 : 1]) = [1 : 0]$$

així que τ té matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, τ és una involució ja que té traça nul·la. \square

Lema 2.10. *Siguin q i q' dos punts de \mathbb{P}_1 fixats, aleshores per a qualsevol punt $p \in \mathbb{P}_1$ $p \neq q, q'$, la projectivitat τ de \mathbb{P}_1 tal que $(q, q', p, \tau(p)) = -1$ és una involució de punts fixos q, q' .*

Demostració. Fixem una referència en \mathbb{P}_1 posant els dos primers vèrtex en els punts q i q' , un punt unitat $A \in \mathbb{P}_1$ qualsevol, $A \neq q, q'$. Aleshores, la matriu de la involució τ que té els punts q i q' fixos és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu envia qualsevol punt de coordenades $[x : y]$ al punt $\tau([x : y]) = [x : -y]$. Per tant, la raó doble $([1 : 0], [0 : 1], [x : y], [x : -y]) = -1$

□

Corol·lari 2.11. *Sobre \mathbb{P}_1 una involució τ està determinada per una parella involutiva, és a dir, dos punts p, p' de \mathbb{P} tal que $\tau(p) = p'$ i $\tau(p') = p$.*

Proposició 2.12. *Sigui τ una involució en C aleshores, les rectes $p \vee \tau(p)$ són concurrents. Dit d'una altra manera: $\exists O \notin C$ tal que la projectivitat*

$$\begin{aligned} \varphi_o : C &\rightarrow C \\ x &\rightarrow (x \vee O) \cap C \end{aligned}$$

és τ .

Demostració. Sigui R una referència de \mathbb{P}_2 de manera que els dos primers vèrtexs p i q són els punts fixos de τ i el tercer vèrtex és el pol de $p \vee q$, $O = [0 : 0 : 1]$, el punt unitat està sobre C diferent dels punts fixos tal i com es mostra en la figura. Aquesta referència permet escriure els punts $[A : B]$ de \mathbb{P}_1 com punts $[A^2 : B^2 : -AB]$ de \mathbb{P}_2 , tal i com hem vist anteriorment.

La projectivitat φ_O , tal i com s'ha definit en l'enunciat, té els punts p i q fixos i matriu

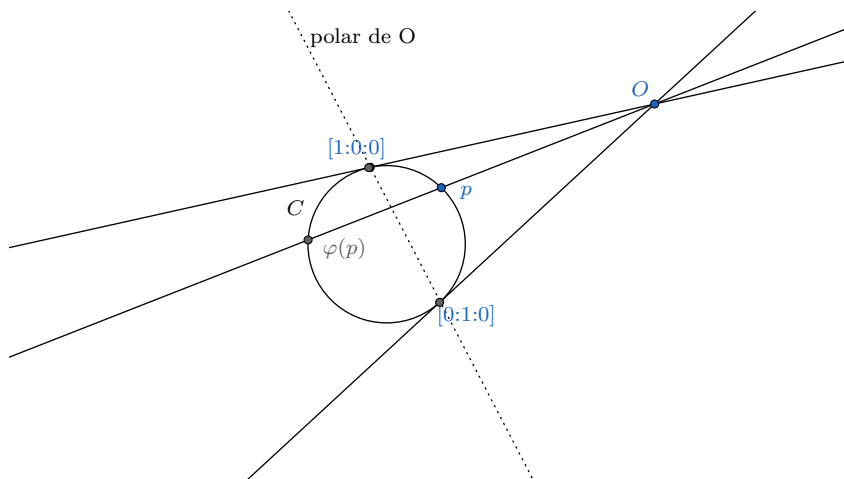
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La imatge per φ_O d'un punt $[A : B]$ qualsevol és $\varphi_O([A : B]) = [A : -B]$ que mirant-ho com a punts de \mathbb{P}_2 tenim $[A^2 : B^2 : -AB] \rightarrow [A^2 : B^2 : AB]$. Els dos punts estan alineats amb O ja que,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A^2 & B^2 & -AB \\ A^2 & B^2 & AB \end{vmatrix} = 0$$

S'ha vist que φ_O i τ coincideixen sobre els dos punts fixos, per tant, són iguals.

□



Definició 2.13. El punt O s'anomena **centre de la involució**.

Corol·lari 2.14. Els punts fixos d'una involució τ en una cònica C són els punts de contacte amb les tangents a C que passen pel centre O , és a dir, són els punts de $C \cap$ Polar de O .

3 Feixos de quàdriques

En aquesta secció recordarem què és una quàdrica i s'introduiran els feixos de quàdriques així com alguns exemples i característiques. En aquesta apartat ho veurem per dimensió n i en el següent, particularitzarem per estudiar els casos de feixos de còniques i així acabar demostrant un dels teoremes més importants d'aquest treball: el Teorema de Desargues sobre feixos de còniques, així com algunes aplicacions.

Una forma bilineal, simètrica en un espai vectorial E de dimensió finita és una aplicació

$$\eta : E \times E \longrightarrow k$$

que compleix: a) $\eta(u + u', w) = \eta(u, w) + \eta(u', w)$ b) $\eta(\lambda u, w) = \lambda \eta(u, w)$ c) $\eta(u, w) = \eta(w, u)$ per a qualsevol parella $u, w \in E$ de vectors i $\lambda \in k$

Si fixem una base e_0, \dots, e_n en E , la matriu

$$M = \begin{pmatrix} \eta(e_0, e_0) & \dots & \eta(e_0, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(e_n, e_0) & \dots & \eta(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

S'anomena matriu de η respecte la base e_0, \dots, e_n . M és una matriu simètrica. La matriu M determina la forma bilineal η i viceversa.

Siqui \mathbb{P}_n un espai projectiu associat a un espai de vectors E , diem que una quàdrica Q de \mathbb{P}_n és la classe de formes bilineals simètriques en E mòdul multiplicació per constant no nul·la. Posem $Q = [\eta]$ per indicar $Q = \{\lambda \eta\}_{\lambda \in K \setminus \{0\}}$. Fixada una referència R en \mathbb{P}_n i una base adaptada e_0, \dots, e_n , aleshores podem associar una matriu M llevat de constant no nul·la a Q . Un punt $P = [u] \in \mathbb{P}_n$ és de la quàdrica si compleix $\eta(u, u) = 0$. L'equació de Q ve donada per

$$(x_0 \dots x_n) M \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

I també està determinada llevat de constant.

Es pot considerar l'espai de quàdriques $\mathbb{Q}(\mathbb{P}_n)$, on es prenen els coeficients de l'equació d'una quàdrica $Q : \sum_{i,j=0}^n a_{i,j}x_i x_j = 0$ com les coordenades del punt $Q = [a_0 : \dots : a_n]$ en $\mathbb{Q}(\mathbb{P}_n)$. Aquest espai de quàdriques ens permet parlar de famílies de quàdriques vistes com varietats lineals, en concret es parla de feixos de quàdriques quan es pren una recta de $\mathbb{Q}(\mathbb{P}_n)$.

Definició 3.1. *El feix de quàdriques \mathcal{P} generat per dues quàdriques diferents Q i Q' és la família de quàdriques que compleixen*

$$\mathcal{P} = \{Q_{(\lambda,\mu)} : \lambda f + \mu g = 0 \mid (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$$

on f i g són les equacions de Q i Q' respectivament.

Equivalentment, podem escriure el feix generat per Q i Q' utilitzant les seves matrius M i N ,

$$\mathcal{P} = \{Q_{(\lambda,\mu)} : \lambda M + \mu N = 0 \mid (\lambda, \mu) \in k^2 \setminus (0, 0)\}$$

Lema 3.2. *Si dos quàdriques d'un feix \mathcal{P} satisfan una condició lineal aleshores, la satisfan totes les quàdriques de \mathcal{P} .*

Demostració. Una condició lineal en les quàdriques de \mathbb{P}_n és un hiperplà en $\mathbb{Q}(\mathbb{P}_n)$, per tant, si dues quàdriques satisfan una condició lineal, la intersecció dels dos hiperplans, si les còniques són diferents, serà una recta, precisament corresponent al feix de quàdriques que satisfan. \square

En particular, un punt pertany a dues quàdriques diferents del feix \mathcal{P} si i només si, pertany a totes les quàdriques de \mathcal{P} .

Definició 3.3. *Els punts comuns a totes les quàdriques d'un feix \mathcal{P} s'anomenen **punts base**. El lloc base és conjunt de punts base i és una unió de varietats lineals.*

Proposició 3.4. *En un feix $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}_n$ de quàdriques o bé són totes degenerades o hi ha com a màxim $n + 1$ quàdriques degenerades.*

Demostració. Les quàdriques degenerades d'un feix \mathcal{P} es poden determinar mitjançant les matrius $M = (a_i^j)$ i $N = (b_i^j)$ de les quàdriques Q i Q' que el generen, per tant, una quàdrica de \mathcal{P} amb matriu $\lambda M + \mu N$ és degenerada si

$$\det(\lambda M + \mu N) = \begin{vmatrix} \lambda a_0^0 + \mu b_0^0 & \dots & \lambda a_n^0 + \mu b_n^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_0^n + \mu b_0^n & \dots & \lambda a_n^n + \mu b_n^n \end{vmatrix}$$

El primer terme de l'equació és un polinomi homogeni de grau $n + 1$ en λ i μ ja que tots els termes del determinant són homogenis de grau 1 en λ i μ . Si és zero, totes les quàdriques del feix són degenerades, si no ho és, hi ha com a màxim $n + 1$ solucions per $(\lambda, \mu) \in k^2$ que anul·len el polinomi, per tant, hi ha com a màxim $n + 1$ quàdriques degenerades. \square

Definició 3.5. *Els feixos que contenen quàdriques no degenerades s'anomenen **feixos regulars**.*

Lema 3.6. Sigui $Q = [\eta]$ una quàdrica de \mathbb{P}_n amb $\eta : E \times E \rightarrow k$ una forma bilineal simètrica. Sigui $F = \langle u_1, u_2 \rangle$ un subespai de dimensió 2 aleshores, la matriu de C restringida al subespai F és

$$\begin{pmatrix} u_1^T M u_2 & u_1^T M u_2 \\ u_1^T M u_2 & u_2^T M u_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.7. (El con tangent). Sigui C una quàdrica de \mathbb{P}_n amb matriu M i equació $q = 0$ un cop fixada una referència R . Sigui $p = [u]$ un punt de \mathbb{P}_n , $p \notin C$ aleshores, el conjunt de rectes que passen per p i són tangents a C formen el que s'anomena **con tangent** de C per p . Anem a buscar-ne l'equació: Sigui $X = [x]$ un punt de \mathbb{P}_n que està en el con tangent de C per p , aleshores, per definició, la recta px és tangent a C . Considerem la restricció de C a la recta px , que té matriu

$$M|_{px} \begin{pmatrix} u^T M u & u^T M x \\ u^T M x & x^T M x \end{pmatrix}$$

Per tal que sigui tangent a C , cal que la restricció només tingui un punt, per tant, cal imposar que $M|_{px}$ sigui degenerada, això dóna

$$(x^T M x)(u^T M u) - (u^T M x)^2 = 0$$

Reescribit la igualtat anterior tenim

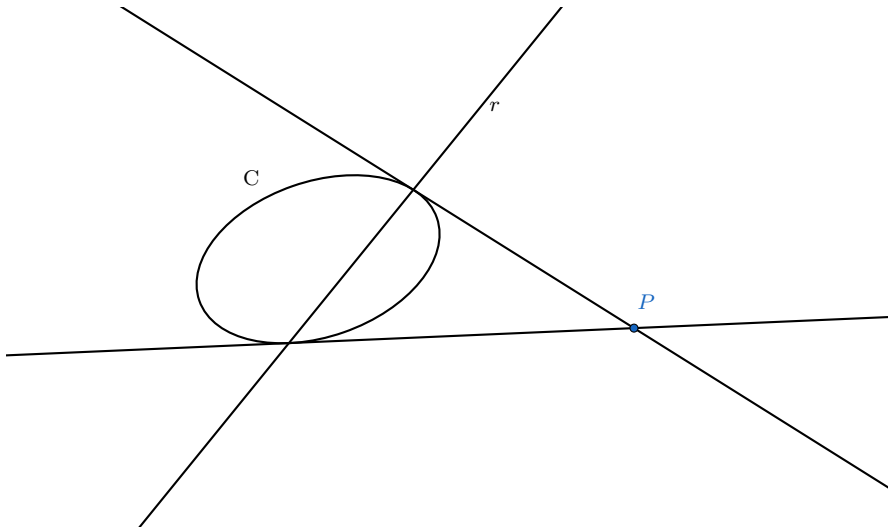
$$q(x)q(u) - (H_p)^2 = 0$$

on H_p és l'hiperplà polar de p . Mirant l'equació, veiem que el con tangent està en un feix generat per $q(x)$ i l'hiperplà polar de p al quadrat.

Exemple 3.8. Versió plana del con tangent. Siqui $C \subset \mathbb{P}_2$ una cònica amb equació $q = 0$ i sigui $p = [a : b : c]$ un punt qualsevol tal que $p \notin C$. Aleshores, el con tangent de C per p és

$$q(p)q(C) - r^2 = 0$$

on r és la polar de p respecte a C (veure figura a continuació).



Exemple 3.9. Considerem la hipèrbola afí $y = \frac{1}{x}$, un cop projectivitzada, es converteix en la cònica $C \subset \mathbb{P}_2$ amb equació $q : xy - z^2 = 0$ i el punt del pla $p = [0 : 0 : 1]$ que no està en C . Volem l'equació del con tangent per p . Calculem la polar de p

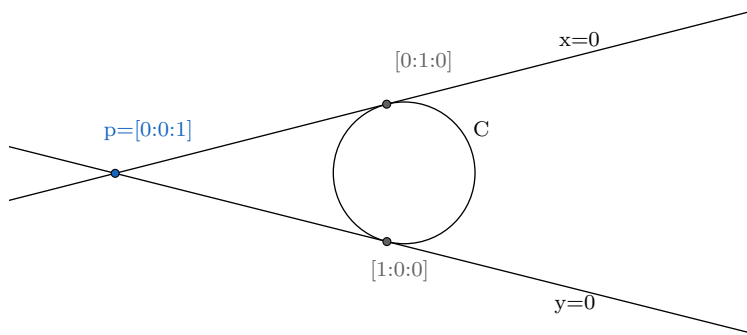
$$(001) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -z = 0$$

Comentari: Cal utilitzar la matriu que prové directament de l'equació sense multiplicar per cap constant. O bé multiplicar-ho tot (equació i matriu) per treure denominadors, però cal ser consistentes.

Substituint el punt en l'equació de la cònica es té $q(p) = -1$. Per tant, l'equació del con tangent de C per p és

$$\begin{aligned} -(xy - z^2) - (-z)^2 &= 0 \\ xy &= 0 \end{aligned}$$

Que, tal i com es veu en la figura, és el producte de les dues rectes $x = 0$ i $y = 0$ tangents a C que passen pel punt.



4 Feixos de còniques

Anem ara a particularitzar el que hem vist en la secció anterior en dimensió n per dimensió 2. En tal cas, passarem a parlar de còniques en \mathbb{P}_2 i de l'espai de còniques $\mathbb{Q}(\mathbb{P}_2) = \mathbb{P}_5$.

Fixant una referència R en \mathbb{P}_2 una cònica qualsevol es pot escriure com

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

o equivalentment, amb la matriu

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

Però també podem veure les còniques $C \subset \mathbb{P}_2$ com punts de \mathbb{P}_5 de la següent forma

$$C = [a : b : c : d : e : f]$$

En aquest marc, les varietats lineals de \mathbb{P}_5 es consideren sistemes lineals de de còniques.

Si quin C_1 i C_2 dues còniques de \mathbb{P}_2 en una referència fixada, aleshores

$$\mathcal{P} = \{\lambda C_1 + \mu C_2\}_{[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_1}$$

és el feix de còniques de \mathbb{P}_2 generat per C_1 i C_2 . Si escrivim

$$\begin{aligned} C_1 : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz &= 0 \\ C_2 : a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'xy + 2e'xz + 2f'yz &= 0 \end{aligned}$$

aleshores, el feix \mathcal{P} s'escriu com el sistema lineal

$$\lambda(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz) + \mu(a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2d'xy + 2e'xz + 2f'yz) = 0$$

Exemple 4.1. Sigui un punt $p \in \mathbb{P}_2$ tal que $p \in C_1 \cap C_2$ aleshores, $p \in (\lambda C_1 + \mu C_2)$, $\forall \lambda, \mu$.

Proposició 4.2. *En un feix de còniques de \mathbb{P}_2 o bé és de còniques degenerades o bé en té com a màxim 3.*

Això és un cas particular de la Proposició 3.4 per dimensió 2, si un feix conté una cònica no degenerada aleshores, té com a molt 3 degenerades.

Les còniques degenerades formen una hipersuperfície en \mathbb{P}_5

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} = 0$$

$$abc + 2def + e^2b - af^2 - cd^2 = 0$$

Els feixos de còniques, hem vist que són rectes de \mathbb{P}_5 per tant, els punts d'intersecció poden ser un, dos o tres o bé infinits si la recta hi està continguda. Quan la recta no està continguda en la hipersuperfície significa que el feix és regular, aleshores, pot tallar en un, dos o com a molt tres punts, que corresponen a les còniques degenerades del feix.

4.1 Sistemes lineals de còniques

En aquesta secció s'estudia més en detall com es tradueixen condicions geomètriques en les còniques, com ara que una cònica passi per un punt o que dos punts siguin conjugats, en sistemes lineals d'equacions en l'espai de còniques $\mathbb{Q}(\mathbb{P}_2)$.

Sigui $p \in \mathbb{P}_2$ escrivim $p = [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2]$ les còniques que passen per p compleixen la condició lineal homogènia amb a, b, c, d, e, f

$$a\alpha_0^2 + b\alpha_1^2 + c\alpha_2^2 + 2d\alpha_0\alpha_1 + 2e\alpha_0\alpha_2 + 2f\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

que vist en l'espai de còniques \mathbb{P}_5 , és un hiperplà.

Exemple 4.3. Còniques que passen per un punt. Considerem el punt p de \mathbb{P}_2 amb coordenades $p = [3 : 4 : 7]$ en una referència fixada, l'hiperplà de \mathbb{P}_5 és

$$H_p : 9a + 16b + 49c + 24d + 56e + 42f = 0$$

Les solucions de l'equació són les còniques de \mathbb{P}_2 que passen pel punt $[3 : 4 : 7]$.

Exemple 4.4. Còniques que tenen dos punts conjugats. Sigui $p = [\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2]$ i $q = [\beta_0 : \beta_1 : \beta_2]$ dos punts de \mathbb{P}_2 qualssevol, la condició

$$a\alpha_0\beta_0 + b\alpha_1\beta_1 + c\alpha_2\beta_2 + 2d\alpha_0\beta_1 + 2e\alpha_1\beta_2 + 2f\alpha_0\beta_2 = 0$$

és la condició lineal en $a, b, c, d, e, f \in K$ que compleixen les còniques per a les quals punts p i q són conjugats.

Exemple 4.5. Còniques tangents a una recta en un punt donat. Sigui $p \in \mathbb{P}_2$ un punt donat i $l \subset \mathbb{P}_2$ una recta que passa per p . Prenem una referència de \mathbb{P}_2 de forma que els dos primers vèrtexs de la referència estan en la recta l i el punt p sigui el primer d'ells. El feix de còniques tangents a l en p han de complir, per una banda, la condició lineal

$$a = 0$$

ja que contenen el punt p . A més, d'altra banda, també s'ha de complir que els dos primers punts de la referència siguin conjugats per ser l tangent a C , això dona lloc a la condició lineal $d = 0$. Així doncs, són dos condicions lineals.

Definició 4.6. Si tenim dues condicions lineals \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 , aleshores \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 són linealment independents si hi ha una cònica C que satisfà \mathcal{C}_1 però no satisfà \mathcal{C}_2 .

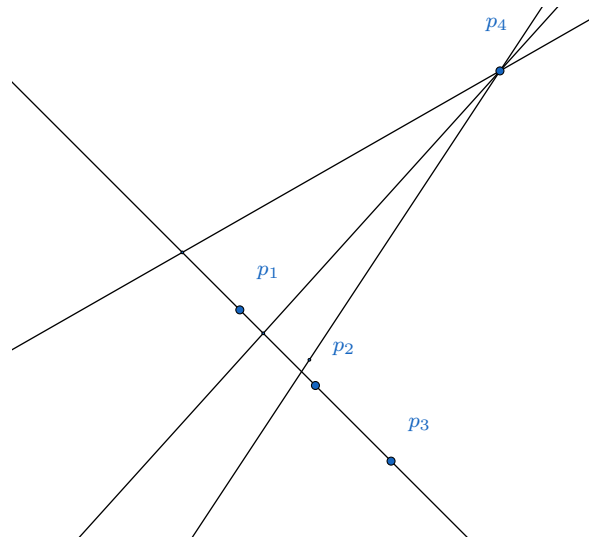
Corol·lari 4.7. En \mathbb{P}_2 existeix una única cònica que passa per cinc punts donats diferents de manera que no n'hi ha quatre d'alineats.

Això és veu directament considerant les cinc condicions lineals obtingudes de substituir les coordenades de cada punt en l'equació, si els cinc punts són diferents, les equacions són linealment independents (sempre es pot trobar una cònica que passi per un dels punts i no passi per cap altre) per tant, el sistema té solució única, tenint en compte que una cònica queda determinada pels coeficients $C = [a : b : c : d : e : f]$ llevat de múltiple.

Exemple 4.8. Feix de còniques per quatre punts, tres d'ells alineats. Si els quatre punts estan en una recta r , aleshores només la cònica $r^2 = 0$ passa pels 4 punts i no hi ha feix. Suposem doncs que no hi ha quatre punts alineats, diem $l \in \mathbb{P}_2$ la recta que passa per tres dels punts, aleshores

$$\mathcal{P} = \{rl : r \in \mathbb{P}_2 \text{ recta qualsevol que passa pel quart punt}\}$$

és un feix de còniques que passa pels quatre punts, il·lustrat en el dibuix següent.



Exemple 4.9. Còniques per quatre punts, tres no alineats. Posem $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_2$ fixats i no n'hi ha tres d'ells alineats, les còniques degenerades del feix que passa pels quatre punts són les parelles de rectes que passen pels quatre vèrtexs. Hi ha 3 còniques degenerades, per tant el màxim esmentat en la Proposició 4.2 s'assoleix.

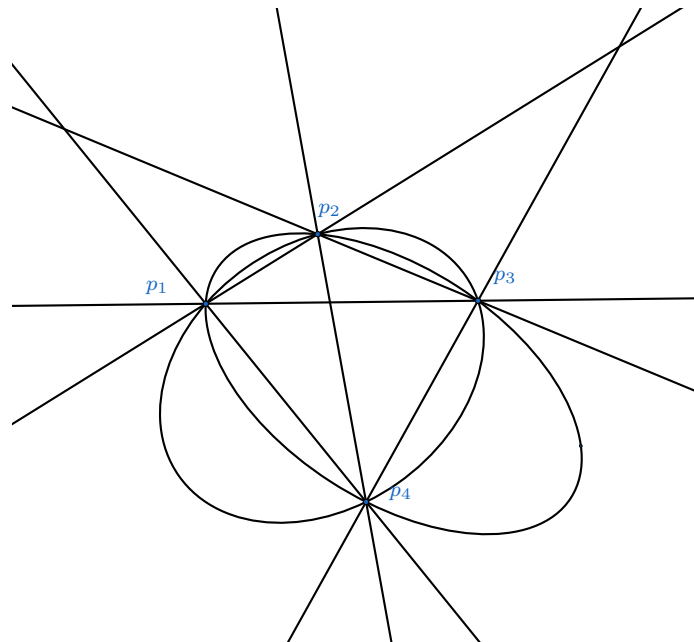


Figura: Feix de còniques que passen per quatre punts, tres d'ells no alineats.

4.2 Teorema de Desargues

A continuació s'enuncia el teorema de Desargues sobre feixos de còniques i es discuteixen un parell d'aplicacions com ara identificar el tipus afí d'una cònica o trobar les còniques d'un feix que són tangents a una recta. Més endavant, parlarem també del cercle d'Euler, que també hi està relacionat, el teorema diu:

Teorema 4.10. (Teorema de Desargues). *Sigui \mathcal{P} un feix de còniques de \mathbb{P}_2 i sigui $l \subset \mathbb{P}_2$ una recta que no contingui cap punt base de \mathcal{P} . Aleshores, les còniques de \mathcal{P} intersequen amb l en parelles de punts d'una involució en l .*

Demostració. Siqui $\mathcal{P} = \{\lambda C_1 + \mu C_2\}_{[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_1}$ el feix de còniques de \mathbb{P}_2 . Diem $A, B \in l$ els punts d'intersecció $l \cap C_1$ i diem $C, D \in l$ els punts de $l \cap C_2$. Fixem R la referència de \mathbb{P} tal que $R = \{A, B; C\}$.

La involució $\tau : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ compleix que $\tau(A) = B$ i $\tau(B) = A$. D'altra banda tenim també que $\tau(C) = D$ i $\tau(D) = C$ per tant $D = [1 : a]$ i podem escriure la matriu de la involució com

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

En la referència R , una cònica pels punts A a B es pot escriure com $xy = 0$, i una cònica pels punts C i D és $(x - y)(x - ay) = 0$. Així,

$$\mathcal{P} : \lambda xy + \mu(x - y)(x - ay) = 0$$

Per acabar, cal veure que si (λ, μ) varien en l'equació, les solucions són de la forma $[r, s]$, $[s, ar]$.

Desenvolupant l'equació s'obté

$$ax^2 + y^2 + (\beta + 1 + a)xy = 0$$

on $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Introduint la variable $t = \frac{x}{y}$, l'equació es converteix en l'equació de segon grau:

$$at^2 + (\beta + 1 + a)t + 1 = 0$$

que té solucions $t = \frac{-(\beta+1+a) \pm \sqrt{(\beta+1+a)^2 - 4a}}{2a}$ per tant les solucions són les parelles de punts següents $[-(\beta+1+a) + \sqrt{(\beta+1+a)^2 - 4a} : 2a]$, $[-(\beta+1+a) - \sqrt{(\beta+1+a)^2 - 4a} : 2a]$

S'identifica $r = -(\beta + 1 + a) \pm \sqrt{(\beta + 1 + a)^2 - 4a}$ i $s = 2a$, per tant, cal comprovar la igualtat següent $[s : ar] = [2a : -(\beta + 1 + a) + \sqrt{(\beta + 1 + a)^2 - 4a}]$. Fent el determinant

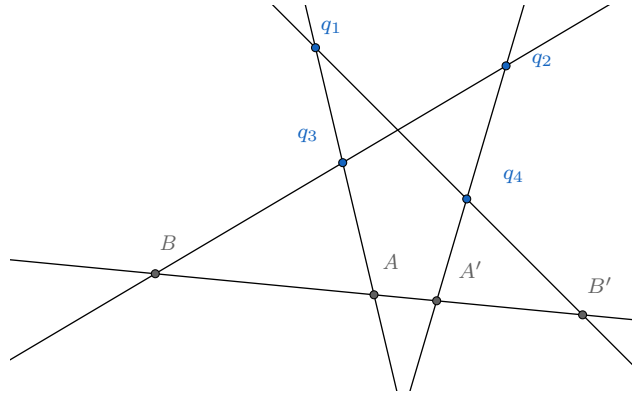
$$\begin{vmatrix} -(\beta + 1 + a) - \sqrt{(\beta + 1 + a)^2 - 4a} & 2a \\ 2a & -a(\beta + 1 + a) + a\sqrt{(\beta + 1 + a)^2 - 4a} \end{vmatrix} = 0$$

efectivament, els punts són parelles d'una involució. □

Corol·lari 4.11. (Aplicació Teorema de Desargues). *Sigui \mathcal{P} un feix de còniques que passen per quatre punts $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_2$ de manera que no n'hi ha tres d'alineats, i sigui $l \subset \mathbb{P}_2$ una recta qualsevol que no passa per cap punt base. Volem trobar els punts de contacte amb l de les còniques del feix tangents a l .*

Pel teorema de Desargues sabem que les parelles de punts de tall de les còniques de feix amb la recta l donen lloc a una involució. Per tant, les còniques de \mathbb{P} que són tangents a l seran les que tinguin un sol punt de contacte, aquests punts seran fixos per la involució.

Per trobar la solució, utilitzem un parell de les còniques degenerades del feix. Per exemple, les que uneixen les parelles de punts $C_1 : (q_1 \vee q_3)(q_2 \vee q_4) = 0$ i $C_2 : (q_1 \vee q_4)(q_2 \vee q_3) = 0$. El teorema de Desargues diu que els punts $C_1 \cup l$ i $C_2 \cup l$ són parelles d'una involució τ en l , posem aquests punts A, A' i B, B' . Veure figura següent.



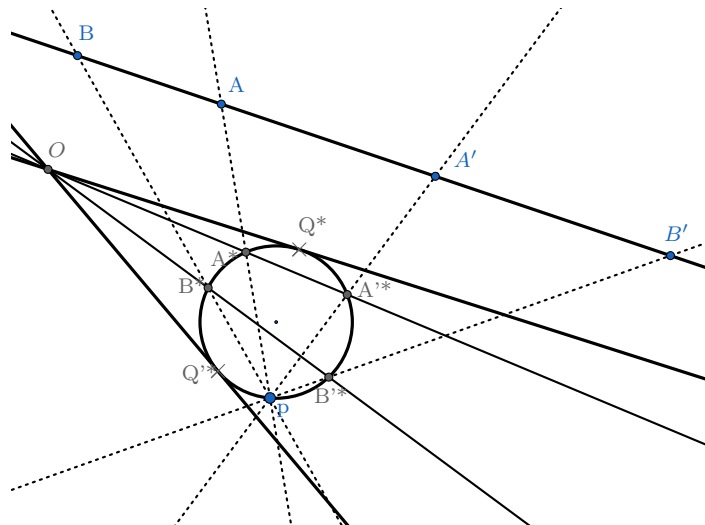
Per trobar els punts fixos de τ , considerem una cònica qualsevol $C \subset \mathbb{P}_2$ no degenerada tal que $C \notin \mathcal{P}$ i un punt $p \in C$.

Definim la projectivitat

$$\begin{aligned} \varphi : l &\rightarrow C \\ p &\rightarrow (p \vee C) \cup C \end{aligned}$$

Els punts $A, A', B, B' \in l$ es converteixen en $A^*, A'^*, B^*, B'^* \in C$ mitjançant φ , i són les parelles de punts d'una involució τ^* en C .

Per trobar els punts fixos de τ^* considerem primer, el centre O de τ^* : $O = (A^* \vee A'^*) \cup (B^* \vee B'^*)$, s'ha vist que els punts fixos corresponen als punts de contacte amb les tangents a C per O , diem aquests punts $Q^*, Q'^* \in C$. Aleshores, els punts que busquem són $\varphi^{-1}(Q^*)$ i $\varphi^{-1}(Q'^*)$. Es pot veure el gràfic que hi ha a continuació.



Corol·lari 4.12. (Aplicació del Teorema de Desargues). Mètode gràfic per determinar el tipus afí d'una cònica donats 5 punts, tres d'ells no alineats.

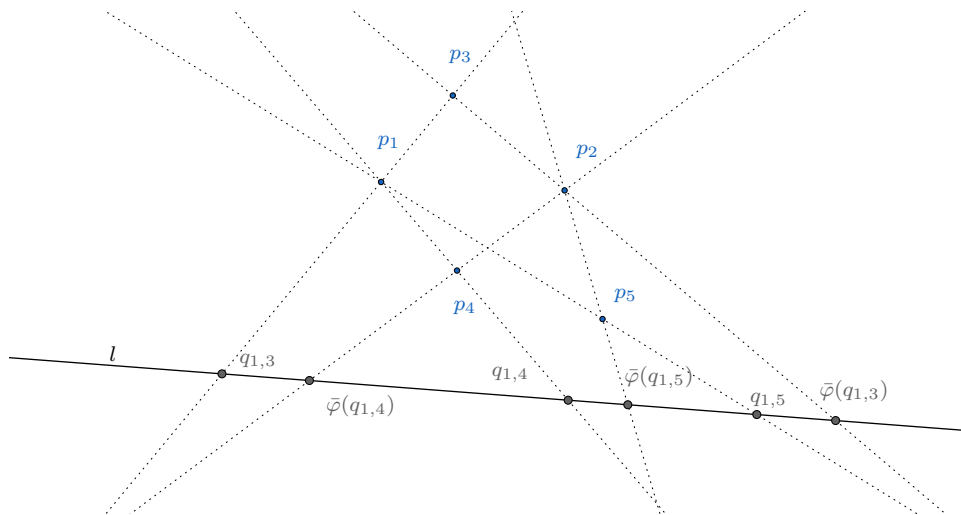
Siguin $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{P}_2$ punts d'una cònica C , aplicant Steiner tenim la projectivitat

$$\begin{aligned} \varphi : p_1^* &\longrightarrow p_2^* \\ p_1p_3 &\longrightarrow p_2p_3 \\ p_1p_4 &\longrightarrow p_2p_4 \\ p_1p_5 &\longrightarrow p_2p_5 \end{aligned}$$

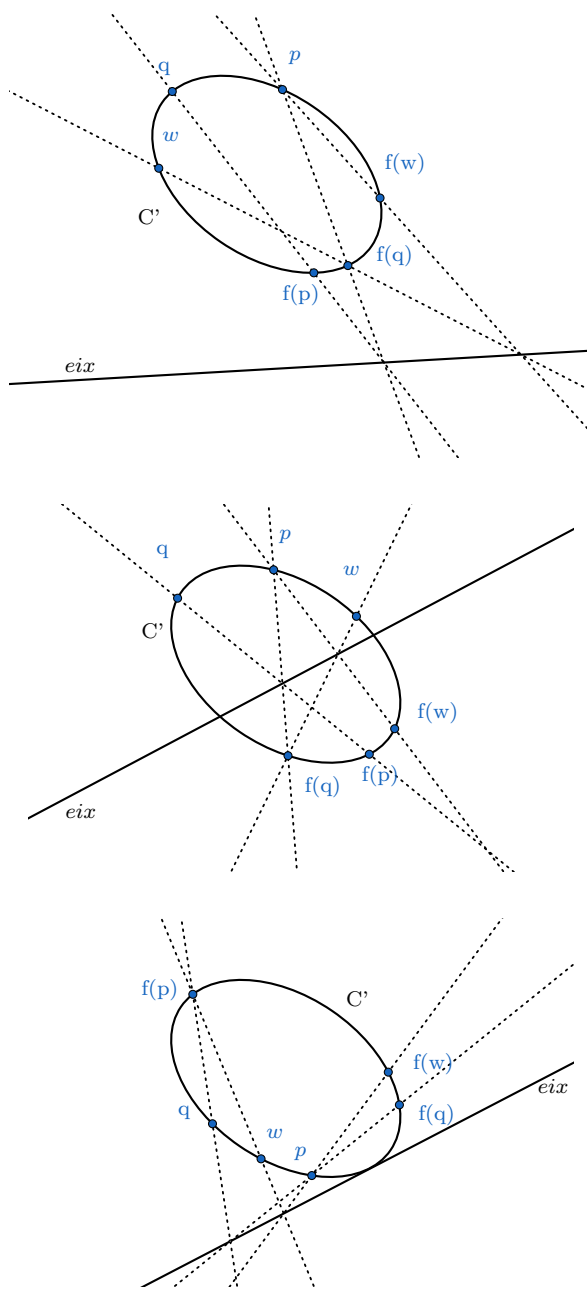
Donada $l \subset \mathbb{P}_2$ una recta que no passa per cap dels punts p_i , tenim una projectivitat $\bar{\varphi}$ en l

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : l &\longrightarrow l \\ p_1p_3 \cap l &\longrightarrow p_2p_3 \cap l \\ p_1p_4 \cap l &\longrightarrow p_2p_4 \cap l \\ p_1p_5 \cap l &\longrightarrow p_2p_5 \cap l \end{aligned}$$

Tal i com es mostra en la figura següent:



Els punts fixos de la projectivitat $\bar{\varphi}$ són punts de la cònica C , si agafem la recta l com la recta de l'infinit r_∞ , aquests punts fixos ens permeten classificar el tipus afí de C . Per fer-ho, igual que en el corol·lari anterior, s'utilitza una cònica auxiliar $C' \subset \mathbb{P}_2$ i un punt $q \in C$ per passar la projectivitat en l a una projectivitat φ^* en C' , el nombre de punts fixos de φ depèn de la posició de l'eix de la projectivitat φ^* respecte la cònica C' . Si l'eix talla la cònica (φ té dos punts fixos) aleshores C és una hipèrbola; si l'eix és tangent (φ té un sol punt fix) per tant C és una paràbola i si l'eix i la cònica C' són disjunts (φ no té punts fixos) i així, C és una el·lipse. Il·lustrats en la figura següent estàn els tres casos que acabem d'esmentar.



5 Estructura mètrica en còniques

La geometria projectiva en general no té mètrica, però una forma d'introduir la noció de distància en la clausura projectiva d'un espai afí és mitjançant una cònica relacionada amb el producte escalar de l'espai afí. Això permet parlar d'ortogonalitat, angles entre rectes, esferes... en el marc de la geometria projectiva. Tot seguit, es defineix la cònica de l'absolut i se'n van derivant els conceptes d'ortogonalitat, la fórmula de Laguerre que relaciona l'angle entre dues rectes afins amb la raó doble de quatre punts projectius i la definició projectiva del cercle. Un cop arribat a aquest punt, ja tenim les eines necessàries per parlar del cercle d'Euler i demostrar que efectivament, els sis punts corresponents a

les interseccions entre les altures i els costats i els punts mitjos de cada costat estan sobre el cercle.

5.1 L'absolut

Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió n , es defineix el producte escalar entre dos vectors $u, v \in E$ com una forma bilineal, simètrica i definida positiva

$$\begin{aligned} K : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow a = K(u, v) \end{aligned}$$

Exemple 5.1. Si $E = \mathbb{R}_n$, el producte escalar habitual és el que multiplica els vectors coordenada a coordenada i es sumen.

En un espai afí \mathbb{A}_n de dimensió n amb cos base \mathbb{R} associat a un espai de vectors E es pot associar un producte escalar, prenent K una forma bilineal simètrica definida positiva la terna (\mathbb{A}_n, E, K) és un espai afí euclidià.

Per tal de reformular la noció de producte escalar en un espai projectiu cal considerar la clausura projectiva de \mathbb{A}_n , $\bar{\mathbb{A}}_n$, amb l'hiperplà impropri H_∞ de les classes de vectors de E . En aquesta situació, el producte escalar K defineix una cònica en H_∞ que anomenem **absolut** i denotem per \mathbf{K} . Com el producte escalar és definit positiu, la cònica \mathbf{K} no té punts reals; en particular, \mathbf{K} no té punts dobles i per tant és una cònica no degenerada sense punts reals. Per definició, l'absolut $\mathbf{K} = [K]$ està definit llevat de producte per escalar $\rho \in \mathbb{R} - \{0\}$ que prenem positiu per tal que $\rho\mathbf{K}$ sigui també definida positiva.

Exemple 5.2. Per $n = 3$, un cop fixada una referència ortonormal de \mathbb{A}_3 i la referència projectiva associada de manera que $H_\infty : t = 0$, l'absolut és una cònica de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Exemple 5.3. Per $n = 2$, un cop fixada la referència ortonormal $\bar{R} = (O, e_1, e_2)$ de \mathbb{A}_2 , anomenem R a la referència projectiva associada on $r_\infty : z = 0$, l'absolut té equació

$$x^2 + y^2 = 0$$

És a dir, en el pla projectiu, l'absolut està format per dos punts imaginaris conjugats $I, J \in r_\infty$. S'anomenen **punts cíclics**, i en una referència ortonormal tenen coordenades $I = [1 : i : 0]$ i $J = [1 : -i : 0]$.

5.2 Ortogonalitat i angles entre parelles de rectes

Un cop introduïda la noció de producte escalar en l'espai projectiu mitjançant una cònica en l'hiperplà de l'infinit que hem anomenat absolut, podem establir relacions d'ortogonalitat entre punts de l'espai projectiu. Fins i tot, relacionant els punts impropis de dues rectes amb els punts cíclics mitjançant la raó doble, recuperem el concepte d'angles entre dues rectes afins, això ho dóna la fórmula de Laguerre que s'enuncia a continuació.

Definició 5.4. Dos punts $p, p' \in H_\infty$ són direccions ortogonals si i nomès si, són conjugats respecte de l'absolut.

Aquesta definició coincideix amb la noció d'ortogonalitat habitual, ja que la matriu de l'absolut coincideix amb la matriu de gram del producte escalar corresponent.

Teorema 5.5. (Fórmula de Laguerre). *En el pla euclidià orientat \mathbb{A}_2 hi ha una elecció dels punts cíclics I, J , per als quals l'angle entre dos rectes arbitràries $l_1, l_2 \in \mathbb{A}$ és*

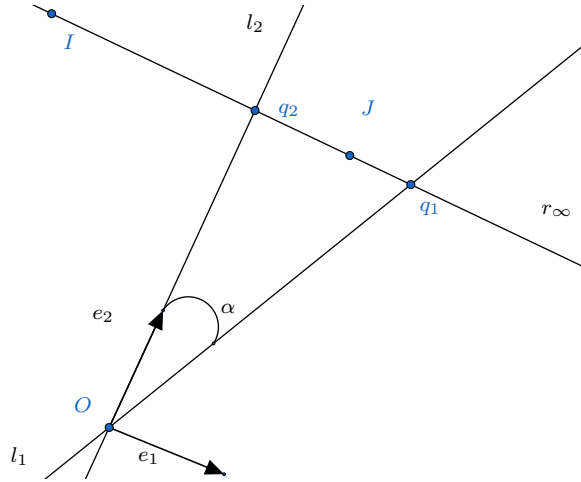
$$\widehat{l_1 l_2} = \frac{1}{2i} \log(I, J, q_1, q_2)$$

on $q_1, q_2 \in r_\infty$ són els punts impròpis de les rectes l_1 i l_2 respectivament.

Demostració. Si l_1 i l_2 són paral·leles es té $q_1 = q_2$ i la raó doble del teorema és 1, el logaritme de 1 és nul per tant, cert. Fixada la base ortonormal $\vec{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la referència projectiva associada és $R = \{[e_1], [e_2], O; O + e_1 + e_2\}$ de manera que es posa un dels vectors directores \vec{e}_2 a sobre d'una de les rectes, l_2 per exemple, immediatament es té $q_2 = [0 : 1 : 0]$ i el vèrtex $0 = l_1 \cap l_2$, aquesta situació es pot veure il·lustrada en la figura que hi ha a continuació. Com la referència és ortonormal els punts cíclics tenen coordenades $I = [1 : -i : 0]$, $J = [1 : i : 0]$ i podem escriure la recta $l_1 = \sin\alpha \vec{e}_1 + \cos\alpha \vec{e}_2$ per tant, $q_1 = [\sin\alpha : \cos\alpha : 0]$. Aleshores, la raó doble

$$(I, J, q_1, q_2) = \frac{\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & i \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

Així, $\widehat{l_1 l_2} = \frac{1}{2i} \log(I, J, q_1, q_2) = \frac{2i\alpha}{2i} = \alpha$ □



5.3 Esferes i cercles

Molt relacionats al concepte de distància estan també les esferes, que en l'espai euclidià, són aquelles quàdriques que tenen tots els punts a distància constant d'un altre punt que anomenem centre. En aquest apartat veurem que en l'espai projectiu hi ha quatre tipus de quàdriques que passen per l'absolut: parelles de plans, el con isotròpic, la esfera i la esfera imaginària.

D'ara endavant, es considera fixada una referència ortonormal \bar{R} de l'espai afí \mathbb{A}_n i R la referència projectiva associada. Una quàdrica conté l'absolut si és de la forma

$$C : \lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2) + 2 \sum_{i=1}^n \bar{a}_i x_0 x_i + \bar{a} x_0^2 = 0$$

per $\lambda, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a} \in \mathbb{R}$ no tots nuls. Si $\lambda = 0$ obtenim un parell de plans $H + H_\infty$. Si $\lambda \neq 0$ escrivim

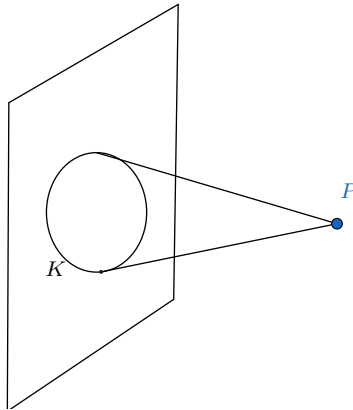
$$(x_1^2 + \dots + x_n^2) + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_0 x_i + a x_0^2 = 0$$

prenent $X_i = \frac{x_i}{x_0}$, $i = 1, \dots, n$ i completant quadrats en l'equació anterior s'obté

$$(X_1 - a_1)^2 + \dots + (X_n - a_n)^2 = D$$

on $D = \sum_{i=1}^n a_i^2 - a$.

Mirant l'equació, es veu que C és una quàdrica degenerada si $D = 0$ i en tal cas, C és el con per l'absolut i amb vèrtex (a_1, \dots, a_n) , tal i com es mostra en la figura següent, s'anomena **con isotròpic** i està il·lustrat a continuació. Si $D \neq 0$ la quàdrica C és no degenerada i té centre propi (a_1, \dots, a_n) . En particular, per $D > 0$ la quàdrica C s'anomena *esfera* de radi \sqrt{D} i centre (a_1, \dots, a_n) . Si $D < 0$, C és una *esfera imaginària* amb centre (a_1, \dots, a_n) i radi $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$



Corol·lari 5.6. *Una quàdrica de l'espai eucidià és una esfera si i només si és no-degenerada, té punts propis i conté l'absolut.*

En particular, els cercles són les còniques no degenerades en punts que contenen els punts cíclics.

Exemple 5.7. Fixada una referència R ortonormal de \mathbb{P}_2 de manera que la recta $z = 0$ sigui la recta de l'infinit, escrivim un cercle $C \subset \mathbb{P}_2$ amb centre propi $a = [a_1 : a_2 : 1]$ i radi R , de la forma general

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = R^2$$

Projectivitzem l'equació multiplicant per z i z^2 en els llocs necessaris i obtenim l'equació projectiva

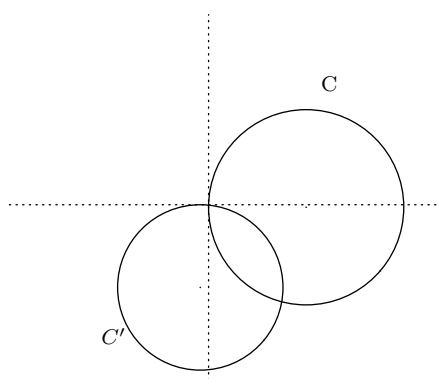
$$x^2 + y^2 - 2a_1xz - 2a_2yz + (a_1^2 + a_2^2 - R^2)z^2 = 0$$

Si mirem la restricció del cercle en la recta de l'infinit $z = 0$ obtenim l'equació de la cònica

$$x^2 + y^2 = 0$$

Hem vist en l'exemple 5.3 que aquesta és l'equació de l'absolut en \mathbb{P}_2 , i les solucions són els punts cíclics I i J .

Definició 5.8. *Dos cercles C i C' són **ortogonals** si les rectes tangents ens els punts d'intersecció són perpendiculars.*



5.4 El cercle d'Euler

Tal i com s'ha enunciat en la introducció, tot seguit veurem i estudiarem el cercle d'Euler, un teorema clàssic del qual avui en dia se'n coneixen més de 25 punts rellevants. Abans però, necessitem definir i estudiar un tipus especial de còniques, les hipèrboles equilàteres. Un cop tinguem totes les eines, passem a parlar del cercle d'Euler i demostrarem que, efectivament, passa per sis punts característics del triangle.

Definició 5.9. *Una **hipèrbola equilàtera** és una hipèrbola amb les asímptotes ortogonals.*

Proposició 5.10. *Una hipèrbola amb matriu*

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

és equilàtera si i només si $a + b = 0$

Demostració. Sigui h una hipèrbola, un cop fixada la referència ortonormal tal que $z = 0$ és la recta de l'infinit, h té matriu

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Considerem la restricció de M a la recta de l'infinit $h \cap r_\infty$ que ens dona els punts de talls de les asímptotes, que són les classes de vectors de cadascuna de les rectes, aquests punts són els que satisfan l'equació de h en l'infinit

$$ax^2 + by^2 + 2dxy = 0$$

Si $a = 0$, es té que $y(by + 2dx) = 0$ per tant, les dues asímptotes són els eixos $x = 0$ i $y = 0$, així doncs, b ha de ser zero i la condició es compleix. Si $a \neq 0$, posem $t = \frac{x}{y}$ i resollem l'equació de segon grau

$$at^2 + 2dt + b = 0$$

que té solucions $t = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - ab}}{a}$. Aquests punts de tall amb r_∞ vistos com a classes de vectors són $(-d + \sqrt{d^2 - ab}, a)$ i $(-d - \sqrt{d^2 - ab}, a)$. Per tal que siguin ortogonals, s'ha de complir

$$\begin{aligned} (-d + \sqrt{d^2 - ab}, a) \cdot (-d - \sqrt{d^2 - ab}, a) &= 0 \\ (-d + \sqrt{d^2 - ab})(-d - \sqrt{d^2 - ab}) + a^2 &= 0 \\ d^2 - (d^2 - ab) + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

per tant,

$$a + b = 0$$

□

Observació: No totes les còniques que compleixen la condició $a + b = 0$ són hipèrboles equilàteres.

Exemple 5.11. Siqui $C \subset \mathbb{P}_2$ una cònica que, un cop fixada una referència R on la recta de l'infinit és $z = 0$, té matriu

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & -a & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

per tant, compleix $a + b = 0$.

Si mirem la part impròpia de l'equació tenim

$$ax^2 - ay^2 + 2dxy = 0$$

i posant $t = \frac{x}{y}$ com a coordenada homogènia podem transformar l'equació a

$$at^2 + 2dt - a = 0$$

que té les dos solucions $t = \frac{-2d \pm \sqrt{4d^2 + 4a^2}}{2a}$.

La cònica C pot ser un parell de rectes que intersequen amb la recta de l'infinit en els punts $[-2d + \sqrt{4d^2 + 4a^2} : 2a : 0]$ i $[-2d - \sqrt{4d^2 + 4a^2} : 2a : 0]$.

Proposició 5.12. Siqui \mathcal{P} un feix regular de còniques i sigui $l \subset \mathbb{P}_2$ una recta que no passa per cap punt doble de les còniques de \mathcal{P} . Aleshores, els pols de l respecte a les còniques no degenerades de \mathcal{P} formen una cònica no degenerada que passa pels punts dobles de les còniques degenerades del feix \mathcal{P} .

Demostració. Siguin C_1 i C_2 dues còniques no degenerades del feix, podem escriure $\mathcal{P} = \{(\lambda C_1 + \mu C_2)\}_{\lambda, \mu}$ i escrivim la recta $l : ax + by + cz = 0$ com un punt de \mathbb{P}_2^* , $l = [a : b : c]$. Volem veure que els conjunt

$$\mathcal{X} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2 \mid (\lambda C_1 + \mu C_2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\}$$

és una cònica.

Primer, veiem que si $[x : y : z] \in \mathbb{P}_2$ és punt doble d'una cònica degenerada del feix es compleix que $\exists \lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$ tals que

$$(\lambda C_1 + \mu C_2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i això es compleix amb $\rho = 0$, per tant tenim que el punt pertany a \mathcal{X} , tal i com volíem.

Per veure que \mathcal{X} és una cònica suposem que $\exists \lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$ tals que es satisfà l'equació

$$\lambda C_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu C_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Sabent que l'últim terme és no nul ja que prenem $\rho \neq 0$. L'equació tindrà solució si

$$\det \left(C_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = 0$$

O, equivalentment,

$$\det \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C_1^{-1} C_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C_1^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = 0$$

Ja que, C_1 és la matriu d'una cònica no degenerada per tant, invertible. Així doncs, tenim un determinant de la següent forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ L_1(x, y, z) & L_2(x, y, z) & L_3(x, y, z) \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

on a', b' i c' són constants no nul·les i $L_i(x, y, z)$ són polinomis de grau 1 amb x, y i z . Així doncs, al desenvolupar el determinant, tindrem una equació amb termes de grau 2 en x, y i z , que és l'equació d'una cònica, tal i com volíem veure. \square

Teorema 5.13. (El cercle d'Euler). *Sigui ABC un triangle del pla projectiu i considerem el conjunt*

$$\mathcal{P}_e = \{\text{hipèrboles equilàteres per } A, B \text{ i } C\},$$

aleshores $\mathcal{C} = \{\text{centres de les còniques de } \mathcal{P}_e\}$ és un cercle.

Observacions:

1. Les còniques de \mathcal{P}_e són tals que compleixen les quatre condicions lineals: passen pels punts A, B i C (3 condicions) i a més, si tenen matriu

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

compleixen $a + b = 0$ (condició de ser hipèrbola equilàtera).

2. El conjunt de còniques \mathcal{P}_e és una subcol.lecció de còniques d'un feix \mathcal{P} , format per còniques que passen pels punts A, B i C i compleixen $a + b = 0$. És a dir, podem veure el feix com

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_e + \{3 \text{ degenerades, formades per parelles de rectes que passen pels punts } A, B \text{ i } C\}$$

3. La proposició anterior ens diu que \mathcal{C} és una cònica, falta veure que és un cercle.

Demostració. Considerem la intersecció de les còniques de \mathcal{P} amb la recta r_∞ de l'infinit. El teorema de Desargues ens diu que, sota aquestes condicions, les parelles de punts de les interseccions $C \cap r_\infty$ són parelles de punts d'una involució.

A més, com que totes les còniques de \mathcal{P} són hipèrboles equilàteres, els punts d'intersecció $q_1, q_2 \in r_\infty$ estan separats harmònicament pels punts cíclics I i J , és a dir, $(I, J, q_1, q_2) = -1$, com que això es compleix per a totes les parelles q_1 i q_2 la involució és la involució de punts fixos I i J .

Com a conseqüència, existeixen dues còniques C_I i C_J de \mathcal{P}_e que tallen la recta r_∞ en els punts I i J respectivament, i, així doncs, són tangents a la recta r_∞ . Això significa que els punts I i J són els centres de les còniques C_I i C_J , i per tant, estan en \mathcal{C} . Hem vist que una cònica que passi pels punts cíclics és un cercle, tal i com volíem demostrar. \square

Proposició 5.14. *El cercle d'Euler passa pels punts mitjos dels costats del triangle.*

Demostració. Considerem $M_C \in \mathbb{P}_2$ el punt mig del costat AB del triangle i posem N_C al quart harmònic $A, B, M_C, N_C) = -1$. Com que $\forall C \in \mathcal{C}$ compleixen $A, B \in C$, tenim que els punts M_C i N_C són conjugats respecte totes les còniques del feix \mathcal{P}_e . Per tant, si considerem les rectes polars per M_C respecte totes les còniques del feix, aquestes rectes seran un feix pel punt N_C . En particular, tenim que r_∞ és la polar d'alguna de les còniques, així doncs, tenim que el punt M_C és centre de tal cònica i per tant, està en el cercle \mathcal{C} .

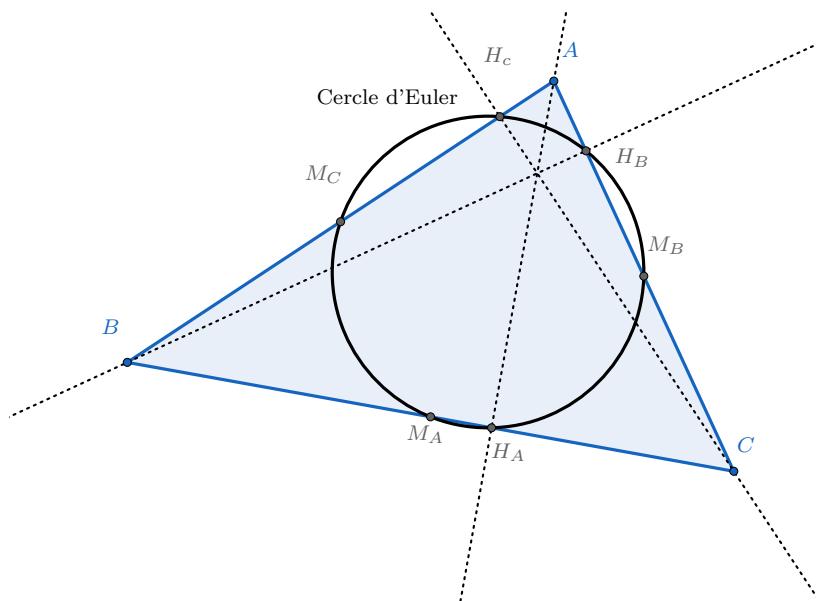
Anàlogament es veu que el cercle \mathcal{C} també passa pels punts mitjos dels costats BC i AC . \square

Proposició 5.15. *El cercle d'Euler passa pels peus de les altures del triangle.*

Demostració. Posem $H_C \in \mathbb{P}_2$ el punt d'intersecció del costat AB amb l'alçada per C i considerem la cònica C formada per les rectes $C \vee H_C$ i $A \vee B$. D'una banda tenim que C és una cònica que passa pels vèrtexs A, B i C del triangle, i a més a més, com les dues rectes són ortogonals, pertany al feix \mathcal{P}_e .

Com $C \in \mathcal{P}$ és degenerada i el punt H_C és un punt doble, així doncs, la proposició 5.12 ens diu que el cercle \mathcal{C} passa pels punts dobles de les còniques degenerades de \mathcal{P}_e , per tant, passa pel punt H_C .

Anàlogament es veu que el cercle també passa pels peus de les alçades H_B i H_A . \square



6 Cercles

6.1 El \mathbb{P}_3 dels cercles

S'ha vist en els apartats anteriors que els cercles són còniques de \mathbb{P}_2 que passen pels punts cíclics un cop fixada una referència ortonormal. Una forma de veure els cercles és identificant-los amb punts $C = [a : b : c : d]$ de l'espai projectiu \mathbb{P}_3 de manera que es correspongui amb l'equació:

$$a(x^2 + y^2) + 2bxz + 2cyz + dz^2 = 0$$

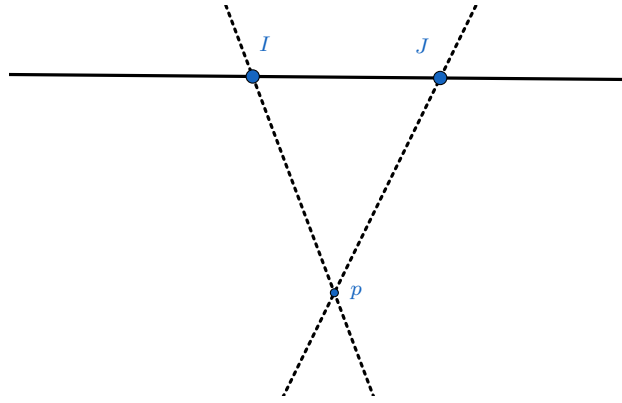
o, equivalentment, la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ b & c & d \end{pmatrix}.$$

Els cercles degenerats són, per tant, els que anul·len el determinant de M , és a dir, els que compleixen

$$\det(M) = a(ad - b^2 - c^2) = 0$$

El cas amb $a = 0$ correspon als cercles formats per dues rectes, una sent la recta de l'infinit r_∞ . El cas amb $ad - b^2 - c^2 = 0$ correspon al cercle degenerat format per dues rectes diferents, cadascuna passant per un punt cíclic, tal i com es mostra en la figura, aquests cercles s'anomenen **cercles nuls**, ja que estan centrats en el punt p d'intersecció de les dues rectes i tenen radi nul. Més endavant els veurem una mica més en detall.



Es defineix $q(C) := ad - b^2 - c^2$ com l'invariant bàsic, que associa a cada cercle C dues superfícies bàsiques de \mathbb{P}_3 , el pla polar i el con tangent.

6.2 El pla polar

En \mathbb{P}_3 , el pla polar d'un cercle $C = [a : b : c : d]$ respecte q vist com la quàdrica $q(C, C') = at + dx - 2by - 2cz$ amb $C' = [x : y : z : t]$ un punt genèric, és,

$$(a \ b \ c \ d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$at + dx - 2by - 2cz = 0$$

Proposició 6.1. *Dos cercles C i C' són ortogonals si són conjugats respecte q . És a dir $C' \in H_C$ i $q(C, C') = 0$*

Demostració. Dos cercles $C = [a : b : c : d]$ i $C' = [a' : b' : c' : d']$ són ortogonals si existeix un punt afí $p = (y, x, 1) \in \mathbb{P}_2$ tal que $p \in C$, $p \in C'$ i $r_p \cdot s_p = 0$ on r_p i s_p són les rectes tangents a C i C' respectivament que passen per p . De les dues primeres condicions es té:

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0 \quad (1)$$

$$a'(x^2 + y^2) + 2b'x + 2c'y + d' = 0 \quad (2)$$

D'altra banda, el vector director de la recta tangent a C en el punt p ve donat per la derivada de C en el punt, per tant,

$$r_p : (2ax + 2b, 2ay + 2c).$$

Anàlogament, la recta s_p té vector director

$$s_p : (2a'x + 2b', 2a'y + 2c').$$

Aquestes dues rectes seran ortogonals si el producte escalar dels vectors directores és nul, això dóna la condició

$$(2ax + 2b)(2a'x + 2b') + (2ay + 2c)(2a'y + 2c') = 0 \quad (3)$$

Multiplicant (1) i (2) per a' i a respectivament s'elimina la part quadràtica i s'arriba a l'expressió

$$2(a'b - ab')x + 2(a'c - ac')y + a'd - ad' = 0 \quad (4)$$

Desenvolupant l'equació (3) s'obté

$$aa'x^2 + ab'x + a'bx + bb' + aa'y^2 + ac'y + a'cy + cc' = 0$$

Restant-li l'equació (1) multiplicada per a tenim:

$$2(ab' - a'b)x + 2(ac' - a'c)y + 2(bb' + cc' - a'd) = 0 \quad (5)$$

Comparant les expressions (4) i (5) s'arriba a la relació

$$2bb' + 2cc' - 2a'd = a'd - ad'$$

D'altra banda, C i C' són conjugades respecte a q per tant,

$$(a \ b \ c \ d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} =$$

$$da' - 2bb' - 2cc' + ad' = 0$$

que és equivalent a l'expressió obtinguda.

□

6.3 El con tangent

El con tangent d'un cercle C és la varietat lineal $Q_C \subset \mathbb{P}_3$ corresponent a tots els cercles tangents a C . S'ha vist en l'exemple 3.7 que el con tangent de C està parametrizat per l'equació

$$Q_C : q(C)q(C') - q(C, C')^2 = 0.$$

Si C és no degenerada, aleshores Q_C és un con amb vèrtex C en \mathbb{P}_3 . Si C és degenerada ($q(C) = 0$), aleshores el con tangent és l'hiperplà de C respecte a q al quadrat.

Observació: El con tangent està en el feix de còniques $\mathcal{P} = \{\lambda q(C') + \mu H_p^2\}$ amb $\lambda = q(C)$ i $\mu = -1$.

Considerem ara dos cons tangents als cercles C_1 i C_2 :

$$Q_{C_1} : q(C_1)q(C) - q(C_1, C)^2 = 0$$

$$Q_{C_2} : q(C_2)q(C) - q(C_2, C)^2 = 0$$

Proposició 6.2. *La intersecció $Q_{C_1} \cap Q_{C_2}$ són dos còniques cadascuna en un dels plans*

$$\Pi_{C_1 C_2}^\pm : \sqrt{q(C_2)}q(C_1, C) \pm \sqrt{q(C_1)}q(C_2, C)$$

I els punts d'intersecció corresponen als cercles nuls (degenerats) $q(C) = 0$ associats als punts d'intersecció de C_1 i C_2 en \mathbb{P}_2 .

Demostració. Considerem el feix de quàdriques generat pels cons Q_{C_1} i Q_{C_2} ,

$$\lambda(q(C_1)q(C) - q(C_1, C)^2) + \mu(q(C_2)q(C) - q(C_2, C)^2) = 0$$

La quàdrica $q(C_2)Q_{C_1} - q(C_1)Q_{C_2}$ està en el feix, també es pot escriure com:

$$\begin{aligned} & q(C_2)Q_{C_1} - q(C_1)Q_{C_2} = \\ & = q(C_2)q(C_1)q(C) - q(C_2)q(C_1, C)^2 - q(C_1)q(C_2)q(C) + q(C_1)q(C_2, C)^2 = \\ & = q(C_2)q(C_1, C)^2 - q(C_1)q(C_2, C)^2 \end{aligned}$$

que és la multiplicació dels plans $\Pi_{C_1 C_2}^\pm$.

D'altra banda, veiem que els punts de $Q_{C_1} \cap Q_{C_2}$ són cercles degenerats associats als punts d'intersecció de C_1 i C_2 . Sigui C un cercle degenerat associat a C_1 i C_2 , aleshores

$$q(C_1)q(C) - q(C_1, C)^2 = q(C_2)q(C) - q(C_2, C)^2$$

com $q(C) = 0$, tenim que $q(C_1, C) = q(C_2, C) = 0$ per tant, C està en els dos plans $\Pi_{C_1 C_2}^\pm$.
□

Lema 6.3. *Sigui $C \in \mathbb{P}_2$ una cònica, els punts de $H_C \cap q \subset \mathbb{P}_3$, on H_C és el pla polar de C vist com a punt de \mathbb{P}_3 , són **cercles nuls**, és a dir, cercles centrats en un punt $p \in C$ i de radi zero.*

Demostració. Considerem $C \in \mathbb{P}_2$ un cercle no degenerat, posant la referència adequada podem suposar que té equació $x^2 + y^2 = 1$, per tant, com a punt de \mathbb{P}_3 té coordenades $C = [1 : 0 : 0 : -1]$. El pla polar H_C de C respecte q és

$$(1 \ 0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -x + t = 0$$

Per tant, els punts de $H_C \cap q$ compleixen

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$-x + t = 0$$

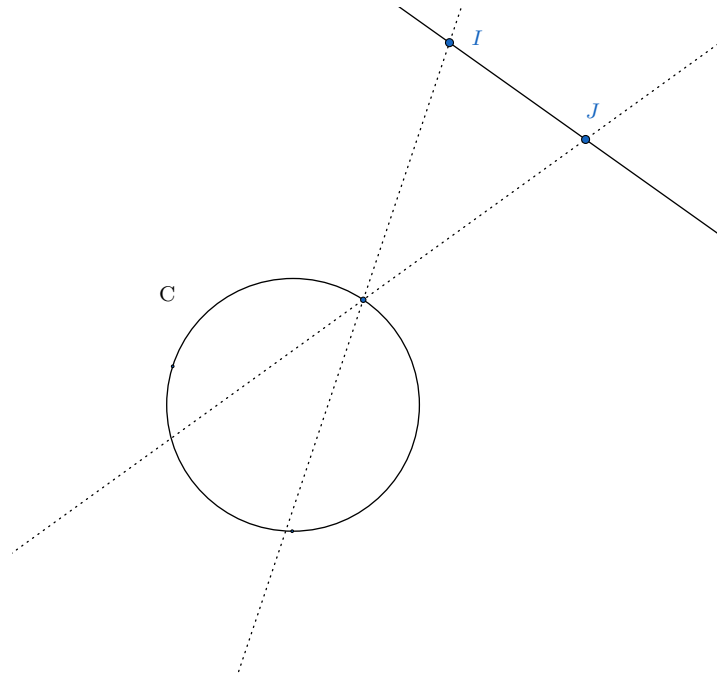
Combinant ambdues equacions s'obté $(\frac{y}{x})^2 + (\frac{z}{x})^2 = 1$ per tant, $y = x \cos \alpha$, $z = x \sin \alpha$, $t = x$. Mirant-los com a còniques de \mathbb{P}_2 són

$$x^2 + y^2 + 2 \cos \alpha x + 2 \sin \alpha y + 1 = 0$$

Utilitzant la igualtat $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, la equació anterior es pot reescriure com

$$(x + \cos \alpha)^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 0,$$

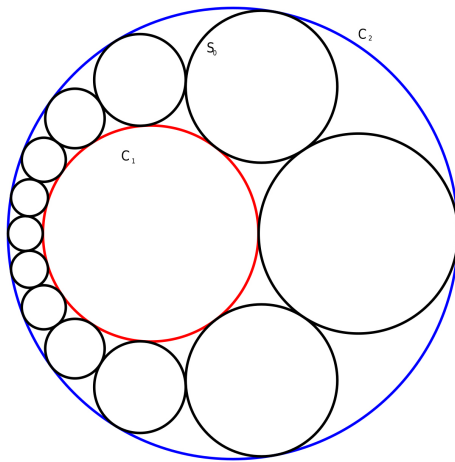
que és l'equació d'un cercle de centre $[-\cos\alpha : -\sin\alpha : 1]$ i radi nul.



□

6.4 Porisma d'Steiner

Ja tenim totes les eines per entendre el porisma d'Steiner, teorema que culminarà aquest projecte i anem a veure a continuació. Abans però, cal esmentar que un porisma és una proposició que, o bé es compleix sempre sota algunes condicions determinades, o bé no es compleix mai si les “hipòtesis inicials” no són adequades.



Teorema 6.4. (*Porisma d'Steiner*). *Siguin $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2$ dos cercles no degenerats en posició genèrica, sigui F una de les famílies de cercles tangents a C_1 i C_2 . Aleshores, si existeix una seqüència de cercles diferents $S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1} = S_0$ de F de manera que el cercle S_i és tangent al cercle S_{i+1} per $1 \geq i \leq n$ existeix una seqüència tancada per a qualsevol cercle S_0 de F .*

A la pàgina anterior es pot trobar una il·lustració d'una cadena d'Steiner.

Abans de seguir amb la prova del porisma d'Steiner, anem a veure què diu el porisma de Poncelet, no el demostrarem en aquest treball, però veurem com el porisma d'Steiner s'acaba reduint a un cas particular del porisma de Poncelet.

Teorema 6.5. (*Porisma de Poncelet*) *Siguin C i C' dues còniques de \mathbb{P}_2 en posició general, si existeix un polígon de $n > 2$ costats de manera que estigui simultàniament inscrit a C (és a dir, que tots els seus vèrtexs es trobin sobre C) i circumscrit a C' (tots els seus costats són tangents a C'), aleshores hi ha infinits polígons que compleixen les dues condicions.*

Comentaris:

1. El porisma de Poncelet està molt relacionat al d'Steiner, enlloc de començar amb un cercle, ho fa amb una recta tangent a la cònica C' , a partir del punt de tall d'aquesta primera recta amb la cònica C , es traça una altra recta també tangent a C' i així es va construint una cadena de rectes complint que: totes són tangents a C' i les interseccions entre dues rectes consecutives estan sobre C . Aleshores, el que diu el porisma de Poncelet és que, si aquesta cadena tanca per una recta inicial, aleshores tancarà sempre, sigui quina sigui la recta per on es comença.

2. En la prova del porisma d'Steiner, trobarem que les dues còniques C i C' són bitangents (tangents en dos punts). Així doncs, el porisma d'Steiner s'acaba reduint a un cas degenerat del porisma de Poncelet.

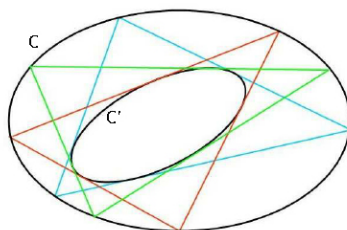


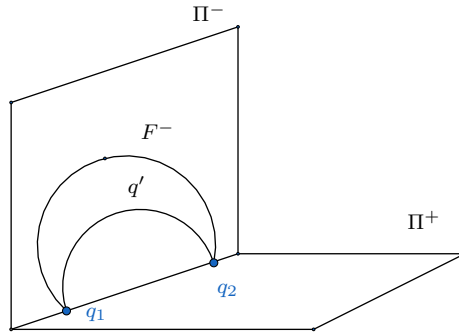
Figura: Exemple de porisma de Poncelet. En aquest cas, amb triangles.

Demostració. (porisma d'Steiner). Sigui C_1 i C_2 dos cercles no degenerats de \mathbb{P}_2 i posem $H_i \subset \mathbb{P}_3$ l'hiperplà polar de C_i respecte de $q(x)$. S'ha vist que els cons tangents de C_1 i C_2 s'escriuen $H_i q(C_i) q(x) = 0$ on $q(C_i) \neq 0$ ja que no són degenerats. La intersecció dels dos cons tangents està en els plans

$$\Pi^\pm : H_2 \pm \sqrt{\rho} H_1 = 0$$

on $\rho = \frac{q(C_2)}{q(C_1)}$ és una constant. En cadascun d'aquests plans es té una cònica F^\pm , que coincideixen en dos punts $q_1, q_2 \in l$ on $l : \Pi^+ \cap \Pi^- = H_1 = H_2 = 0$. Aquests dos punts corresponen als cercles nuls dels dos punts d'intersecció de $C_1 \cap C_2$ llevat dels dos punts cíclics. Els punts de F^- corresponen als cercles de \mathbb{P}_2 tangents a C_1 i C_2 que no contenen cap dels dos, i els cercles de F^+ són els que corresponen als cercles que contenen o bé C_1 o bé C_2 i estan continguts en l'altre. Escollim una de les dues famílies, F^- per exemple, i prenem $S_0 \in F^-$ qualsevol llevat dels cercles nuls. Considerem el con tangent a S_0 , Q_{S_0} . Aleshores, $q'(x) = q(x) \cap \Pi^-$ és una cònica en Π^- que també passa pels cercles nuls q_1 i

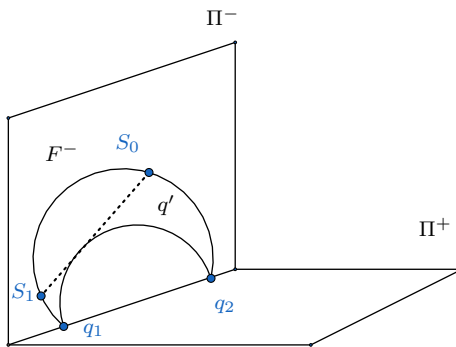
q_2 . En aquestes condicions, estem sota les hipòtesis de la versió degenerada del Teorema de Poncelet, ja que les còniques F^- i q' són bitangents.



Fixem una referència en Π^- de manera que els dos primers vèrtexs són els cercles nuls q_1 i q_2 i el tercer vèrtex és conjugat de q_1 i q_2 alhora, el punt unitat A es pren sobre F^- , $A \neq q_1, q_2$. En aquesta referència, les matrius de F^- i q' són

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Un punt $S_0 \in F^-$ té coordenades $S_0 = [1 : \alpha^2 : -\alpha]$. Busquem un cercle $S_1 = [1 : \beta^2 : -\beta]$ tangent a C_1, C_2 i S_0 alhora, per fer-ho, considerem la recta $S_0 \vee S_1$ i imposem que sigui tangent a la cònica q' .



La recta $S_0 \vee S_1$ té equació $\alpha\beta x + y - (\alpha + \beta)z = 0$. Imposar que la recta sigui tangent a q' és equivalent a imposar que el punt del dual $[\alpha\beta : 1 : -\alpha - \beta]$ estigui en la cònica q'^{-1} , que té matriu

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així s'obté la relació

$$2\lambda\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 0$$

$$\beta = \frac{-(2+2\lambda)\alpha \pm \sqrt{(2+2\lambda)^2\alpha^2 - 4\alpha^2}}{2}$$

$$\beta = \alpha(-1 - \lambda \pm \sqrt{1+2\lambda})$$

Si diem $K = K^\pm = (-1 - \lambda \pm \sqrt{1+2\lambda})$, tenim $\beta = K^\pm\alpha$ on K^\pm és una constant que no depèn ni de α ni de β , per tant, s'ha trobat una bijecció

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \alpha &\longrightarrow K\alpha\end{aligned}$$

Aquesta aplicació dona recurrentment les coordenades del cercle $S_i = [1 : (K^i\alpha)^2 : -K^i\alpha]$ tangent a C_1, C_2 i S_{i-1} , per tant, la seqüència tancarà si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $K^n = 1$. Com K no depèn de α o β , no depèn del cercle inicial.

□

7 Conclusions

Fent servir geometria projectiva i geometria projectiva mètrica, en aquesta memòria s'han estudiat d'una banda teoremes clàssics sobre feixos de còniques com el teorema de Desargues o el cercle d'Euler, i de l'altra, el porisma d'Steiner, un resultat que està lligat a la geometria algebraica però que en aquest treball s'ha vist des d'un punt de vista projectiu, passant així per un cas particular del porisma de Poncelet.

La major part de la geometria vista en la memòria és molt visual, això fa que sigui atractiu a l'hora d'enfrontar-te a alguns resultats, sobretot els més clàssics, ja que permet visualitzar fàcilment el què s'està fent amb l'ajuda de figures i de l'applet de GeoGebra, que ha estat molt útil al llarg de l'estudi i la redacció d'aquesta memòria.

La base d'aquest treball són coneixements adquirits en les assignatures de Geometria Projectiva i, en menor grau, Geometria Lineal, cursades en el grau de Matemàtiques, ambdues assignatures em cridaven molt l'atenció. El llibre del doctor Eduardo Casas-Alvero, professor de la universitat, sobre Geometria projectiva analítica m'ha servit per aprofundir i entendre conceptes fonamentals per al plantejament d'aquesta memòria. En general, la realització d'aquest treball m'ha permès endinsar-me més en l'àmbit de la Geometria, tant amb els teoremes clàssics, que tot i no tenir gaires aplicacions més enllà de les acadèmiques, m'han semblat molt interessants. I de l'altra, tot el plantejament i desenvolupament fet per arribar a demostrar el porisma d'Steiner sense utilitzar arguments algebraics. A més a més, també he après a escriure en LaTeX, era una cosa que em feia bastant de respecte abans de començar però ara em sento molt satisfeta d'haver aconseguit.

Referències

- [1] Casas, E.: *Analytic Projective Geometry* The Swiss National Library, 2014.
- [2] W. Barth and T. Bauer, "Poncelet theorems," *Expositiones Mathematicae*, vol. 14, no. 2, pp. 125-144, 1996,
[arXiv:alg-geom/9502017v1](https://arxiv.org/abs/alg-geom/9502017v1)
- [3] Weisstein, Eric W. "Nine-Point Circle." From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html>