

Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla?

Carles Granell

Col·legi Sant Lluís, Nou Barris, Barcelona

Berta Barquero

Universitat de Barcelona

Resum

Aquest treball parteix de la problemàtica docent de com s'ha d'ensenyar el bloc d'atzar i estadística a l'escola primària, i situa el seu ensenyament en un paradigma escolar que integra experimentació i indagació i en què les eines i els coneixements estadístics apareixen davant la necessitat de donar resposta a certes qüestions amb sentit per al nivell escolar en el qual ens situem. En aquest treball presentem la proposta d'un recorregut d'estudi i investigació (REI) sobre l'atzar i la inferència estadística per a primària. Mostrarem els orígens d'aquesta activitat en els marcs de recerca dels treballs de la teoria de situacions didàctiques (Brousseau, 1997), posteriorment adaptada per la teoria antropològica del didàctic amb la proposta dels REI (Chevallard, 2006 i 2015). Descriurem primerament el disseny elaborat pel mestre responsable de l'experimentació, conjuntament amb l'equip d'investigadores, i ens centrarem posteriorment a descriure l'experiència desenvolupada amb estudiants de quart curs d'educació primària del Col·legi Sant Lluís, de Nou Barris (Barcelona).

Abstract

This work is based on the problem of how to teach randomness and statistics in primary school, and considers an educational paradigm that integrates experimentation and inquiry and in which statistics tools and knowledge are introduced as required to answer specific questions appropriate to the corresponding school level. The paper presents a proposal for a systematic review on random and statistical inference in primary education. The origins of this activity are shown within the frameworks of research on didactic theory (Brousseau, 1997), later adapted by the anthropological theory of didactics in other systematic review proposals (Chevallard, 2006 and 2015). Here, firstly, is a presentation of the design developed by the teacher responsible for the experiment in conjunction with the research team, and then a description of the experience as it played out with fourth-year primary students of the Sant Lluís School, Nou Barris (Barcelona).

1. Introducció

En les últimes dècades, la comunitat docent i la investigadora han coincidit en la necessitat que l'ensenyament no sols se centri en la transmissió formal de coneixement, sinó que permeti que els estudiants explorin i aportin solucions pròpies a qüestions problemàtiques de diferents àmbits. Tanmateix, la superació d'aquest paradigma pedagògic tan arrelat no sembla una tasca senzilla, com mostren els molts anys i esforços dedicats a la innovació docent en el nostre país i arreu del món.

Dins l'àmbit de la teoria antropològica del didàctic (TAD), ho formulem com un canvi en el paradigma pedagògic i escolar que ens ha de permetre passar d'un «monumentalisme» centrat a presentar als alumnes un conjunt de continguts aïllats i poc funcionals, a un paradigma basat en el «qüestionament del món» (Chevallard 2015). En relació amb l'ensenyament de les matemàtiques i les ciències experimentals, s'han detectat nombroses dificultats a implementar de manera sostenible aquestes noves formes d'ensenyament (Artigue i Blomhøj 2013; Bosch i Winsløw 2016). De fet, qualsevol proposta ha de sobreviure a un conjunt molt rigid de restriccions, encara poc conegudes, que van més enllà de l'àmbit propi d'actuació del professorat i de l'escola i que costen molt d'evidenciar.

Per tal d'inscriure l'ensenyament de les matemàtiques (com d'altres disciplines) dins el paradigma del qüestionament del món, en el marc de la TAD apareix la proposta dels anomenats recorreguts d'estudi i investigació (REI) com a proposta didàctica per anar superant moltes de les restriccions que el monumentalisme imposa i anar avançant cap al paradigma del qüestionament del món (Chevallard 2006).

Diverses investigacions prèvies mostren l'èxit de d'algunes experiències amb REI dissenyats i experimentats en diferents nivells educatius (infantil, primària, secundària i universitat) i que adopten diferents formats d'experimentació. Cal destacar, entre d'altres, els treballs de Ruiz-Higueras (2008) i Ruiz-Higueras i García (2011), amb propostes didàctiques per a l'ensenyament de la modelització en l'àmbit de la numeració a infantil i primària. Per a secundària trobem els treballs de García (2015), amb la proposta d'un REI sobre els plans d'estalvi que ve a reformular les relacions de proporcionalitat dins d'una de les possibles relacions funcionals que serveixen per modelar els plans d'estalvi, i de Rodríguez, Bosch i Gascón (2007), amb un estudi de diferents tarifes telefòniques creant diversos models d'ajust per poder fer previsions. En l'àmbit universitari, en el qual s'han desenvolupat més propostes de REI, trobem, per exemple, Barquero, Bosch i Gascón (2011), amb la proposta d'un REI sobre la dinàmica de poblacions que va permetre cobrir un curs anual de matemàtiques per als estudis universitaris de matemàtiques en l'àrea de Ciències Experimentals (p. ex. Biologia, Geologia o Ciències Ambientals).

En termes generals, les propostes dels REI (Chevallard 2006 i 2015, i Winsløw, Matheron i Mercier 2013) es caracteritzen per:

1. El punt de partida d'un REI és una qüestió inicial Q_0 , que anomenarem qüestió generatriu i a partir de la qual es genera tot el procés d'estudi. L'estudi d'aquesta qüestió generatriu ha de poder generar moltes qüestions derivades que guiaran l'evolució de l'estudi.
2. L'objectiu primordial d'un REI és que la comunitat encarregada de l'estudi de Q_0 elabori respostes a les qüestions que se'n vagin derivant i una resposta final.

3. Com a conseqüència d'aquesta dialèctica entre les qüestions i les respostes, els REI presenten una *estructura arborescent i dinàmica* de qüestions i respostes que delimiten les possibles trajectòries d'estudi que cal seguir.
4. El desenvolupament d'un REI provoca que diferents tipus de coneixements (en particular, matemàtics) es desenvolupin i connectin per poder donar resposta a les qüestions que s'aborden, promovent un ús funcional d'aquests coneixements disciplinaris.
5. Atesa la importància de la construcció col·lectiva de les respostes, cal introduir canvis diversos en els rols i les responsabilitats d'estudiants i mestres.

L'objectiu del nostre treball és descriure el disseny i l'experimentació amb un REI sobre l'atzar i la inferència estadística per a l'escola primària. En particular, ens centrarem en l'experiència desenvolupada amb estudiants de quart curs d'educació primària del Col·legi Sant Lluís, de Nou Barris, Barcelona. El disseny d'aquesta proposta el va fer el mestre que va dur a terme la seva experimentació posterior, primer autor d'aquest treball, i dues investigadores de didàctica de la matemàtica, entre elles la segona autora d'aquest treball. En la secció següent introduïrem les característiques principals del disseny del REI, que anomenarem «Què s'amaga dins l'ampolla?». Ens centrarem, a continuació, a explicar com es va desenvolupar l'activitat a l'aula amb els estudiants de quart de primària. Per acabar, mostrarem les principals conclusions a què hem arribat a partir de l'anàlisi d'aquesta experimentació, que ens portarà a plantejar certes qüestions que caldrà discutir en un futur sobre la transferibilitat i viabilitat d'aquests dissenys com a dispositiu per posar en contacte els resultats de la recerca i la pràctica docent innovadora a les aules.

2. Proposta d'un recorregut d'estudi i investigació sobre atzar i estadística

La proposta que aquí presentem es pot emmarcar en el bloc d'atzar i estadística, un dels blocs principals de continguts del currículum de primària. Dins d'aquest, l'ensenyament s'acaba centrant, moltes vegades, a introduir els estudiants en què vol dir l'atzar i a practicar les tècniques de representació de dades (gràfics de barres i de sectors, pictogrames, histogrames, entre d'altres) i amb el càlcul dels estadístics numèrics més comuns (mitjana, mediana, moda, etc.). I tot plegat, treballant, la majoria de vegades, amb conjunts de dades reduïdes per no dificultar les tècniques de comptatge, càlcul i representació. Però quin és l'ús i quina és la funció que podem donar a aquestes eines i a aquests coneixements de l'atzar i l'estadística? En quines situacions i davant de quines qüestions pot aparèixer la necessitat d'ensenyar i aprendre aquests coneixements?

Tot i la innegable rellevància d'aquest bloc, cal també destacar les dificultats que existeixen escolarment (i socialment) per construir un medi experimental per referir-se a l'atzar i a la variabilitat estadística. En el nostre dia a dia, les observacions de fenòmens aleatoris són sempre molt limitades. D'aquí parteix l'objectiu principal de la nostra proposta didàctica, que és oferir la possibilitat de *familiaritzar-se amb l'atzar i les lleis de l'atzar a partir de les simulacions experimentals per estudiar-ne la variabilitat estadística*. Aquest fet ens portarà a aprofundir en l'ús, la funció i la rellevància de moltes de les eines estadístiques (càlcul de freqüències, representacions gràfiques, càlculs estadístics, estimacions de les probabilitats, etc.) com a eines per estudiar la variabilitat estadística i per avançar en la presa de decisions.

L'activitat original en la qual es fonamenta i de la qual parteix el disseny del REI «Què s'amaga dins l'ampolla?», prové dels treballs d'enginyeria didàctica realitzats entre els anys setanta i vuitanta del segle xx per l'investigador francès Guy Brousseau i el seu equip de Bordeus en el marc de la teoria de situacions didàctiques (Brousseau, 1997). En el treball de Brousseau, Brousseau i Warfield (2002) es descriu extensament l'activitat original que es va dissenyar i es va experimentar en diverses ocasions en un total de sis etapes en les quals es desenvolupaven vint-i-sis sessions d'aula per a alumnes de cinquè de primària. La nostra recerca presenta una adaptació del punt de partida d'aquesta activitat al context concret del Col·legi Sant Lluís, de Nou Barris, Barcelona. L'experimentació es va dur terme amb un grup de vint-i-cinc nens i nenes de quart de primària i va tenir una durada de tres sessions d'aproximadament dues hores. El REI que descrivim a continuació representa una introducció a la que podria ser una seqüència molt més llarga que, com mostren Brousseau *et al.* (2002), permetria introduir i posar en ús eines estadístiques i probabilístiques molt més avançades.

2.1. La qüestió generadora del REI i delimitació de les diferents situacions

El REI «Què s'amaga dins l'ampolla?» parteix d'una situació en què es presenten unes ampolles opaques dins les quals s'amaguen peces de diferents colors. Aquestes ampolles tenen un orifici a través del qual es pot veure el color de les peces quan aquestes se situen al coll de l'ampolla. La informació que sempre es dona als estudiants és el nombre de peces que s'amaguen a l'interior de l'ampolla i, opcionalment, pistes sobre el nombre màxim de colors diferents o les possibilitats de colors que hi ha. És totalment necessari aclarir de bon principi que aquestes ampolles no es poden obrir mai, és a dir, que sota cap circumstància no es pot tenir accés al contingut interior de l'ampolla. La qüestió generadora, punt de partida del REI, es formula en els termes següents:

Q_0 : Quantes peces de cada color creieu que s'amaguen dins l'ampolla? Quines hipòtesis podem donar sobre el contingut ocult de l'ampolla? Quin grau de «seguretat» tenen aquestes hipòtesis?

Després de preguntar als estudiants què farien per donar resposta a aquestes qüestions, cal aclarir que l'experiment consisteix a sacsejar bé l'ampolla i girar-la al revés fins que una de les peces se situï al coll de l'ampolla, moment en el qual es pot mirar i registrar el color d'una de les peces. Es repetirà successivament l'acció tantes vegades com es consideri necessari.

A partir d'aquesta contextualització inicial, el REI s'estructura en tres situacions complementàries però de complexitat creixent, segons el valor que es doni a les diferents variables didàctiques (nombre de peces, tipologia de les peces, colors, grandària de la mostra recollida, etc.) i les qüestions que es plantegin. L'objectiu del conjunt de situacions és anar construint progressivament i col·lectivament una experiència empírica sobre l'atzar i els fenòmens aleatoris, a través de la qual els estudiants compreguin que allò important no és encertar la distribució *exacta* de peces que hi ha amagades, sinó tenir mitjans suficients per estar convençuts i poder justificar que les hipòtesis formulades són *coherents* amb l'experimentació realitzada. Presentem a continuació un breu resum d'aquestes situacions, que es desenvoluparan amb detall en la secció següent.

En la **primera situació** es dona la mateixa ampolla a tots els grups d'estudiants i s'hi amaga el mateix nombre de boles (cinc en l'experimentació que aquí ens ocupa) dels mateixos colors (dos en el cas de l'experimentació: groc i verd). Se'ls demana que formulin hipòtesis sobre quantes pilotes de cada color es poden trobar amagades dins d'una ampolla i expliquin quines eines els han ajudat a formular aquestes hipòtesis. Se'ls dona llibertat per decidir sobre la mida de la mostra que consideren necessària recollir i per elegir les eines de recollida i tabulació de les dades.

En la **segona situació** es demana que cada grup dissenyi una composició diferent de peces dins de l'ampolla (*grup dissenyador*), dins la qual ha d'amagar diferents distribucions de pilotes de diferents colors, i que intercanviï aquest nou cas amb un altre grup (*grup receptor*). A més a més, es demana que el grup dissenyador formuli una sèrie de qüestions que el grup receptor haurà de respondre. En aquesta situació, els grups s'organitzen de dos en dos (dissenyador-receptor), així cadascun haurà de dissenyar un cas d'ampolla i un llistat de qüestions, i haurà de rebre i donar resposta a la proposta realitzada per un altre grup.

Amb la **tercera situació** es presenta, de fet, la situació central d'aquesta activitat, per a la qual, però, és necessari construir tot el medi experimental que permeten les situacions 1 i 2. En aquesta situació es presenta l'encàrrec per al projecte Cosmos de l'escola, un projecte de vida social que es desenvolupa a l'escola des de l'inici del curs i que té per objectiu el desenvolupament de l'autonomia, la iniciativa, la responsabilitat i la participació de l'alumnat. El resultat de la consecució d'accions relacionades amb aquests aspectes es tradueix en l'acumulació de punts en forma de Hama Beads per a les diferents constel·lacions, tal com mostren les imatges de la figura 1. Cada setmana, tant a les sessions de tutoria com als Consells de Cosmos, les nenes i els nens de l'escola valoren aquests aspectes i es fa el recompte de punts acumulats en aquest període segons uns criteris acordats pel claustre i l'alumnat.



Figura 1. El projecte Cosmos del Col·legi Sant Lluís, curs 2017-2018.

Les qüestions plantejades en aquesta tercera situació se centren a investigar quina marca distribuïdora de Hama Beads, d'entre tres possibles, és millor per fer-li un encàrrec especial

per al projecte Cosmos de l'escola. El director de l'escola ens demana que l'ajudem a decidir a quina de les tres marques és més convenient fer-li l'encàrrec de moltes peces de tres colors diferents de Hama Beads. Cada empresa productora de Hama Beads ens envia una ampolla amb un nombre reduït de peces a partir de la qual podrem simular el seu procés de fabricació de les peces.

3. Anàlisi de l'experimentació del REI

Desenvolupem aquí els detalls de l'experimentació realitzada durant el curs 2017-2018 durant tres sessions, una corresponent a cadascuna de les situacions acabades de descriure. Per a cadascuna d'aquestes situacions, donarem detalls sobre la durada (sessions i temps), el material i els recursos utilitzats, els rols i les responsabilitats dels grups de treball, i farem una descripció i una primera anàlisi del que va ocórrer durant l'experimentació.

Cal comentar alguns aspectes comuns a totes les situacions, que poden ser entesos com a objectius comuns de la proposta. El primer objectiu, de tipus més disciplinari, és aconseguir que els estudiants es familiaritzin amb les lleis de l'atzar a través de l'experimentació d'un fenomen aleatori i que puguin començar a matematitzar-les emprant diverses eines i estratègies per a la recollida de dades i la seva anàlisi. El segon objectiu, sobre la gestió de l'aula, és fomentar el treball grupal col·laboratiu, per a la qual cosa es demana als estudiants que assumeixin diferents rols i responsabilitats en la formulació de preguntes, l'elaboració de respostes i, en particular, la formulació d'hipòtesis sobre el contingut que s'amaga dins les ampolles. El tercer objectiu, centrant-nos en el treball individual-col·lectiu, busca desenvolupar competències verbals, comunicatives i analítiques per a formular, discutir, redactar i exposar les diferents respostes. Es presta una atenció especial a com s'ha de facilitar el debat, la comparació i la reformulació d'hipòtesis a partir del treball en petit grup i en gran grup.

3.1. Primera situació: què s'amaga dins la primera ampolla?

Durada: 1 sessió d'1 h 30 min

Material i recursos: una ampolla per grup amb cinc boles de dos colors diferents, groc i verd; un informe individual, «Abans pensava |Ara penso», en el qual els estudiants anoten les seves hipòtesis inicials i finals sobre la distribució de pilotes de cada color; un *mural conjunt*, en el qual cada grup indica quina és la seva hipòtesi i les freqüències absolutes d'aparició de cada color, groc i verd.

Rols i responsabilitats dels grups de treball: es forma un total de sis grups de treball heterogenis: cinc grups de quatre i un grup de cinc. En cada grup, els estudiants s'assignen un dels rols possibles: (a) el responsable-ampolla, qui mescla el contingut de l'ampolla i mostra el color de pilota que ha sortit en cada tirada; (b) l'enregistrador, qui fa el registre de totes les tirades; (c) l'informador, qui sintetitza en un informe grupal les seves respostes i conclusions després de l'experimentació, i (d) el portaveu, qui exposa els resultats en el grup classe.

Desenvolupament de la situació: el mestre fa una introducció de la primera situació i presenta la primera ampolla amb la qual es treballa. A continuació es realitzen conjuntament deu registres i el mestre demana als estudiants que individualment anotin i justifiquin quina és

la seva primera hipòtesi sobre la distribució de pilotes de cada color que s'amaga a l'interior de l'ampolla, basant-se en les primeres dades recollides. A continuació es dona a cada grup de treball una ampolla amb la mateixa composició que la inicial i comencen la recollida de dades. S'observa com els grups opten per diferents tècniques de recollida de dades (vegeu la figura 2), des de les més organitzades fins a les que ho són menys, fet que comporta alguns errors en el recompte de les dades que després discutiran. També, els grups opten per recollir diferents mides mostrals, des del voltant de quaranta dades fins a cent cinquanta. En la posada en comú totes aquestes qüestions apareixen formulades pels mateixos estudiants:

Q_{1.1}: Quantes extraccions són necessàries per respondre a les qüestions plantejades? Hi ha formes més segures o eficients de recollir les dades? És millor analitzar totes les dades recollides o cada sèrie d'extraccions? Variarien les nostres conclusions?

Es destina la part final del treball en grup a preparar un resum de les respostes i a ajudar l'informador i portaveu a preparar la posada en comú de tota la classe.

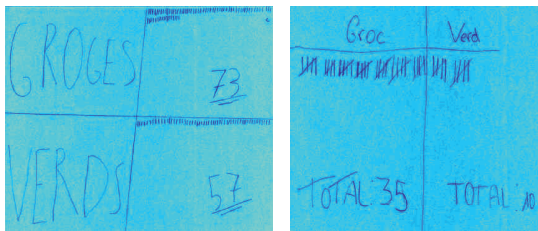


Figura 2. Exemples de tècniques de recollida de dades emprades pels grups.

Finalitzat el treball en grup, el mestre guia la posada en comú i demana que cada parella portaveu-informador exposi les seves respostes. A mesura que cada grup ho explica, se'ls demana que anotin en el mural comú les seves hipòtesis sobre quantes pilotes de cada color hi ha dins l'ampolla (vegeu la figura 3), així com la freqüència d'aparició de cada color.



Figura 3. Mural amb les hipòtesis fetes per tots els grups.

En la discussió es veu clarament que l'eina principal que els estudiants utilitzen per justificar la seva hipòtesi és la diferència entre freqüències absolutes de cada color (verd i groc). L'anàlisi de la proporció entre aquestes freqüències no apareix en cap cas. En alguns grups apareixen justificacions d'altra naturalesa, com ara, segons explica el grup C: «Tot i que han sortit més pilotes grogues, creiem que n'hi ha tres de verdes i dues de grogues, perquè les verdes pesen més i es queden al fons». Després que hagin participat tots els grups, sorgeixen qüestions molt importants sobre com es pot distingir l'opinió personal de les hipòtesis «coherent» o de les hipòtesis «certes», que el mestre aprofita per formular explícitament:

Q1.2: Què vol dir formular una hipòtesi «coherent»? Podem estar més «segurs» de les nostres hipòtesis si realitzem més extraccions? Com podem justificar la «validesa» de les hipòtesis que formulem? Què podem fer per a millorar les hipòtesis que formulem?

Per iniciar el tancament, el mestre confirma que totes les ampolles amb les quals han estat treballant tenen el mateix contingut i els planteja si, coneixent les dades recollides pels diferents grups sobre els colors de les pilotes, modificarien o no les seves hipòtesis sobre la composició d'aquesta primera ampolla. Per tancar la sessió, el mestre demana que individualment els estudiants reprenguin l'informe «Abans pensava | Ara penso» per completar la hipòtesi final que donarien sobre el contingut de la primera ampolla. En molts casos, els estudiants reformulen les seves hipòtesis i mostren ja eines més concretes per a l'anàlisi del treball experimental. Per exemple, la figura 4 (vegeu-ne la transcripció a continuació) mostra aquesta reformulació i la justificació que l'acompanya:

Abans pensava: «Jo penso que n'hi ha quatre de grogues i una de verda perquè sempre surten pilotes grogues i cap de verda».

Ara penso: «Ara penso que n'hi ha quatre de grogues i una de verda perquè en el meu grup n'han sortit quaranta-vuit de grogues i vint de verdes i és molta diferència».

QUÈ S'AMAGA DINS L'AMPOLLA?

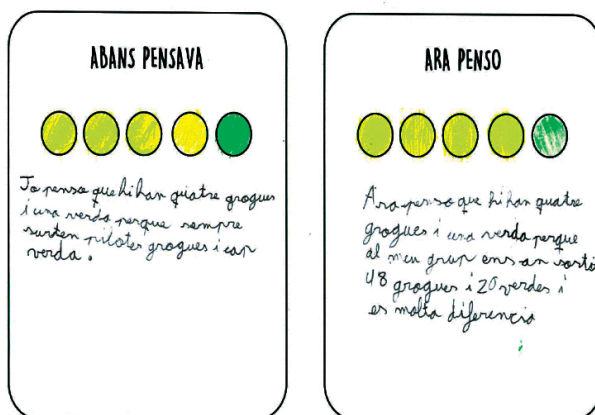


Figura 4. Formulació individual d'hipòtesis («Abans pensava | Ara penso»).

Un cop finalitzada aquesta primera situació, el mestre es reuneix amb l'equip d'investigadores per analitzar què cal retocar del disseny de la segona situació. Estem d'acord que, en les

properes sessions, cal donar molta importància a com avancem en la formulació d'hipòtesis i moure'ns de les opinions personals cap a la formulació d'hipòtesis coherents basades en l'anàlisi de les dades experimentals recollides. Per això es decideix introduir la que anomenarem línia de confiança, perquè els estudiants puguin situar el grau de certesa o seguretat amb el qual formulen les seves hipòtesis. Quedarà també pendent retornar a qüestions, una mica més avançades, que han sorgit en finalitzar aquesta primera situació, com ara:

Q_{1,3}: Són possibles les dades enregistrades per tots els grups (veure grups C o E)? Era força probable haver registrat un nombre molt similar de boles grogues i verdes (veure grup E)?

Aquestes qüestions, però, no es van reprendre en la present experimentació, ja que requereixen eines molt més avançades, però no es descarta plantejar-les en cursos posteriors o, fins i tot, reobrir-les amb aquesta mateixa classe en els propers anys.

3.2. Segona situació: dissenyem les nostres pròpies ampolles

Durada: 1 sessió d'1 h 30 min

Material i recursos: ampolles buides, per al disseny d'un nou cas d'ampolla amb cinc pilotes de dos colors diferents; pilotes de diferents colors: groc, verd, blau i magenta; una *targeta d'interacció* perquè cada grup pugui transcriure les qüestions que formula a l'equip receptor.

Rols i responsabilitats dels grups de treball: de la mateixa manera que en la situació 1, els estudiants s'assignen un dels rols possibles, i se'ls demana que ara n'escullin un dels que no hagin assumit amb anterioritat: (a) el responsable-ampolla, (b) l'enregistrador, (c) l'informador i (d) el portaveu.

Desenvolupament de la situació: el mestre comença recordant algunes de les qüestions plantejades al final de la primera situació, principalment sobre la necessitat de distingir entre les *opinions* (crec que..., opino que...), les *hipòtesis coherents* (si observem/analitzem les dades recollides, ens indiquen que...) i la *certesa* o seguretat (segur que...). El mestre comença preguntant als estudiants si en la primera situació podien estar segurs d'alguna cosa; els estudiants responen que podien estar segurs de poques coses, però d'alguna sí; per exemple, que «hi havia pilotes», que «hi havia pilotes grogues i verdes». El mestre els proposa que en aquesta nova situació utilitzin la *línia de confiança* (vegeu la figura 5) i els demana que, a partir d'ara, quan formulin una hipòtesi han de situar-se en aquesta línia i indicar el grau de seguretat que tenen (des de considerar que la hipòtesi que donen és impossible fins a considerar-la totalment segura). Aquesta eina pretén ajudar els estudiants a distanciar-se de les opinions personals i a avançar en la necessitat de crear eines per defensar i justificar les hipòtesis que formulen i la seva coherència. Abans de començar el treball en petit grup, el mestre mostra un recull de les diferents estratègies o tècniques principals de recollida de dades i de construcció de taules de freqüències que els diferents grups de treball han utilitzat en l'estudi de la primera situació (veure les figures 2 i 3). L'objectiu és valorar l'eficàcia de les diferents tècniques i trobar un acord en les eines i les estratègies compartides abans d'iniciar la segona situació.

El mestre passa aleshores a explicar que la segona situació consisteix que cada grup de treball dissenyi la seva pròpia composició de pilotes de colors per amagar dins de l'ampolla. Dona

llibertat a cada grup per fer les combinacions que vulgui però amb les restriccions següents: han d'utilitzar exactament cinc pilotes i com a màxim dos colors diferents de pilotes, a escollir entre groc, verd, blau i magenta. Els indica que, per grups, han de: 1) decidir quina distribució de pilotes de colors volen amagar dins de l'ampolla i 2) preparar una targeta amb les qüestions per tractar que rebrà el grup receptor del seu disseny d'ampolla (targeta d'interacció). Els grups s'organitzen per parelles i en un primer moment cadascuna realitza el disseny del contingut de l'ampolla i de la targeta d'interacció.

A continuació es mostra un exemple de les targetes d'interacció bescanviades entre dos grups, l'A i el B, que transcrivim tot seguit per facilitar-ne la lectura (vegeu la figura 5). La consigna que dona el mestre és que cada grup receptor ha de treballar amb el nou cas d'ampolla que ha rebut i ha de donar resposta a les qüestions que el grup emissor hagi formulat.

Dissenyador: grup A → Receptor: grup B
 Quantes pilotes creieu que hi ha de cada color? 2 de blaves i 1 de groga.
 Quins colors creieu que hi ha? Blau i groc.
 De quina mida creieu que són? D'1 cm.
 Creieu que serà impossible respondre a les preguntes? No.

Dissenyador: grup B → Receptor: grup A
 Quins colors hi ha a l'ampolla? Verd i blau.
 Quantes boletes hi ha de cada color? 3 de verdes i 2 de blaves.
 Quantes vegades ho podem comprovar? 47 vegades.

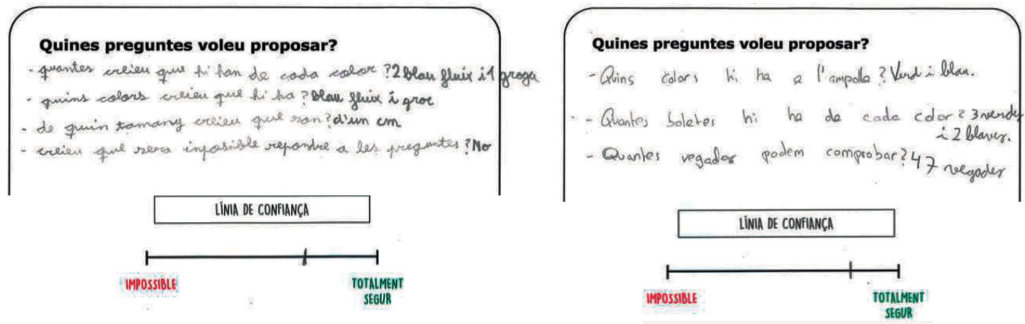


Figura 5. Qüestions intercanviades entre dos equips emissor i receptor.

Quan acaben de donar resposta a les qüestions, s'organitza una posada en comú en què sortiran alhora cada parella de grups, emissor-receptor, per tal que cada grup expliqui les respostes que ha donat a les qüestions que se'ls hagin plantejat. Se'ls explica prèviament que, sota cap concepte, l'equip dissenyador no pot validar mai si les hipòtesis que es formulen sobre la composició de l'ampolla són o no certes; el que sí que han de valorar és si aquestes respostes són prou coherents d'acord amb les dades que hagin recollit i l'anàlisi de l'experimentació que hagin realitzat. A partir d'aquesta posada en comú i la discussió que es pugui generar, es dona als grups la possibilitat que acabin de completar les seves respostes.

Com a aspecte comú de les exposicions de tots els grups podem destacar que, en aquesta segona situació, els estudiants estableixen una distinció més clara entre hipòtesi coherent, certa i opinió personal, d'acord amb les dades experimentals recollides i analitzades. Considerem que el fet d'incorporar la línia de confiança facilita que els estudiants busquin eines i estratègies per defensar la coherència de la seva hipòtesi. També estableixen una relació més

clara entre l'anàlisi de les freqüències absolutes observades i la inferència sobre la composició de l'ampolla. No obstant això, no sorgeixen noves eines d'anàlisi de les freqüències que podrien ser més fiables, com ara la raó o proporció entre el nombre de pilotes de cada color, o raó geomètrica. Totes les justificacions de l'alumnat se centren en l'anàlisi comparativa de la diferència entre freqüències absolutes, que, tot i les seves limitacions a l'hora de prendre decisions, revela que es tracta d'una eina molt natural per als infants, la qual és ràpidament eliminada per la matemàtica escolar per deixar pas a la raó geomètrica.

3.3. Tercera situació: quina marca de Hama Beads és millor per a l'escola?

Durada: 1 sessió de 2 h

Material i recursos: un total de sis ampolles, dues per a cadascuna de les tres marques estudiades, A, B i C. Cada ampolla conté un total de deu Hama Beads amb composicions diferents de colors: lila, taronja, rosa i marró; un *informe grupal* en el qual cada grup de treball formula la seva primera hipòtesi després de recollir cinquanta dades i la seva hipòtesi final després de recollir-ne cent; una *carta de recomanació* per al director de l'escola amb la resposta col·lectiva sobre quina de les marques (A, B o C) de Hama Beads és millor per a l'escola.

Rols i responsabilitats dels grups de treball: s'organitzen parelles de grups per estudiar una mateixa marca de Hama Beads (A, B o C). El primer grup s'encarrega d'estudiar si els colors que ens interessin (lila, taronja i rosa) apareixen en quantitats similars; el segon grup fa el control de les peces defectuoses, les marrons. Dins d'un grup s'assignen els mateixos rols que s'han descrit en les situacions anteriors. Quan cada parella de grups s'ajunta per comparar i ajuntar resultats, s'incorpora el rol de moderador, per organitzar la discussió i consensuar la hipòtesi final sobre la composició de Hama Beads de la marca estudiada.

Desenvolupament de la situació: el mestre presenta la tercera situació, que tracta d'un encàrrec que rebem del director de l'escola, el qual necessita ajuda per decidir a quina marca de Hama Beads és millor fer una comanda per a l'escola. Es tracta d'una comanda per al projecte de l'escola Cosmos, per al qual necessitem encarregar tres colors de Hama Beads: lila, taronja i rosa. El director ha demanat, a tres marques que produeixen Hama Beads, un pressupost per encarregar paquets especials de Hama Beads amb aquests tres colors mesclats. Els tres pressupostos són molt similars, però el director els ha demanat que enviïn una mostra de la seva producció, ja que les tres empreses han avisat que no poden assegurar que, en lots grans, els tres colors apareguin en quantitats similars i també que en alguna ocasió la maquinària produeix peces defectuoses de color marró.

Cadascuna de les marques productora de Hama Beads (A, B i C) és representada per una ampolla que simula el procés de fabricació de les peces. A l'escola arriben dues ampolles idèntiques per a cada empresa, amb una mostra de deu peces agafades a l'atzar. El director demana als estudiants que l'ajudin a decidir a quina de les tres marques és més convenient fer l'encàrrec. Així, al final de la sessió els estudiants han d'acordar quina recomanació han de fer al director de l'escola i han de redactar una carta breu on exposaran les conclusions del grup classe perquè ell pugui fer l'encàrrec avui mateix.

El mestre té sis ampolles sobre la taula, dues de cadascuna de les tres marques (A, B i C) que volem analitzar. El mestre els explica que el millor és repartir bé la feina entre els grups de treball per poder valorar el que ofereixen les diferents marques. El mestre organitza parelles de grups per estudiar una mateixa marca. El primer grup s'encarrega d'estudiar si els colors que ens interessin (lila, taronja i rosa) apareixen en quantitats similars; el segon grup farà el control de les peces defectuoses, les peces marrons.

Q_a : Quina quantitat de Hama Beads de color taronja, lila i rosa creieu que pot haver-hi dins l'ampolla?

Q_b : Quina quantitat de Hama Beads de color marró creieu que pot haver-hi dins l'ampolla?

El mestre entrega a cada parella de grups les dues ampolles que corresponen a una marca (A, B o C) i els assigna la qüestió concreta que han de tractar: Q_a o Q_b . Se'ls entrega l'informe grupal, on se'ls demana que recullin cinquanta dades, facin una primera hipòtesi com a resposta de la qüestió que estudien i indiquin sobre la línia de confiança el grau de confiança de les hipòtesis que defensen (vegeu la figura 6).

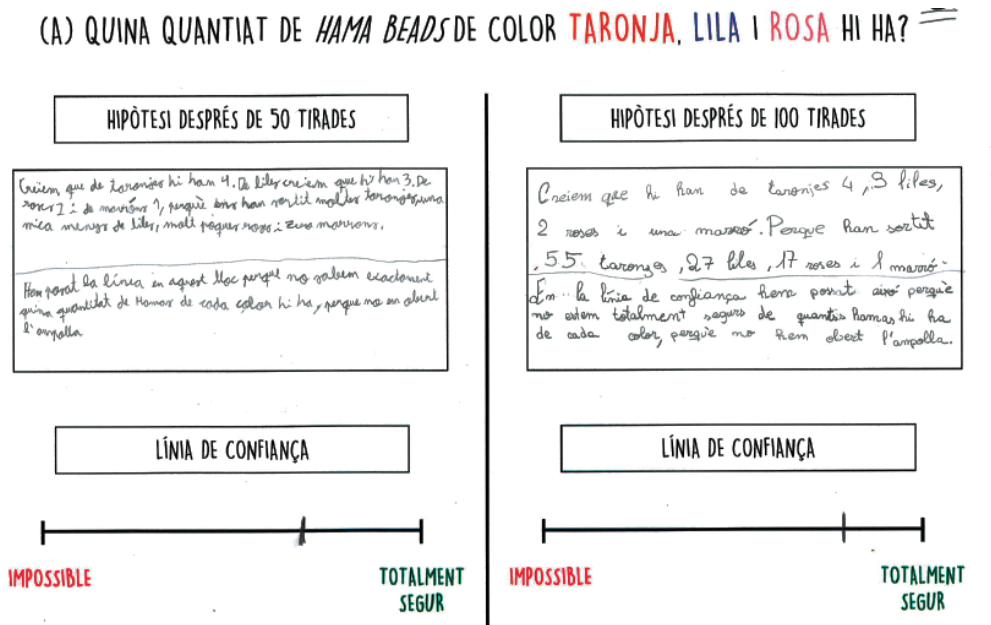


Figura 6. Formulació d'hipòtesis després de 50 i 100 tirades sobre Q_a del grup B.

Una vegada els grups han acabat d'omplir la part esquerra de l'informe («Hipòtesi després de 50 tirades»), el mestre demana que s'ajuntin els grups-parelles que s'encarreguen de la mateixa marca. En aquesta interacció, els grups comparteixen les dades recollides i expliquen quines primeres hipòtesis han formulat sobre les qüestions Q_a i Q_b , respectivament. D'aquesta interacció cal destacar dues aportacions principals. La primera és que permet als grups ampliar la seva mostra, ja que passen d'analitzar cinquanta dades a analitzar-ne cent, i alguns d'ells reformulen les seves primeres hipòtesis a partir de l'anàlisi d'aquesta nova mostra o bé la utilitzen per donar més validesa a les seves primeres propostes («Hipòtesi després de 100 tirades»). A més a més, en tots els casos els permet avançar la posició en la qual se situen en

la línia de confiança, tot i que són molt conscients de la impossibilitat d'estar-ne totalment segurs. Així ho explica el grup B en la figura 6:

Creiem que n'hi ha 4 de taronges, 3 de liles, 2 de roses i 1 de marró. Perquè n'han sortit 55 de taronges, 27 de liles, 17 de roses i 1 de marró. En la línia de confiança hem posat això perquè no estem totalment segurs de quantes Hama Beads hi ha de cada color, perquè no hem obert l'ampolla.

La segona aportació és que els grups comencen a discutir quins criteris prioritzarem, si tenir un nombre equiparable de nombre de peces de colors lila, taronja i rosa i/o tenir menys quantitat de peces defectuoses.

Una vegada els grups-parella van posant-se d'acord, comença la posada en comú en el grup classe, on les parelles de grups aniran intervenint l'una rere l'altra. Els dos portaveus dels dos grups que han estudiat una mateixa marca surten per explicar les seves conclusions; el mestre modera i ajuda a emfatitzar les respostes i argumentacions que utilitzen. Quan cada parella de grups ha explicat la seva hipòtesi, es pengen a la paret els dos informes grupals i expliquen quina ha estat la hipòtesi consensuada sobre quina és la distribució de colors de Hama Beads que s'amaga dins l'ampolla de la marca que estudien. Quan acaben d'explicar-ho, enganxen en una tira preparada els gomets dels quatre colors corresponents a les peces de Hama Beads (vegeu la figura 7) de la hipòtesi consensuada.

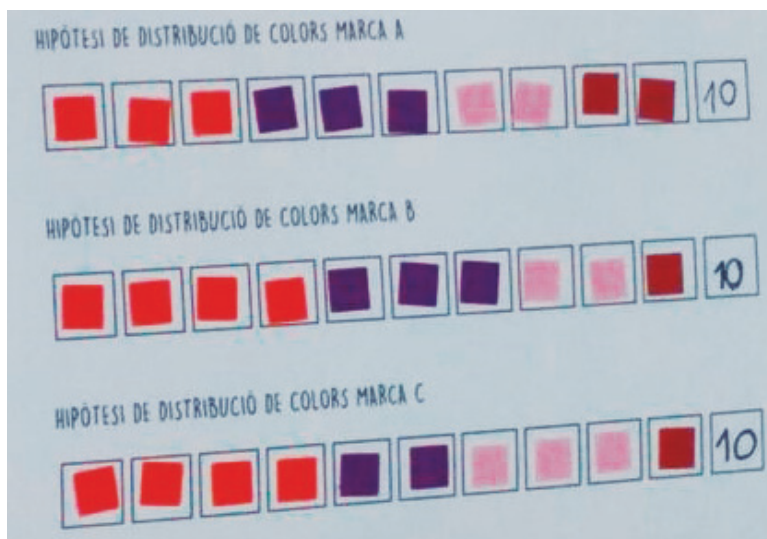


Figura 7. Recollida de dades amb l'ampolla de Hama Beads.

El mestre els explica que ara que ja tenen consensuades les diferents hipòtesis sobre la distribució de colors de les tres marques, és el moment de redactar la carta de recomanació per al director de l'escola. Per a això, el grup classe ha d'acordar quins criteris estableixen per prioritzar o no les diferents marques, A, B i C. Els estudiants individualment fan diferents propostes i el mestre les va anotant. Els raonaments de l'alumnat es fonamenten en els dos objectius d'estudi, és a dir, tant l'equitat en el nombre de Hama Beads de cada color, com la baixa presència de Hama Beads defectuoses. Així, doncs, el grup arriba al consens

de descartar la marca A per l'alta presència de Hama Beads no utilitzables que conté. A partir d'aquí, alguns grups recorren a altres criteris per defensar la seva hipòtesi, com ara l'aprofitament de les peces de Hama Beads sobrants per fer alguna manualitat o, fins i tot, la defensa de la proposta amb més Hama Beads de la seva constel·lació, ja que creuen que la seva constel·lació resultarà vencedora i, per tant, en necessitaran més. Finalment, es fa una votació i s'acaba acordant que la millor opció és la marca B. Aquesta tercera situació acaba amb la redacció d'una carta per al director de l'escola. El mestre comparteix un document comú que es projecta a la pissarra digital i redacten tots junts la carta al director sobre què han decidit pel que fa a la comanda de Hama Beads.

4. Conclusions i perspectives

En aquest treball hem volgut mostrar les característiques principals del disseny i l'experimentació d'un recorregut d'estudi i investigació (REI) que hem anomenat «Què s'amaga dins l'ampolla?», a través del qual es treballen diverses eines del bloc d'atzar i estadística. Més concretament, la proposta d'aquest REI parteix de la necessitat de construir un medi experimental per referir-se a l'atzar i a la variabilitat estadística i a partir del qual emergeix la necessitat de construir moltes de les eines estadístiques (recull de dades, tabulació, càlcul i anàlisi de freqüències, representacions gràfiques, càlculs estadístics, estimacions de les probabilitats, etc.) per a la formulació d'hipòtesis i la discussió de la seva coherència i fiabilitat.

A partir dels treballs originals de Brousseau *et al.* (2002) hem presentat una adaptació que s'ha realitzat gràcies a una estreta col·laboració entre un mestre de primària, format prèviament en la metodologia dels REI, i investigadores en didàctica de la matemàtica. En aquest treball sols hem mostrat l'inici d'una activitat que podria estendre's encara molt més. Així ho mostren els dissenys originals, que es desenvolupaven en un total de vint-i-sis sessions amb estudiants de cinquè de primària. Tot i la introducció a la proposta original, hem de destacar la possibilitat de reprendre moltes de les qüestions que han quedat obertes, dins del mateix curs o en cursos posteriors, en l'àrea de matemàtiques o en altres àrees de coneixement. De fet, així ho està fent el mestre encarregat de l'experimentació, qui en el present curs 2018-2019 està reprenent a cinquè de primària moltes de les qüestions que van quedar pendents en l'experimentació d'un any abans.

A més a més, aquesta mateixa activitat va ser experimentada a la mateixa escola, durant el mateix curs que la que aquí s'ha analitzat, amb uns altres dos grups de cinquè i sisè de primària durant dues sessions de dues hores. Serà objecte de recerca en treballs futurs analitzar i comparar aquestes tres experimentacions realitzades per tal d'estudiar-ne els punts comuns i les principals diferències i per estudiar com es podria treballar en el disseny d'un REI que tingués continuïtat entre diversos cursos. Així mateix, hem d'afegir que aquesta mateixa activitat ha estat experimentada en nivells molt diferents: des de primària fins a la universitat, per exemple en estudis del grau d'Administració d'Empreses i en la formació inicial dels mestres de primària (Barquero, Bosch i Granell, 2018), amb adaptacions diverses. Aquest darrer context d'experimentació és especialment rellevant per aprofundir en la transferibilitat i la viabilitat d'aquests dissenys com a dispositius per posar en contacte resultats de la recerca amb la pràctica docent innovadora a les aules.

Referències bibliogràfiques

Artigue, M. i Blomhøj, M. (2013). «Conceptualizing inquiry-based education in mathematics». *ZDM Mathematics Education*, 45, 797-810.

Barquero, B. i Bosch, M. (2015). «Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths». A: A. Watson i M. Ohtani (eds.). *Task Design in Mathematics Education. New ICMI Study Series*. Cham: Springer, 249-272.

Barquero, B., Bosch, M. i Gascón, J. (2011). «Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales». *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29 (3), 339-352.

Barquero, B., Bosch, M. i Granell, C. (2018). «Els recorreguts d'estudi i investigació en la formació de mestres. El cas d'un REI-FM sobre l'ensenyament de l'atzar i l'estadista». *Revista CIDUI 2018*. www.cidui.org/revistacidui.

Bosch, M. i Winsløw, C. (2016). «Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35 (3), 357-401.

Brousseau, G. (1990). «¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Primera parte)». *Enseñanza de las Ciencias*, 8 (3), 259-267. <http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v8n3p259.pdf>.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Brousseau, G., Brousseau, N. i Warfield, V. (2002). «An experiment on the teaching of statistics and probability». *Journal of Mathematical Behaviour*, 20 (3), 363-411.

Chevallard, Y. (2006). «Steps towards a new epistemology in mathematics education». A: M. Bosch (ed.). *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*. Barcelona: FUNDEMI-IQS, 21-30.

Chevallard, Y. (2015). «Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm». A: S.J. Cho (ed.). *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Dordrecht: Springer, 173-187.

García, F.J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Jaén: Universidad de Jaén.

Ruiz-Higueras, L. (2008). «Modelización matemática en la escuela primaria: la reconquista escolar de dominios de realidad». A: M. M. Hervás (ed.). *Competencia matemática e interpretación de la realidad*, 87-119.

Ruiz-Higueras, L. i García, F.J. (2011). «Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil». *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (1), 41-70.

Rodríguez, E., Bosch, M. i Gascón, J. (2008). «An anthropological approach to «Metacognition»: the research and study courses». A: D. Pitta-Pantazi i G. Pilippou (eds.). *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education*. Cyprus: University of Cyprus, 1798-1807.

Winsløw, C., Matheron, Y. i Mercier, A. (2013). «Study and research courses as an epistemological model for didactics». *Educational Studies in Mathematics*, 83 (2), 267-284.

