Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES
Treball final de grau

Un ptolemaic al Renaixement

Raons per defensar el copernicanisme al s.XVI

Autor: Laura Reig Pedrós

Director: Dr. Carlos Dorce Polo
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

For fourteen centuries Western European astronomy was dominated by Ptolemy's geocentric model. In 1543 Copernicus published the *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, in which he proposed a heliocentric model. Today we know that this is the right system. The main purpose of this work will be to reflect on whether at the time of the emergence of the copernic model there were reasons to opt for this proposal.

Resum

Durant catorze segles l'astronomia europea occidental va estar dominada pel model geocèntric de Ptolemeu. Al 1543 Copernic publicà el *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, on proposa un model heliocèntric. Avui sabem que aquest és el sistema més encertat. L'objectiu principal d'aquest treball serà reflexionar si en el moment d'aparició del model copernicà hi havia raons per decantar-se per aquesta proposta.

2010 Mathematics Subject Classification. 01-00, 01-01, 01-02, 01A20, 01A40, 01A90

Índex

1 Introducció

El present treball té com a objectiu estudiar l'evolució del sistema planetari a occident des del segle II d.C fins al segle XVI-XVII d.C. En particular, el principal objectiu serà reflexionar si en el moment d'aparició del model copernicà hi havia raons per decantar-se per aquesta proposta.

Durant el s.II, Claudi Ptolemeu (c.100d.C. - c.170d.C.) desenvolupà el complet model geocèntric que trobem a la seva obra *Composició Matemàtica* ('Hèmegalèsyntaxis'), a la que els àrabs van batejar com *Almagest* ('Al-Majisti', "el més gran"). L'*Almagest* conté el catàleg estel·lar més complet que es conserva de l'antiguitat. En ell s'hi descriu detalladament un sistema geocèntric que és capaç no només de proporcionar un model del moviment celeste, sinó també de fer precisos pronòstics quantitatius de les futures posicions planetàries.

Les teories astronòmiques contingudes al tractat van estar vigents durant catorze segles, influint en el pensament astronòmic i científic tant àrab com europeu, fins que l'any 1543 es publicà el tractat *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Nicolau Copèrnic (1473 - 1543) on es va presentar un model heliocèntric. En el present treball tractaré la convivència dels dos models, les raons per defensar cadascun d'ells, també les dificultats per a fer-ho.

L'estructura que seguiré és la següent:

En primer lloc, contextualitzaré des d'un punt de vista històric el model ptolemaic, centrant-me en els motius històrics i culturals que podien propiciar el seu naixement i acceptació.

En segon lloc, em centraré en explicar pròpiament el model ptolemaic i els conceptes bàsics necessaris per comprendre'l. Un cop introduïdes les qüestions elementals dels models geomètrics ptolemaics, seguiré detalladament la deducció matemàtica del model de Saturn. Per a fer-ho, em serviré principalment del text de l'*Almagest*, en la versió anglesa de G.J.Toomer[2].Per recolzar-me en les consideracions històriques i les clarificacions que fa dels arguments matemàtics, usaré la revisió de l'*Almagest* que realitza Olaf Pedersen[3].

En tercer lloc, explicaré el context històric de Copèrnic, passant per l'evolució de la cosmologia des de Ptolemeu i centrant-me sobretot en la situació cultural del naixement del *De Revolutionibus*.

En quart lloc, explicaré els passos principals de la deducció que realitza Copèrnic del moviment dels planetes superiors, amb l'objectiu principal de tenir les eines per comparar-la amb el model ptolemaic que haurem deduït de Saturn. Degut a l'extensió del treball, no ha estat possible detallar tots els passos de la deducció

[2] PTOLEMY.*Ptolemy's Almagest*,ed.by G.J.Toomer, Londres, Duckworth,1984.
[3] O.PEDERSEN.*A Survey of the Almagest*, Dinamarca, Odense University Press,1974.

matemàtica del model planetari que fa Copèrnic, però per explicar els trets principals m'he servit dels dos volums de N.M.Swerdlow i O.Neugebauer *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*[4] on es pot trobar una explicació detallada del model matemàtic que proposa Copèrnic. També he usat en algunes parts del treball el text del mateix Copèrnic en l'edició traduïda per l'Institut d'Estudis Catalans[5].

La cinquena part d'aquest treball consistirà en una reflexió històrica del predomini i rellevància de cadascun dels models i els motius que podrien haver propiciat la imposició del model heliocèntric respecte del model geocèntric en el segle XVI. En aquesta reflexió, em serviré tant dels resultats matemàtics que hem obtingut dels dos models, així com de la capacitat predictiva, tenint molt en compte també del context històric del moment. L'objectiu d'aquest apartat és servir-nos de tot el que haurem exposat anteriorment per a poder fer una reflexió històrica raonada del conflicte entre els dos models i conèixer si hi havia raons concloents per decantar-se per un dels dos .

Finalment, faré una proposta personal d'un dels motius que considero que van poder ajudar en la implantació del model heliocèntric. Per a fer-ho, em serviré de les guies de càlcul de la longitud dels planetes en cadascun dels models que inclouen els textos de Pedersen i Swerdlow i Neugebauer citats anteriorment. També usaré les taules de càlcul de Ptolemeu i Copèrnic que vénen incloses en l'*Almagest* i el *De Revolutionibus.*

2 El model ptolemaic

2.1 Context històric i naixement

L'astronomia grega va néixer com a resultat d'un interès principal per la confecció de mapes estel·lars, per a la necessitat d'un calendari i per l'estudi dels moviments solar i lunar que s'havien d'analitzar amb profunditat abans de construir aquest calendari.

Al segle IV a.C es produeix una evolució substancial en l'astronomia amb un canvi d'interès de les estrelles als planetes. Els moviments del Sol, la Lluna i els planetes havien estat acuradament observats i ben traçats i així com el Sol i la Lluna es movien d'est a oest amb una velocitat uniforme, els altres planetes –Mercuri, Venus, Mart, Júpiter i Saturn– presentaven considerables variacions de velocitat a més d'un canvi de brillantor segons el punt de la trajectòria en què es trobaven.

[4] N.M.Swerdlow, O.Neugebauer, *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*,New York, Springer, 1984

[5] N.Copèrnic. *De les Revolucions dels Orbes Celestes*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans/Pòrtic/Eumo, 2000

S'observava que cada planeta, en un moment donat del seu recorregut per l'eclíptica[6], reduïa la velocitat fins a parar-se, retrocedia sobre els seus passos, es parava una altra vegada, i seguidament recuperava una altra vegada el seu moviment normal. A aquesta inversió de la direcció que es presentava en major o menor mesura en tots els planetes i se l'anomenà "moviment retrògrad". Com a conseqüència, el moviment dels planetes serà considerat una anomalia i se'ls batejarà amb el nom d'"estrelles errants", és a dir, "planetes".

Al mateix segle IV aC. es desenvolupà a Grècia un model geomètric anomenat anys més tard "model de les dues esferes" [7] (figura 1) per a la representació dels fenòmens estel·lars i planetaris. Un aspecte a destacar és que el model de les dues esferes no és una proposta cosmològica concreta sinó més aviat un marc estructural en el què podem emmarcar les concepcions cosmològiques de l'època. La concepció consistia en un univers format per dues esferes: l'esfera de la Terra al centre immòbil i l'esfera de les estrelles fixes que rotaria diàriament al voltant de la Terra. El model dóna a entendre que no hi havia cap canvi pel que fa a la posició de les estrelles i per aquest motiu es va pensar que les estrelles estaven "fixes" en una esfera, com si s'hi trobessin pintades. Recorrent la superfície de l'esfera de les estrelles fixes, s'hi troben el Sol, la Lluna i els altres planetes amb el seu moviment errant.

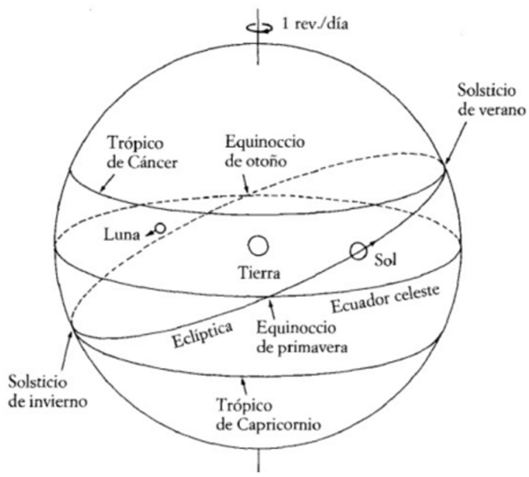

Figura 1: Univers de les dues esferes

L'anterior model, tot i solucionar gran part dels enigmes cosmològics bàsics, deixa per explicar el fenomen del moviment errant dels planetes. El model de les dues esferes era essencialment diferent dels models, babilònics, egipcis i grecs anteriors. Algunes de les diferencies radiquen en que en els models anteriors la Terra era plana i el cel era una esfera que l'envoltava. Però la diferència principal se situa en el pla metodològic: els elements simbòlics, màgics i divins desapareixen com a conseqüència de que una part de la civilització grega passà de la mentalitat mítica a la racional. L'explicació del moviment retrògrad dels planetes suposà una gran dificultat per la cosmologia grega. El moviment no s'assemblava a cap altre moviment celeste, amb la dificultat afegida de que les observacions mostraven que cada planeta tenia un moviment errant diferent.

[6]El nom prové del llatí ecliptĭca (linĕa). L'eclíptica es la línia corba que assenyala el camí aparent del Sol durant un any sobre l'esfera celeste. Forma amb l'equador terrestre un angle de 23° 27'.

[7]Concretament l'expressió la devem a Tomas Kuhn, físic i filòsof de la ciència nascut el 1922. T.Kuhn. *La revolución copernicana*, Barcelona, Ariel, 1978. Pàg. 52-55.

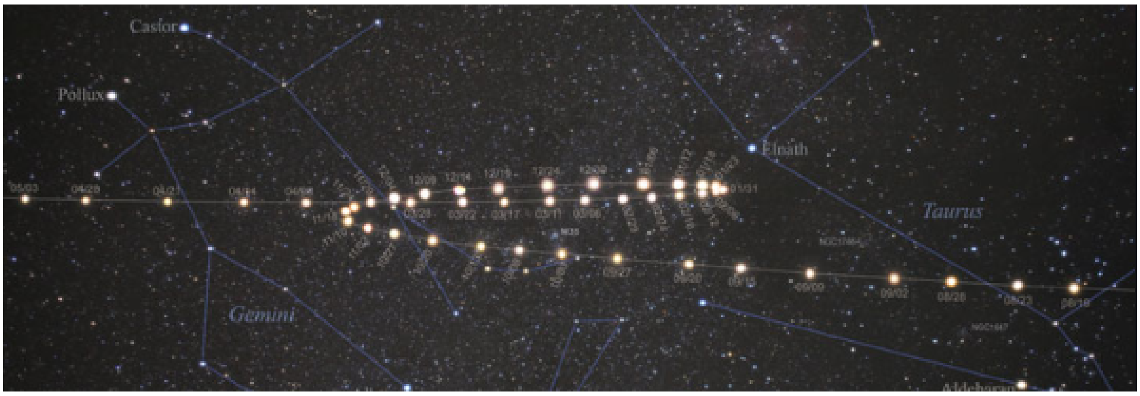

Figura 2: Recreació visual del moviment del planeta Mart

Potser l'esdeveniment més important tingué lloc quan suposadament Plató (c.427 - 347a. C.) afirmà que les irregularitats del moviment planetari havien de poder ser explicades mitjançant un moviment perfecte, és a dir, com la composició de moviments circulars i uniformes desafiant als astrònoms o matemàtics a determinar quina combinació d'aquests moviments explicaria els aparents i irregulars moviments planetaris:

> *"La figura convenient per a un ésser vivent [l'univers] que havia de contenir en ell tots els vivents és la que conté totes les figures: per això el va tornejar com una esfera, establint pertot una equidistància del centre vers els extrems en forma circular, que és la més perfecta de les figures i la més uniforme amb ella mateixa, ja que el déu pensava que és molt més bella la uniformitat que el seu contrari [...] per això, fent-lo girar sobre ell mateix en un mateix lloc, va fer que donés voltes amb un moviment circular, privant-lo de tots els altres moviments [...] constituí així un únic univers rodó que gira circularment sobre ell mateix, solitari i aïllat"* [8].

Fos o no Plató qui va plantejar el problema, gairebé tots els astrònoms posteriors van acceptar el repte així plantejat i aquesta pretensió d'explicar així els moviments celestes no finalitzarà fins al segle XVII amb Kepler, que canviarà els moviments circulars per moviments el·líptics.

La mentalitat que dugué a pensar que els moviments celests havien de poder ser explicats mitjançant moviments circulars i uniformes encaixa amb el concepte de "paradigma" de Kuhn: *"Considero a los paradigmas como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica"* [9]. La filosofia platònica i aristotèlica de s. V i IV aC considerava que els moviments celestes eren immutables i perfectes i per tant els moviments que havien de donar-s'hi eren també els que consideraven perfectes: els circulars i uniformes.

[8] PLATÓ. *Diàlegs XVIII.Timeu*, Barcelona, Fundació Bernat Metge, 2000. 33b.

[9] T.KUHN.*La revolución copernicana*, Barcelona, Ariel, 1978. Pàg 33

Aristòtil (384 aC - 322 aC) va reforçar l'anterior supòsit sostenint que la regió més enllà de la Lluna és una regió **de cicles eternament immutables** ja que en cap moment del passat s'ha observat un canvi en aquesta regió, per tant els seus moviments han de ser perfectes. A més, Aristòtil va reforçar la hipòtesi segons la qual **la Terra es troba immòbil al centre de l'univers** afirmant en primer lloc, que si la Terra es mogués, l'home hauria de notar el seu moviment. I en segon lloc, que s'observaria paral·laxi estel·lar, i no era el cas [10] .

Hiparc de Nicea (c. 190 a.C. - c.120 a.C.) va ser un dels més grans astrònoms de l'antiguitat. Va elaborar un nou i superior mapa estel·lar, descobrint la precessió dels equinoccis, desenvolupant un nou instrument d'observació astronòmica (la dioptra), i criticant la teoria planetària existent. També sabem que va tenir accés a les dades d'observacions babilòniques, incloses les dades sobre els moviments planetaris i els eclipsis lunars. I el més important és que a través del seu contacte amb l'astronomia babilònica, Hiparc va arribar a valorar l'objectiu de la predicció quantitativa exacta a l'astronomia grega, transformant-la radicalment. Pel que fa a l'explicació dels moviments celestes, va recollir el repte anterior d'elaborar una cosmologia usant moviments circulars i uniformes. Hiparc va crear models de l'òrbita de la Lluna i el Sol que posteriorment van ser recollits per Ptolemeu a l'*Almagest* sense pràcticament canvis respecte el que havia plantejat Hiparc. Amb aquests models, va aconeguir una aproximació excel·lent de la distància entre la Terra i la Lluna, usant els eclipsis lunars per a calcular-ho.

Si bé la proposta de situar la Terra immòbil al centre i explicar el cel amb moviments circulars i uniformes va gaudir d'una amplia acceptació, no tots els astrònoms van inscriure's en aquesta tendència. Alguns astrònoms com Heràclides Pòntic (387 a.C. - 312 a.C.) o Aristarc de Samos (c.310 a.C. - c.230 a.C.) feien afirmacions tals com que la Terra es movia sobre sí mateixa explicant el dia i la nit, que es movia al voltant del Sol el qual restava immòbil al centre. Aquestes propostes van ser conegudes però rarament acceptades.

Podríem lloar els anteriors autors per la seva anticipació a Copèrnic i criticar els seus successors per no acceptar les seves propostes. Tanmateix, la situació ha de jutjar-se des del segle III aC. Tal com exposa Lindberg, *la cuestión no es si nosotros tenemos razones convincentes para ser heliocentristas, sino si ellos tenían ese tipo de razones. Y la respuesta, desde luego, es que ellos no las tenían. Poner la Tierra en movimiento y darle un estatus planetario violaba la antigua autoridad, el sentido común, las creencias religiosas y la física aristotélica. También implicaba la paralaje estelar [...], que no se observaba. Por lo demás, cualesquiera ventajas observacionales que pudiera tener (por ejemplo su capacidad de explicar las variaciones de brillo de los planetas) estaban presentes en otros sistemas que no violaban la cosmología tradicional*[11].

[10] La paral·laxi estel·lar és el canvi de posició aparent d'un cos celeste contra el fons estrellat, causat per un canvi de punt de visió per part de l'observador.

[11] D.C.Lindberg.*Los inicios de la ciencia occidental*, Barcelona, Paidós, 2002. Pàg 136.

En qualsevol cas, les diferents explicacions i les dades observacionals que es van anar acumulant, en especial les d'Hiparc, van servir a Ptolemeu de base per idear el seu precís sistema.

Figura 3: Retrat imaginari de Claudi Ptolemeu

Claudi Ptolemeu va ser un astrònom, matemàtic i geògraf resident a Egipte (aleshores pertanyent a l'Imperi Romà). Estem davant d'un gran referent històric ja que els seus models perduraran durant catorze segles. Destaquem Ptolemeu principalment per diversos tractats que tindrien gran importància a les posteriors ciències bizantina, islàmica i europea. El primer és el tractat astronòmic conegut com l'*Almagest*, que tractarem en aquest treball. El segon son les *Hipòtesis planetàries*, que se surten del model principalment matemàtic presentat a l'*Almagest*, per mostrar una realització física de l'univers com a conjunt d'esferes encaixades. El tercer tracta la *Geografia* coneguda fins aleshores, i el quart tractat – conegut com a *Tetrabiblos* - és un intent d'adaptar l'astrologia de l'horòscop a la filosofia aristotèlica. A més, trobem obres relacionades amb l'òptica i la música.

Ptolemeu estava afiliat a la biblioteca d'Alexandria i tenia accés a segles d'observacions astronòmiques gregues i babilòniques. Aquesta base documental li va permetre conèixer les anteriors observacions i cosmologies. Ptolemeu perfeccionà aquests models dotant-los d'una força i una base matemàtica difícil d'imaginar segles abans.

Encara que el model era extremadament més complex, el propòsit de Ptolemeu a l'*Almagest* seguia sent el mateix: explicar els moviments celestes mitjançant moviments circulars i uniformes. Ptolemeu va partir del model d'Hiparc del Sol i la Lluna i el va ampliar als planetes, de tal manera que va ser capaç de fer precises previsions quantitatives de futures posicions planetàries. En el següent apartat, descriurem els conceptes i tècniques usades per Ptolemeu en els seus models, fet que ens servirà d'introducció per explicar en detall la deducció del model de Saturn en el posterior apartat.

2.2 Descripció general del model

Com hem mencionat anteriorment, Ptolemeu explica en detall el seu model cosmològic a l'*Almagest*. Amb l'objectiu de donar un ordre als sovint irregulars moviments celestes, Ptolemeu creà tres models circulars que adaptà i combinà de maneres diferents.

2.2.1 L'equant

El model de l'equant és el més senzill que utilitza Ptolemeu per donar l'aparença de no uniformitat al moviment uniforme al voltant d'un cercle. L'equant és un **cercle excèntric** respecte la Terra.

En la figura 4, el cercle ABD és l'equant,i descriu l'òrbita del cos celeste P, que gira **uniformement** sobre ell. Si la Terra estès situada al centre de l'equant C, el moviment de P no només seria uniforme sinó que a més ho semblaria. Ara bé, si la Terra es troba al punt E, llavors el moviment del planeta serà uniforme respecte el centre de l'equant C però no ho semblarà des d'E. En concret, donarà l'aparença d'anar més lent a mesura que s'apropa a A i més ràpid a mesura que s'apropa a D.

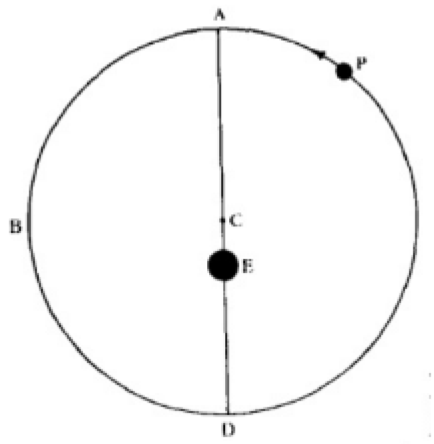

Figura 4: Model de l'equant

2.2.2 L'epicicle sobre deferent

Servim-nos de la figura 5 per explicar-lo. ABD és el cercle portador d'un petit cercle anomenat **epicicle** que té el seu centre sobre el cercle portador, anomenat **deferent**. El cos celeste P es mou uniformement sobre l'epicicle al mateix temps que el centre de l'epicicle es mou sobre el deferent. L'observador situat dins del cercle deferent veu la composició dels dos moviments. Les característiques precises d'aquest moviment compost dependran dels valors concrets elegits.

El seu ús més important recaurà en l'explicació de l'òrbita del Sol i –com veurem més endavant— el moviment retrògrad dels planetes, ja que per uns valors determinats donaria compte d'aquest moviment, tal com s'observa a la figura 6 on la trajectòria aparent del planeta està representada per la línia més marcada.

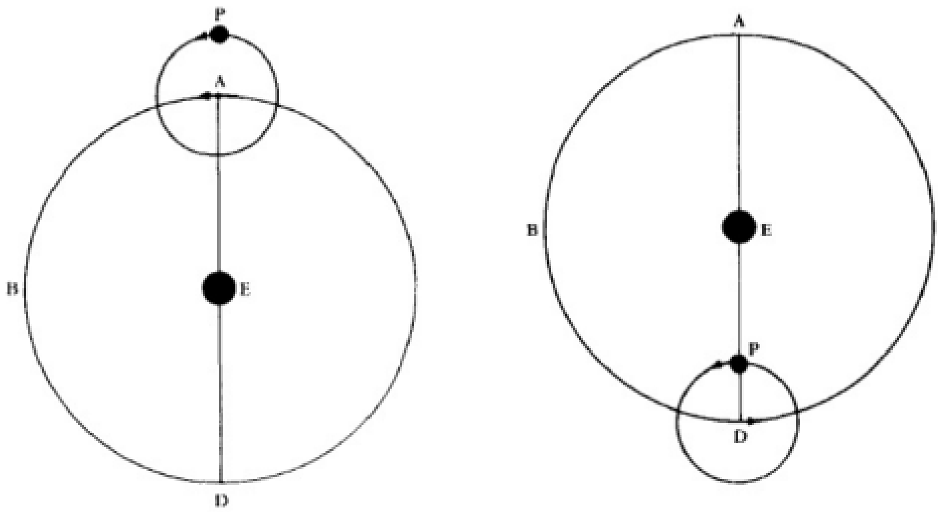

Figura 5: Model de l'epicicle sobre deferent amb el planeta en la part externa i interna de l'epicicle

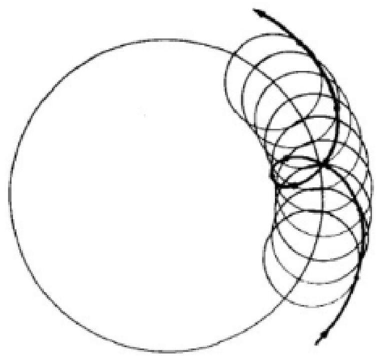

Figura 6: Moviment aparent del planeta

2.2.3 La bisecció de l'excentricictat

Tot i que els dos models anteriors podien explicar per sí sols molts dels moviments celestes, encara es va necessitar la combinació i adaptació dels dos per crear un nou model. A aquesta adaptació de l'anomena **bisecció de l'excentricitat**.

En el primer model hem descrit un cercle excèntric anomenat **equant**, **des del centre del qual s'observa de manera uniforme** el moviment del cos celeste P. En el segon model hem descrit un cercle anomenat **deferent**, **sobre el qual es mou el centre de l'epicicle** portador del cos celeste P.

El cercle deferent pot estar centrat en la Terra o coincidir amb el cercle equant, de manera que el cercle equant és el portador de l'epicicle. Però a més, Ptolemeu crea un nou model composant els dos moviments anteriors tal com s'observa en la figura 7. En aquest cas, la Terra es troba situada a T, el centre del cercle deferent es el punt D, i el centre del cercle equant es el punt E. L'excentricitat de cada un dels centres respecte de la Terra T ve representada per la lletra e, i el centre de l'epicicle es troba en el punt d'intersecció C del cercle deferent i del radi de rotació ES de l'equant.

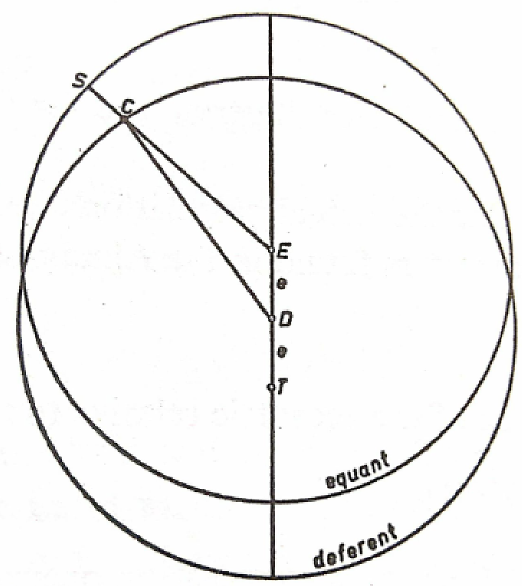

Figura 7: Equant i deferent

En aquest model, E es el punt central del moviment uniforme, de manera que **des de E el moviment de C s'observa de manera uniforme**, i D és el punt central del moviment circular, **de manera que des de D el moviment de C s'observa de manera circular**.

Quin es el resultat des de la Terra? Servim-nos de la figura 8 per explicar-ho. El cercle AGBF descriu l'òrbita del C al voltant del centre D del cercle deferent. La Terra es troba situada en T. En aquest cas, C cobreix angles iguals en temps iguals **mesurats des d'un punt no central E** (centre del cercle equant). Així, el planeta cobreix l'angle AEF exactament amb el mateix temps que cobreix l'angle FEB.

Ptolemeu va ser fortament criticat per Copèrnic per separar el centre del moviment circular del centre del moviment uniforme. Per l'autor, aquest fet implicava trencar el repte d'explicar els moviments de manera circular i uniforme, ja que en aquesta necessitat hi anava implícita la exigència del que el centre fos el mateix.

El resultat del model ptolemaic fou un sistema que mitjançant la combinació de moviments circulars i uniformes aconseguí descriure amb èxit el moviment dels planetes. Tanmateix, com destacarà segles més tard Copèrnic, és qüestionable que el resultat del sistema en global fos harmoniós.

És interessant la reproducció animada del sistema de Ptolemeu que podeu tro-

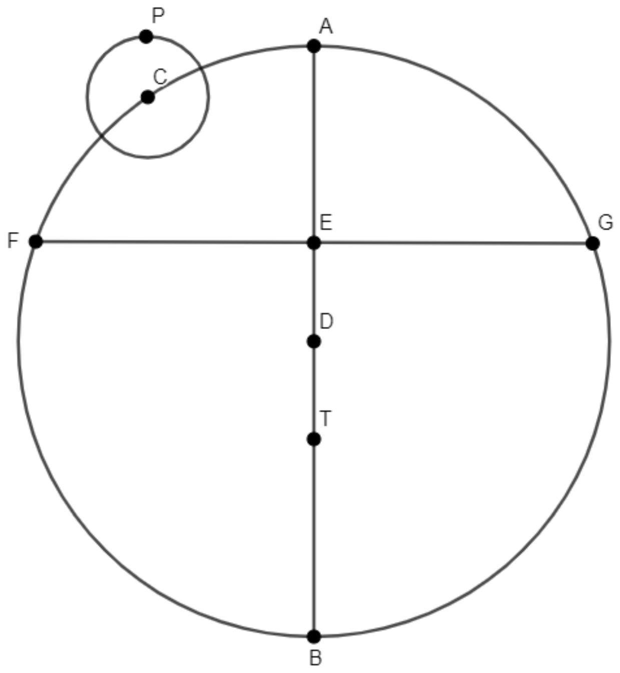

Figura 8: Bisecció de l'excentricitat

bar a:

https://www.youtube.com/watch?v=EpSy0Lkm3zM

2.3 El moviment de Saturn en el model ptolemaic

2.3.1 Introducció

Abans d'explicar el seu model planetari, als llibres I - V Ptolemeu explica els models del moviment del Sol i de la Lluna, ja desenvolupats per Hiparc, i que Ptolemeu recupera amb poques modificacions.

Als llibres VII i VIII tracta les estrelles fixes i compara les seves observacions amb les d'Hiparc i dels antics grecs per provar que la posició relativa de les estrelles no ha canviat al llarg del anys. En aquests dos llibres, fa un llistat de 1022 estrelles agrupades en 48 constel·lacions, on descriu la longitud i latitud de cadascuna d'elles.

Als cinc llibres restants de l'*Almagest*, Ptolemeu desenvolupa la seva teoria planetària. Al llibre IX, comença tractant l'ordre dels planetes al cel respecte de la Terra. Situa el Sol entre els planetes que denomina inferiors, Mercuri i Venus, per un costat; i els planetes superiors, Mart, Júpiter i Saturn, per l'altre.

Ptolemeu es veu obligat a admetre que no hi ha un criteri objectiu que permeti determinar l'ordre i les distàncies dels planetes, a causa de la imperceptible paral·laxi planetària. Tanmateix, creu que la millor opció és seguir als astrònoms antics, que situaven l'esfera del Sol al mig, amb Saturn, Júpiter i Mart per sobre com a **planetes superiors** i Mercuri i Venus per sota, com a **planetes inferiors**.

El problema que tractarem és com descriure l'aparent moviment dels planetes en termes de moviment uniforme i circular, ja que *"only that kind of motion is compatible with the nature of Divine Beings, whereas irregularity is foreign to them"*[12].

L'objectiu principal de Ptolemeu als llibres IX-XIII serà deduir una expressió que permeti conèixer la posició del planeta donat un temps t qualsevol. És a dir, obtenir funcions $\lambda = \lambda(t)$ i $\beta = \beta(t)$ de longitud i latitud del planeta.

En aquesta secció, deduirem l'expressió $\lambda = \lambda(t)$ seguint pas per pas la deducció de Ptolemeu del llibre XI. L'obtenció d'aquesta funció ens permetrà conèixer la longitud del planeta sobre l'eclíptica.

L'anomalia més notable en el moviment planetari és la freqüent retrogradació dels planetes. Apol·loni de Perge (c.262 a.C. - c.190 a.C.) va intentar donar una explicació a aquest fenomen amb un model epicíclic, on el sentit de rotació del planeta era igual al de l'epicicle. Aquest model, però, implicaria que l'arc de retrogradació tingués una llargada invariant i que es produís en intervals regulars. Les observacions, però, contradeien aquest resultat degut a la segona anomalia: la velocitat dels planetes no és constant. Així, cap model geomètric proposat fins aleshores podia explicar aquest fenomen.

2.3.2 Descripció dels fenòmens i anomalies

Els fenòmens que caracteritzen el moviment dels planetes superiors, entre els que es troba Saturn, son:

En primer lloc, tots els planetes tenen un moviment d'oest a est sobre les estrelles fixes. Aquest moviment té una velocitat angular **variable**. Aquesta variació en la velocitat representa la **primera anomalia** que s'observa en el moviment planetari. Tanmateix, és suficientment regular com per permetre a Ptolemeu definir un **període tropical mitjà**. El període tropical mitjà T_t ens dona el **temps mitjà** que tarda el planeta en retornar al mateix punt de l'eclíptica. La corresponent velocitat mitjana es determina per: $T_t \cdot w_t = 360°$.

En segon lloc, els planetes mostren un període de retrogradació. Aquest és el fenomen més espectacular dels planetes i el motiu pel qual els grecs els van anomenar estrelles errants. Partint d'aquesta **segona anomalia**, Ptolemeu descriu el **període sinòdic** o període de retrogradació (moment en que el planeta abandona

[12] Tal como apareix citat a: O.PEDERSEN *A Survey of the Almagest*, Odense University, 1974. Pàg 261.

la seva trajectòria habitual d'oest a est i retrocedeix una distància determinada cap a l'oest abans retornar a la seva trajectòria habitual). A partir del període sinòdic, Ptolemeu descriu el temps sinòdic T_a, que és el **temps mitjà** del període sinòdic. La corresponent velocitat angular mitjana es determina per: $T_a \cdot w_a = 360°$.

2.3.3 Tria del model geomètric

Per aconseguir l'objectiu de trobar una expressió que, donat un temps t, ens permeti trobar la posició del planeta, Ptolemeu se serveix de dos moviments principals: **l'eplicicle sobre deferent i l'equant**.

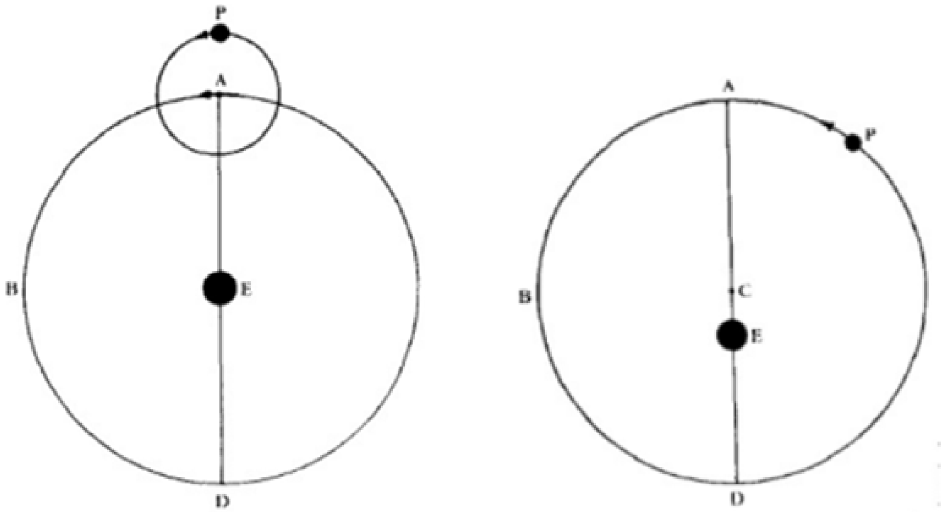

Figura 9: Model de epicicle sobre deferent (dreta) i equant (esquerra)

Al llibre III de l'*Almagest*[13] Ptolemeu demostra que per **qualsevol model excèntric** (equant), el temps necessari pel planeta per passar del punt de velocitat mínima al punt de velocitat mitjana, és major que el temps necessari per passar de la velocitat mitjana a la màxima. Per motius d'extensió, no he recollit aquesta demostració en aquest apartat.

Ptolemeu aplica el criteri anterior a la **segona anomalia**. Sense ser molt específic, afirma que basant-se en les observacions, pels cinc planetes es compleix que el temps que transcorre mentre que el planeta passa de la velocitat màxima a la mitjana, és sempre major que el temps que transcorre mentre passa de la velocitat mitjana a la mínima. Per tant, com que no es compleix el criteri anterior, la segona anomalia no pot ser explicada a partir d'un model excèntric, haurà de ser explicada mitjançant epicicles. No se citen dades reals a favor de l'anterior enunciat i en general aquesta justificació es tracta en termes vagues i insuficients.

[13] PTOLEMY. *Almagest*, ed.by J.L. Heiberg, Teubner, 1903. III,3

Pel que fa a la **primera anomalia**, l'explicació de Ptolemeu també és insuficient, però afirma que de les observacions en podem extreure que aquí sí que es compleix el criteri anterior i per tant l'anomalia pot ser explicada fent ús del model excèntric.

En resum, per explicar la primera anomalia ens servirem l'equant, i per explicar la segona ens servirem del model d'epicicle sobre deferent. Un cop conceptualitzats els models, Ptolemeu es dedicarà a dotar-los de valors numèrics que s'ajustin a les observacions. Per proporcionar aquests valors numèrics, tant en l'explicació del model de la lluna com dels planetes, Ptolemeu fa una assumpció: **la teoria de la longitud respecte l'eclíptica pot ser desenvolupada independentment de la teoria de la latitud**.

2.3.4 Els moviments mitjans de Saturn

El primer pas per descriure numèricament el moviment de Saturn serà determinar la seva velocitat angular mitjana. En l'època de Ptolemeu, s'havia observat que els planetes exteriors satisfeien la següent llei:

$$Y = P + R \tag{1}$$

on Y es el nombre d'anys -enter-, R el nombre de retorns a la mateixa longitud i P el nombre de retrogradacions.

Els astrònoms babilonis havien determinat que per al cas de Saturn la relació era la següent: $256 \cdot T_a = 9 \cdot T_t = 265^a$ (a partir d'ara usarem la notació: $n^a = n$ anys, $n^d = n$ dies i $^h = n$ hores).

Ptolemeu cita una altra relació: $57 \cdot T_a = 2 \cdot T_t = 59^a$ proposada per Hiparc[14]. És a dir:

- Es produïen 57 anomalies en
- 2 voltes + $1°; 43$ voltes en $\qquad (a)$
- $59^a + 1,45^d$ (és a dir, 59 anys + 1 dia + $(0,45$ dies$=10^h)$=$59^a 1^d 10^h$)

A partir d'ara usarem la notació sexagesimal: en $r^x; s, t, u, ...$, x expressa la unitat de mesura i $r^x; s, t, u, ...$ significa $r + s/60 + t/60^2 + u/60^3 + ...$ D'aquesta manera: $1°; 43$ significa $1 + 43/60 = 1,717$ graus.

A partir de (a), Ptolemeu va poder calcular les velocitats angulars mitjanes del període de retrogradació i tròpic.

$$w_a = \frac{57 \cdot 360°}{59 \cdot 365; 14, 48 + 1; 45} = 0°; 57, 7, 43, 41, 43, 40 \;\; \textit{per dia} \tag{2}$$

[14] Ptolemy. *Almagest*, ed.by J.L. Heiberg, Teubner, 1903. IX,3

Tenint en compte que l'any tròpic son $365^d;14,48$ i 57 anomalies signifiquen un moviment de $57 \cdot 360°$; i

$$w_t = \frac{2 \cdot 360° + 1°;43}{59 \cdot 365;14,48 + 1;45} = 0°;2,0,33,31,28,51 \ \textit{per dia} \qquad (3)$$

Finalment, usant les relacions que hem mencionat abans:

$$T_t \cdot w_t = 360°$$

$$T_a \cdot w_a = 360°$$

Ptolemeu calcula que:

$$T_a = \frac{360°}{w_a} \approx 378^d$$

$$T_t = \frac{360°}{w_t} \approx 10743^d \approx 29^a$$

2.3.5 Les dades empíriques de la teoria de Saturn

Amb les dades anteriors, podem començar a construir el model geomètric del moviment de Saturn, que inclourà els models d'epicicle sobre deferent i equant. Ptolemeu construirà i ajustarà el model en base a les observacions de les que disposa. Tanmateix, ens trobem davant d'una dificultat important a l'hora de interpretar les dades de les que disposem. El moviment dels planetes, consta de dues anomalies, és a dir, dues desviacions independents del moviment uniforme i circular. Com podem saber com cada component afecta al moviment del planeta? En altres paraules, hauríem de de trobar una manera d'obtenir observacions de cada component **de manera independent**.

La resposta a l'anterior pregunta és que hi ha un tipus concret d'observacions que només depenen d'una de les dues components: **les oposicions planetàries**.

Les oposicions, representades a la figura 10, es donen a la meitat del moviment de retrogradació del planeta. De manera que en aquest punt, el planeta que es troba a l'apogeu A_v o al perigeu Π_v de l'epicicle (depenent del sentit del seu gir) està alineat amb el centre de l'epicicle C i amb la Terra T. Això significa que a les oposicions el planeta té la mateixa longitud respecte de la eclíptica que el centre de l'epicicle C, **el moviment del qual està afectat només per la primera anomalia**.

Les observacions en les que es basa la teoria de Saturn són les que es mostren en la següent taula. Les tres primeres observacions P_1, P_2 i P_3 són oposicions. Totes les observacions que es mostren van ser efectuades per Ptolemeu, excepte l'última que va ser realitzada per un astrònom babilònic desconegut. En la taula s'hi mostren 5 columnes. La columna I indica el nom amb què ens referirem a l'observació. La

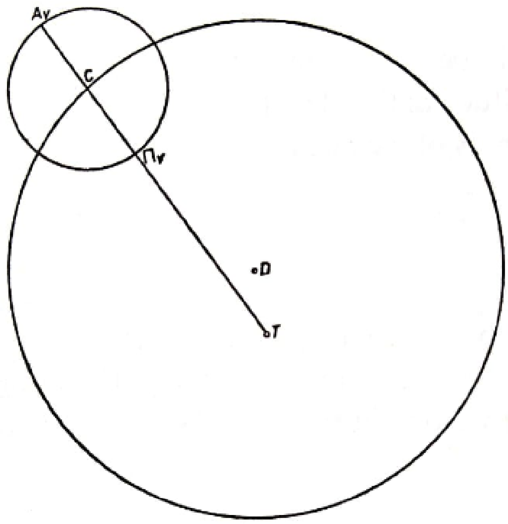

Figura 10: Oposició

columna II inclou, per ordre, l'any, la data i la localització de l'observació proporcionades per Ptolemeu segons el calendari egipci. La columna III indica l'hora en que es va realitzar la observació. La columna IV indica l'angle en que s'observa el planeta Saturn, mesurat des de l'equinocci de primavera (Υ figura 11). Finalment, a la columna V detallo la data en el calendari julià, per exemple en el primer cas: 26 de Març de l'any 127 després de Crist.

I	II	III	IV	V
P_1	Hadrian 11, Pachon 7/8, Alexandria	6^h	$181°;13$	D.C. 127 Març 26
P_2	Hadrian 17, Epiphi 18, Alexandria	4^h	$249°;40$	D.C. 133 Juny 3
P_3	Hadrian 20, Mesore 24, Alexandria	Migdia	$284°;14$	D.C. 136 Juliol 8
P_4	Antoninus 2, Mechir 6/7, Alexandria	8^h	$309°;4$	D.C. 138 Desembre 12
P_5	Nabonassar 519, Tybi 14, Mesopotamia	6^h	$159°;30$	A.C. 229 Març 1

Taula 1: Oposicions de Saturn

2.3.6 Primera aproximació de l'excentricitat de l'equant

En primer lloc, Ptolemeu es disposa a determinar l'**exentricitat** respecte de la Terra del cercle equant. En aquest model -almenys en la primera fase del disseny- **el cercle deferent** (cercle portador de l'epicicle) **coincideix amb el cercle equant**.

Sobre l'equant, el centre de l'epicicle C **es mou en una velocitat angular constant** w_t, que hem determinat a 3. Inicialment, Ptolemeu dona el valor que fa servir habitualment al radi de l'equant: $R = 60^p$ on 1^p és una unitat de mesura particular del planeta en qüestió.

A la figura 11, hi podem observar:

- La longitud λ_a de l'apogeu A mesurada des de l'equinocci de primavera Υ.
- L'excentricitat del centre de l'equant E respecte de la Terra T, que, per raons que explicarem mes endavant, anomenem $2e$.
- Les tres primeres oposicions de la taula P_1^*, P_2^*, P_3^* amb les respectives longituds λ_1, λ_2, λ_3.
- Les tres successives posicions de l'epicicle C_1, C_2, C_3. Les observacions P_1^*, P_2^*, P_3^* són son projeccions efectuades des de la Terra T en les tres successives posicions del centre de l'epicicle C_1, C_2 i C_3

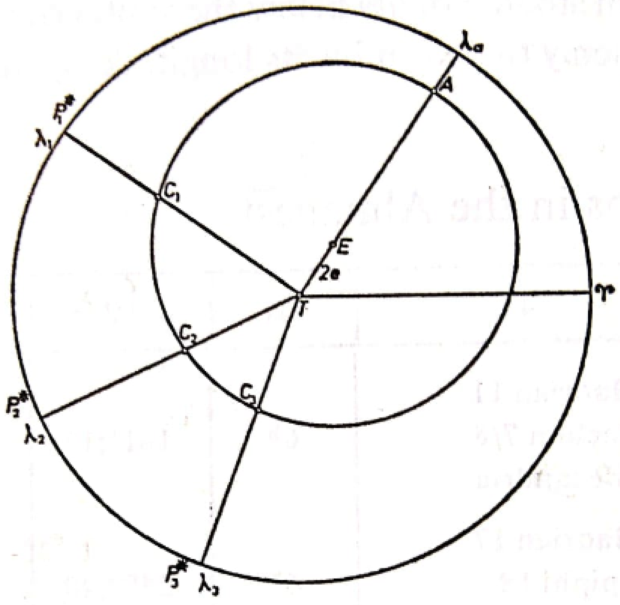

Figura 11: Oposicions observades

Calculem la diferència entre les longituds i els intervals de temps de P_1^*, P_2^* i P_3^*. En detallo el càlcul en el primer cas.

Intervals de temps:

$$t_2 - t_1 = (133 - 127)^a(6 + 30 + 31 + 3)^d + (24 - 2)^h = 6^a 70^d 22^h$$

$$t_3 - t_2 = 3^a 35^d 20^h$$

Longituds:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \left(240 + \frac{40}{60}\right) - \left(181 + \frac{13}{60}\right) = 68,45 = 68 + 0,45 \cdot 60 = 68°; 27 = P_1^* P_2^*$$

$$\lambda_3 - \lambda_2 = 34°; 34 = P_2^* P_3^*$$

Usualment Ptolemeu calcula la longitud mitjana del planeta a partir de les taules de Saturn (i dels altres planetes) que es troben a l'*Almagest*[15], que faciliten les velocitats mitjanes per hora, per mes (30^d) i per any Egipci (365^d) en períodes de 18 anys. Es fàcil amb aquestes taules i donat un temps t, calcular la longitud mitjana i l'anomalia mitjana amb la formula següent:

$$\lambda_m(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) \tag{4}$$

$$a_m(t) = a_m(t_0) + w_a(t - t_0) \tag{5}$$

Ptolemeu fixa t_0 en Nabonassar 1, Thoth 1, Migdia en el calendari egipci que correspon amb el 26 de Febrer de l'any 747 A.C. Els valors $\lambda_m(t_0)$ i $a_m(t_0)$ són fixes i més endavant els calcularem.

Usant les fórmules anteriors, Ptolemeu calcula les longituds mitjanes. Detallo el càlcul en el primer cas:

$$\begin{aligned}\lambda_{m2} - \lambda_{m1} = (\lambda_m(t_0) + w_t(t_2 - t_0)) - (\lambda_m(t_0) + w_t(t_1 - t_0)) &= \\ w_t(t_2 - t_1) &= \\ 0°;2,0,33,31,28,51 \cdot (6 \cdot 365;14,48 + 70) &=\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{60} + \frac{33}{60^3} + \frac{31}{60^4} + \frac{28}{60^5} + \frac{51}{60^6}\right) \cdot \left(6 \cdot \left(365 + \frac{14}{60} + \frac{48}{60^2}\right) + 70\right) \approx 75°;43$$

En resum, les longituds mitjanes queden:

$$\lambda_{m2} - \lambda_{m1} \approx 75°;43 = \angle C_1EC_2 \tag{6}$$

$$\lambda_{m3} - \lambda_{m2} \approx 37°;52 = \angle C_2EC_3 \tag{7}$$

En aquest punt, i en general, Ptolemeu fixa el centre de coordenades en l'apogeu A. Així doncs, obtenim c i c_m amb aquesta correcció:

$$c = \lambda - \lambda_a \tag{8}$$

$$c_m = \lambda_m - \lambda_a \tag{9}$$

Calculem doncs els angles usant les relacions anteriors. De 4 i 8, podem derivar-ne l'expressió:

$$c_m(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) - \lambda_a(t) \tag{10}$$

Més endavant demostrarem que la longitud de l'apogeu és constant per aquestes observacions. Usem aquí aquest resultat: $\lambda_a(t) = \lambda_a(t_0)$ i la igualtat (7):

$$c_m(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) - \lambda_a(t) = c_m(t_0) + \lambda_a(t_0) + w_t(t - t_0) - \lambda_a(t_0)$$

De manera que l'expressió 10 queda:

$$c_m(t) = c_m(t_0) + w_t(t - t_0) \tag{11}$$

[15] PTOLEMY. *Almagest*, ed.by J.L. Heiberg, Teubner, 1903. IX, 4

que ens dona el centre mitjà com una funció lineal de temps. Calculem ara la diferència entre el centre i centre mitjà de les tres primeres observacions:

$$c_2 - c_1 = (\lambda_2 - \lambda_a) - (\lambda_1 - \lambda_a) = \lambda_2 - \lambda_1 = 68°; 27 \tag{12}$$
$$c_3 - c_2 = (\lambda_3 - \lambda_a) - (\lambda_2 - \lambda_a) = \lambda_3 - \lambda_2 = 34°; 34 \tag{13}$$

$$c_m(t_2) - c_m(t_1) = w_t(t_2 - t_1) = 75°; 43 \tag{14}$$
$$c_m(t_3) - c_m(t_2) = w_t(t_2 - t_1) = 37°; 52 \tag{15}$$

Ens trobem ara amb el problema de determinar l'excentricitat $2e$ d'un cercle excèntric (l'equant) sobre el que dos arcs consecutius de $75°; 43$ i $37°; 52$ son projectats des del centre T de la Terra sobre l'eclíptica com arcs de $68°; 27$ i $34°; 34$ graus respectivament.

2.3.7 El problema de les tres observacions

A l'*Almagest*, Ptolemeu resol aquest problema per cadascun dels planetes. He generalitzat el càlcul que realitza Ptolemeu en el cas dels planetes superiors. En el cas dels planetes inferiors, el càlcul es pràcticament el mateix, amb la diferència que el centre de la Terra T es troba fora del cercle equant.

Siguin C_1, C_2 i C_3 tres successives posicions del centre de l'epicicle. Siguin α_1=C_1C_2 i α_2=C_2C_3 els arcs entre els successius centres, vistos des del punt T amb angles π_1 i π_2 respectivament.Volem determinar la distància o excentricitat $2e$ entre T i el centre del cercle equant E.

En la figura 12, s'observa el cercle equant, les tres posicions del centre de l'epicicle C_1, C_2 i C_3 sobre el cercle equant i la Terra T. Recordem que Ptolemeu dona un valor arbitrari al radi de l'equant: $R = 60^p$ on 1^p és una unitat particular del planeta en qüestió.

Tracem una linia recta TC_2 des de T fins un dels tres centres. Aquí hem triat C_2. Aquesta recta interseca el cercle equant en D. Dibuixem DZ com un segment perpendicular a TC_1 i DH com a perpendicular a TC_3. Finalment, dibuixem les cordes DC_1 i DC_3.

Dels triangles rectangles DTH i C_1EZ en deduïm la relació:

$$C_1D = \frac{DZ}{sin(\angle ZC_1D)} \tag{16}$$

Tenim que $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{2}$ i $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{2}$ per ser β_1 i β_2 angles inscrits en una circumferència. Per altra banda, del triangle rectangle DZT n'obtenim que $DZ = sin(\pi_1) \cdot TD$.

Per tant,

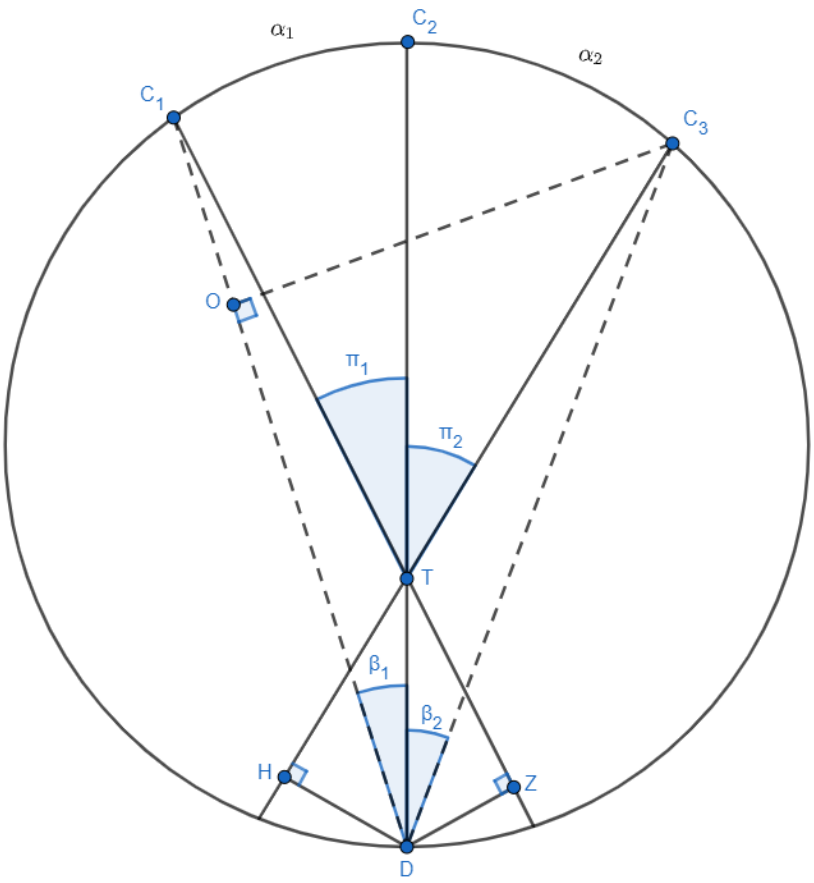

Figura 12: Centre del epicicles sobre l'equant

$$C_1D = \frac{sin(\pi_1) \cdot TD}{sin(\pi_1 - \beta_1)} = \frac{sin(\pi_1) \cdot TD}{sin(\pi_1 - \frac{\alpha_1}{2})} \tag{17}$$

Realitzant el mateix procediment, obtenim que

$$C_3D = \frac{sin(\pi_2) \cdot TD}{sin(\pi_2 - \frac{\alpha_2}{2})} \tag{18}$$

Del triangle C_3OD n'obtenim:

$$C_3O = C_3D \cdot \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \tag{19}$$

$$DO = C_3D \cdot \cos\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \tag{20}$$

Això ens permet trobar, per Pitàgores:

$$C_1O = C_1D - DO \tag{21}$$
$$C_1C_3^2 = C_1O^2 + C_3O^2 \tag{22}$$

Però, per la llei de les cordes, tenim:

$$C_1C_3 = 2 \cdot R \cdot sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \tag{23}$$

Per tant, podem escriure 22 com:

$$4 \cdot R^2 \left(sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 =$$
$$TD^2 \cdot \left(\left(\frac{sin\pi_1}{sin\left(\pi_1 - \frac{\alpha_1}{2}\right)} - \frac{sin\pi_2}{sin\left(\pi_2 - \frac{\alpha_2}{2}\right)} \cdot cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{sin\pi_2}{sin\left(\pi_2 - \frac{\alpha_2}{2}\right)} \cdot sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2\right)$$

Amb l'anterior expressió obtenim el quocient entre el TD i R com una funció dels valors coneguts α_1, α_2, π_1 i π_2

$$\frac{TD}{R} = f(\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2) \tag{24}$$

Per trobar l'excentricitat, ens servirem d'una altra relació que contingui R. Per obtenir-la, primer trobarem l'arc $C_3D = \alpha_3$ amb la llei de les cordes:

$$C_3D = 2 \cdot R \cdot sin\frac{\alpha_3}{2} \tag{25}$$

que, combinant-ho amb 18 ens dóna:

$$sin\frac{\alpha_3}{2} = \frac{TD}{R} \cdot \frac{sin\pi_2}{2 \cdot sin\left(\pi_2 - \frac{\alpha_2}{2}\right)} \tag{26}$$

on $\frac{TD}{R}$ és coneguda de 24, per tant podem calcular la corda:

$$C_2D = 2R \cdot sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \tag{27}$$

En la figura 13, A és l'apogeu, P el perigeu i E el centre de l'equant. Seguim tenint els punts T com a centre de la Terra i C_1,C_2 i C_3 com els centres dels epicicles.

Aplicant Euclides II,6[16], Ptolemeu obté la relació:

[16] Euclides. *Elementos*, II, 6

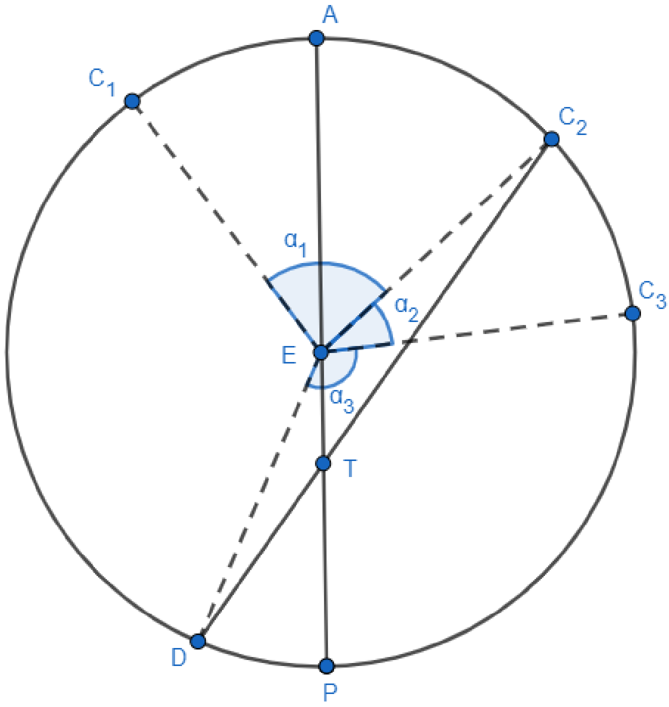

Figura 13: Excentricitat del centre de l'equant E respecte T

$$TA \cdot TP + TE^2 = EP^2$$

on el primer terme de la suma és igual a $C_2T \cdot TD = (C_2D - TD) \cdot TD$. Per tant obtenim:

$$TD(C_2D - TD) + TE^2 = EP^2 \Leftrightarrow$$
$$TE^2 = EP^2 - TD(C_2D - TD) \Leftrightarrow$$
$$TE^2 = EP^2 \left(1 - \frac{TD}{EP}\left(\frac{C_2}{EP} - \frac{TD}{EP}\right)\right)$$

on $EP = R$ i $TE = e$, per tant:

$$e^2 = R^2 \left(1 - \frac{TD}{R}\left(\frac{C_2}{R} - \frac{TD}{R}\right)\right) \tag{28}$$

Un cop tenim l'equació que ens permetrà determinar l'excentricitat, podem aplicar-la al cas de Saturn amb els següents paràmetres:

$$\alpha_1 = c_2 - c_1 = 68°; 27$$
$$\alpha_2 = c_2 - c_1 = 34°; 34$$
$$\pi_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_{2m} - \lambda_{1m}) = -7°; 16$$
$$\pi_2 = (\lambda_3 - \lambda_2) - (\lambda_{3m} - \lambda_{2m}) = -3°; 18$$
$$R = 60^p$$

i obtenim que: $2e \approx 7^p; 8$

2.3.8 La bisecció de l'excentricitat

Un cop obtinguda l'excentricitat, només ens caldria calcular el radi per obtenir un model complet amb el que poder testejar-lo (i modificar-lo si calgués) a partir de les observacions. Però Ptolemeu no segueix aquesta línia sinó que introdueix una modificació significativa al model: descarta l'equant **com a portadora del centre de l'epicicle i bisecciona l'excentricitat**, deixant d'identificar el cercle equant amb el cercle deferent (veure apartat 2.2.3). És per aquest motiu que abans hem anomenat a l'excentricitat $2e$.

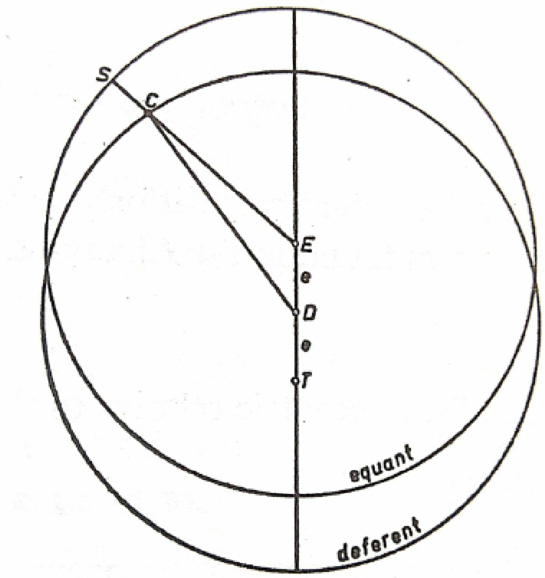

Figura 14: Equant i deferent

El motiu pel que Ptolemeu pren aquesta decisió no l'explica en detall, l'únic que afirma és que ell *"has found that the epicycle centres revolve upon circles fo the same size as the eccentric circles producing the anomaly, but not with the same centres"*[17].

[17]PTOLEMY. *Almagest*, ed.by J.L. Heiberg, Teubner, 1903. IX, 5

El proper pas es doncs determinar el centre del cercle deferent D (veure figura 14), com un punt mitjà entre el centre de l'equant E i el centre de la Terra T. És a dir, el nou model estarà proveït de dos cercles excèntrics de radi $R = 60^p$, però amb centres diferents. El primer serà l'equant (centre E), que s'ha descartat com a portador del centre de l'epicicle, **però es manté com a centre del moviment uniforme**, en la mesura en que un cert punt S es mou sobre l'equant amb una velocitat angular constant w_t. La segona és el deferent (centre D), sobre la que el centre de l'epicicle C és determinat **com el punt d'intersecció del cercle deferent i el radi de rotació ES de l'equant**.

2.3.9 L'exentricitat del cercle deferent

La introducció del deferent invalida la deducció prèvia sobre l'excentricitat del cercle equant. A la figura 15 podem veure que quan el centre de l'epicicle és desplaçat de S a C, el planeta en les oposicions ja no es troba en la direcció TS, sinó en la direcció TC. És a dir, que **el que ens mostren les oposicions és la longitud respecte de la eclíptica del punt C, no del punt S**. Per tant podem aprofitar el càlcul que hem fet abans de l'excentricitat, **però corregint els angles un factor de $\delta = STC$ graus**.

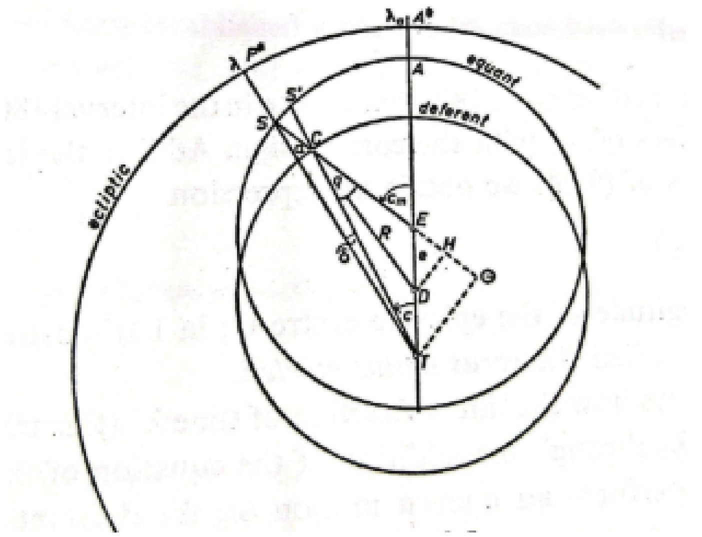

Figura 15: Correcció de l'angle en les oposicions

Abans però de determinar aquest factor δ, trobarem una expressió de la distància $TC = \rho(c_m)$ des del centre de l'epicicle al centre de la Terra. Aquesta expressió serà una funció del centre mitjà c_m, definit a 11.

Tenim que: $TC^2 = T\Theta^2 + C\Theta^2$ (veure figura 15). Del triangle $T\Theta E$ en deduïm que $T\Theta = 2esin(c_m) = 2 \cdot DH$. Del mateix triangle, en deduïm $E\Theta = 2ecos(c_m) = 2 \cdot EH = 2 \cdot H\Theta$.

Llavors, per Pitàgores, $CH = \sqrt{R^2 - DH} = \sqrt{R^2 - (e \cdot sin(c_m))^2}$, per tant, $C\Theta = CH + H\Theta = CH + 2 \cdot cos(c_m)$. I usant l'anterior, obtenim finalment que:

$$\rho(c_m) = TC = \sqrt{(\sqrt{R^2 - (e \cdot sin(c_m))^2} + e \cdot cos(c_m))^2 + (2e \cdot sin(c_m))^2} \tag{29}$$

Per a determinar δ usarem la igualtat $\delta = q - \alpha$. Calculem doncs aquests dos angles.

Tenim que $sin(q) = \frac{T\Theta}{TC}$. Com que hem calculat TC com una funció ρ de c_m, podem obtenir que

$$sin(q(c_m)) = \frac{2e \cdot sin(c_m)}{\rho(c_m)} \tag{30}$$

Del triangle TCE se'n segueix la relació: $c = c_m(t) - q(c_m)$. Afegint la longitud de l'apogeu λ_a a cada costat i usant les relacions 8, obtenim l'expressió:

$$\lambda_c = \lambda_m(t) - q(c_m) \tag{31}$$

Amb un càlcul similar a l'anterior, Ptolemeu determina la distància TS i l'angle α usant que:

$$sin(\alpha) = \frac{T\Theta}{TS} = \frac{2e \cdot sin(c_m)}{TS} \tag{32}$$

Obtenim d'aquesta manera $\delta = q - \alpha$. Ara només cal corregir les observacions amb el factor δ tal com hem mencionat abans:

$$\lambda_{corregida} = \lambda_{observada} + \delta \tag{33}$$

Recordem que $c_m(t) = c_m(t_0) + w_t(t - t_0)$ i $c_m(t_0) = \lambda_m(t_0) - \lambda_a(t_0) = 296°; 43 - 233°; 0$ i que t_0 és Nabonassar 1, Thoth 1, Migdia en el calendari egipci (26 de Febrer de l'any 747 A.C.). Els dos últims valors $\lambda(t_0)$ i $\lambda_a(t_0)$ no els havíem calculat. Pel que fa a $\lambda_a(t_0)$, Ptolemeu havia calculat en llibres anteriors que la posició de l'apogeu en t_0 és de $233°; 0$. Respecte a $\lambda(t_0)$, ho calcularem en detall més endavant. He volgut avançar el resultat per mostrar que podem realitzar el calcul de $q(c_m)$ ja que efectivament coneixem $c_m(t)$:

$$c_m(t_1) = 302°; 55 \tag{34}$$
$$c_m(t_2) = 18°; 38 \tag{35}$$
$$c_m(t_3) = 56°; 43 \tag{36}$$

Ara, usant $c_m(t)$, podem calcular $\delta = q(c_m) - \alpha(c_m)$ per cada temps t en que es donen les tres oposicions que hem usat i obtenim:

Oposició	$\lambda_{observada}$	δ	$\lambda_{corregida}$
P_1	$181°;13$	$-0°;9$	$181°;4$
P_2	$249°;40$	$0°;6$	$249°;46$
P_3	$288°;14$	$0°;10$	$284°;24$

Taula 2: Oposicions de Saturn corregides

Per calcular l'excentricitat només ens queda corregir els valors α_1, α_2, π_1, π usant $\lambda_{corregida}$ i finalment usar les relacions 24 i 28 que hem demostrat anteriorment:

$$\begin{aligned}
&\lambda_2 - \lambda_1 = 68°;42\\
&\lambda_3 - \lambda_2 = 34°;38\\
&c_2 - c_1 = 68°;42\\
&c_3 - c_2 = 34°;38
\end{aligned}$$

Com que les diferències entre el λ_m depenen només de t, no varien amb la correcció δ i per tant son les que ja hem vist al punt 6. Per tant obtenim:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = c_2 - c_1 = 68°;42\\
&\alpha_2 = c_2 - c_1 = 34°;48\\
&\pi_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_{2m} - \lambda_{1m}) = -7°;01\\
&\pi_2 = (\lambda_3 - \lambda_2) - (\lambda_{3m} - \lambda_{2m}) = -3°;23\\
&R = 60^p
\end{aligned}$$

i aplicant-ho a 24 i 28:

$$\begin{aligned}
&\frac{TD}{R} = f(\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2)\\
&e^2 = R^2\left(1 - \frac{TD}{R}\left(\frac{C_2}{R} - \frac{TD}{R}\right)\right)
\end{aligned}$$

obtenim una excentricitat corregida de $2e = 6^p;50$, és a dir, que la distància des del centre del cercle deferent D al centre de la Terra en la segona aproximació és:

$$e = 3^p;25 \tag{37}$$

2.3.10 Descripció del moviment de l'epicicle

Fins ara hem obtingut les expressions definitives de:

- La distància entre el centre de l'epicicle C i la Terra: $\rho(c_m)$.

- L'excentricitat del cercle equant i deferent respecte el centre de la Terra, que son $2e$ i e respectivament.

Per seguir desenvolupant el model, en aquest apartat determinarem el moviment del centre de l'epicicle C sobre el cercle deferent.

En primer lloc, Ptolemeu determina el sentit del gir del planeta sobre l'epicicle. Hem vist anteriorment que a nivell teòric aquest moviment podia ser tant en sentit directe (cas en que l'oposició té lloc en l'apogeu A_v) o indirecte (l'oposició té lloc en el perigeu Π_v).

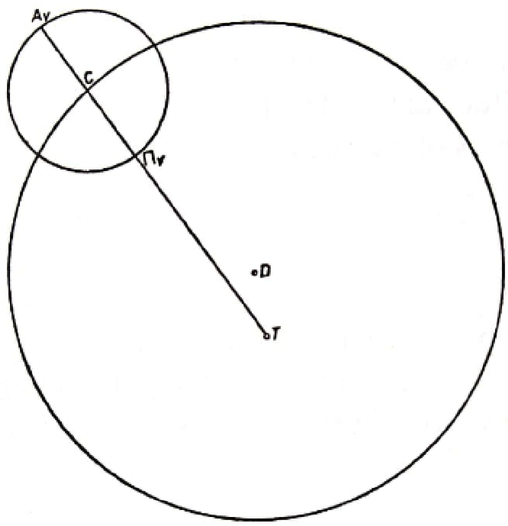

Figura 16: Oposició

Tanmateix, Ptolemeu concreta el sentit del gir amb aquests dos fets:

- El màxim moment de brillantor del planeta es dóna en les oposicions
- Les oposicions observades es donen a la meitat del període de retrogradació

Els fets anteriors indiquen que el planeta es troba retrogradant quan hi ha una distància **mínima** del planeta a la Terra (per això veiem el planeta més brillant), per tant la retrogradació haurà de donar-se en el perigeu Π_v de l'epicicle. Afegint que el moviment regular del planeta és d'oest a est, i que el moviment de retrogradació és d'est a oest, concloem doncs que el moviment del planeta sobre l'epicicle és directe.

Passem a descriure el moviment del planeta P sobre l'epicicle amb centre C (veure figura 17).

Per a fer-ho introduïm dues noves variables:

- L'anomalia mitjana a_m: és la distància angular A_mP de l'apogeu mitjà A_m de l'epicicle al planeta P. Coincideix amb el punt de màxima distància **respecte el centre de l'equant** E. És una funció lineal del temps ja introduïda anteriorment a (5): $a_m(t) = a_m(t_0) + w_a(t - t_0)$

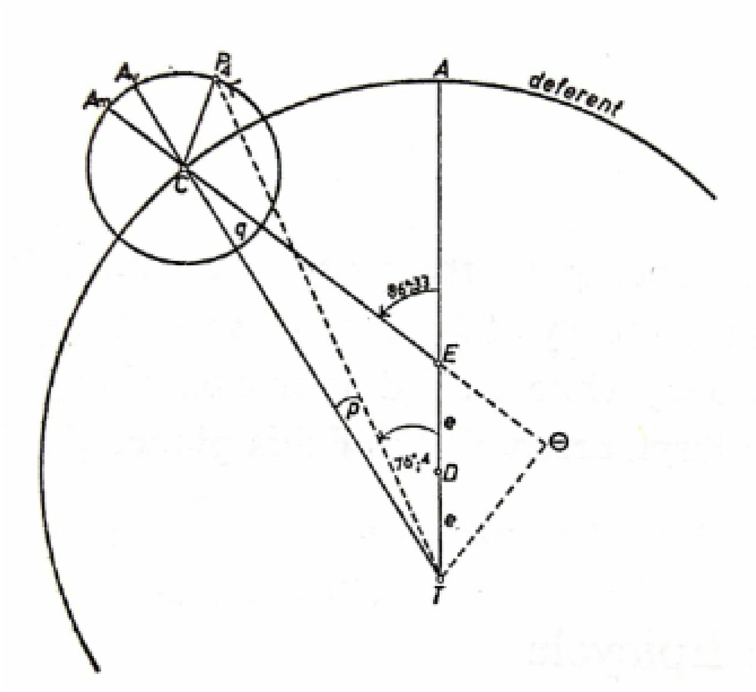

Figura 17: Moviment del planeta sobre l'epicicle

- L'anomalia real a_v: és la distancia angular A_vP de P fins a l'apogeu real A_v. Coincideix amb el punt de màxima distància **respecte el centre de la Terra** T.

De la figura 17, per la relació dels angles, se'n segueix que:

$$a_v = a_m(t) - q(c_m) \tag{38}$$

2.3.11 Mesura de l'epicicle

Només ens queda pendent de determinar el radi de l'epicicle $r = CP$ (veure figura 18).

No podem determinar-lo a partir de les observacions de les oposicions, ja que en aquests casos el radi apunta directament cap a la Terra. Per tant, Ptolemeu aquí se serveix de l'observació P_4:

I	II	III	IV	V
P_4	Antoninus 2, Mechir 6/7, Alexandria	8^h	$309°;4$	D.C. 138 Desembre 12

Taula 3: Oposicions de Saturn

Calculem el centre:

$$c(t_4) = \lambda(t_4) - \lambda_a = 309°;4 - 233°;0 = 76°;04$$

La diferència de temps entre P_3 i P_4 és:

$$t_4 - t_3 = 2^a 167^d 8^h$$

Aprofitant que a 34 hem calculat $c_m(t_3)$, busquem $c_m(t_4)$ posant $t_0 = t_3$:

$$c_m(t_4) = c_m(t_3) + w_t(t_4 - t_3) = 56°;43 + (0°;2,0;33;31;28;51) \cdot (2^a 167^d 8^h) = 86°;33$$

El valor $c_m(t_4)$ ens situa el centre de l'epicicle en el cercle deferent, tal com s'observa en la figura 17.

Busquem ara la posició de planeta sobre l'epicicle calculem $q(c_m)$ i $a_m(t_4)$ servint-nos de les expressions 30 i 5 respectivament:

$$\begin{aligned} sin(q(c_m(t_4))) &= \frac{2e \cdot sin(c_m)}{\rho(c_m)} \\ &= \frac{2 \cdot 3^p;25 \cdot sin(86°;33)}{\sqrt{(\sqrt{60^2 - (3^p;25 \cdot sin(86°;33))^2} + 3^p;25 \cdot cos(86°;33))^2 + (2 \cdot 3^p;25 \cdot sin(86°;33))^2}} \\ &= 0°;6,46 \end{aligned}$$

Per tant, $q(c_m(t_4)) = 6°;29$.

Calculem també l'anomalia mitjana:

$$a_m(t_4) = a_m(t_3) + w_a(t_4 - t_3) = a_m(t_3) + (0°;57,7,43,41,43,40)(2 \cdot 365 + 167.3)$$

Com que t_3 es una oposició, i sabem que en el cas de Saturn les oposicions es donen en el perigeu, podem extreure de la figura 17 que $a_v = -180°$ i usant que $q(c_m(t_3)) = 5°;16$ i l'expressió 38: $a_v = a_m(t) - q(c_m)$ obtenim que $a_m(t_3) = 174°;44$ i per tant que $a_m(t_4) = 309°;8$.

Finalment, calculem el centre usant 8 i que $\lambda_a = 233°;0$

$$c = \lambda - \lambda_a = 309°;4 - 233°;0 = 76°;4 \quad (39)$$

Amb les expressions anteriors podrem trobar el radi de l'epicicle. Sigui el triangle TCE de la figura17. Per la relació entre els angles, es compleix que $c_m = q + c - p$, i usant els resultats anteriors obtenim que:

$$p = q + c - c_m = 6°;29 + 76°;4 - 86°;33 = -4°;0$$

Per altra banda, del triangle TCP obtenim que:

$$\begin{aligned} \angle PCT &= a_m - 180° + q = 135°;37 \\ \angle CPT &= 180° - (135°;37 + 4°;0) = 40°;23 \end{aligned}$$

ja vam veure a 29 que $TC = \rho(c_m) = 60^p;29$.

Finalment, aplicant la relació del sinus al triangle obtenim:

$$r = \frac{sin(4°;0) \cdot 60^p;29}{sin(40°;23)} \tag{40}$$

$$r = 6^p;30 \tag{41}$$

2.3.12 El model complet

Amb els resultats que hem obtingut en els anteriors apartats, ja podem descriure el model de Saturn complet. Ho farem sobre la figura 18 usant la relació $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP}$, que correspon a la construcció geomètrica de la posició del del planeta.

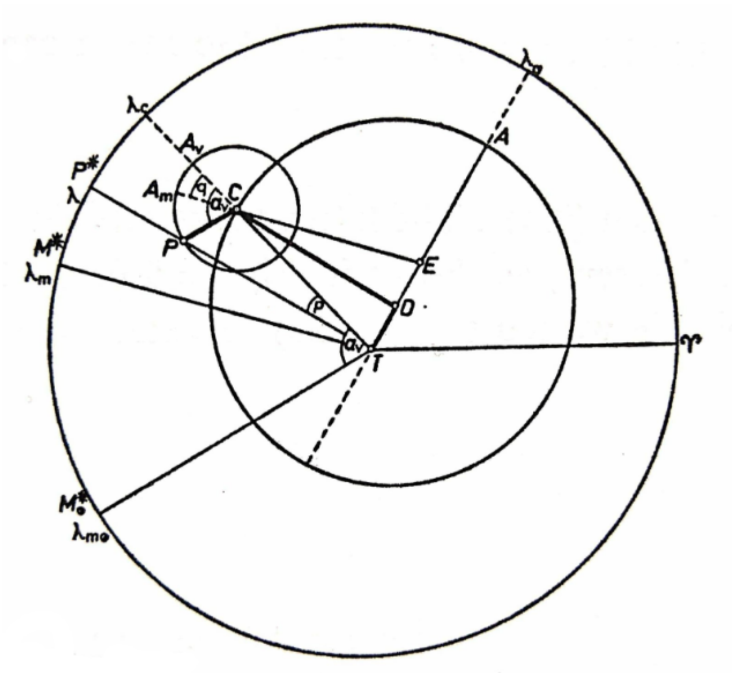

Figura 18: Moviment de l'epicicle

En primer lloc, $\overrightarrow{TD}$ té una llargada $e = 3^p;25$, tal com hem vist a 37. Ptolemeu suposa que l'apogeu del Sol A és un punt fixat relatiu a les estrelles fixes, però malgrat això, la seva longitud λ_a incrementa 1° cada 100^a per la precessió dels equinoccis. Per tant obtenim:

$$\lambda_a(t) = \lambda_a(t_0) + 1° \cdot (t - t_0) \tag{42}$$

on $(t - t_0)$ s'expressa en segles.

En segon lloc, el vector $\overrightarrow{DC}$ té una llargada constant de $R = 60^p$ i rota al voltant de D descrivint el cercle deferent sobre el que es mou el centre de l'epicicle C amb una velocitat w_t. Com ja hem mencionat, aquest aquesta rotació no es veu de manera uniforme **des de** D, sinó **des del centre de l'equant** E.

Finalment, tenim el vector de l'epicicle $\overrightarrow{CP}$ amb una llargada constant de $r = 6^p; 30$, que es mou en una velocitat angular constant de w_a.

2.3.13 L'equació de l'argument

L'angle $p = \angle PTC$ respecte el que s'observa des de la Terra el radi de l'epicicle CP, també pot ser expressat mitjançant la següent relació (veure figura 19):

$$p = \lambda - \lambda_c \tag{43}$$

on λ_c és la longitud del centre de l'epicicle donada per 31. El valor de p pot ser trobat com una funció del centre mitjà c_m i l'anomalia real a_v. Veiem-ho:

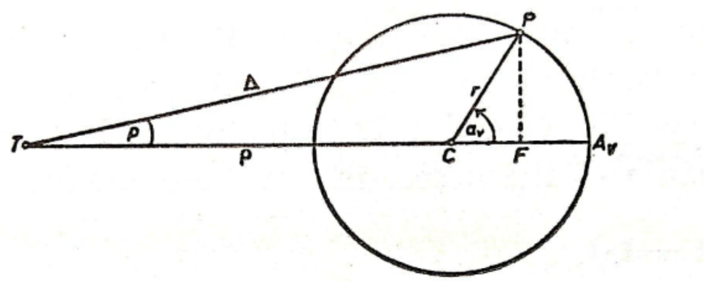

Figura 19: Mesura de p

En primer lloc calculem $\Delta = TP$, la distància del planeta a la Terra T. Del triangle TFP obtenim: $\Delta^2 = (TC + CF)^2 + FP^2$ on TC ho obtenim de 29 i:

$$CF = r \cdot cos(a_v)$$
$$FP = r \cdot sin(a_v)$$

Per tant obtenim:

$$\Delta(c_m, a_v) = \sqrt{(\rho(c_m) + r \cdot cos(a_v))^2 + (r \cdot sin(a_v))^2} \tag{44}$$

A partir de l'anterior expressió, podem obtenir l'equació de l'argument com una funció de dues variables a_v i c_m:

$$sin(p(a_v, c_m)) = \frac{r \cdot sin(a_v)}{\Delta(c_m, a_v)} \tag{45}$$

I finalment, per la relació 43 obtenim:

$$\lambda = \lambda_c + p(a_v, c_m) \tag{46}$$

2.3.14 Els paràmetres del model

Un cop completat el model, Ptolemeu calcula els següents paràmetres del model de Saturn:

$$\begin{aligned}
\lambda_m(t_0) &= 296°;44 \\
\lambda_a(t_0) &= 224°;10 \\
a_m(t_0) &= 34°;02
\end{aligned}$$

2.3.15 La fórmula final del moviment de Saturn

Finalment, hem completat el model de Saturn, fet que ens permetrà assolir el nostre propòsit **d'obtenir longitud del planeta sobre l'eclíptica mesurada des de l'equinocci de primavera (♈) donat un temps t**. Tot el que hem derivat fins ara es pot resumir en la següent fórmula:

$$\lambda(t) = \lambda_m(t) + q(c_m) + p(a_v, c_m) \tag{47}$$

On:

1. La diferència $(t - t_0)$ es calcula
2. $w_t(t - t_0)$ es calcula a partir de 3
3. $w_a(t - t_0)$ es calcula a partir de 2
4. La longitud mitjana $\lambda_m(t)$ s'obté a partir de 4
5. L'anomalia mitjana $a_m(t)$ s'obté a partir de 5
6. Longitud de l'apogeu corregida $\lambda_a(t)$ s'obté a partir de 42
7. El centre mitjà $c_m(t)$ s'obté a partir de 8
8. La funció $\rho(c_m)$ s'obté a partir de 29
9. L'equació del centre $q(c_m)$ s'obté a partir de 30
10. L'anomalia real $a_v(t)$ s'obté a partir de 38
11. L'equació de l'argument $p(a_v, c_m)$ s'obté a partir de 45

12. La longitud $\lambda(t)$ del planeta **respecte l'equinocci de primavera** (Υ) s'obté a partir de 47

Si restem la longitud de l'apogeu λ_a tal com hem fet a 8 obtenim el centre real:

$$c(t) = c_m(t) + q(c_m) + p(a_v, c_m) \tag{48}$$

que ens dona la posició del planeta **relativa a l'apogeu** λ_a.

Desenvolupant l'expressió 47 amb les expressions pertinents obtenim:

$$\lambda(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) + \arcsin \frac{2e \cdot sin(c_m)}{\rho(c_m)} + \arcsin \frac{r \cdot sin(a_v)}{\Delta(c_m, a_v)}$$
$$\lambda(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) + \arcsin \frac{2e \cdot sin(\lambda_m(t_0) - \lambda_a(t) + w_t(t - t_0))}{\rho(c_m)} +$$
$$+ \arcsin \frac{r \cdot sin(a_m(t) - q(c_m))}{\sqrt{(\rho(c_m) - r \cdot cos(a_v))^2 + (r \cdot (a_v))^2}}$$

$$\lambda(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) +$$
$$+ \arcsin \frac{2e \cdot sin(\lambda_m(t_0) - \lambda_a(t) + w_t(t - t_0))}{\rho(c_m)} +$$
$$+ \arcsin \frac{r \cdot sin(a_m(t) - arcsin(\frac{2e \cdot sin(c_m)}{\rho(c_m)}))}{\sqrt{(\rho(c_m) - r \cdot cos(a_m(t) - arcsin(\frac{2e \cdot sin(c_m)}{\rho(c_m)}))^2 + (r \cdot (a_m(t) - arcsin(\frac{2e \cdot sin(c_m)}{\rho(c_m)})))^2}}$$

On encara ens ha quedat per afegir:

$$\rho(c_m) = \sqrt{(\sqrt{R^2 - (e \cdot sin(c_m)^2} + (2e \cdot cos(c_m)^2 + (2e \cdot (sin(c_m))^2}$$
$$c_m(t) = \lambda_m(t_0) - \lambda_a(t) + w_t(t - t_0)$$

L'expressió estesa de la fórmula anterior ens serveix per comprovar que efectivament Ptolemeu compleix el propòsit que s'havia fixat d'obtenir una expressió de la longitud del planeta respecte de la eclíptica donat un temps t. Només cal tenir en compte algunes dades constants per fer el càlcul:

$$R = 60^p$$
$$r = 6^p; 30$$
$$e = 3^p; 25$$
$$\lambda_m(t_0) = 296°; 44$$
$$\lambda_a(t_0) = 224°; 10$$
$$a_m(t_0) = 34°; 02$$

Evidentment el procediment per realitzar el càlcul no era usar l'expressió estesa de més amunt. Per a fer el càlcul l'*Almagest* proporcionava taules que et permetien, en la majoria dels casos, obtenir el resultat a partir d'operacions aritmètiques més o menys senzilles. A l'apartat 4 d'aquest treball calcularem la posició de Saturn el dia del naixement de Copèrnic: 19 de Febrer de 1473, tal com ho faria un astròleg.

3 El model copernicà

3.1 Context històric i naixement

Nicolau Copèrnic neix el 1473 a l'actual Polònia. Va estudiar a la universitat de Cracòvia durant els anys 1491 i 1494. En finalitzar els seus estudis, va viatjar per Itàlia i es matriculà a la Universitat de Bolonya, on estudià dret, medicina, grec i filosofia. Durant aquest període (1496-1499), va treballar com assistent de l'astrònom Domenico da Novara. Al 1501 va tornar a Polònia, on va ser nomenat canonge a la catedral de Frauenburg. Tot i el seu carreg, viatjà durant els anys 1501 i 1507 a Pàdua per estudiar dret i medicina.

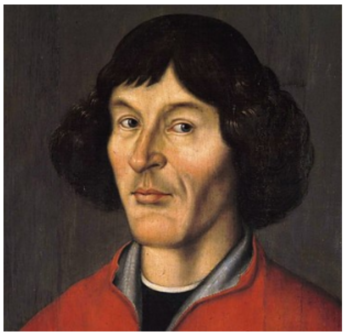

Figura 20: Nicolas Copèrnic

Copèrnic viu en una Europa revolucionada i en un segle que obrirà la era dels descobriments. Al 1543, any de la mort de Copèrnic, es publica la seva obra magna, *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (*De les Revolucions dels Orbes Celestes*) on es recupera i es defensa, després de més de catorze segles, un sistema heliocèntric. La publicació d'aquesta obra i les idees que en ella s'exposen donaran pas a una revolució científica que es produirà entre els segles XVI i XVII i que promourà l'aplicació de les matemàtiques en la majoria de camps del saber, començant per l'astronomia.

El segle XVI no espera les idees de Copèrnic com "un paper en blanc", sinó que aquestes idees apareixeran sobre un fons molt definit en què el predomini d'altres comprensions de l'univers i el poder de l'Església hi jugaran un paper clau.

Per una banda, la proposta que realitzarà Copèrnic s'enfronta a l'hegemonia ja molt establerta de l'aristotelisme i del sistema ptolemaic, que portava vigent catorze segles. Per altra banda, les Sagrades Escriptures també constituïen un altra front d'oposició a l'astronomia copernicana. Així, un altre problema del copernicanisme era la seva discrepància amb alguns passatges bíblics geocentristes. Tant Luter, ja abans de la publicació del *De Revolutionibus*, com Melanchthon, senyalaren el passatge en què Josué va manar que el Sol es parés com a refutació a Copèrnic:

Sol, atura't a Gabaon,
i tu, Lluna, a la vall d'Aialon.
I el Sol s'aturà, i la Lluna es detingué,
fins que el poble es venjà dels seus enemics.
A.T., Llibre de Josuè, X, 12-13

Més concretament, Luter es refereix a Copèrnic de la següent manera: *"un astrólogo advendizo que pretende probar que es la Tierra la que gira, y no el cielo, el firmamento, el sol o la luna [...]. Este loco echa completamente por tierra la ciencia de la astronomía, pero las Sagradas Escrituras nos enseñan que Josué ordenó al Sol, y no a la Tierra, que se detuviese"*[18]. Per la seva banda, Melanchthon diu *"muchos son los que consideran meritorio hacer lo que ese buscador de estrellas prusiano, que pone en movimiento a la Tierra y deja inmóvil a Sol. En verdad los gobernantes, si son sabios, deberían poner freno al desencadenamiento de los espíritus"*[19].

Aquests fragments van ser escrits per Luter i Melanchthon al 1539 i al 1541 respectivament. Aquestes dates són anteriors al *De Revolutionibus*, fet que ens informa que aquests autors ja tenien informació de les idees de Copèrnic, gràcies a l'opuscle manuscrit que es coneixia amb el nom de *'Commentariolus'* i les conferències que Copèrnic havia pronunciat.

Per tant, la conjuntura en la qual es troba Copèrnic ve definida per un predomini de l'aristotelisme i els models de Ptolemeu, així com per una autoritat indiscutible de les Sagrades Escriptures. Tanmateix, ja des de feia un temps l'esperit renaixentista havia portat a descobrir altres textos, i amb ells altres alternatives. Si bé hom es podia prendre aquestes alternatives amb un esperit purament literari, altres veien en elles propostes dignes de ser estudiades amb deteniment. I amb aquests ulls Copèrnic es detingué en l'estudi d'autors que ell mateix cita, i que proposen cosmologies alternatives i heliocentristes com Heràclides de Ponto o Aristarc de Samos.

Per altra banda, si bé hem dit que el sistema ptolemaic tenia un predomini indiscutible, ningú negava que aquest no podia explicar tots els fenòmens i s'enfrontava a problemes com ara l'absència de paral·laxi estel·lar, la falta de canvis de brillantor en el trajecte de Venus o la complexitat i poca harmonia que presentava, amb els seus epicicles i deferents que descrivien òrbites excèntriques. Aquest últim problema és el que l'autor veu més greu: Ptolemeu s'havia servit de moviments circulars i uniformes, però el sistema resultant no era en absolut harmoniós i Copèrnic ho fa notar a la carta al papa Pau III on afirma:

[18]Tal com apareix citat a: COPÈRNIC, Nicolau; DIGGES, Thomas; GALILEI, Galileo. *Opúsculos sobre el movimiento de la Tierra; Nicolás Copérnico, Thomas Digges, Galileo Galilei*, Madrid, Alianza, 1983. Pàg. 8.

[19]Tal com apareix citat a: COPÈRNIC, Nicolau; DIGGES, Thomas; GALILEI, Galileo. *Opúsculos sobre el movimiento de la Tierra; Nicolás Copérnico, Thomas Digges, Galileo Galilei*, Madrid, Alianza, 1983. Pàg. 8.

"No foren capaços de descobrir o deduir d'aquells pressupòsits la cosa més important, o sia, la forma del món i la simetria exacta de les seves parts; és a dir, que els va succeir com si hom prengués de diversos llocs unes mans, uns peus, un cap i tots els altres membres, tots ells perfectament dibuixats, però no proporcionats en relació amb un sol cos, ni encaixant entre ells en absolut, de manera que en resultaria un monstre més aviat que no pas un home".[20]

Però encara més: durant la segona meitat del segle XV, van anar arribant a Roma i Pàdua diversos escrits de caràcter astrològic procedents de Bizanci. Aquests escrits eren traduccions al grec (ara perdudes) de textos àrabs que introduïen variacions als models de Ptolemeu. Aquest era un símptoma més de la debilitat cada cop més present del sistema ptolemaic, i –com sabem— Copèrnic també presentarà la seva pròpia modificació d'aquest sistema.

3.2 Descripció general del model

El sistema copernicà parteix de set peticions principals que canviaran l'astronomia:

1. No existeix un Sol centre de tots els orbes celests o esferes, sinó que són dos els centres de rotació: la Terra, que és el centre de rotació de la Lluna, i el Sol, que és el centre de rotació dels altres planetes.
2. El centre de la Terra no coincideix amb el centre de l'univers, sinó que només amb el centre de gravetat i el centre de l'esfera de la Lluna.
3. Totes els esferes giren al voltant del Sol
4. La relació entre la distància Terra-Sol i la altura del firmament és menor que la relació entre el radi terrestre i la distància Terra-Sol. Aquesta última és, doncs, imperceptible amb relació a l'altura del firmament[21].
5. Tots els moviments que apareixen al firmament estan causats per el moviment de la Terra. El firmament roman immòbil mentre que la Terra realitza una rotació completa sobre els seus pols fixes en un moviment diürn.
6. Els moviments del Sol no estan causats per el moviment del propi Sol, sinó per el moviment de la Terra i de la nostra esfera, amb la que (com qualsevol altre planeta) girem al voltant del Sol.
7. L'aparent moviment retrògrad i directe dels planetes no procedeix del seu moviment, sinó del de la Terra. El moviment de la Terra és suficient per explicar per sí sol les desigualtats del cel.

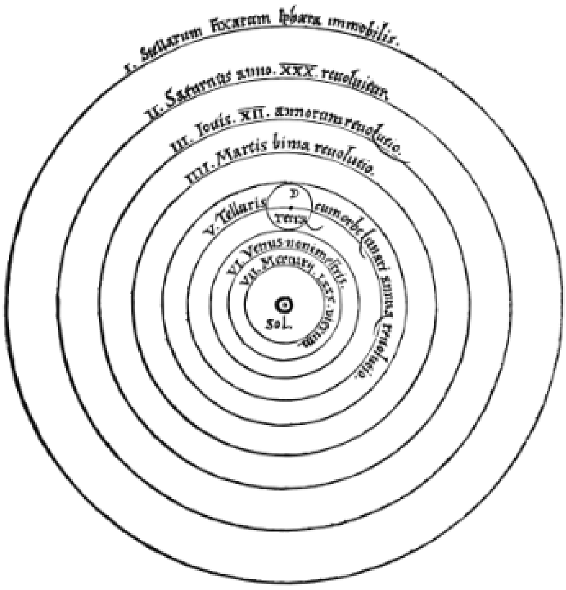

Figura 21: Model artístic de Copèrnic

L'atribució del moviment a la Terra permetia reafirmar la circularitat dels moviments celestes ja que atribuïa als planetes un moviment continu i en la mateixa direcció. Les irregularitats del moviment dels planetes eren atribuïdes al punt de vista, diferent en cada moment, de l'observador situat sobre la Terra en moviment.

Aquest nou plantejament del sistema ens mostra que la revolució copernicana no va consistir només en un perfeccionament dels mètodes astronòmics, ni en un descobriment de noves dades, sinó en la construcció d'una cosmologia nova basada en les mateixes dades proporcionades per l'astronomia ptolemaica.

Però en certs aspectes, la simplicitat del nou sistema era més aparent que real: per a justificar les dades observacionals, Copèrnic es va veure obligat, en primer lloc, a no fer coincidir el centre de l'univers amb el Sol (per això el seu sistema ha estat definit com heliostàtic, més que heliocèntric), sinó amb el punt central de la òrbita terrestre; en segon lloc, a reintroduir, com amb Ptolemeu, una sèrie de cercles que giren al voltant d'altres cercles; finalment, a atribuir a la Terra un tercer moviment de declinació per a justificar la invariabilitat de l'eix terrestre respecte a l'esfera de les estrelles fixes.

3.3 Descripció del moviment dels planetes superiors

Com hem mencionat anteriorment, en l'època de Copèrnic la teoria planetària vigent a Europa era pràcticament idèntica a la ptolemaica, excepte per algunes petites

[20] N.Copèrnic, Nicolau. *De les Revolucions dels Orbes Celestes*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans/ Pòrtic/ Eumo, 2000. Pàg.11.

[21] Aquesta puntualització serà imprescindible per a resoldre el problema de la paral·laxi estel·lar

modificacions que s'havien hagut de fer per alteracions en el moviment mitjà del Sol, que afectava a la teoria planetària.

Copèrnic, exposa la seva proposta d'explicació del moviment planetari al llibre V del *De revolutionibus orbium coelestium.* En aquesta exposició, Copèrnic segueix al peu de la lletra el procediment de Ptolemeu per confirmar o modificar els resultats del llibre V de l'*Almagest.* A pesar de que Copèrnic afegeix poc **als mètodes** de Ptolemeu, hi ha per suposat dos canvis molt importants respecte del model ptolemaic:

- El primer i més conegut és l'explicació proposada al moviment anòmal dels planetes: és un efecte visual degut **al moviment de la Terra al voltant del Sol**, que completa una òrbita circular juntament amb els altres planetes.
- L'altre canvi respecte Ptolemeu és l'ús de models en que cada moviment és uniforme i circular, i cada esfera rota uniformement al voltant d'un eix **que passa pel seu centre**. Un principi que Ptolemeu va violar amb la introducció de la bisecció de l'excentricitat.

A pesar de que el model planetari establert a occident amb prou feines havia canviat, l'astronomia àrab ja havia fet algunes propostes que trencaven de manera més radical amb el model de Ptolemeu. Hi ha historiadors que afirmen que Copèrnic podria haver tingut accés a algunes fonts d'astronomia àrab. Per exemple, N.M.Swerdlow i O.Neugebauer afirmen a *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*[22] que: *"Through the publications of E.S.Kennedy, it has become apparent that a number of Arabic astronomers of the thirteenth and fourteenth centuries devised various models that would meed the same criterion, among them models identical in every respect except the heliocentric form and the specific numerical parameters to those used by Copernicus [...]. The recovery of the planetary theory of the astronomers of the Maraha School demonstrated that much of what had been taken for Copernicus's own planetary theory is actually of medieval Arabic origin, and was transmitted to western Europe by an unknown route".*

Al llibre V del *De Revolutionibus* Copèrnic deriva un conjunt complet d'elements de les òrbites dels planetes a partir de les observacions. Com hem avançat anteriorment, la deducció del model segueix els mateixos passos que Ptolemeu, que son els següents:

En primer lloc, Copèrnic cita les observacions de les que partirà per deduir el model. Usa tres observacions d'oposicions realitzades per Ptolemeu, tres observacions d'oposicions realitzades per ell, i una observació addicional també realitzada per ell que no era una oposició. A partir d'aquestes observacions, calcula el temps transcorregut entre cadascuna $t_i - t_j$ i la diferencia entre longituds $\lambda_i - \lambda_j$, també amb notació sexadecimal.

[22] N.M.Swerdlow. O.Neugebauer. *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*, New York, Springer, 1984. Pàg.290.

En segon lloc, igual que Ptolemeu, se serveix de tres oposicions i les diferencies entre elles calculades anteriorment per trobar el moviment mitjà λ_m entre oposicions i l'excentricitat e entre el Sol i el centre de rotació del planeta E[23]. El càlcul de l'exentricitat a partir de les tres observacions es molt similar al que hem demostrat anteriorment en el cas de Ptolemeu.

En tercer lloc, Copèrnic dedueix les expressions de l'anomalia mitjana a_m, la longitud mitjana λ_m i la longitud de l'apogeu λ_a i calcula aquests valors pel temps t_0, que fixa l'1 de gener de l'any 1 a mitjanit (*Anno Domini*) en el calendari julià.

Finalment, calcula l'expressió de la distància de la Terra al planeta i el radi del planeta r respecte el seu centre de rotació i obté, com Ptolemeu, una expressió del moviment del planeta $\lambda(t)$ donat un temps t.

4 Càlcul de la longitud planetària amb els dos models

Després d'explicar la deducció matemàtica dels dos models, he volgut comparar la facilitat de càlcul que proporciona cada model. Conèixer un mètode per calcular les posicions dels planetes al segle XVI era de gran utilitat pels astrònoms, que requerien saber les posicions dels astres per elaborar els horòscops.

Tant l'*Almagest* com el *De Revolutionibus* proporcionaven taules numèriques que facilitaven en gran part els càlculs, quedant només per realitzar senzilles operacions aritmètiques.

Però, quin dels dos mètodes era més senzill? Hi ha una diferència clara? En aquest apartat calcularem la longitud del planeta Saturn respecte l'eclíptica el dia del naixement de Copèrnic: 19 de Febrer de 1473. El càlcul el farem tal com el faria un astròleg, usant les taules facilitades per l'*Almagest* i el *De Revolutionibus*.

4.1 Amb les taules ptolemaiques

A la fórmula final del moviment de Saturn en el model ptolemaic, hem resumit els passos necessaris per trobar la posició del planeta. En el cas de Saturn tenim els següents paràmetres:

[23]El centre de rotació del planeta coincideix en el model copernicà amb el centre de l'equant, ja que, com hem mencionat anteriorment, en aquest model el centre de rotació i el centre de moviment uniforme coincideixen

$$R = 60^p$$
$$r = 6^p; 30$$
$$e = 3^p; 25$$
$$\lambda_m(t_0) = 296°; 44$$
$$\lambda_a(t_0) = 224°; 10$$
$$a_m(t_0) = 34°; 02$$

Comencem doncs el càlcul:

1. Calculem $t - t_0$. Recordem que t_0 és el 26 de Febrer de l'any 747 a.C. en el calendari Julià. Per tant,

$$t - t_0 = 2220^a 171^d$$

2. A partir de les taules de longitud i anomalia mitjana per cada planeta incloses al llibre III, 3; Hei 220,49 podem trobar:

Δt	$w_t(t - t_0)$	$w_a(t - t_0)$
810^a	$180°; 53, 12, 51, 48, 22$	$342°; 10, 59, 23, 37, 30$
810^a	$180°; 53, 12, 51, 48, 22$	$342°; 10, 59, 23, 37, 30$
594^a	$60°; 39, 1, 25, 59, 28$	$154°; 53, 3, 33, 19, 30$
6^a	$73°; 20, 23, 39, 3, 1$	$285°; 12, 4, 53, 3, 50$
150^d	$5°; 1, 23, 48, 42, 7$	$142°; 49, 19, 14, 19, 10$
21^d	$0°, 42, 11, 44, 1, 5$	$19°; 59, 42, 17, 36, 17$

Taula 4: Longitud i anomalia mitjana a les taules

Sumant obtenim:

$$w_t(t - t_0) = 141°; 29, 26, 21, 22, 25$$

$$w_s(t - t_0) = 207°; 16, 8, 45, 33, 47$$

3. Longitud mitjana: $\lambda_m(t) = \lambda_m(t_0) + w_t(t - t_0) = 78°; 13, 26, 21, 25$

4. Anomalia mitjana: $a_m(t) = a_m(t_0) + w_a(t - t_0) = 241°; 18, 8, 45, 33, 47$

5. Longitud de l'apogeu corregida. En aquest cas ho hem d'usar ja que ens allunyem considerablement de t_0.

$$\lambda_a(t) = \lambda_a(t_0) + 1°(t - t_0)$$

on $(t - t_0)$ s'expressa en segles. Llavors, $\lambda_a(t) = 246°; 12$

6. Centre mitjà: $c_m(t) = \lambda_m(t) - \lambda_a(t) = 192°; 1, 26, 21, 22, 25$

7. Equació del centre: La trobem a partir de les taules contingudes al llibre XI, 10; Hei 436,45.
$$q(c_m) = 1°; 25$$

8. Anomalia real: $a_v(t) = a_m(t) - q(c_m) = 239°; 53, 8, 45, 33, 47$

9. Equació de l'argument $\rho(a_v, c_m)$. Ptolemeu observa que en aquesta funció de dues variables n'hi ha una que és forta: a_v i una que és feble: c_m. Llavors, $\rho(a_v, c_m)$ pot ser trobada d'acord amb el mètode d'interpolació que Ptolemeu explica al llibre XI,10, del que obté:
$$p(a_v, c_m) = p_0(a_v) - (p_0 - p_1) \cdot \frac{f'(c_m)}{60} \tag{49}$$
on $p_0(a_v)$, $p_0 - p_1$ i $f'(c_m)$ els proporciona Ptolemeu a la taula continguda al llibre XI, 10; Hei 436,45. Obtenim doncs:
$$5°; 31 - 0°; 19 \cdot \frac{58}{60} = 5°; 12, 38$$

10. Finalment, la longitud de Saturn és:
$$\lambda(t) = \lambda_m(t) + q(c_m) + p(a_v, c_m) = 84°; 51, 4, 21, 22, 25$$

4.2 Amb les taules copernicanes

En el cas de Saturn tenim els següents paràmetres:

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(t_0) &= 5°; 32 \\
\vartheta(t_0) &= 6°; 45 \\
\lambda_{m_{sol}}(t) &= 4, 32°; 31 \\
a_m(t) &= 205°; 49 \\
\lambda_a(t) &= 240; 20
\end{aligned}$$

Comencem el càlcul:

1. Calculem $t - t_0$. Recordem que t_0 és 1 de gener de l'any 1 a les 12 de la nit en el calendari julià. Per tant,
$$t - t_0 = 1473^a; 49^d$$
que en notació sexadecimal és
$$\frac{1473}{60} + \frac{40}{60^2} = 24, 33^a 52, 42^d$$

Δt	$\bar{\Pi}$	ϑ
$24,0^a$	$20°;4,50$	$2,30°;57,3$
33^a	$0°;27,36,38$	$2°;30,57,3$
$52,0^d$	$0°;0,7$	$0°;53,45$
42^d	$0°;0,0,5$	$0°;0,53,45$

Taula 5: Precessió dels equinoccis

2. Calculem la precessió dels equinoccis. De la taula del llibre III, 70 n'obtenim: Sumant obtenim:

$$\bar{\Pi}(t-t_0) = 20°;31,48,33$$
$$\vartheta(t-t_0) = 2,34°;22,38,48 = 154°;22,38$$

I per tant,

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(t_0) + \bar{\Pi}(t-t_0) = 26°;3,48,33$$
$$\vartheta = \vartheta(t_0) + \vartheta(t-t_0) = 161°;7,38$$

De la taula del llibre III, 74 obtenim $\delta(2\cdot\vartheta) = 0;44$.

Finalment, la precessió dels equinoccis és:

$$\Pi = \bar{\Pi} + \delta(2\cdot\vartheta) = 26°;47$$

3. De les taules del llibre III, 81, n'obtenim la longitud mitjana del Sol $\lambda_{m_{sol}}(t)$, i de les taules del V,135, l'anomalia mitjana de Saturn $a_m(t)$ (veure taula 6):

Δt	$\lambda_{m_{sol}}$	a_m
$24,0^a$	$5,55°;38,49$	$0;49°;15,525$
33^a	$5,51°;39,0,53,2$	$5,8°;34,42,19$
$52,0^d$	$51°;15,5,50$	$49°;30,42,12$
42^d	$0°;41,23,43$	$0°;39,59,27$

Taula 6: Longituds mitjanes del Sol i de Saturn

Per tant,

$$\lambda_{m_{sol}} = \lambda_{m_{sol}}(t_0) + \lambda_{m_{sol}}(t-t_0) = 5,11°;45 = 300°;56$$
$$a_m = a_m(t_0) + a_m(t-t_0) = 253°;50,17,58$$

4. Anomalia mitjana excèntrica: $k_m(t) = \lambda_{m_{sol}}(t) - \lambda_a = 71°;25,19$

5. Equació del centre: La trobem amb la taula del llibre V, 173, columna II: $q(k_m) = 6°;7$

6. Coeficient d'interpolació: El trobem amb la taula del llibre V, 173, columna II: $c_4(k_m) = 0°; 16$
7. Anomalia real: $a_v(t) = a_m(t) + q(k_m) = 259°; 57, 17$
8. Equació parcial de l'anomalia: La trobem amb la taula del llibre V, 173, columna II: $c_5(a_v) = 5°; 51$.
9. Excés d'anomalia: El trobem amb la taula del llibre V, 173, columna II: $c_6(a_v) = 0°; 46$
10. Equació de l'anomalia: $c(a_v, k) = c_5(a_v) + c_4(k) \cdot c_6(a_v) = 6°; 3, 16$
11. Allargament negatiu: $\Delta = a_v - c(a_v, k) = 57°; 51, 18$
12. Longitud sideral geocèntrica: $\lambda^* = \lambda_{m_{sol}} - \Delta = 57°; 51; 18$
13. Finalment, la longitud de Saturn és:

$$\lambda(t) = \lambda^* + \bar{\Pi} = 84°; 38, 18$$

5 Conclusions: Reflexió històrica del conflicte entre els dos models

Un cop exposats els dos models, podem preguntar-nos si al segle XVI-XVII hi havia realment motius per decantar-se pel copernicanisme.

Al segle XVI, els astrònoms europeus es trobaven dos sistemes d'astronomia matemàtica competidors. Per un costat, tenim el model ptolemaic en què la Terra romania immòbil al centre de l'univers. Un model delimitat pels principis físics platònics i aristotèlics de moviment circular de tots els cossos celestes **al voltant de la Terra**. Per altra banda, la nova teoria de Nicolau Copèrnic, que encara estava compromesa amb el moviment circular, argumentava que situant el Sol al centre de l'univers, el moviment retrògrad dels planetes que tants mals de cap havia suposat podia ser explicat amb una simplicitat i elegància matemàtica molt superior.

Potser el més intuïtiu **des d'un punt de vista actual** és pensar que desempat definitiu el va donar la capacitat predictiva: el model de Copèrnic havia de ser superior (o molt superior) a nivell predictiu. Doncs bé, això tampoc és cert. Malgrat que ara sabem que el model de Copèrnic s'aproxima més a la realitat, curiosament no sempre era més predictiu. De fet, els dos models competien en aquest sentit.

El compromís que encara va mantenir Copèrnic amb el requeriment platònic de que del moviment havia de ser explicant mitjançant **cercles**, va tenir com a conseqüència que la teoria de l'astrònom no fos capaç de predir les posicions planetàries amb la mateixa exactitud amb que ho va aconseguir 70 anys més tard Johannes Kepler (1571-1630) en trencar definitivament amb el supòsit platònic i introduir els moviments el·líptics.

En el pas de Copèrnic a Kepler hi va jugar un paper important Tycho Brahe (1546-1601), astrònom danès, considerat el més gran observador dels cels abans de la invenció del telescopi. Tycho Brahe va construir el que és conegut com el primer institut d'investigació astronòmica. Aquest laboratori comptava amb instruments dissenyats per Brahe que li van permetre mesurar la posició de les estrelles i els planetes amb una precisió molt superior a la de l'època.

Un dels objectius que va perseguir Brahe al llarg de les seves investigacions, va ser verificar o desacreditar teories astronòmiques en base a les observacions empíriques que podia realitzar des del seu laboratori. En particular, Brahe es va centrar en realitzar comparacions sistemàtiques entre els models ptolemaic i copernicà. El conjunt d'observacions van ser realitzades entre els anys 1564 i 1601, per tant, son una bona base per extreure conclusions sobre la capacitat predictiva i credibilitat que tenia cadascun dels models els anys posteriors a la publicació del *De Revolutionibus* l'any 1543.

De les dades observacionals de Brahe en podem concloure que: pels planetes superiors, d'un total de 148 observacions, el model copernicà va ser superior en la predicció del a longitud en un 76% dels casos. La tendència canvia amb els planetes inferiors: d'un total de 135 comparacions, el model ptolemaic va ser superior en un 62%.Quan incloem la latitud les tendències encara canvien més: pels planetes superiors, d'un total de 132 observacions, el model ptolemaic va ser superior en un $63,64\%$ dels casos.

Podríem seguir discutint fins al detall quin dels dos models és millor a nivell predictiu, i fins i tot extreure conclusions de en quins casos predirà millor un model que un altre, però no és l'objectiu que persegueixo aquí. Només volia posar èmfasi en que la superioritat predictiva definitivament no podia ser el que decantés la balança. Les conclusions que he citat anteriorment es poden trobar a l'article *Ptolemy versus Copernic* [24] de Frank Tipler i Wesley Bollinger, i les dades als *Quaderns d'Observacions* de Tycho Brahe. [25]

Una altra opció que podríem considerar és que una bona raó per decantar-se pel model de Copèrnic és que és superior senzillament per la simplicitat i l'elegància del model, que, a primera vista, sembla molt més harmònic que el model ptolemaic. Aquí hi ha dues observacions que podríem fer:

En primer lloc, si parlem de la simplicitat o l'elegància en quant a la deducció del model, queda descartat que el model copernicà s'imposi de manera evident per aquesta raó. Com hem comentat a l'apartat de descripció del model copernicà, Copèrnic segueix exactament els mateixos passos que Ptolemeu. Deriva el mo-

[24] F.Tipler., W.Bollinger.*Ptolemy versus Copernicus*, Inference, 2015. Volum I, Article 3.

[25] T.Brahe *Tychonis Brahe Dani Opera Omnia*, ed. John Dreyer, Copenhagen, Libraria Gyldendaliana, 1924. Volum 10-13.

del a partir de comptades observacions i en cada pas va trobant l'expressió dels paràmetres implicats en el model a partir dels resultats anteriors i de les observacions citades [26].

En segon lloc, si parlem de simplicitat o elegància del resultat **físic** del model, sembla evident que el model de Copèrnic és molt més senzill o simple que el de Ptolemeu, i, si res ens inclinés cap a cap costat, sembla que ens decantaríem pel model més senzill, per ser més ïntuïtiu". Però la noció de simplicitat com a sinònim o certa garantia de veracitat és quelcom que és discutible que fos un factor determinant al segle XVI, XVII. Certament en l'actualitat és una noció estesa i una predisposició, però donat el seu caràcter subjectiu no és quelcom que puguem assegurar que fos decisiu en aquell moment.

A banda d'això ja hem destacat en la introducció que en el moment de publicació del *De Revolutionibus* el llegat de Ptolemeu com a base del pensament astronòmic, juntament amb el d'Aristòtil, havia perdurat durant tota l'Edat Mitjana occidental, fruit de l'estancament que sofriren les ciències i les arts durant aquest període. Addicionalment, el model geocèntric proposat per Ptolemeu era acceptat i recolzat per l'Església degut a que en alguns passatges bíblics era el que s'hi presentava. Per tant el context històric no era favorable a l'acceptació del copernicanisme.

Durant aquest període obscurantista van ser principalment els àrabs els que van seguir desenvolupant l'astronomia i aportant treballs astronòmics importants que difícilment van arribar a occident.

També es podria argumentar que Copèrnic, a diferència de Ptolemeu, no trenca amb l'antiga exigència grega d'explicar els moviments celestes com una conjunció de moviments circulars i uniformes. Ptolemeu és criticat per Copèrnic per trencar amb aquest requisit en separar el centre del moviment circular del centre del moviment uniforme. Malgrat això, Copèrnic tampoc manté intacta la pretensió grega, ja que es veu obligat a moure el Sol del centre de l'univers, i a fer rotar els planetes entorn d'un punt que no coincideix ni amb la Terra ni amb el Sol.

Per altra banda, el model copernicà tampoc tenia una evident capacitat explicativa superior. És cert que el model de Ptolemeu presentava problemes explicatius com la falta de paral·laxi estel·lar, però les idees que presenta Copèrnic el 1543, tot i ser precises i innovadores, encara plantejaran certs problemes, com el presumpte moviment de la Terra. De les dades sobre la circumferència de la Terra se'n segueix que degut a la rotació terrestre, un punt de l'equador es mouria a 1.666km/h i respecte al moviment de translació es mouria a 5.300 km/h. Com explicar l'absència de sensació de moviment?. Galileu durà a terme múltiples experiments que intenten

[26] Les valoracions expressades en aquest apartat, intenten emmarcar-se en el context històric en que es va desenvolupar la teoria. Tanmateix, he volgut incloure aquí que tant els models ptolemaic com copernicà ens semblarien poc elegants avui en dia per ser models "ad hoc", és a dir, construïts expressament per "encaixar"amb certes observacions. Encara que després siguin predictius, el mètode usat no és el que avui considerem un bon exemple de mètode científic.

justificar aquesta absència de sensació que per altra banda seria més que evident, ja que segons les anteriors dades un objecte en un segon de caiguda s'hauria d'haver desplaçat dos quilòmetres cap a l'oest.

A més de les consideracions anteriors, la meva aportació en aquest text, ha nascut en part com un interès per conèixer la **facilitat de càlcul** que presentaven pels contemporanis i successors de Copèrnic els dos models. Algú podria preguntar-se **per què servien** els models planetaris. Una possible resposta és que senzillament servien "per conèixer la posició dels planetes". És possible que Ptolemeu, Copèrnic, Brahe, Galileu i Kepler tinguessin entre les seves motivacions un interés natural per coneixer la posició dels planetes. Però mentre aquests astrònoms potser buscaven el saber pel saber, hi havia una **necessitat religiosa o espiritual imperant** de conèixer la posició dels planetes.

L'única aplicació comú de les teories planetàries era l'elaboració d'horoscops i l'astrologia. Eren nombrosos els astròlegs que tenien necessitat de calcular efemèrides, realitzar horòscops per extreure'n conclusions. La necessitat espiritual d'obtenir respostes dels astres a partir de la seva localització empenyia als astròlegs a fer prediccions astronòmiques. Aquests astròlegs, en tenien prou amb un mètode disponible per a calcular les posicions dels planetes i en general, no aprofundien en la necessitat de precisió. En canvi, sí que tenien un interès primordial en trobar una manera senzilla de realitzar els càlculs manuals necessaris i sovint molt laboriosos.

En el quart apartat d'aquest treball, he volgut comparar la facilitat de càlcul de la longitud en el planetes del model ptolemaic respecte del model copernicà, per extreure conclusions de si realment ha pogut ser un factor que hagi pogut influenciar en l'hegemonia d'un dels dos models.

Després de calcular la posició de Saturn el 19 de Febrer de 1473, veiem que el càlcul tant amb el mètode copernicà com el ptolemaic és bastant senzill. Les taules proporcionades a l'*Almagest* i al *De Revolutionibus*, proporcionen gairebé tot allò necessari per realitzar els càlculs, tret d'algunes operacions aritmètiques. En aquest treball hem realitzat el càlcul pel cas de Saturn, però la dificultat és molt similar en el cas dels altres planetes (tret del cas de Mercuri, que presenta problemes en els dos models). A *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus* i *A Survey of the Almagest*, es pot trobar el detall del càlcul en cadascun dels planetes. Pels planetes superiors - Mart, Júpiter i Saturn- el càlcul és exactament igual que el realitzat canviant els paràmetres inicials. Pel cas de Venus el càlcul és molt similar en els dos models.

Fins aquí hem intentat fer una valoració per conèixer si en el moment de publicació del *De Revolutionibus* hi havia raons per decantar-se pel model copernicà. En aquest treball hem pogut concloure que si aquestes raons existien, no podien ser raons relatives a la simplicitat o elegància de la deducció matemàtica, la facilitat de càlcul, el compromís amb els moviments circulars i uniformes o el context històric.També és difícil que poguessin ser degudes a la capacitat explicativa del model, ja que els dos presentaven problemes evidents.

Evidentment, el que hem descartat és que els motius anteriors siguin l'explicació **evident**, del canvi de paradigma. Tanmateix, encara algú podria argumentar que les taules ptolemaiques havien quedat desfasades i s'havien d'ajustar (tal com hem vist que s'ha d'ajustar la posició de l'apogeu). Evidentment son motius que poden beneficiar a un o a un altre, però l'objectiu d'aquest treball era determinar si hi havia una hipòtesi clara que donés avantatge a un model respecte de l'altre abans de l'arribada de Kepler i la força predictiva del seu model heliocèntric amb òrbites el·líptiques, l'arribada de Galileu i l'explicació del moviment de la Terra i posteriors astrònoms i físics en general que consolidaran el model heliocèntric.

6 Bibliografia

Bibliografia principal

N.Copèrnic. *De les Revolucions dels Orbes Celestes*, Barcelona, Institut d'Estudis Catalans/Pòrtic/Eumo, 2000.

N.M.Swerdlow, O.Neugebauer, *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*,New York, Springer, 1984.

O.Pedersen.*A Survey of the Almagest*, Dinamarca, Odense University Press,1974.

Ptolemy.*Ptolemy's Almagest*,ed.by G.J.Toomer, Londres, Duckworth,1984.

Bibliografia secundària

C.Dorce. *Ptolomeo: el astrónomo de los círculos*, Tres Cantos: Nivola, 2006.

D.C.Lindberg.*Los inicios de la ciencia occidental*, Barcelona, Paidós, 2002.

F.Tipler., W.Bollinger. *Ptolemy versus Copernicus*, Inference, 2015. Volum I, Article 3.

N.Copèrnic; T.Digges; G.Galilei. *Opúsculos sobre el movimiento de la Tierra; Nicolás Copérnico, Thomas Digges, Galileo Galilei*, Madrid, Alianza, 1983.

Plató. *Diàlegs XVIII.Timeu*, Barcelona, Fundació Bernat Metge.

T.Brahe. *Tychonis Brahe Dani Opera Omnia*, ed. John Dreyer, Copenhagen, Libraria Gyldendaliana, 1924. Volum 10-13.

T.Kuhn. *La revolución copernicana*, Barcelona, Ariel, 1978.