



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El problema de 2 cossos a l'esfera

Autor: Bàrbara Torralba Planella

Director: Dr. Arturo Vieiro

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2020

Abstract

This manuscript presents a study of the two-body problem in different contexts. First, the problem is considered in the euclidean space and its reduction to the the Kepler's problem is analysed. Next, we study how the gravitational potential is obtained as a solution of the Poisson equation, by deriving the expression of the potential for the two-body problem in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . The relevance of this approach is that the corresponding Laplace's operator reflects the intrinsic geometry of the space under consideration, which allows it to systematically generalize gravitational potential to other geometries. In this work, we focus on performing the same study on a generic space of positive and constant curvature, the unit sphere \mathbb{S}^2 , also giving the result of this problem to the unit hypersphere \mathbb{S}^3 . Finally, some simulations of the motion of two bodies on \mathbb{S}^2 are included.

Resum

En aquest treball es presenta un estudi del problema de dos cossos en diferents contextos. Primer, es considera el problema en l'espai euclidi i la reducció d'aquest al problema de Kepler. Després s'estudia com sobté el potencial gravitatori com a solució de l'equació de Poisson, tot derivant l'expressió del potencial pel problema de dos cossos a \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 . La importància d'aquest plantejament està en el fet que l'operador de Laplace corresponent reflecteix la geometria intrínseca de l'espai considerat, la qual cosa permet generalitzar de manera sistemàtica el potencial gravitatori a altres geometries. En aquest treball ens centrem en realitzar el mateix estudi sobre un espai genèric de curvatura constant positiva, l'esfera unitat \mathbb{S}^2 , donant també el resultat de dit problema a la hiperesfera unitat \mathbb{S}^3 . Per últim, s'inclouen algunes simulacions del moviment de dos cossos en l'esfera unitat.

Agraïments

Vull agrair a tots els professors que he tingut al llarg de la carrera el seu treball docent, particularment, al meu tutor Dr. Arturo Vieiro per la seva paciència i dedicació, sobretot, a l'hora d'elaborar aquesta memòria; gràcies de tot cor. A més, agrair també a la meva família el seu recolzament i, en especial, a la meva filla Emma, a qui li dedico aquest treball, per l'esforç que ha hagut de fer al llarg d'aquests anys deixant-me estudiar quan em calia. Ets la millor.

Índex

Introducció	1
1 Nocions prèvies	2
2 El problema de dos cossos i el problema de Kepler a \mathbb{R}^3	5
2.1 Reducció del problema de dos cossos a dos problemes d'un cos	5
2.2 Reducció del problema de Kepler al pla. Estudi analític de les òrbites . .	6
2.3 Reducció del problema de Kepler a 1 grau de llibertat. Estudi qualitatiu de les òrbites	9
2.4 Altres potencials	12
3 Potencial gravitatori i equació de Poisson	14
3.1 Previs	14
3.2 La llei de Gauss: relació entre l'equació de Poisson i el potencial gravitatori	17
3.3 Equació de Laplace. Solució fonamental	19
3.4 Equació de Poisson	20
4 El potencial gravitatori en espais de curvatura constant positiva	25
4.1 Resolució de l'equació de Laplace a \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3	25
4.2 Resolució de l'equació de Poisson a \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3	27
4.3 Sobre el problema de dos cossos i el problema de Kepler en espais de curvatura constant	29
5 Simulacions	31
6 Conclusions	35
A Codi per realitzar les simulacions numèriques	36
B Resolució del Problema de Cauchy	38

Introducció

El problema de dos cossos constitueix un dels problemes gravitacionals més senzills i fonamentals de la mecànica celest. Consisteix en estudiar el moviment de dues masses puntuals sota la interacció gravitacional mútua. Així, per exemple, el problema de dos cossos descriu el moviment d'un satèl·lit natural al voltant d'un planeta (p.ex. de la Lluna al voltant de la Terra). La seva simplicitat recau en el fet de que el problema plantejat a l'espai euclidi és integrable, en el sentit que es poden, fins i tot, obtenir expressions de les seves solucions en termes de quadratures.

D'altra banda, el problema de dos cossos ha de permetre també descriure, per exemple, el moviment de dues galxies a l'univers. Aquí però ens trobem amb un dels problemes històrics de la cosmologia: quina és la forma de l'univers? I, en particular, és un espai sense curvatura o amb curvatura positiva (tancat) o negativa (obert)? Des d'un punt de vista matemàtic, ens podem plantejar com afecta la topologia de la varietat (ja sigui l'espai euclidi n -dimensional \mathbb{R}^n , l'esfera n -dimensional \mathbb{S}^n o el pla hiperbòlic \mathbb{H}^n) en el moviment de dos cossos sota interacció gravitacional. En aquest treball ens plantegem el problema de dos cossos en els espais euclidians \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 , i en espais de curvatura constant positiva \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3 .

La derivació de les equacions del moviment en espais de curvatura constant ha estat considerada per diferents autors, veure [7]. Una manera sistemàtica d'obtenir dites equacions és mitjançant la formulació lagrangiana, que parteix de considerar la varietat on es dona el moviment dins d'un espai euclidi ambient (per exemple \mathbb{S}^2 dins \mathbb{R}^3) i després imposant les lligadures pel fet de tenir el moviment en un subespai. En aquest treball, derivem les equacions del moviment seguint un enfoc geomètric intrínsec, derivant l'expressió de l'energia potencial a partir de la solució de l'equació de Poisson en l'espai corresponent (p.ex. directament a \mathbb{S}^2 , sense necessitar un espai euclidi ambient ni imposar lligadures en el moviment). Les dues metodologies són equivalents en el sentit que permeten derivar les corresponents equacions del moviment.

La memòria està estructurada de la manera següent. En la primera secció es donen definicions i es recorden alguns resultats bàsics que s'usaran al llarg del treball. A la segona secció es planteja el problema de dos cossos i es veu l'equivalència amb el problema de Kepler. També es fa un estudi de les òrbites, primer, analíticament i després qualitativament. A la secció 3 es veu la relació entre el potencial gravitatori i l'equació de Poisson veient que es pot fer un estudi del problema de dos cossos des d'un punt de vista intrínsec de l'espai, i es resol dita equació a \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 . A la quarta secció es fa el mateix estudi a \mathbb{S}^2 i es dona el resultat a \mathbb{S}^3 . Finalment s'inclou una secció de simulacions per tal de poder visualitzar el moviment de dos cossos sota la interacció gravitacional mútua sobre l'esfera. Es completa la memòria amb dos apèndixs. L'apèndix A inclou el codi usat en les simulacions. S'ha fet servir el paquet `taylor` [11]. L'apèndix B detalla uns càlculs addicionals usats a la secció 2.

1 Nocions prèvies

Considerem l'espai $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, amb $n \geq 1$ i $\|\cdot\|$ norma euclídea. Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ obert i connex, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funció escalar, $f \in C^1(A)$ i $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp de forces, $F \in C^1(A)$. Amb aquest marc de treball, recordem alguns conceptes i resultats vists al llarg del grau.

Definició 1.1. Donat $x \in A$, el gradient de f és:

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Definició 1.2. La divergència de F és el camp escalar:

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

Proposició 1.3. Sigui F un camp vectorial de classe C^1 en un entorn obert Ω de \mathbb{R}^n i sigui $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Aleshores es compleix

$$\operatorname{div}(vF) = v \operatorname{div} F + \nabla v F.$$

Demostració.

$$\operatorname{div}(vF) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i F_i) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} F_i + v_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) = \nabla v F + v \operatorname{div} F. \quad \square$$

Definició 1.4. Sigui $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba diferenciable. Aleshores, el treball de F al llarg de γ és:

$$W_F(a, b) := - \int_{\gamma} F ds = - \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

on s és el paràmetre que parametriza la corba γ .

Observació 1.5. Es pot veure que definit així, el treball és invariant per reparametrizacions de γ que conservin l'orientació i canvia de signe per les que l'inverteixen. \triangle

Definició 1.6. Sigui $A \subset \mathbb{R}^3$ obert, $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (F_x, F_y, F_z)$, $F \in C^1$, i (e_1, e_2, e_3) base canònica de \mathbb{R}^3 , el rotacional de F és:

$$\operatorname{rot} F := \nabla \wedge F = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) e_3.$$

Si F és tal que $\operatorname{rot} F = 0$, s'anomena irrotacional.

Definició 1.7. Un camp vectorial (continu) $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'anomena gradient o es diu que es deriva d'un potencial si existeix $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = -\nabla f(x)$, $x \in A$.

Definició 1.8. Un camp vectorial F s'anomena central si és de la forma $F = F(r) = g(\rho)e_r$, on e_r denota el vector unitari en direcció radial des de l'origen de coordenades i $g(\rho)$ és una funció escalar que depèn de $\rho = \|r\|$.

Observació 1.9. Si F és un camp central 3-dimensional, aleshores és irrotacional doncs $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0$ si $i \neq j$. \triangle

Teorema 1.10. *Tot camp central es deriva d'un potencial. És a dir, si F és central, aleshores existeix una funció escalar V tal que $F = -\nabla V$. A més, $V = V(\rho)$ només depen de ρ i s'anomena potencial.*

Demostració. Sigui F un camp central, $F(r) = g(\rho)e_r$. Si considerem $d\gamma = d\rho e_r + d\sigma e_t$, on e_t és el vector ortonormal a e_r , tenim que:

$$W_F(a, b) := - \int_{\gamma} F ds = - \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} g(\rho) d\rho = G(\rho(a)) - G(\rho(b)) = -G(\rho(t)) \Big|_a^b,$$

per una certa funció escalar G . Per tant, si considerem $V = G \circ \rho$, tenim que $F = -\nabla V$ i depen només de ρ . \square

Definició 1.11. *Un camp vectorial $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'anomena conservatiu si $\operatorname{div} F = 0$.*

Observació 1.12. *Un camp conservatiu preserva "volum", és a dir, $\int_A F = c$, amb c constant.* \triangle

Definició 1.13. *Considerem un cos de massa m situat a $r(t) \in \mathbb{R}^n$. El moment lineal associat a m és el vector $p(t) = r'(t)m$. D'altra banda, el moment angular associat a m es defineix com el vector $L(t) = r(t) \wedge p(t)$.*

Proposició 1.14. *En un camp central el moment angular es preserva.*

Demostració. Com $F(r) = g(\rho)e_r = mr''$, tenim que:

$$\frac{d}{dt}L(t) = \frac{d}{dt}(r(t) \wedge r'(t)m) = [r'(t) \wedge r'(t) + r(t) \wedge r''(t)]m.$$

Clarament, el primer terme de l'última igualtat és 0 i el segon també ho és, ja que $r \wedge r''m = r \wedge F(r)$. \square

Proposició 1.15. *Sigui $F = F(r)$ un camp definit en un conjunt simplement connex. Són equivalents:*

1. F és potencial.
2. El treball de F no depen del camí. En particular, és 0 si el camí és tancat.
3. F és irrotacional.

Demostració. (1) \Rightarrow (3): Com F és potencial, $\exists V(\rho)$ tal que $F = -\nabla V$. Per tant,

$$\operatorname{rot} F = -\nabla \wedge \nabla V = - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) e_1 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) e_2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) e_3 = 0$$

(3) \Rightarrow (1): Resultat vist a l'assignatura de Càlcul integral en diverses variables. Es demostra usant el Lema de Poincaré.

(1) \Leftrightarrow (2): Sigui F un camp potencial. Per definició, $\exists f$ tal que $F(x) = -\nabla f(x)$ amb $x \in \mathbb{R}^n$. Considerem $a, b \in \mathbb{R}^n$ qualsevols. Aleshores, si calculem el treball de F entre aquests dos punts tenim que:

$$W_F(a, b) := - \int_{\gamma} F ds = - \int_{\gamma} \nabla f ds = - \int_a^b (\nabla f)(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (1.1)$$

$$= \int_b^a (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)). \quad (1.2)$$

És a dir, no depen del camí, només del punt inicial i del punt final i, per tant, el treball de F al llarg d'una corba tancada és 0. \square

Definició 1.16. Una funció $H : A \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 és una integral primera si no és constant en cap obert però és constant sobre les solucions. És a dir, si $(r(t), v(t))$ és solució del sistema, aleshores existeix $c \in \mathbb{R}$ tal que $H(r, v) = c$. Així, les solucions es troben sobre les corbes de nivell de H .

Definició 1.17. Considerem un sistema d'equacions diferencials $2n$ -dimensional

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= g(x, y) \\ \dot{y} &= h(x, y) \end{aligned} \right\}$$

amb $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $F(x, y) = (g(x, y), h(x, y))^t$, el corresponent camp vectorial de classe C^1 . Suposem que A és un obert estrellat. Aleshores el sistema s'anomena sistema hamiltonià si existeix una funció $H : A \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , tal que

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = g(x, y), \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -h(x, y) \quad (1.3)$$

En tal cas, H és una integral primera del sistema i se l'anomena hamiltonià i n és el nombre de graus de llibertat del sistema.

Definició 1.18. Un camp $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ és integrable si té $\frac{n}{2}$ integrals primeres, $h_1, \dots, h_{n/2}$, independents i en involució. Es diu que les funcions $h_1, \dots, h_{n/2}$ estan en involució si $\{h_i, h_j\}(x) = 0$, on $\{\cdot, \cdot\}$ denota el parèntesis de Poisson. És a dir, si per tot $i \neq j$, es té $h_i(h_j(x)) = h_j(h_i(x))$, $\forall x \in A$. Observem que si F és un camp vectorial al pla, serà integrable si té una integral primera.

Observació 1.19. En general, donat un sistema dinàmic continu, donat per una equació diferencial, es defineix el nombre de graus de llibertat del sistema com el nombre de variables independents que calen per determinar la solució d'un problema de Cauchy. Per exemple, per una equació diferencial lineal, el nombre de graus de llibertat coincideix amb l'ordre de l'equació diferencial (recordem que el conjunt de solucions d'una equació diferencial lineal d'ordre n forma un espai afí n -dimensional). En el cas d'un sistema hamiltonià n -dimensional, el nombre de graus de llibertat, en cas que es pugui resoldre, és $n/2$. És a dir, calen $n/2$ integrals primeres independents i en involució per determinar la solució del sistema, tal i com es segueix del teorema d'Arnold-Liouville, veure [1]. \triangle

El següent resultat es va veure a l'assignatura d'Equacions diferencials:

Teorema 1.20. Sigui F un camp definit en un domini estrellat de \mathbb{R}^2 . Si F és conservatiu, és hamiltonià i, per tant, és integrable.

2 El problema de dos cossos i el problema de Kepler a \mathbb{R}^3

En aquesta secció estudiarem el problema de dos cossos a \mathbb{R}^3 . L'objectiu és entendre la reducció que farem i les simetries que ens permeten fer-la, ja que, en la següent secció es tractarà el problema de 2 cossos i el problema de Kepler a l'esfera. Obtindrem doncs, equacions diferents del moviment i veurem que el terme provinent de la força gravitacional no té simetria central. Aquest fet és el que impedeix l'equivalència entre els dos problemes a l'esfera.

2.1 Reducció del problema de dos cossos a dos problemes d'un cos

Considerem dos cossos celests de masses m_1 i m_2 cada un dels quals exerceix una força central conservativa sobre l'altre. Suposem masses puntuals i que no existeixen forces externes que actuïn sobre el sistema, és a dir, no considerem la interacció d'altres planetes sobre el sistema. En tal cas, la força total sobre el sistema és 0.

Sigui $r_i(t) \in \mathbb{R}^3$ el vector posició de la massa m_i per $i = 1, 2$ respecte de l'origen de coordenades, on $t \in \mathbb{R}$. Volem determinar $r_i(t)$ donats els valors inicials $r_i(0)$ i $v_i(0)$, $i = 1, 2$, on $v_i(t) = \frac{dr_i(t)}{dt} = r_i'(t)$. (Més endavant veurem que es tracta d'un problema de Cauchy que podem resoldre). Per no carregar la notació, només farem notar la dependència de r respecte de t quan sigui necessari. Per la segona i tercera llei de Newton i, per la llei de la gravitació universal, si F_{ij} és la força de m_i deguda a la presència de m_j , $F_{ij} \in \mathbb{R}^3$, tenim:

$$\begin{cases} F_{12} = m_1 r_1'' = Gm_1 m_2 \frac{(r_2 - r_1)}{r_{12}^3}, \\ F_{21} = m_2 r_2'' = -Gm_1 m_2 \frac{(r_2 - r_1)}{r_{12}^3}, \end{cases} \quad (2.1)$$

on G és la constant de gravitació universal i $r_{12} = \|r_1 - r_2\|$. Tenim doncs que (2.1) és el sistema d'equacions diferencials que descriu el moviment de dos cossos a \mathbb{R}^3 sota la influència gravitacional mútua.

Considerem primer el vector posició relativa $r = r_2 - r_1 \in \mathbb{R}^3$, aleshores $r_{12} = \|r_1 - r_2\| = \|-r\| = \|r\|$, i per (2.1) tenim que

$$r'' = r_2'' - r_1'' = -Gm_1 \frac{(r_2 - r_1)}{r_{12}^3} - Gm_2 \frac{(r_2 - r_1)}{r_{12}^3} = -G \frac{r}{\|r\|^3} (m_1 + m_2) = -Gm \frac{r}{\|r\|^3}, \quad (2.2)$$

on $m = m_1 + m_2$ és la massa total del sistema.

Acabem de veure que el moviment del vector posició relativa ve descrit per l'equació $r'' = -Gm \frac{r}{\|r\|^3}$. Aquesta equació descriu el moviment d'un cos de massa 1 sotmés al camp de forces conservatiu central $F(r) = -Gm \frac{r}{\|r\|^3}$. En particular, és un problema de Kepler a \mathbb{R}^3 amb força central $F(r)$.

Observació 2.1. Una altra manera d'interpretar el moviment relatiu és la següent. L'equació (2.2) es pot reescriure com

$$\mu r'' = -Gm_1 m_2 \frac{r}{\|r\|^3},$$

on $\mu = m_1 m_2 / m$ s'anomena la massa reduïda. Així, el moviment del vector relatiu es correspon al moviment d'un cos de massa μ sota el potencial gravitacional de Newton. \triangle

Considerem ara el moviment del centre de masses $r_{CM} \in \mathbb{R}^3$ dels dos cossos. Recordem que el centre de masses es defineix com

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \in \mathbb{R}^3.$$

Tenim que $m r_{CM} = m_1 r_1 + m_2 r_2$ i, per tant, $m r'_{CM} = m_1 r'_1 + m_2 r'_2$ és constant. En efecte, si sumem les equacions de (2.1) obtenim $m_1 r''_1 + m_2 r''_2 = 0$. Per tant, $m_1 r'_1 + m_2 r'_2$ és constant. És a dir, r_{CM} segueix un moviment rectilini uniforme.

Hem vist que el problema de 2 cossos de Newton és equivalent a dos problemes d'un cos: posició relativa i centre de masses. És a dir, el canvi de coordenades $(r_1, r_2) \mapsto (r_{CM}, r_{12})$ redueix el problema de dos cossos a dos problemes d'un cos independents. El moviment del centre de masses és elemental. Analitzem a continuació el moviment del vector posició relativa, és a dir, el problema de Kepler a \mathbb{R}^3 .

2.2 Reducció del problema de Kepler al pla. Estudi analític de les òrbites

Com F és una força conservativa, per la Proposició 1.14, el vector moment angular $L(t)$ és constant i, per tant, el moviment té lloc en el pla perpendicular a $L(t)$. Mitjançant un canvi de coordenades, podem considerar que és el pla $z = 0$. Seguint amb la notació de l'apartat anterior, denotem per $r(t) = (r_x(t), r_y(t))$ el vector posició relativa en aquest pla.

Introduïm ara coordenades polars $(\rho(t), \theta(t))$ en el pla, que denotarem per ρ, θ per simplificar notació. Així, si $\{e_x, e_y\}$ és la base canònica de \mathbb{R}^2 i ρ és la norma de r , podem escriure $r = r_x e_x + r_y e_y = \rho(\cos \theta e_x + \sin \theta e_y) = \rho e_\rho$, on $e_\rho = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y$. Per tant,

$$\begin{aligned} r' &= \frac{d}{dt} r = \rho'(\cos(\theta)e_x + \sin(\theta)e_y) + \rho\theta'(-\sin(\theta)e_x + \cos(\theta)e_y) = \\ &= \rho'e_\rho + \rho\theta'e_\theta, \quad \text{on } e_\theta = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y. \end{aligned}$$

Així, derivant es té

$$r'' = (\rho'e_\rho + \rho\theta'e_\theta)' = \rho''e_\rho + \rho'e'_\rho + (\rho'\theta' + \rho\theta'')e_\theta + \rho\theta'e'_\theta,$$

on $e'_\rho = -\sin(\theta)\theta'e_x + \cos(\theta)\theta'e_y = \theta'e_\theta$ i $e'_\theta = -\cos(\theta)\theta'e_x - \sin(\theta)\theta'e_y = -\theta'e_\rho$. De manera que

$$\begin{aligned} r'' &= \rho''e_\rho + \rho'\theta'e_\theta + (\rho'\theta' + \rho\theta'')e_\theta - \rho(\theta')^2e_\rho = \\ &= (\rho'' - \rho(\theta')^2)e_\rho + (2\rho'\theta' + \rho\theta'')e_\theta = -Gm \frac{r}{\|r\|^3} = -Gm \frac{1}{\rho^2} e_\rho. \end{aligned}$$

Si ara igualem components, obtenim:

$$\text{Equació radial:} \quad \rho'' - \rho(\theta')^2 = -Gm \frac{1}{\rho^2} \quad (2.3)$$

$$\text{Equació angular:} \quad 2\rho'\theta' + \rho\theta'' = 0 \quad (2.4)$$

Observació 2.2. Notem que de l'equació angular es desprén la segona llei de Kepler. En efecte,

$$L = r \wedge r' = \rho e_\rho \wedge (\rho' e_\rho + \rho \theta' e_\theta) = (\rho, 0, 0) \wedge (\rho', \rho \theta', 0) = \begin{vmatrix} e_\rho & e_\theta & e_z \\ \rho & 0 & 0 \\ \rho' & \rho \theta' & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \theta' e_z.$$

És a dir, $l := \|L\| = \rho^2 \theta'$. Aleshores, $l' = (\rho^2 \theta')' = ((\rho^2)'\theta' + \rho^2 \theta'') = \rho(2\rho'\theta' + \rho\theta'')$. Usant l'equació angular (2.4) tenim que $l' = 0$ o, equivalentment, el mòdul del moment angular es manté constant. \triangle

Per poder classificar les òrbites ens interessa estudiar l'evolució del radi respecte de l'angle, és a dir, com es comporta $\rho(\theta(t))$. Usant la regla de la cadena

$$\rho'(\theta(t)) = \frac{d}{dt}\rho(\theta(t)) = \frac{d}{d\theta}\rho(\theta) \frac{d}{dt}\theta(t) = \dot{\rho}(\theta)\theta'(t),$$

on hem introduït la notació $\dot{\cdot} = \frac{d}{d\theta}$.

Distingim dos casos: $L = 0$ i $L \neq 0$. Si $L = r \wedge r' = 0$ aleshores $\exists \lambda(t)$ tal que $r'(t) = \lambda(t)r(t)$, $\lambda(t) \neq 0$ i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{\rho}\right) = \frac{r'}{\rho} - \frac{r\rho'}{\rho^2} = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{r}{\rho} - \frac{\rho^2}{\rho^3}r\right) = 0$$

És a dir, com $\frac{r}{\rho}$ és vector constant i unitari, el moviment es dona sempre en direcció radial. A més, com la força és atractora, el radi tendeix a 0 i tenim col·lisió.

Suposem ara que $L \neq 0$. Com $l = \rho^2 \theta'$, substituïnt a la relació anterior s'obté $\rho' = \dot{\rho} \frac{l}{\rho^2}$. Per tant,

$$\rho'' = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho} \frac{l}{\rho^2}\right) = \frac{(\ddot{\rho} \rho^2 l \theta' - 2(\dot{\rho})^2 \rho l \theta')}{\rho^4} = \left(\frac{((\ddot{\rho} \rho^2 - 2(\dot{\rho})^2 \rho)l)}{\rho^4}\right) \frac{l}{\rho^2} = \frac{l^2}{\rho^4} \left(\ddot{\rho} - \frac{2(\dot{\rho})^2}{\rho}\right).$$

Si ara substituïm aquesta expressió a l'equació radial (2.3), tenim que

$$\frac{l^2}{\rho^4} \left(\ddot{\rho} - \frac{2(\dot{\rho})^2}{\rho}\right) - \rho(\theta')^2 = -\frac{Gm}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l^2}{\rho^4} \left(\ddot{\rho} - \frac{2(\dot{\rho})^2}{\rho}\right) - \rho \frac{l^2}{\rho^4} = -\frac{Gm}{\rho^2}.$$

Obtenim doncs, la següent equació diferencial pel moviment de ρ respecte de θ

$$\ddot{\rho} = \frac{2(\dot{\rho})^2}{\rho} + \rho - \frac{Gm\rho^2}{l^2} \tag{2.5}$$

que volem resoldre. Per fer-ho, introduïm el canvi $u(\theta) = \frac{1}{\rho(\theta)}$. Donat que

$$\rho = \frac{1}{u}, \quad \dot{\rho} = \frac{d}{d\theta}\rho = -\frac{\dot{u}}{u^2} \quad \text{i} \quad \ddot{\rho} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{u}}{u^2}\right) = -\frac{(\ddot{u}u^2 - \dot{u}2u\dot{u})}{u^4},$$

substituïnt a (2.5) tenim

$$-\frac{\ddot{u}}{u^2} + \frac{2(\dot{u})^2}{u^3} = 2u \left(-\frac{\dot{u}}{u^2}\right)^2 + \frac{1}{u} - \frac{Gm}{u^2 l^2},$$

d'on

$$\ddot{u} + u = \frac{Gm}{l^2}.$$

L'equació diferencial anterior és una equació lineal de segon ordre. Es pot reescriure com un sistema lineal de primer ordre introduint una nova variable ω

$$\left. \begin{array}{l} \dot{u} = \omega \\ \dot{\omega} + u = \frac{Gm}{l^2} \end{array} \right\}$$

Segui ara $\theta_0 = \theta(0)$, tenim $u_0 = u(\theta_0) = \frac{1}{\rho(\theta_0)} = \frac{1}{\rho_0}$ i $v_0 = \omega(\theta_0) = \dot{u}(\theta_0) = 0$. És a dir, tenim el següent problema de Cauchy:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{u} = \omega \\ \dot{\omega} = -u + \frac{Gm}{l^2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{\rho_0} \\ \omega_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Que en forma matricial és:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix}, \quad \text{amb condició inicial } (u_0, \omega_0).$$

Es tracta d'un sistema d'equacions diferencials lineals no homogeni a coeficients constants. El resollem, doncs, mitjançant el mètode de variacions de constants

$$\begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} = M(\theta) \left[\begin{pmatrix} u_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + \int_{\theta_0}^{\theta} M^{-1}(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} d\phi \right],$$

on

$$M(\theta) = \exp^{A(\theta-\theta_0)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_0) & \sin(\theta - \theta_0) \\ -\sin(\theta - \theta_0) & \cos(\theta - \theta_0) \end{pmatrix},$$

és la matriu fonamental principal sent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fent els càlculs corresponents (veure B), s'obté

$$u(\theta) = \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho_0} + (1 - \cos(\theta - \theta_0)) \frac{Gm}{l^2}.$$

Desfent el canvi per obtenir l'expressió de $\rho(\theta)$, tenim

$$\begin{aligned} \rho(\theta) &= \frac{1}{u(\theta)} = \frac{l^2 \rho_0}{l^2 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0 Gm(1 - \cos(\theta - \theta_0))} = \\ &= \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\rho_0 Gm}{l^2}(1 - \cos(\theta - \theta_0))} = \frac{1}{\frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho_0} + \frac{Gm}{l^2}(1 - \cos(\theta - \theta_0))} = \\ &= \left(\frac{l^2}{Gm} \right) \left(\frac{1}{\frac{l^2}{Gm} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho_0} + 1 - \cos(\theta - \theta_0)} \right) = \left(\frac{l^2}{Gm} \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{l^2}{Gm\rho_0} - 1 \right) \cos(\theta - \theta_0) + 1} \right). \end{aligned}$$

Si denotem per $p = \frac{l^2}{Gm}$ i per $e = \frac{l^2}{Gm\rho_0} - 1$, aleshores

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (2.7)$$

és l'equació d'una cònica en coordenades polars.

Observem que podem considerar $e > 0$. Si no, fem $\hat{\theta}_0 = \theta_0 + \pi$, i en tal cas $e \cos(\theta - \theta_0) = -e \cos(\theta - \hat{\theta}_0)$. Llavors

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + \hat{e} \cos(\theta - \hat{\theta}_0)}, \quad \text{amb } \hat{e} = -e \geq 0.$$

Al paràmetre $e \geq 0$ se l'anomena excentricitat i p és el paràmetre focal.

Usant l'expressió (2.7) podem fer un estudi analític de les òrbites. Sense pèrdua de generalitat, fixem $\theta_0 = 0$. Aleshores:

- Si $e = 0$ tenim que $\rho(\theta) = p$. És a dir, el radi és constant i tindrem una òrbita circular.
- Si $e < 1$, el denominador no s'anul·la mai i és positiu. A més, com $0 \leq e < 1$ tenim que:

$$1 - e \leq 1 + e \cos \theta < 1 + e \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + e \cos \theta} \leq \frac{1}{1 - e} \quad \text{i} \quad \frac{1}{1 + e} < \frac{1}{1 + e \cos \theta}.$$

Per tant,

$$\frac{p}{1 + e} < \rho(\theta) \leq \frac{p}{1 - e}.$$

És a dir, l'òrbita està acotada i és una cònica del pla amb radi no constant. Per tant, és una el·lipse.

- Si $e = 1$, el denominador s'anul·la per $\theta = \pi$. És a dir, el radi tendeix a infinit, i tenim una assíptota horitzontal $\theta = \pi$. Per tant, és una paràbola.
- Finalment, si $e > 1$, el denominador $1 + e \cos \theta$ s'anul·la quan $\cos \theta = -\frac{1}{e}$. Així, tenim dos angles solució, $\bar{\theta}$ i $-\bar{\theta}$, que formen dues assíptotes oblíquies i, per tant, es tracta d'una hipèrbola.

2.3 Reducció del problema de Kepler a 1 grau de llibertat. Estudi qualitatiu de les òrbites

Sabem que la força gravitatòria F és central. Per tant, pel Teorema 1.10, existeix un potencial $V = V(\rho)$ tal que $F = -\nabla V$. Es comprova fàcilment que és $V = -\frac{Gm}{\rho}$. Per altra banda, l'energia cinètica pel problema de Kepler per un cos de massa 1 és $T = \frac{\|v\|^2}{2}$. Així, la funció

$$H(\rho, \|v\|) = \frac{\|v\|^2}{2} - \frac{Gm}{\rho}$$

és integral primera amb dos graus de llibertat. És a dir, $H(\rho, \|v\|)$ verifica les condicions donades a (1.3).

És immediat veure que $\frac{\partial H}{\partial v} = v = r'$. Veiem ara que verifica la segona condició. Per la regla de la cadena,

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left((rr^t)^{1/2} \right) = \frac{1}{2} (rr^t)^{-1/2} \left(\frac{\partial r}{\partial r} r^t + r \frac{\partial r^t}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\rho} (r^t + r) = \frac{r}{\rho}$$

Per tant,

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial \rho} \frac{r}{\rho} = \frac{Gm}{\rho^2} \frac{r}{\rho} = \frac{Gm}{\rho^3} r = -v' = -r'',$$

ja que, per l'equació (2.2), $r'' = -\frac{Gm}{\rho^3} r$.

Recuperem ara l'equació radial (2.3) i usem que $\theta' = \frac{l}{\rho^2}$. Aleshores obtenim la següent equació diferencial de segon ordre

$$\rho'' = \frac{l^2}{\rho^3} - Gm \frac{1}{\rho^2}, \quad (2.8)$$

que, introduïnt una nova variable $\omega = \rho'$, es reescriu com el sistema diferencial lineal

$$\left. \begin{array}{l} \rho' = \omega \\ \omega' = f(\rho) \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

i denotem per $F(\rho, \omega) = (\omega, f(\rho))^t$, on $f(\rho) = \frac{l^2}{\rho^3} - Gm \frac{1}{\rho^2}$. Com tenim un camp conservatiu en el pla, pel Teorema 1.20, sabem que és integrable i per la Proposició 1.18, tenim que F admet una integral primera H que ens servirà per fer l'estudi qualitatiu de les òrbites. Considerem una funció $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-U'(\rho) = f(\rho)$. Així l'equació orbital de (2.9) és

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{f(\rho)}{\omega} = \frac{-U'(\rho)}{\omega}.$$

És una equació diferencial de variables separades la solució de la qual verifica $\frac{v^2}{2} = -U(\rho) + k$, $k \in \mathbb{R}$. Per altra banda,

$$U(\rho) = - \int \left(\frac{l^2}{\rho^3} - Gm \frac{1}{\rho^2} \right) d\rho = \frac{l^2}{2\rho^2} - \frac{Gm}{\rho}, \quad \text{s'anomena potencial efectiu.}$$

Així tenim que una integral primera de (2.9) és

$$H(\rho, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{l^2}{2\rho^2} - \frac{Gm}{\rho}, \quad \text{on } H(\rho, v) \text{ té un grau de llibertat.}$$

Per fer l'estudi qualitatiu de les òrbites en tenim prou en estudiar la gràfica $(\rho, U(\rho))$, que es representa en la Figura 1. Donat que H és una integral primera, sabem que fixat un nivell d'energia H_* , les òrbites es troben sobre les corbes de nivell de $H_* = \frac{v^2}{2} + U(\rho)$, i està determinada per les condicions inicials ρ_0, v_0 , $H_* = H(\rho_0, v_0)$. Si aïllem v de l'expressió anterior tenim $v = \pm \sqrt{2H_* - U(\rho)}$. Per tant, té sentit quan $H_* \geq U(\rho)$. Veiem ara que el què hem obtingut analíticament es correspon amb els resultats de l'anàlisi qualitatiu (veure Figura 1), en funció de l'excentricitat $e = \frac{l^2}{Gm\rho_0} - 1$. Recordem que estem considerant $e > 0$ i la condició inicial $\rho_0 = \rho(0)$.

i) L'òrbita circular es dona pel mínim del potencial efectiu $U(\rho)$, és a dir, $U'(\rho) = 0$.

$$U'(\rho) = -\frac{l^2}{\rho^3} + \frac{Gm}{\rho^2} = 0 \text{ si } l^2 = Gm\rho. \text{ Per tant, } \rho = \frac{l^2}{Gm}, \text{ i és constant.}$$

Tenim doncs, $\rho(\theta) = \rho_0$ per a tot θ . Aleshores, per l'equació (2.7), $\rho_0 = \frac{p}{1+e \cos \theta}$, $\forall \theta$. Per tant, $e = 0$ i, en tal cas, $\rho_0 = p = \frac{l^2}{Gm}$. Denotarem per U_c el mínim del potencial efectiu.

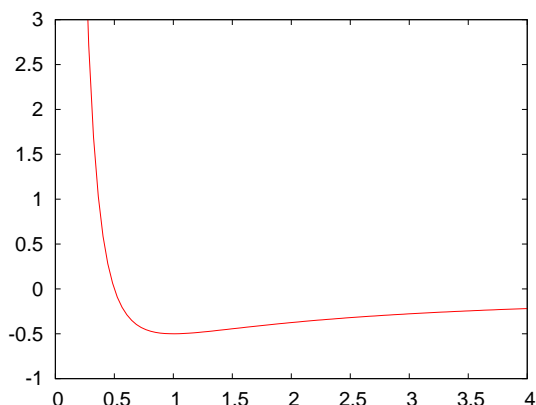


Figura 1: Gràfica del potencial efectiu $U(\rho)$ per paràmetres $l = 1$ i $Gm = 1$. Podem observar que tenim òrbites acotades, que es correspondrien amb les circumferències i el·lipses que ja havíem obtingut analíticament, i òrbites no acotades que es corresponen amb les paràboles i hipèrboles. En particular, el mínim del potencial el tenim per un radi constant i per tant, es correspon amb l'òrbita circular. Estem usant implícitament que les òrbites són còniques al pla.

- ii) Si considerem ara $U_c < U(\rho) < 0$, a la Figura 1 observem que tenim òrbites acotades (que sabem que són el·lipses). És a dir, $\rho_m \leq \rho(\theta) \leq \rho_M$, on $\rho_m = \frac{p}{1+e}$ és el radi mínim i es correspon amb ρ_0 i $\rho_M = \frac{p}{1-e}$ és el radi màxim. Ambdós radis han de ser finits, per tant, $1 - e \neq 0$ per a tot $e > 0$. Per tant, $e < 1$,
- iii) Considerem ara $U(\rho) \geq 0$. Observem que $\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{l^2}{2\rho^2} - \frac{Gm}{\rho} \right) = 0$ i tenim que existeix ρ tal que $U(\rho) \geq 0$. És a dir, el radi ρ està acotat inferiorment i tendeix a infinit. Per tant, $\frac{p}{1+e \cos \theta(t)} \rightarrow \infty$, si $t \rightarrow \infty$. Cal que $1 + e \cos \theta = 0$, per un cert θ . Tenim, doncs, $\frac{1}{e} = -\cos \theta$, que té sentit només si $e \geq 1$. Estudiem els casos $e = 1$ i $e > 1$.
 - a) Si $e = 1$, $\frac{1}{e} = -\cos \theta$ si i només si $\theta = \pi$. Per tant, tenim un únic angle d'escapament, i ja sabem que això es correspon amb una òrbita parabòlica.
 - b) Sigui $e > 1$, aleshores si θ és solució de $\frac{1}{e} = -\cos \theta$, $-\theta$ també és solució. Per tant, tenim dues direccions d'escapament. Així l'òrbita serà hiperbòlica.

Observació 2.3. Si considerem el problema amb la massa reduïda μ , tindrem $\theta' = \frac{l^2}{\mu\rho^2}$ i l'equació (2.8) es reescriu

$$\rho'' = \frac{l^2}{\mu^2\rho^3} - \frac{Gm}{\rho^2}.$$

Aleshores, l'expressió del potencial efectiu per la massa reduïda és

$$U(\rho) = \frac{l^2}{2\mu^2\rho^2} - \frac{Gm}{\rho},$$

i tindrem la següent integral primera

$$H(\rho, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{l^2}{2\mu^2\rho^2} - \frac{Gm}{\rho},$$

que, reescalant per μ , és

$$\bar{H}(\rho, v) = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{l^2}{2\mu\rho^2} - \frac{Gm\mu}{\rho}. \quad \triangle$$

2.4 Altres potencials

Té sentit preguntar-se ara per a quin tipus de potencials podem trobar òrbites acotades. Com parlem de camps centrals, sabem que el potencial només depèn del radi. Per tant, volem estudiar qualitativament gràfiques $(\rho, U(\rho))$, amb $U(\rho)$ potencial efectiu degut al potencial $V(\rho) = k\rho^\alpha$, amb $k \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in \mathbb{Z}$. Com $F = -\nabla V$, cal que $V(\rho)$ sigui de classe C^1 . A més, tota la teoria que hem presentat és general per a camps centrals de la forma $F = \hat{k} \frac{r}{\|r\|^\beta}$. Així, de l'apartat anterior, tenim una fórmula per calcular el potencial efectiu en aquest cas:

$$U(\rho) = \int \left(-\frac{l^2}{\rho^3} - \hat{k} \frac{1}{\rho^\beta} \right) d\rho = \frac{l^2}{2\rho^2} - \frac{k}{\rho^\alpha}, \text{ amb } \alpha = 1 - \beta \text{ si } \beta \neq 1$$

Observació 2.4. Si $\beta = 1$ ($\alpha = 0$), tenim un potencial logarítmic $V(\rho) = \log \rho + k$, on k és una constant. \triangle

Estudiem doncs les gràfiques $(\rho, U(\rho))$ amb $U(\rho) = P(\rho) - \frac{k}{\rho^\alpha}$ on $P(\rho) = \frac{l^2}{2\rho^2}$ segons α . Veure figures Figura 2 i Figura 3.

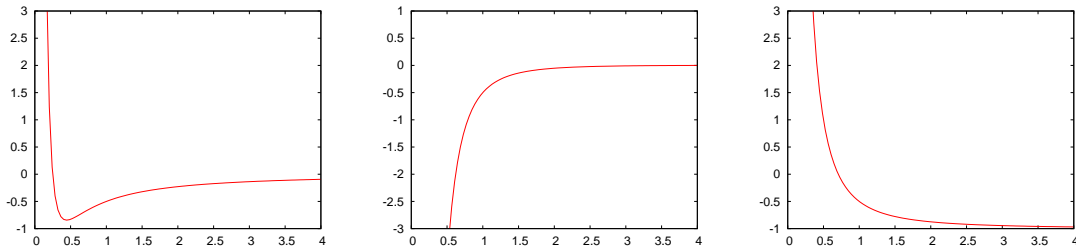


Figura 2: D'esquerra a dreta, es representa la gràfica del potencial efectiu per $0 < \alpha < 2$ (en particular, $\alpha = 1.5$), $\alpha > 2$ ($\alpha = 2.5$), i $\alpha = 0$ (potencial logarítmic), on s'han considerat les constants $l = 1$ i $k = 1$.

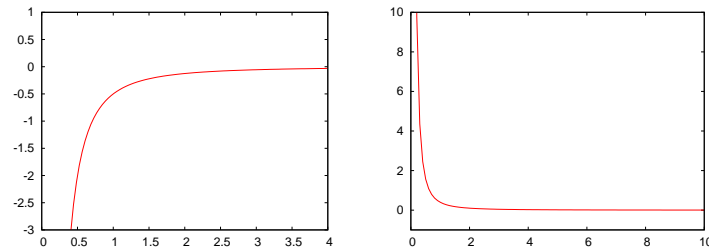


Figura 3: El potencial efectiu per $\alpha = 2$ ens dóna dues possibles gràfiques ja que, $U(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{l^2}{2} - k \right)$. Si $\frac{l^2}{2} - k < 0$ es correspon amb la primera gràfica, i si $\frac{l^2}{2} - k > 0$, amb la segona. S'han pres les constants $l = 1$, en ambdós casos i, en la figura de l'esquerra s'ha pres $k = 1$ i en la de la dreta $k = 0.1$.

Com a última part de la secció, recuperarem la tercera llei de Kepler.

Definició 2.5. *Sigui X un camp central qualsevol. El seu potencial $V(r)$ és homogeni de grau α si*

$$V(\lambda r) = \lambda^\alpha V(r), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'equació del moviment és $r'' = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$, aleshores, es pot comprovar fàcilment que si fem un canvi d'escala $R = \beta r$ i $\tau = \gamma t$ tenim que $R''(\tau) = -\frac{\partial V(R)}{\partial R}$ si i només si $\gamma^2 = \beta^{2-\alpha}$. En particular, el potencial gravitatori és homogeni amb $\alpha = -1$. En efecte, $V(\lambda r) = \frac{-Gm}{\lambda r} = -\frac{1}{\lambda}V(r)$ i per tant, si $\gamma^2 = \beta^3$ tenim la mateixa equació d'on recuperem la tercera llei de Kepler.

3 Potencial gravitatori i equació de Poisson

En aquesta secció usarem la llei de Gauss per derivar el potencial gravitacional com a solució de l'equació de Poisson. En particular, veurem que el potencial gravitatori de Kepler, K/r , és l'única solució de l'equació de Poisson a \mathbb{R}^3 que tendeix a 0 quan r tendeix a infinit. D'altra banda, veurem que el potencial logarítmic és solució de l'equació de Poisson a \mathbb{R}^2 , tot i que no podem garantir-ne l'unicitat.

L'exposició dels resultats que es detalla en aquesta secció es basa en els llibres [14, 10].

La caracterització del potencial gravitacional, que ens proporciona la llei de Gauss, ens servirà també per trobar el potencial gravitatori sobre superfícies amb curvatura constant positiva en la secció següent.

Abans d'establir la relació entre el potencial gravitatori i l'equació de Poisson, convé recordar algunes propietats de les funcions harmòniques i introduir la distribució δ_t de Dirac, de la qual donarem una introducció heurística, sense entrar en derivacions formals basades en distribucions o en mesures singulars. Usarem alguns resultats que s'han vist al llarg de la carrera i, per tant, no els demostrarem.

3.1 Previs

Definició 3.1. *Sigui $u : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on u és de classe C^2 i A és obert i convex. L'equació de Laplace és $\Delta u = 0$, on $\Delta := \nabla^2$ és l'operador laplaciana. A l'equació no homogènia $\Delta u = f$, se l'anomena equació de Poisson, on f és una funció real.*

Definició 3.2. *Una funció $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, és harmònica sobre A si:*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0.$$

És a dir si $\Delta f = \nabla^2 f = 0$.

Proposició 3.3. *Si $u : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció harmònica, aleshores és invariant per rotacions i per translacions. Invariant per translacions vol dir que si considerem la funció $v(x) = u(x - y)$ per qualsevol $y \in \mathbb{R}^n$, tenim que $v(x)$ és una funció harmònica i quan parlem d'invariància rotacional ens referim a que si considerem una rotació de \mathbb{R}^n , representada per una matriu ortogonal O , i considerem la funció $v(x) = u(Ox)$, aleshores, $v(x)$ és harmònica. És a dir, en ambdós casos tindrem que $\Delta v = 0$.*

Demostració. La invariància per translacions és trivial. Anem a veure la invariància per rotacions. Sigui O una matriu ortogonal, és a dir, $O^t = O^{-1}$. Considerem la funció $v(x) = u(Ox)$, així, per la regla de la cadena tenim que $Dv(x) = Du(Ox)O$. Per tant, $D^t v(x) = O^t D^t u(Ox)$. Si ara tornem a derivar l'expressió anterior obtenim que $D^2 v(x) = O^t D^2 u(Ox)O$. Finalment, com $\Delta v(x) = \text{Tr } D^2 v(x)$ i la traça d'una matriu és invariant per canvis de base, tenim $\Delta v(x) = \text{Tr}(O^t D^2 u(Ox)O) = \text{Tr } D^2 u(Ox) = \Delta u(Ox)$. \square

Teorema 3.4. *(de Liouville) Sigui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció entera i acotada. És a dir, f és diferenciable en tot punt de \mathbb{C} i existeix $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$, per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aleshores f és constant.*

Teorema 3.5. (Fórmula de la divergència de Gauss) Sigui F un camp vectorial de classe C^1 en un entorn obert Ω de \mathbb{R}^n . Aleshores

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \nu d\sigma,$$

on ν és el vector normal unitari exterior a $\partial\Omega$.

Proposició 3.6. (Identitat de Green) Siguin u, v funcions definides en un entorn obert $\Omega \in \mathbb{R}^n$, amb u de classe C^2 i v de classe C^1 ,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \nu d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx, \quad (3.1)$$

on ν és el vector normal unitari exterior a $\partial\Omega$.

La identitat de Green es demostra usant (1.3) amb $F = \nabla u$ i la fórmula de la divergència de Gauss (3.5).

Proposició 3.7. Sigui $u = u(x, y)$ una funció de classe C^2 del pla en coordenades cartesianes. Considerem les coordenades polars (ρ, θ) centrades en l'origen. Aleshores l'operador Δ en coordenades polars, aplicat a $u(\rho, \theta)$, s'expressa com

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}. \quad (3.2)$$

Demostració. Usarem la notació u_x per la derivada parcial d'una funció $u(x, y)$ respecte x . Així el laplacà és $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Com $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ i $\theta = \arctan(y/x)$, per la regla de la cadena tenim, $u_x = u_{\rho} \rho_x + u_{\theta} \theta_x$. Si tornem a derivar respecte x ,

$$u_{xx} = (u_{\rho})_x \rho_x + u_{\rho} \rho_{xx} + (u_{\theta})_x \theta_x + u_{\theta} \theta_{xx}.$$

on $(u_{\rho})_x = u_{\rho\rho} \rho_x + u_{\rho\theta} \theta_x$ i $(u_{\theta})_x = u_{\theta\rho} \rho_x + u_{\theta\theta} \theta_x$. Aleshores,

$$u_{xx} = u_{\rho\rho} \rho_x^2 + u_{\rho\theta} \theta_x \rho_x + u_{\rho} \rho_{xx} + u_{\theta\rho} \rho_x \theta_x + u_{\theta\theta} \theta_x^2 + u_{\theta} \theta_{xx}. \quad (3.3)$$

Es comprova fàcilment que $\rho_x = x/2$, $\theta_x = -y/\rho^2$, $\rho_{xx} = (\rho^2 - x^2)/\rho^3$ i $\theta_{xx} = 2xy/\rho^4$. Fent substitució a (3.3) i tenint en compte que $u_{\theta\rho} = u_{\rho\theta}$, tenim

$$u_{xx} = \frac{x^2}{\rho^2} u_{\rho\rho} - \frac{2xy}{\rho^3} u_{\rho\theta} + \frac{y^2}{\rho^4} u_{\theta\theta} + \frac{(\rho^2 - x^2)}{\rho^3} u_{\rho} + \frac{2xy}{\rho^4} u_{\theta}. \quad (3.4)$$

Anàlogament s'obté

$$u_{yy} = \frac{y^2}{\rho^2} u_{\rho\rho} + \frac{2xy}{\rho^3} u_{\rho\theta} + \frac{x^2}{\rho^4} u_{\theta\theta} + \frac{(\rho^2 - y^2)}{\rho^3} u_{\rho} - \frac{2xy}{\rho^4} u_{\theta}. \quad (3.5)$$

Finalment, sumant (3.4) i (3.5) obtenim el resultat. \square

Observació 3.8. L'anterior resultat es reformula a \mathbb{R}^3 amb coordenades esfèriques (ρ, θ, φ) , donades per $x = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ i $z = \rho \cos \varphi$, on $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ és l'angle azimutal i $0 \leq \varphi \leq \pi$ és l'angle colatitud, veure Figura 4. Així, si $u = u(\rho, \theta, \varphi)$, es té

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{1}{\sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \cot \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right). \quad (3.6)$$

Veure [13]. \triangle

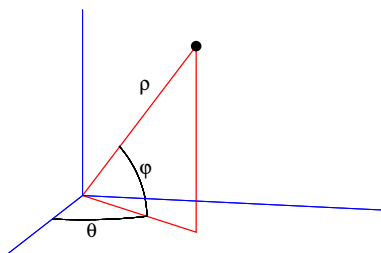


Figura 4: Representació de les coordenades esfèriques: ρ denota el radi, l'angle φ representa l'angle colatitud i l'angle θ és la longitud.

Proposició 3.9. Fixat $\varepsilon > 0$ i per qualsevol $t \in \mathbb{R}$ fixat, considerem la família de funcions

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } x \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \end{cases}.$$

Aquesta família de funcions verifica les següents propietats:

- i) $\int_a^b f_\varepsilon(x) dx = 1$ per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, amb $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset [a, b]$.
- ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq t \\ \infty & \text{si } x = t \end{cases}$.
- iii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f_\varepsilon(x) dx = 1$.
- iv) per a tota funció g contínua en $[a, b]$,
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b g(x) f_\varepsilon(x) dx = g(t)$.

Demostració.

- i) Per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, amb $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset [a, b]$ tenim que

$$\int_a^b f_\varepsilon(x) dx = \int_a^b \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}(x) dx = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dx = \frac{x}{2\varepsilon} \Big|_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} = 1.$$

- ii) Si $x \neq t$ clarament el límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ és 0, i si $x = t$ tenim que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} = \infty$.
- iii) És immediat per la propietat i).
- iv) Sigui g una funció contínua en $[a, b]$, aleshores

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b g(x) f_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} g(x) \frac{1}{2\varepsilon} dx.$$

Pel Teorema del Valor Mitjà aplicat a $g(x)$ en $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ tenim que $\exists c \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ tal que $G(t+\varepsilon) - G(t-\varepsilon) = G'(c)(t+\varepsilon - t-\varepsilon)$, on G és una primitiva de g . Per tant,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} g(c) 2\varepsilon, \quad c \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$$

Finalment, prenent el límit $\varepsilon \rightarrow 0$, ha de ser $c \in \{t\}$ i tenim el resultat. □

Definició 3.10. Definim la funció δ_t de Dirac com

$$\delta_t(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) , \quad (3.7)$$

on $f_\varepsilon(x)$ és la família de funcions dependent de $\varepsilon > 0$ introduïda a la Proposició 3.9. Notem que, definida així, δ_t és una funció en sentit generalitzat donada per la propietat ii) de la Proposició 3.9.

Proposició 3.11. La funció δ_t de Dirac verifica:

- a) $\int_a^b g(x)\delta_t(x)dx = g(t)$, per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- b) El suport de δ_t és $\text{supp}(\delta_t) = \{t\}$. És a dir, δ_t és una funció de suport compacte.
- c) $\int_a^b \delta_t(x)dx = 1$, per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Notem que δ_t és una mesura singular, és a dir, concentrada en el punt $x = t$, on val infinit. Per altra banda, recordem que el suport d'una funció contínua és l'adherència del conjunt de punts on la funció no s'anul·la.

Demostració. a), b), c), es segueixen de forma immediata per les propietats iv), ii), iii) de la Proposició 3.9 respectivament. \square

Observació 3.12. La funció $\delta_t(x)$ es pot definir de forma anàloga a \mathbb{R}^n i es pot veure que, en tal cas, també verifica les propietats donades a la Proposició 3.11. \triangle

Observació 3.13. Les funcions f_ε no són C^2 , però considerant funcions meseta adequades, podem construir funcions C^2 (de fet C^∞ , si cal), amb les mateixes propietats. Més endavant veurem que necessitem funcions amb aquestes propietats i de classe C^2 , per resoldre l'equació de Poisson que involucra l'operador de Laplace. \triangle

3.2 La llei de Gauss: relació entre l'equació de Poisson i el potencial gravitatori

Considerem a \mathbb{R}^3 un cos de massa 1 situat a una distància r de l'origen. Aleshores, la força gravitatòria a r deguda als altres cossos situats a \mathbb{R}^3 s'expressa com

$$F(r) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \mu(s) \frac{(r-s)}{\|r-s\|^3} ds ,$$

on G és la constant universal de gravitació i $\mu(s)$ és la densitat de massa, sent aquesta última una funció de suport compacte. Si ara calculem la divergència de $F(r)$ tenim que

$$\text{div} F(r) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \mu(s) \text{div}_r \left(\frac{(r-s)}{\|r-s\|^3} \right) ds ,$$

on usem la notació div_r per emfatitzar que estem considerant la divergència respecte r .

Ja veiem que si s tendeix a r tenim una singularitat i no podem derivar el terme de la dreta de la igualtat de forma directa. Considerem doncs, una bola de radi ε centrada en r , $B_\varepsilon(r)$, per tal d'aïllar la singularitat i tenim

$$\operatorname{div} F(r) = -G \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(r)} \mu(s) \operatorname{div}_r \left(\frac{(r-s)}{\|r-s\|^3} \right) ds - G \int_{B_\varepsilon(r)} \mu(s) \operatorname{div}_r \left(\frac{(r-s)}{\|r-s\|^3} \right) ds =: I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

La primera integral de l'expressió anterior és 0 ja que $\operatorname{div}_r \left(\frac{(r-s)}{\|r-s\|^3} \right) = 0$, si $s \in \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(r)$.

Resta calcular J_ε . Pel Teorema de la divergència de Gauss 3.5,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= -G \int_{\partial B_\varepsilon(r)} \mu(\sigma) \frac{(r-\sigma)}{\|r-\sigma\|^3} \nu_\sigma d\sigma = G \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \mu(r-\sigma) \frac{\sigma}{\|\sigma\|^3} \nu_\sigma d\sigma = \\ &= G \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \mu(r-\sigma) \frac{\sigma}{\|\sigma\|^3} \left(\frac{-\sigma}{\varepsilon} \right) d\sigma = -\frac{G}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \mu(r-\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Tenim doncs,

$$\operatorname{div} F(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{G}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(r)} \mu(r-\sigma) d\sigma.$$

Per tant, si $M(\varepsilon) = \max_{\sigma \in B_\varepsilon(0)} \mu(r-\sigma)$ i $m(\varepsilon) = \min_{\sigma \in B_\varepsilon(0)} \mu(r-\sigma)$,

$$-\frac{G}{\varepsilon^2} M(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(r)} d\sigma \leq -\frac{G}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(r)} \mu(r-\sigma) d\sigma \leq -\frac{G}{\varepsilon^2} m(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(r)} d\sigma.$$

Com la integral sobre la vora de la bola de radi r de la funció unitat ens dona l'àrea de la seva superfície, és $4\pi\varepsilon^2$. És a dir, tenim

$$-GM(\varepsilon)4\pi \leq -\frac{G}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon(r)} \mu(r-\sigma) d\sigma \leq -Gm(\varepsilon)4\pi.$$

Si ara prenem el límit quan ε tendeix a 0 de l'expressió anterior, i tenint en compte que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(\varepsilon) = \mu(r)$, ja que $\sigma \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\operatorname{div} F(r) = -4\pi G \mu(r). \quad (3.8)$$

Aquesta relació es coneix com la Llei de Gauss.

Observació 3.14. La Llei de Gauss és una relació proporcional entre la $\operatorname{div} F(r)$ i $\mu(r)$, amb constant de proporcionalitat $K = -4\pi G$. Observem que, amb una constant K adequada, podem obtenir la relació sobre els diferents espais \mathbb{S}^n , $n \geq 1$. Per exemple, per $n = 2$, tindrem la relació $\operatorname{div} F(r) = -2\pi G \mu(r)$. \triangle

Finalment, com la força gravitatòria és potencial, i tenim $r \in \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div} F(r) = \operatorname{div}(-\nabla V(r)) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(r) \right) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(r) = -\Delta V(r).$$

Tenim doncs que

$$\Delta V(r) = 4\pi G \mu(r), \quad (3.9)$$

que és l'equació de Poisson per a $V(r)$ potencial gravitatori.

3.3 Equació de Laplace. Solució fonamental

Resoldre l'equació de Poisson, a priori, no és senzill. Però resoldre primer l'equació de Laplace, ens donarà una idea de la forma que pot tenir la solució de l'equació de Poisson. És per això que, en aquesta secció, estudiarem l'equació de Laplace $\Delta u = 0$.

El primer pas per trobar solucions d'equacions en derivades parcials és trobar solucions senzilles. Com són equacions lineals, podrem trobar solucions més complexes a partir de combinacions lineals de les anteriors. Per trobar solucions senzilles, tal i com s'explica a [10, 14], pot ser útil buscar solucions que tinguin certes propietats de simetria. Per la Proposició 3.3, tenim que la solució de l'equació de Laplace és invariant per rotacions. Així, té sentit buscar solucions que siguin radialment simètriques $u = u(r)$.

Volem resoldre l'equació $\Delta u = 0$. Ho farem primer a \mathbb{R}^2 , és a dir, cerquem $u = u(r)$, $r \in \mathbb{R}^2$, que compleixi l'equació.

Usant coordenades polars (ρ, θ) en el pla, imposant que la solució $u(\rho, \theta)$ sigui radialment simètrica (és a dir, independent de θ), la identitat (3.2) ens permet expressar l'equació a resoldre com

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho) = 0,$$

que, si denotem per $' = \partial/\partial\rho$, s'escriu com $u'' + u'/\rho = 0$, ja que u només depèn del radi. Si $u' \neq 0$, aleshores $u''/u' = -1/\rho$, és a dir

$$(\log |u'|)' = -\frac{1}{\rho}.$$

Integrant l'expressió anterior s'obté $\log |u'| = -\log \rho + c$ amb $c \in \mathbb{R}$. Prenent ara exponencials a banda i banda de la igualtat, tenim que $u' = C_1/\rho$, amb $C_1 \in \mathbb{R}^+$ i, integrant de nou, obtenim la solució general $u(\rho) = C_1 \log \rho + C_2$, on C_1, C_2 són constants.

Si ara ens situem a \mathbb{R}^3 , tenim que l'equació de Laplace, per (3.6), és

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho) = 0,$$

i es resol amb el mateix procediment. La solució general que s'obté és $u(\rho) = -\frac{C_1}{\rho} + C_2$.

Podem concloure que, la solució general de l'equació de Laplace és la funció harmònica

$$\phi(r) = \begin{cases} C_1 \log \rho + C_2 & n = 2 \\ -\frac{C_1}{\rho} + C_2 & n = 3 \end{cases} \quad (3.10)$$

que usarem més endavant per tal de poder resoldre l'equació de Poisson, tal i com hem comentat a l'inici de la secció. Ara bé, si prenem $C_2 = 0$ i, $C_1 = \frac{1}{4\pi}$ si $n = 3$, $C_1 = \frac{1}{2\pi}$ si $n = 2$, obtenim la funció

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \rho & n = 2 \\ -\frac{1}{4\pi\rho} & n = 3 \end{cases} \quad (3.11)$$

que s'anomena solució fonamental de l'operador de Laplace. L'elecció de la constant C_1 no és arbitrària, sinó que es fa sota la condició

$$\Delta \Phi(r) = \delta_t(r)^2,$$

²Al llarg de tot el treball, usarem aquesta condició, tot i que en el llibre que s'ha seguit ([14]) s'usi la condició $\Delta \Phi(r) = -\delta_t(r)$, per coherència amb (3.9) i, de fet, concorda amb el potencial de Kepler obtingut a la secció 2.

com veurem en la següent secció. Recordem que $\delta_t(r)$ denota la funció delta de Dirac a $r = 0$.

Observació 3.15. Si traslladem l'origen a un punt qualsevol s , el potencial corresponent és $\Phi(r - s)$ i tenim

$$\Delta_r \Phi(r - s) = \delta_t(r - s).$$

Per simetria, podem escriure també $\Delta_s \Phi(r - s) = \delta_t(r - s)$. △

Observació 3.16. Per dimensions $n > 3$, la solució fonamental de l'equació de Laplace és $\Phi(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$, on a, b són constants, veure [14]. △

3.4 Equació de Poisson

En aquest apartat considerarem una distribució de massa μ en un conjunt compacte de \mathbb{R}^3 . Així, $\phi(r - s)\mu(s)ds$ és el potencial a $r = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ degut a $\mu(s)ds$ dins una petita regió de volum ds al voltant de $s \in \mathbb{R}^3$. Aleshores, el potencial total a r és la suma de tots els potencials. És a dir,

$$u(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(r - s)\mu(s)ds = -C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(s)}{\|r - s\|} ds, \quad (3.12)$$

on escollim la constant $C_1 = \frac{1}{4\pi}$ i ϕ és la solució general de l'equació de Laplace, (3.10), amb $C_2 = 0$. Més endavant veurem perquè fem aquesta elecció de la constant C_1 . Com la nostra distribució de masses serà, de fet, una distribució discreta amb un nombre finit de valors positius que es corresponen a les masses dels cossos situats a \mathbb{R}^3 , prenem $\Delta\phi(r) = \delta_t(r)$. Així, aplicant l'operador de Laplace a l'equació (3.12) obtenim

$$\Delta u(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_r \phi(r - s)\mu(s) ds = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_t(r - s)\mu(s) ds = \mu(r). \quad (3.13)$$

que és l'equació de Poisson que volem resoldre, per al potencial gravitatori, sota les condicions donades. Observem que si u és solució de dita equació, aleshores $u + c$, amb c constant, també és solució. Però la funció (3.12) és la única solució que s'anul·la a l'infinit, com provarem a continuació. Abans, però, com la nostra distribució de masses la podem confinar sempre dins un compacte de \mathbb{R}^3 , (si s'escapen a l'infinit, la interacció gravitacional tendeix a 0), podem considerar que μ és de suport compacte.

Teorema 3.17. *Sigui μ una funció de classe C^2 de \mathbb{R}^3 amb suport compacte, i u el potencial newtonià degut a μ definit a (3.12). Aleshores u és la única solució de l'equació de Poisson*

$$\Delta u = \mu \quad (3.14)$$

de classe C^2 que s'anul·la a l'infinit.

Demostració. Veiem primer la unicitat. Sigui doncs, $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una altra solució de (3.14) que a l'infinit val 0. Aleshores $u - v$ és una funció harmònica acotada en tot \mathbb{R}^3 . Per tant, per Teorema de Liouville 3.4, $u - v$ és constant, i com a l'infinit s'anul·la, ha de ser constant igual a 0.

Veiem ara que u és de classe C^2 i satisfà (3.14). Observem que podem escriure

$$u(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(s)\mu(r - s)ds = -C_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(r - s)}{\|s\|} ds.$$

Sabem que $\frac{1}{\|s\|}$ és integrable a prop del 0 i que μ és de suport compacte. Podem calcular, doncs, les seves primeres i segones derivades

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(s) \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j}(r-s) ds. \quad (3.15)$$

Com μ és de classe C^2 , tenim que $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j}$ és contínua. Per tant, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ és contínua, i podem concloure que u és de classe C^2 .

Resta veure (3.14). Com $\Delta_r \mu(r-s) = \Delta_s \mu(r-s)$,

$$\Delta u(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(s) \Delta_r \mu(r-s) ds = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(s) \Delta_s \mu(r-s) ds.$$

Per resoldre la integral usarem la identitat de Green (3.1). Com ϕ té una singularitat en el 0, cal aïllar-la per poder fer el càlcul.

$$\Delta u(r) = \int_{B_\varepsilon(0)} \phi(s) \Delta_s \mu(r-s) ds + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)} \phi(s) \Delta_s \mu(r-s) ds =: I_\varepsilon + J_\varepsilon, \quad (3.16)$$

on $B_\varepsilon(0)$ és la bola oberta de radi ε centrada en l'origen, que denotarem per B_ε . Com $\Delta \mu$ és contínua de suport compacte, existeix $\max \Delta u$. Així,

$$|I_\varepsilon| \leq \int_{B_\varepsilon} |\phi(s) \Delta_r \mu(r-s)| ds \leq \frac{\max |\Delta \mu|}{4\pi} \int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\|s\|} ds.$$

Per calcular aquesta última integral usarem coordenades esfèriques (ρ, θ, φ) . Per la fórmula de canvi de variable

$$\int_{B_\varepsilon} \frac{1}{\|s\|} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\rho} |J| d\rho d\theta d\varphi, \quad (3.17)$$

on $|J|$ és el determinant del jacobinià del canvi. Tenim que si $s = (s_1, s_2, s_3)$

$$s_1 = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad s_2 = \rho \cos \varphi \cos \theta, \quad s_3 = \rho \sin \varphi.$$

Per tant,

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \cos \theta & -\rho \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \rho^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) \cos \varphi + \rho^2 \cos^3(\varphi) \cos^2(\theta) - (-\rho^2 \cos \varphi \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) - \rho^2 \cos^3(\varphi) \sin^2(\theta)) = \\ &= \rho^2 [\sin^2(\varphi) \cos \varphi (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + \cos^3(\varphi) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))] = \rho^2 [\cos \varphi (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))] = \\ &= \rho^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Aleshores, (3.17) és

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \rho \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 \cos \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 \cos \varphi d\theta d\varphi = \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon^2 \cos \varphi d\varphi = 2\pi \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Per tant,

$$|I_\varepsilon| \leq \frac{\max |\Delta\mu|}{4\pi} 2\pi\varepsilon^2 = \frac{\max |\Delta\mu|}{2} \varepsilon^2 \rightarrow 0, \text{ si } \varepsilon \rightarrow \infty.$$

Calculem ara J_ε , tenint en compte que μ és de suport compacte. Com ja hem dit, usarem (3.1) dos cops. Prenem primer $v = \phi(s)$, $\Delta u = \Delta\mu(r - s)$. Així,

$$J_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(\sigma) \nabla_\sigma \mu(r - \sigma) \nu_\sigma d\sigma - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon} \nabla_s \phi(s) \nabla_s \mu(r - s) ds.$$

Prenent ara $v = \nabla_s \phi_s$ i $\Delta u = \nabla_s \mu(r - s)$ en la segona integral de l'expressió anterior,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(\sigma) \nabla_\sigma \mu(r - \sigma) \nu_\sigma d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla_\sigma \phi(\sigma) \mu(r - \sigma) \nu_\sigma d\sigma + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon} \Delta_s \phi(s) \nabla_s \mu(r - s) ds = \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(\sigma) \nabla_\sigma \mu(r - \sigma) \nu_\sigma d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla_\sigma \phi(\sigma) \mu(r - \sigma) \nu_\sigma d\sigma =: J_{\varepsilon,1} - J_{\varepsilon,2}. \end{aligned}$$

ja que $\Delta\phi = 0$, doncs, com ja hem dit, és la solució general de l'equació de Laplace. Recordem que hem fixat $C_2 = 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned} |J_{\varepsilon,1}| &\leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \max |\nabla\mu| \nu_\sigma d\sigma \right| = \frac{\max |\nabla\mu|}{4\pi\varepsilon} \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \nu_\sigma d\sigma \right| = \frac{\max |\nabla\mu|}{4\pi\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = \\ &= \max |\nabla\mu| r \rightarrow 0, \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ja només resta calcular $J_{\varepsilon,2}$. Tenim que $\nabla\phi(s) = -C_1 \nabla \frac{1}{\|s\|} = -C_1 \nabla \frac{1}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}}$. Com $\frac{\partial}{\partial s_i} ((s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{-1/2}) = -\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{-3/2} 2s_i$, amb $i = 1, 2, 3$,

$$\nabla\phi(s) = C_1 \left(\frac{s_1}{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{3/2}}, \frac{s_2}{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{3/2}}, \frac{s_3}{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{3/2}} \right) = C_1 \frac{s}{\|s\|^3}.$$

Per altra banda, el vector normal a ∂B_ε , respecte $\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon$, és $\nu_\sigma = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$. Per tant,

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon,2} &= -C_1 \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\sigma}{\|\sigma\|^3} \mu(r - \sigma) \frac{\sigma}{\varepsilon} d\sigma = -\frac{C_1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\|\sigma\|} \mu(r - \sigma) d\sigma = \\ &= -\frac{C_1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \mu(r - \sigma) d\sigma = -\frac{C_1}{\varepsilon^2} \mu(r) 4\pi\varepsilon^2 \rightarrow -\mu(r), \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ja que estem prenent $\mu(r) = \delta_t(r)$. Veiem que cal que $C_1 = 1/4\pi$ per tenir el resultat. Per tant, $J_\varepsilon \rightarrow \mu(r)$, si $\varepsilon \rightarrow 0$. Així, prenent el límit per $\varepsilon \rightarrow 0$ es té $\Delta u(r) = \mu(r)$. \square

Observació 3.18. Estem interessats en resoldre $\Delta u = \delta_t$. Per tal de poder aplicar el teorema anterior i garantir que hi ha una única solució, en el cas de considerar el potencial keplerian a \mathbb{R}^3 (de la forma $u(r) = 1/r$), cal que la mesura $\mu = \delta_t$, en el teorema, sigui de classe C^2 . Notem però, que això no es un inconvenient tal i com s'ha comentat en la Observació 3.13. \triangle

Si considerem ara la solució general de l'equació de Laplace ϕ , (3.10), amb $C_2 = 0$, a \mathbb{R}^2 , obtenim un resultat semblant. És a dir, tenim el potencial

$$u(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(r - s) \mu(s) ds = C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \mu(s) \log \|r - s\| ds, \quad (3.18)$$

on aquest cop escollim $C_1 = \frac{1}{2\pi}$ que, com abans, veurem perquè la triem així. De la mateixa forma, podem considerar $\Delta\phi(r) = \delta_t(r)$. Tenim doncs,

$$\Delta u(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_r \phi(r-s) \mu(s) ds = \int_{\mathbb{R}^2} \delta_t(r-s) \mu(s) ds = \mu(r). \quad (3.19)$$

Teorema 3.19. *Sigui μ una funció de classe C^2 de \mathbb{R}^2 amb suport compacte, i u el potencial newtonià degut a μ definit a (3.18). Aleshores u és solució de*

$$\Delta u = \mu \quad (3.20)$$

de classe C^2 .

Demostració. Per veure que u és de classe C^2 es fa com abans, ja que $\log \|s\|$ és integrable a prop del 0 i que μ és de suport compacte.

Cal veure, doncs, (3.20). Com abans, tenim que

$$\Delta u(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(s) \Delta_r \mu(r-s) ds = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(s) \Delta_s \mu(r-s) ds.$$

Per resoldre la integral usarem la identitat de Green (3.1). Com ϕ té una singularitat en el 0, cal aïllar-la per poder fer el càlcul

$$\Delta u(r) = \int_{B_\varepsilon} \phi(s) \Delta_s \mu(r-s) ds + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \phi(s) \Delta_s \mu(r-s) ds =: I_\varepsilon + J_\varepsilon, \quad (3.21)$$

on estem usant la mateixa notació que en la demostració anterior. Així,

$$|I_\varepsilon| \leq \int_{B_\varepsilon} |\phi(s) \Delta_r \mu(r-s)| ds \leq \frac{\max |\Delta \mu|}{2\pi} \int_{B_\varepsilon} \log \|s\| ds.$$

Per calcular aquesta última integral usarem coordenades polars (ρ, θ) . Per la fórmula de canvi de variable

$$\int_{B_\varepsilon} \log \|s\| ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \log \rho |J| d\rho d\theta, \quad (3.22)$$

on $|J|$ és el determinant del jacobinià del canvi, que cal calcular. Tenim que si $s = (s_1, s_2)$

$$s_1 = \rho \cos \theta, \quad s_2 = \rho \sin \theta,$$

Per tant,

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho.$$

Aleshores, (3.22) és

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \rho \log \rho d\rho d\theta &= 2\pi \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^\varepsilon \rho \log \rho d\rho = 2\pi \lim_{c \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\rho^2}{2} \log \rho \right]_c^\varepsilon - \left[\frac{\rho^2}{4} \right]_c^\varepsilon \right) = \\ &= 2\pi \lim_{c \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \log \varepsilon - \frac{c^2}{2} \log c - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right) = \pi \varepsilon^2 \left(\log \varepsilon - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Per tant,

$$|I_\varepsilon| \leq \frac{\max |\Delta \mu|}{2\pi} \pi \varepsilon^2 \left(\log \varepsilon - \frac{1}{2} \right) \rightarrow 0, \text{ si } \varepsilon \rightarrow \infty.$$

Calculem ara J_ε , seguint la mateixa metodologia que a la demostració anterior, com ja hem dit. Prenent primer $v = \phi(s)$, $\Delta u = \Delta\mu(r-s)$ i després $v = \nabla_s \phi_s$ i $\Delta u = \nabla_s \mu(r-s)$ obtenim

$$J_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(\sigma) \nabla_\sigma \mu(r-\sigma) \nu_\sigma d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla_\sigma \phi(\sigma) \mu(r-\sigma) \nu_\sigma d\sigma =: J_{\varepsilon,1} - J_{\varepsilon,2}.$$

$$\begin{aligned} |J_{\varepsilon,1}| &\leq \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \max |\nabla \mu| \nu_\sigma d\sigma \right| = \frac{\log \varepsilon \max |\nabla \mu|}{2\pi} \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \nu_\sigma d\sigma \right| = \frac{\log \varepsilon \max |\nabla \mu|}{2\pi} 2\pi\varepsilon = \\ &= \log \varepsilon \max |\nabla \mu| \varepsilon \rightarrow 0, \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Només resta calcular $J_{\varepsilon,2}$. Tenim que $\nabla \phi(s) = C_1 \nabla \log \|s\| = C_1 \nabla \log(\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)})$. Com $\frac{\partial}{\partial s_i} (\log((s_1^2 + s_2^2)^{1/2})) = \frac{1}{\|s\|} \frac{s_i}{\|s\|} = \frac{s_i}{\|s\|^2}$, per $i = 1, 2$,

$$\nabla \phi(s) = C_1 \left(\frac{s_1}{\|s\|^2}, \frac{s_2}{\|s\|^2} \right) = C_1 \frac{s}{\|s\|^2}.$$

Per altra banda, el vector normal a ∂B_ε , respecte $\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon$, és $\nu_\sigma = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$. Per tant,

$$J_{\varepsilon,2} = -C_1 \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\sigma}{\|\sigma\|^2} \mu(r-\sigma) \frac{\sigma}{\varepsilon} d\sigma = -\frac{C_1}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \mu(r-\sigma) d\sigma \rightarrow -\mu(r), \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ja que $\mu(r) = \delta_t(r)$ i $C_1 = 1/2\pi$. Per tant, $J_\varepsilon \rightarrow \mu(r)$, si $\varepsilon \rightarrow 0$. I per tant, $\Delta u(r) = \mu(r)$. \square

Hem demostrat, doncs, que si $r'' = \nabla \phi$ és l'equació del problema de Kepler per un cos de massa 1, aleshores, la solució fonamental Φ , és la solució de l'equació de Poisson $\Delta u = \mu$, amb μ la delta de Dirac corresponent (vegis l'Observació 3.18). A més, si resollem l'equació de Poisson a \mathbb{R}^3 trobem el potencial de Kepler com a solució i si la resollem a \mathbb{R}^2 trobem el potencial logarítmic, encara que, en aquest últim cas, no podem garantir-ne la unicitat. Tot i això, com s'ha vist en la secció anterior, el problema de Kepler té el moviment restringit a un pla degut a la conservació del moment angular.

4 El potencial gravitatori en espais de curvatura constant positiva

En aquesta secció plantejarem l'equació de Poisson en els espais \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3 . De manera anàloga es pot obtenir el potencial en \mathbb{S}^n , $n \geq 4$. És important mencionar que, pel Teorema de Killing-Hopf, si considerem un espai amb curvatura constant simplement connex, aleshores l'espai és isomorf a un dels següents espais: l'espai \mathbb{R}^n , l'espai hiperbòlic (real) \mathbb{H}^n o l'esfera \mathbb{S}^n . Per aquest motiu considerem els espais \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3 com a prototipus d'espais amb curvatura constant positiva.

Cal remarcar que hi ha altres formes d'obtenir el potencial gravitatori en superfícies amb curvatura, per exemple, amb la teoria lagrangiana, però ens ha semblat més interessant fer-ho des de l'equació de Poisson. La formulació lagrangiana és geomètricament extrínseca. És a dir, es considera la varietat on té lloc el moviment dins una varietat ambient de dimensió més gran i s'obtenen les equacions del moviment restringit imposant lligadures sobre el lagrangiana del sistema. En canvi, la resolució de l'equació de Poisson ens dona un punt de vista intrínsec, sense necessitat de considerar un espai ambient.

4.1 Resolució de l'equació de Laplace a \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3

Volem resoldre el problema de dos cossos a l'esfera unitat \mathbb{S}^2 . Per tant, treballarem amb coordenades esfèriques (ρ, θ, φ) (veure Observació 3.8 i Figura 4 per la seva definició). És a dir, volem trobar $u = u(\rho, \theta, \varphi)$ solució de l'equació de Laplace, per tal de trobar el potencial gravitatori a \mathbb{S}^2 . Suposem doncs, que tenim un sistema en equilibri, on el cos de massa m_1 està situat al pol nord i el cos de massa m_2 es troba a una certa distància r sobre la superfície de l'esfera. Suposem també que la massa total del sistema és $M = m_1 + m_2 = 1$. En tal cas, com el moviment es dona sobre la superfície de l'esfera, no tenim variació en el radi ρ i podem fixar l'angle θ , doncs l'única variació que ens interessa conèixer és la de l'angle colatitud φ .

En tal cas, per (3.6), com $\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, l'equació de Laplace és

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \cot \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.1)$$

L'equació anterior és equivalent a

$$\sin \varphi \Delta u(\varphi) = (\sin \varphi u'(\varphi))' = 0, \quad (4.2)$$

on estem usant la notació $\frac{\partial}{\partial \varphi} = '.$ Per tant,

$$\sin \varphi u'(\varphi) = c_1, \quad \text{on } c_1 \in \mathbb{R}.$$

És a dir, l'equació que volem resoldre és

$$u(\varphi) = \int \frac{c_1}{\sin \varphi} d\varphi,$$

La integral anterior es pot resoldre usant el canvi de variable $s = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ i, amb dit canvi, queda reduïda a la integral racional trivial

$$\int \frac{c_1}{\sin \varphi} d\varphi = c_1 \int \frac{s^2 + 1}{2s} \frac{2}{s^2 + 1} ds = c_1 \int \frac{1}{s} ds,$$

que té com a solució, un cop desfet el canvi de variable,

$$u(\varphi) = c_1 \log \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) + c_2, \text{ on } c_1, c_2 \text{ són constants reals.}$$

Observació 4.1. La solució $u(\varphi)$ no està definida per $\varphi = \pi$, que es correspon amb el pol sud. Aquest fet és ben natural doncs, si projectem l'esfera des del pol sud sobre el pla, mitjançant la projecció estereogràfica (recordem que tenim m_1 fixada en el pol nord), el pol sud s'identifica amb l'infinít de \mathbb{R}^2 i, en tal cas, $u(\varphi) \rightarrow \infty$ i el segon cos s'escapa a infinit en el corresponent problema de dos cossos pla. \triangle

Un cop resolta l'equació de Laplace a \mathbb{S}^2 , és interessant estudiar la solució per $\varphi \rightarrow 0$. Veurem que, fent-ho, recuperem el potencial de Kepler (intrínsec) al pla euclidi que, com ja vam veure a la secció 3, és el potencial logarítmic. Per fer-ho, considerem l'expansió de Taylor, fins a ordre 2, de $u(\varphi)$ al voltant del punt $\varphi = 0$. Usant $\tan(\alpha) = \alpha + O(\alpha^3)$ tenim que

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= c_1 \log \left(\frac{\varphi}{2} + O(\varphi^3) \right) + c_2 = c_1 \log \left(\frac{\varphi}{2} (1 + O(\varphi^2)) \right) + c_2 = \\ &= c_1 \log \frac{\varphi}{2} - c_1 \log(1 + O(\varphi^2)) + c_2. \end{aligned}$$

Per altra banda, com

$$\log(1 + h) = h + O(h^2),$$

obtenim

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= c_1 \log \frac{\varphi}{2} - c_1 \varphi - O(\varphi^2) + c_2 \\ &= c_1 \log \frac{\varphi}{2} + c_2 + O(\varphi) = c_1 \log(\varphi) + \bar{c}_2 + O(\varphi). \end{aligned}$$

Si ara prenem $c_1 = \frac{1}{2\pi}$ i $c_2 = 0$ i, tenint en compte que estem considerant 2 cossos sobre l'esfera unitat a una distància r , al considerar $\varphi \rightarrow 0$, tenim $\rho = \|r\| = \sin(\varphi) = \varphi + O(\varphi^2)$. Per tant, al fer l'expansió de Taylor per $\varphi \rightarrow 0$, recuperem $u(\rho) = \frac{1}{2\pi} \log \rho$, és a dir, el potencial de Kepler al pla, veure (3.11), tal i com s'hauria d'esperar.

Observació 4.2. Si ara considerem \mathbb{S}^3 , l'equació de Laplace en coordenades esfèriques es pot escriure com

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} (\sin^2 \varphi u'(\varphi))' = 0, \quad (4.3)$$

veure [8]. De l'expressió anterior es segueix $\sin^2 \varphi u'(\varphi) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Així, usant el canvi $z = \cot \varphi$ per calcular la integral s'obté

$$u(\varphi) = \int \frac{c_1}{\sin^2 \varphi} d\varphi = -c_1 \cot \varphi.$$

Finalment, fent l'expansió de Taylor de $u(\varphi)$ al voltant de $\varphi = 0$ tenim que

$$u(\varphi) = -c_1 \frac{1 + O(\varphi^2)}{\varphi + O(\varphi^3)} = -c_1 \frac{1 + O(\varphi^2)}{\varphi(1 + O(\varphi^2))} = -\frac{c_1}{\varphi} + O(\varphi^2).$$

És a dir, recuperem el potencial de Kepler a \mathbb{R}^3 (escollint $c_1 = \frac{1}{4\pi}$) doncs, com s'ha comentat prèviament, quan l'angle de colatitud φ tendeix a zero, aquest es comporta com el mòdul del vector posició relativa, ρ , dels cossos. \triangle

4.2 Resolució de l'equació de Poisson a \mathbb{S}^2 i \mathbb{S}^3

Seguint amb la metodologia de la secció 3, un cop resolta l'equació de Laplace, resoldrem l'equació de Poisson. Ja vam veure que la llei de Gauss sobre l'esfera és $\operatorname{div} F(r) = -2\pi G\mu(r)$, on μ és la densitat de massa, (veure Observació 3.14). Aleshores, integrant l'equació i aplicant el Teorema 3.5,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(r) = -2\pi \int_{\partial\Omega} F(\sigma)\nu_{\sigma}d\sigma.$$

Si considerem $\Omega = \mathbb{S}^n$, amb $n \geq 1$, com estem treballant amb la geometria intrínseca de dits espais, tenim que són espais sense vora i, per tant, qualsevol integral sobre la seva vora és 0. Per tant, de l'expressió anterior, obtenim la condició

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(r) = -2\pi \int_{\Omega} \mu(r)dr = 0,$$

anomenada condició de Gauss. Sabem que $\int_{\Omega} \mu(r)dr = M$, on M és la massa total a Ω i no és 0 per hipòtesis. Per tant, ens cal afegir un factor de correcció per tal de poder verificar la condició de Gauss. Escribim doncs

$$\int_{\Omega} \mu(r)dr + \int_{\Omega} Cdr = 0,$$

amb $C \in \mathbb{R}$, per tal de determinar dit factor de correcció.

És clar que la segona integral de la condició anterior és proporcional al volum d' Ω , ja que \mathbb{S}^n és un espai compacte i, per tant, $C = -M/\operatorname{Vol}(\Omega)$, on $\operatorname{Vol}(\Omega)$ és l'àrea de la superfície d' \mathbb{S}^n ³. Així obtenim que l'equació de Poisson pel potencial gravitatori $u(r)$ és

$$\Delta u(r) = \mu(r) + C, \tag{4.4}$$

on $\mu(r) = \delta_t$ és la delta de Dirac corresponent. Aleshores, com estem considerant $r \neq 0$, l'equació a resoldre és

$$\Delta u(r) = C. \tag{4.5}$$

Fixem ara $n = 2$ per resoldre l'equació de Poisson a l'esfera unitat \mathbb{S}^2 . Fent ús de coordenades esfèriques i, tenint en compte que ens trobem sota les mateixes condicions que quan hem resolt l'equació de Laplace, per (4.2), resoldre l'equació anterior és equivalent a resoldre

$$(\sin \varphi u'(\varphi))' = C \sin \varphi,$$

que, pel Teorema Fonamental del Càlcul, té solució

$$\sin \varphi u'(\varphi) = -C \cos \varphi + c_2.$$

Per tant, com $r \neq 0$ implica $\varphi \neq 0$, tenim que

$$u(\varphi) = -C \int \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi + c_2 \int \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi = -C \log(\sin \varphi) + c_2 \log(\tan \frac{\varphi}{2}) + c_3. \tag{4.6}$$

Observem que, quan $\varphi \rightarrow \pi$, $u(\varphi) = -\infty + \infty$, és a dir, té una indeterminació. Com ens interessa tenir-la definida per a qualsevol $\varphi \in [0, \pi]$ veurem, si fixant constants,

³Notem que cal afegir una distribució de massa que compensi la massa dels cossos sobre l'esfera. S'ha fet de manera uniforme, però es podria concentrar en un sol punt, per exemple. Aquesta massa negativa que s'afegeix, es coneix amb el nom d'antimatèria.

podem solucionar aquest fet. Té sentit imposar que $u(\pi) = 0$ ja que, via la projecció estereogràfica, aquest punt es correspon amb l'infinít. Aleshores, com a \mathbb{S}^2 , la constant $C = -\frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^2)} = -\frac{1}{4\pi}$,

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \pi} u(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{4\pi} \log(\sin \varphi) + c_2 \log\left(\tan \frac{\varphi}{2}\right) + c_3 = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{4\pi} \log\left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) + c_2 \log\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) - c_2 \log\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) + c_3 = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{4\pi} \left(\log 2 + \log\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) + \log\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)\right) + c_2 \log\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) - c_2 \log\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) + c_3 = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{4\pi} \log 2 + \left(\frac{1}{4\pi} + c_2\right) \log\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} - c_2\right) \log\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) + c_3 = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{4\pi} \log 2 + \left(\frac{1}{4\pi} - c_2\right) \log\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) + c_3. \end{aligned}$$

Fent aquesta transformació de la funció $u(\varphi)$, mitjançant identitats trigonomètriques, observem que, per tal de tenir $u(\varphi) = 0$ per $\varphi \rightarrow \pi$, cal que

$$\frac{1}{4\pi} - c_2 = 0, \quad \text{i} \quad c_3 + \frac{1}{4\pi} \log 2 = 0.$$

Així, tenim les constants determinades i, en tal cas,

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{1}{4\pi} \left(\log\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) + \log\left(\tan \frac{\varphi}{2}\right) - \log 2\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\log\left(\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}\right) - \log 2\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\log\left(\sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) - \log 2\right) = \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{1 - \cos \varphi}{2}\right), \end{aligned}$$

tal i com es mostra a [8]. És interessant ara, veure què passa si considerem $\varphi \rightarrow 0$, tal i com hem fet en la secció anterior. Recuperem l'expressió (4.6) amb les constants fixades i tenim

$$u(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \log(\sin \varphi) + \frac{1}{4\pi} \log\left(\tan \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{4\pi} \log 2$$

i observem que és el potencial keplerianà logarítmic doncs, si $\varphi \rightarrow 0$, $\sin \varphi = \varphi + O(\varphi^3)$ i $\tan(\varphi/2) = \varphi/2 + O(\varphi^3)$, tenim que

$$u(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \log \varphi + \frac{1}{4\pi} \log(\varphi/2) - \frac{1}{4\pi} \log 2 = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\pi} \log \varphi + C,$$

on $C = -\frac{1}{2\pi} \log 2$ és una constant que, donat que l'energia està determinada llevat una constata, es pot menysprear.

Observació 4.3. Considerem ara $\Omega = \mathbb{S}^3$. Per (4.3) i (4.5), l'equació de Poisson és

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} (\sin^2 \varphi u'(\varphi))' = C, \quad \text{amb} \quad C = -\frac{M}{\text{Vol}(\mathbb{S}^3)}, \quad (4.7)$$

que té solució

$$u'(\varphi) = \frac{C}{2} \frac{\varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{C}{4} \frac{\sin(2\varphi)}{\sin^2 \varphi} + \frac{c_1}{\sin^2 \varphi},$$

ja que una primitiva del $\sin^2 \varphi$, mitjançant les fórmules de l'angle doble, és $\varphi/2 - \sin(2\varphi)/4$. Per tant, el potencial gravitatori a \mathbb{S}^3 és

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= -\frac{C}{2} [\varphi \cot \varphi + \log(\sin \varphi)] - \frac{C}{2} [\log(\sin \varphi)] - c_1 \cot \varphi + c_2 \\ &= -\frac{C}{2} \varphi \cot \varphi - c_1 \cot \varphi + c_2. \end{aligned}$$

Observem que, en aquest cas, $u(\varphi)$ també té una indeterminació per $\varphi = \pi$. La fixarem imposant que $u(\pi) = 0$.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi} u(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{4\pi^2} \varphi - c_1 \right) \cot \varphi + c_2 = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{4\pi} - c_1 \right) \cot \varphi + c_2.$$

Per tant, cal que $(\frac{1}{4\pi} - c_1) = 0$ i $c_2 = 0$ per tenir $u(\pi) = 0$. Així podem escriure

$$u(\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \varphi \cot \varphi - \frac{1}{4\pi} \cot \varphi = -\frac{1}{4\pi} \cot \varphi \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right). \quad \triangle$$

4.3 Sobre el problema de dos cossos i el problema de Kepler en espais de curvatura constant

Vam veure a la secció 2 que el problema de dos cossos en l'espai es pot reduir a l'estudi de dos problemes separats que es corresponen al moviment del centre de masses i al moviment relatiu d'un cos respecte l'altre. Aquest últim moviment es correspon amb el problema de Kepler, paradigma d'un problema de força central. Per poder fer aquesta reducció, juguen un paper fonamental la simetria i el fet que es preserva el moment angular.

La situació és completament diferent en el cas del problema de dos cossos a l'esfera. D'una banda, el centre de masses no es troba sobre la superfície de l'esfera. D'altra banda, tot i que hi ha conservació del moment angular total del sistema, no es preserva el moment angular de cada cos. A la següent secció realitzarem algunes simulacions per il·lustrar aquest fet i veure que tenir conservació del moment angular total no implica que el moviment tingui lloc en un pla. Tot això fa que no es pugui realitzar la reducció analòga del problema de dos cossos al problema de Kepler en aquest espai.

De fet, les simulacions numèriques que es troben a la literatura semblen indicar que el problema de dos cossos en l'esfera és no integrable [4, 5], en contraposició al cas del problema a l'espai euclidi. En els treballs citats, es fa una derivació extrínseca de les equacions del moviment. Això comporta que es tingui el moviment ben definit en l'esfera menys un punt ja que el potencial obtingut presenta una singularitat en un punt. En contraposició, en aquest treball s'ha fet una derivació intrínseca que permet obtenir un potencial ben definit a tota l'esfera. Els dos potencials (extrínsec i intrínsec) proporcionen una dinàmica topològicament equivalent fora del punt singular, fet pel qual les òrbites que no passen per aquests punts mantenen el seu caràcter caòtic. Una qüestió a ser investigada numèricament és si la quantitat de caos en l'esfera es redueix pel fet de tenir el potencial globalment definit. Per visualitzar la dinàmica caòtica del sistema, en les referències [4, 5] s'usa un sistema de coordenades específic (els anomenats angles d'Euler). En aquestes coordenades el sistema es redueix a un sistema de 1 grau i mig de llibertat, la qual cosa permet considerar una secció de Poincaré i il·lustrar la dinàmica 2-dimensional discreta corresponent. Aquesta idea queda pendent pel futur.

D'altra banda, a la literatura es troben generalitzacions del problema de Kepler en espais de curvatura constant. Aquestes generalitzacions donen lloc a sistemes integrables (de 1 grau de llibertat). Per exemple a [6] es deriva el problema de Kepler de forma extrínseca.

Finalment, en aquest treball s'ha considerat l'esfera com a espai de curvatura constant. Cal dir que s'hagués pogut considerar, de manera semblant, un espai amb curvatura constant negativa, és a dir, el pla hiperbòlic. En alguns dels articles citats l'estudi es generalitza a espais de curvatura constant positiva i negativa alhora.

5 Simulacions

Un cop obtingut el potencial de dos cossos sobre una superfície de curvatura constant positiva, usant un punt de vista geomètric intrínsec, ens proposem il·lustrar el moviments dels cossos sobre l'esfera. Per fer-ho, es realitzaran algunes simulacions numèriques seguint el treball realitzat a [8], on s'expressen les equacions del moviment en coordenades cartesianes. Notem però que, en la secció 4, hem obtingut el potencial en coordenades esfèriques i, per tant, haurem de fer el canvi de coordenades corresponent.

Abans però, plantejarem el hamiltonià del sistema (en coordenades esfèriques) $H = U + T$, on U és l'energia potencial i T l'energia cinètica. Cal calcular doncs, l'energia cinètica en coordenades esfèriques. Per fer-ho, és necessari tenir en compte la mètrica de l'esfera, veure [2]. El canvi de coordenades esfèriques a coordenades cartesianes ve donat per la funció

$$(\rho, \varphi, \theta) \mapsto G(\rho, \varphi, \theta),$$

on $G(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$, (veure (3.8)). L'expressió matricial de la mètrica natural de \mathbb{R}^3 en coordenades esfèriques és

$$g = [DG(\rho, \varphi, \theta)]^t DG(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix},$$

on

$$DG(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Així, sobre l'esfera unitat, $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, s'indueix la mètrica

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix},$$

ja que $\rho \equiv 1$. Observem que si el moment lineal d'un cos de massa m , en coordenades esfèriques, és $p = (p_\rho, p_\varphi, p_\theta)$, tenim $p_\rho \equiv 0$. Per tant, l'energia cinètica de dit cos, en coordenades esfèriques, és

$$T = \frac{1}{2m} (p_\varphi, p_\theta) \bar{g} \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2m} \left(p_\varphi^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} p_\theta^2 \right).$$

Siguin $r_1 = (1, \varphi_1, \theta_1)$, $r_2 = (1, \varphi_2, \theta_2)$ les posicions dels cossos m_1, m_2 , amb moments associats $p_1 = (0, p_{\varphi_1}, p_{\theta_1})$, $p_2 = (0, p_{\varphi_2}, p_{\theta_2})$, respectivament en coordenades esfèriques i, recordem que, en la secció anterior, per trobar el potencial del problema de dos cossos sobre l'esfera unitat, s'ha considerat el cos de massa m_1 fixat en el pol nord i el cos de massa m_2 a una certa distància $r = r(\rho, \varphi, \theta)$ del cos de massa m_1 . Per tant, el hamiltonià natural del sistema en equilibri, en coordenades esfèriques, ve donat per l'expressió

$$H(\varphi, \theta) = \frac{1}{2m_1} (p_{\varphi_1}^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi_1} p_{\theta_1}^2) + \frac{1}{2m_2} (p_{\varphi_2}^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi_2} p_{\theta_2}^2) + m_1 m_2 \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right).$$

Com s'ha comentat, es farà la integració numèrica en coordenades cartesianes. El programa, però, llegeix les condicions inicials en coordenades esfèriques. Cal doncs, fer el canvi de variables esfèriques a cartesianes abans d'integrar, com es detalla a continuació.

Sigui ara $\bar{r}_i = (r_{xi}, r_{yi}, r_{zi})$ la posició de la massa m_i en coordenades cartesianes, aleshores $(r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}) = G(1, \varphi_i, \theta_i)$, és a dir,

$$\begin{aligned} r_{xi} &= \cos \theta_i \sin \varphi_i, \\ r_{yi} &= \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ r_{zi} &= \cos \varphi_i, \end{aligned}$$

on recordem que θ_i, φ_i són els angles longitud i colatitud respectivament de la posició de la massa m_i . El canvi G defineix $\bar{r}_i = G(r_i)$. Per fer el canvi a coordenades cartesianes dels moments associats cal considerar l'elevació del canvi G a l'espai cotangent, veure p.ex. [12]. És a dir, es té la relació

$$p_i = DG^t(r_i) \bar{p}_i, \quad \text{per tant} \quad \bar{p}_i = (DG^t(r_i))^{-1} p_i,$$

on $\bar{p}_i = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi})$ és el moment en coordenades cartesianes de la massa m_i . Així

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \begin{pmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_i \cos \theta_i & \cos \theta_i \cos \varphi_i & \frac{\sin \theta_i}{\sin \varphi_i} \\ \sin \varphi_i \sin \theta_i & \sin \theta_i \cos \varphi_i & \frac{\cos \theta_i}{\sin \varphi_i} \\ \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{\varphi_i} \\ p_{\theta_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{\varphi_i} \cos \theta_i \cos \varphi_i - p_{\theta_i} \frac{\sin \theta_i}{\sin \varphi_i} \\ p_{\varphi_i} \sin \theta_i \cos \varphi_i + p_{\theta_i} \frac{\cos \theta_i}{\sin \varphi_i} \\ -p_{\varphi_i} \sin \varphi_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aleshores tenim que, en coordenades cartesianes, el hamiltonià del sistema és

$$H = \frac{1}{2}(m_1 \|v_1\|^2 + m_2 \|v_2\|^2) + m_1 m_2 \log \|r_1 - r_2\|.$$

i les equacions que modelen el moviment són, per $i = 1, 2$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= \frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq i} m_j \frac{r_j - (r_j r_i) r_i}{1 - r_j r_i} - \|v_i\|^2 r_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

on s'ha considerat la constant gravitacional $G = 1$ (veure [8]). Finalment, notem que aquestes equacions defineixen un moviment sobre l'esfera, ja que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r_i v_i) &= \dot{r}_i v_i + r_i \dot{v}_i = \|v_i\|^2 + r_i \left(\frac{1}{4\pi} m_j \frac{r_j - (r_j r_i) r_i}{1 - r_j r_i} - \|v_i\|^2 r_i \right) \\ &= \|v_i\|^2 + \frac{1}{4\pi} m_j \frac{r_j r_i - (r_j r_i) \|r_i\|^2}{1 - r_j r_i} - \|v_i\|^2 \|r_i\|^2 = 0, \end{aligned}$$

d'on es dedueix que els cossos evolucionen sobre la superfície de l'esfera per tot temps.

Com s'ha comentat, es farà la integració numèrica en coordenades cartesianes, és a dir, s'integrarà l'equació (5.1). Per la integració numèrica s'ha fet servir el paquet `taylor`, programari lliure que genera un integrador de Taylor adaptat a les equacions del camp i que està detallat a [11].

Un cop donades les equacions del sistema, la simulació (veure Figura 5) s'ha realitzat considerant $m_1 = 4\pi$, $m_2 = 2\pi$, amb valors inicials $\theta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/3$, $\varphi_2 = 3\pi/4$, respectivament on, recordem que, θ és la longitud i φ representa l'angle

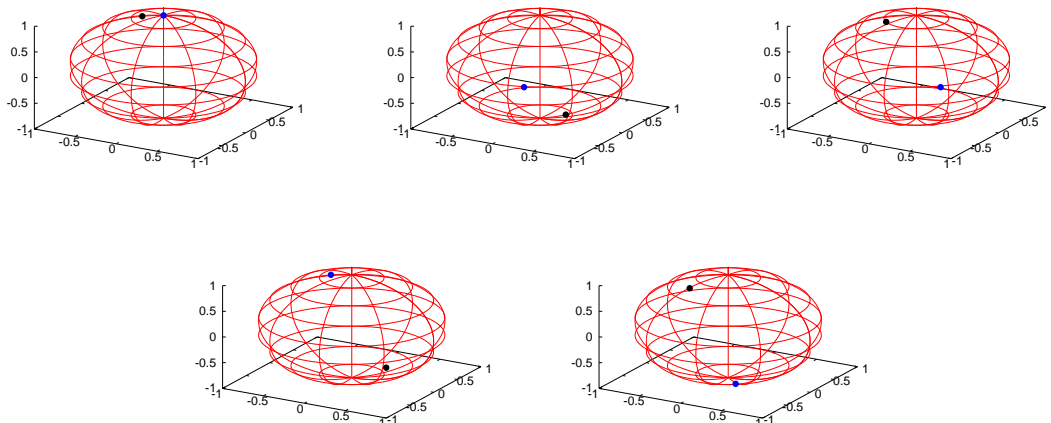


Figura 5: D'esquerra a dreta, es pot veure la posició dels dos cossos (m_1 en blau i m_2 en negre) sobre l'esfera en posicions inicials i, seguidament, al cap de 15 segons, 30 segons, 45 segons i 1 min respectivament.

colatitud. Finalment, s'ha pres $\dot{\theta}_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\dot{\theta}_2 = 2$ i $\dot{\varphi}_2 = 1$, seguint, com ja s'ha dit, el treball realitzat a [8].

Les dues següents simulacions que s'han realitzat (veure Figura 6, Figura 7), mostren solucions que, en un sistema de coordenades rotatori, són punts fixos. És a dir, són solucions que revolucionen al voltant d'un eix i s'anomenen solucions d'equilibri relatiu. En els dos casos triem condicions inicials de manera que l'eix respecte el qual revolucionen es correspon amb l'eix z . No detallem com es fa la tria de les condicions inicials, veure [3] per un estudi complet d'aquest tipus de solucions. En concret, les simulacions es corresponen a les condicions inicials

$$\begin{aligned} \text{Cas 1: } m_1 &= 1, \varphi = 0, \theta = 0.78539816339744, p_\varphi = 0.199471140200716, p_\theta = 0 \\ m_2 &= 1, \varphi = \pi, \theta = 0.78539816339744, p_\varphi = 0.199471140200716, p_\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cas 2: } m_1 &= 1, \varphi = 0, \theta = 0.78539816339744, p_\varphi = 0.707106781186547, p_\theta = 0 \\ m_2 &= 1, \varphi = \pi, \theta = 0.78539816339744, p_\varphi = 0.707106781186547, p_\theta = 0 \end{aligned}$$

El moment angular total es preserva i en els dos casos es un vector en la direcció de l'eix z . Veiem però que, en la Figura 6, el moviment es dona en un pla però, en la Figura 7 no és així, il·lustrant el fet que no podem reduir el moviment relatiu dels dos cossos a un pla.

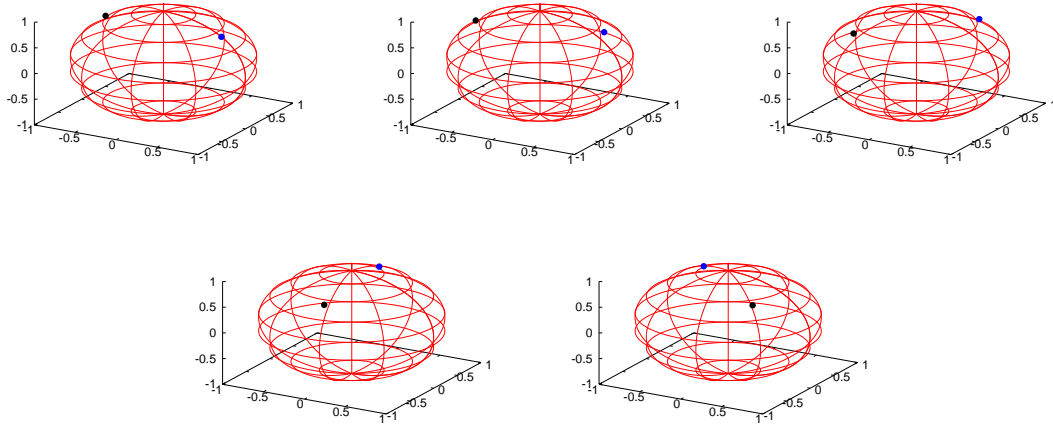


Figura 6: D'esquerra a dreta, es pot veure la posició dels dos cossos (m_1 en blau i m_2 en negre), revolucionant al voltant de l'eix z , on el moviment es dona en el pla $z = 0.707$. Les condicions inicials corresponen al Cas 1.

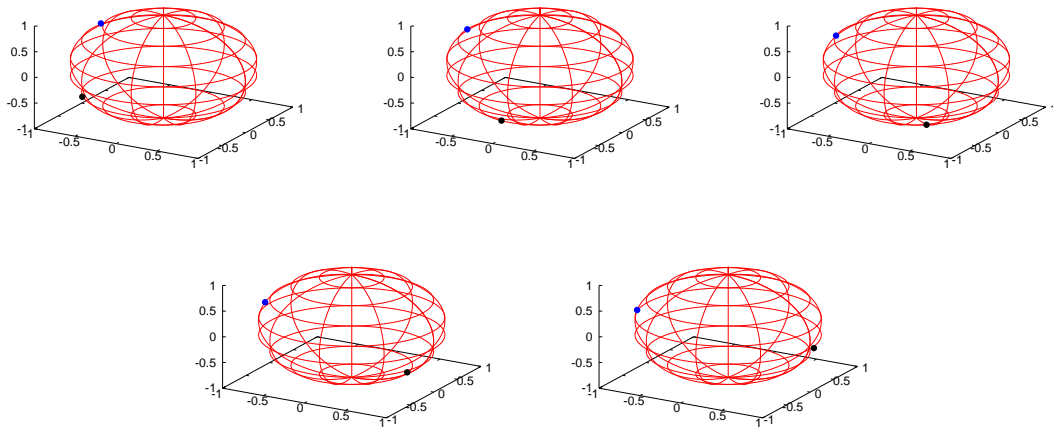


Figura 7: D'esquerra a dreta, veiem ara el moviment de m_1 (en blau) i m_2 (en negre) girant al voltant de l'eix z sobre l'esfera, sense que el moviment de cap dels cossos estigui en un pla de la forma $z = C$, amb C una constant. Les condicions inicials corresponen al Cas 2.

6 Conclusions

En aquest treball s'ha fet l'estudi del problema de dos cossos, inicialment en l'espai euclidi i després en un espai genèric de curvatura constant positiva, \mathbb{S}^2 . Ha resultat interessant descobrir que, fora de la teoria lagrangiana, usada en molta literatura en l'àmbit de la Física, es pot obtenir el potencial del problema de dos cossos mitjançant l'equació de Poisson, podent així treballar des d'un punt de vista intrínsec de l'espai. A la secció 3 s'ha realitzat aquest estudi a \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 i s'ha vist que a \mathbb{R}^3 s'obté el potencial obtingut en la secció 2 directament de la manipulació de les equacions de moviment, com caldria esperar. A més s'ha vist que el potencial del problema de dos cossos a \mathbb{R}^2 , si aquest es considera de forma intrínseca i no com a subespai de \mathbb{R}^3 , és un potencial logarítmic. Finalment s'ha considerat un espai de curvatura constant positiva per fer l'estudi del problema de dos cossos, derivant el potencial a partir de la solució de la corresponent equació de Poisson. Ha resultat enriquidor veure que, en aquest últim cas, no tenim l'equivalència entre el problema de dos cossos i el problema de Kepler.

Per altra banda, haver tingut temps de realitzar les simulacions numèriques ens ha permès visualitzar el moviment de dos cossos sobre l'esfera. Cal notar que el problema de dos cossos sobre l'esfera és un problema no integrable que presenta moviments caòtics (sensibles respecte condicions inicials). Els diferents aspectes analitzats del problema de dos cossos en espais amb diferent geometria ens ha permès obtenir un coneixement més profund sobre aquest problema.

A Codi per realitzar les simulacions numèriques

S'ha utilitzat el paquet `taylor` desenvolupat per Á. Jorba i M. Zou. Veure <http://www.maia.ub.es/~angel/taylor/> per informació detallada sobre el paquet. Aquest genera, a partir de les equacions del camp vectorial a ser integrat, un integrador de Taylor adaptat. L'output del programa és l'integrador i d'altres funcions relacionades en una llibreria de funcions escrites en ANSI C. Això permet que les funcions es puguin cridar directament des de qualsevol rutina en C que estiguem desenvolupant.

A continuació s'inclou el codi del programa principal que s'ha usat per realitzar les simulacions i l'arxiu on es troben les equacions del camp vectorial.

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4
5 #include "taylor_2bpB.h"
6
7 void campo(double t,double *x,int n, double *y);
8
9 int N=2; /*2 masses*/
10 double m[2]; /*masses*/
11 double MPI=3.14159265358979323846;
12
13 int main(){
14     int i,k,kk;
15     int n=6*N;
16     int order;
17     double *x;
18
19     double h; /*parametres de Taylor*/
20     double t,tmax,tM;
21     double *thet,*phi,*thetp,*phip;
22
23     x=(double *) calloc(n,sizeof(double));
24     thet=(double *) calloc(N,sizeof(double));
25     phi=(double *) calloc(N,sizeof(double));
26     thetp=(double *) calloc(N,sizeof(double));
27     phip=(double *) calloc(N,sizeof(double));
28
29     printf("#CINI_\u00a0coord_\u00a0esferiques\n");
30     printf("\u00a0#cini_\u00a0(m,phi,theta)=(massa,\u00a0azimut_\u00a0(x,y),polar_\u00a0angle_\u00a0de_\u00a0cada_\u00a0cos):\u00a0\n#\u00a0
31         phi_\u00a0[0,pi],\u00a0theta_\u00a0[0,2pi]\u00a0\n#\u00a0m1,phi1,thet1,m2,phi2,thet2\n");
32     for(k=0;k<N;k++){
33         kk=scanf("%lf%lf%lf%lf%lf",&m[k],&phi[k],&thet[k],&phip[k],&thetp[k]);
34     }
35     for(i=0;i<n;i++) x[i]=0;
36
37     for(k=0;k<N;k++){
38         x[6*k]=sin(phi[k])*cos(thet[k]);
39         x[6*k+1]=sin(phi[k])*sin(thet[k]);
40         x[6*k+2]=cos(phi[k]);
41     } //esfera de radi 1
42     for(k=0;k<N;k++){
43         x[6*k+3]=cos(phi[k])*phip[k]*cos(thet[k])-sin(thet[k])*thetp[k]/sin(phi[k]);
44         x[6*k+4]=cos(phi[k])*phip[k]*sin(thet[k])+cos(thet[k])*thetp[k]/sin(phi[k]);
45         x[6*k+5]=-sin(phi[k])*phip[k];
46     }
47
48     t=0; tM=t; tmax=100;
49     printf("%e",t);
50     for(i=0;i<12;i++){ printf("\u00a0%e",x[i]);} printf("\n");
51
52     while(tM<tmax){
53         tM=t+0.1;
```



```

54     while(taylor_step_2bpB(&t, x, 1, 2, -16, -16, &tM, &h, &order)==0);
55     printf("%e\n",t);
56     for(i=0;i<12;i++){
57         printf("%e",x[i]);
58     }
59     printf("\n");
60 }
61
62 free(x);
63 free(thet);
64 free(phi);
65 free(thetp);
66 free(phip);
67 return 0;
68 }

```

```

1 extern m[2],MPI; /*ubles globals*/
2
3 nor0=x3*x3+x4*x4+x5*x5;
4 nor1=x9*x9+x10*x10+x11*x11;
5
6 pesc=x0*x6+x1*x7+x2*x8;
7
8 s3=m[1]*(x6-pesc*x0)/(1-pesc);
9 s4=m[1]*(x7-pesc*x1)/(1-pesc);
10 s5=m[1]*(x8-pesc*x2)/(1-pesc);
11
12 s9=m[0]*(x0-pesc*x6)/(1-pesc);
13 s10=m[0]*(x1-pesc*x7)/(1-pesc);
14 s11=m[0]*(x2-pesc*x8)/(1-pesc);
15
16 diff(x0,t)=x3;
17 diff(x1,t)=x4;
18 diff(x2,t)=x5;
19 diff(x3,t)=s3/(4*MPI)-nor0*x0;
20 diff(x4,t)=s4/(4*MPI)-nor0*x1;
21 diff(x5,t)=s5/(4*MPI)-nor0*x2;
22 diff(x6,t)=x9;
23 diff(x7,t)=x10;
24 diff(x8,t)=x11;
25 diff(x9,t)=s9/(4*MPI)-nor1*x6;
26 diff(x10,t)=s10/(4*MPI)-nor1*x7;
27 diff(x11,t)=s11/(4*MPI)-nor1*x8;

```

B Resolució del Problema de Cauchy

Resolem el problema de Cauchy (2.6), amb condicions inicials $\theta_0 = \theta(0)$, $u_0 = u(\theta_0) = \frac{1}{\rho(\theta_0)} = \frac{1}{\rho_0}$ i $v_0 = \omega(\theta_0) = \dot{u}(\theta_0) = 0$. És a dir,

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \omega & u_0 &= \frac{1}{\rho_0} \\ \dot{\omega} &= -u + \frac{Gm}{l^2} & \omega_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Que en forma matricial és:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix}, \quad \text{amb condició inicial } (u_0, \omega_0).$$

Recordem que es tracta d'un sistema d'equacions diferencials lineals no homogeni a coeficients constants, que resolem mitjançant el mètode de variacions de constants

$$\begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} = M(\theta) \left[\begin{pmatrix} u_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + \int_{\theta_0}^{\theta} M^{-1}(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} d\phi \right],$$

on

$$M(\theta) = \exp^{A(\theta-\theta_0)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_0) & \sin(\theta - \theta_0) \\ -\sin(\theta - \theta_0) & \cos(\theta - \theta_0) \end{pmatrix},$$

és la matriu fonamental principal sent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuació mostrem els càlculs realitzats per a la seva resolució.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} &= M(\theta) \left[\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_{\theta_0}^{\theta} \begin{pmatrix} \cos(\phi - \theta_0) & -\sin(\phi - \theta_0) \\ \sin(\phi - \theta_0) & \cos(\phi - \theta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} d\phi \right] = \\ &= M(\theta) \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\theta_0}^{\theta} \begin{pmatrix} -\sin(\phi - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \\ \cos(\phi - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} d\phi \right] = M(\theta) \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\phi - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \\ \sin(\phi - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} \Big|_{\theta_0}^{\theta} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_0) & \sin(\theta - \theta_0) \\ -\sin(\theta - \theta_0) & \cos(\theta - \theta_0) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos(\theta - \theta_0) - 1) \frac{Gm}{l^2} \\ \sin(\theta - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho_0} + (\cos^2(\theta - \theta_0) - \cos(\theta - \theta_0)) \frac{Gm}{l^2} + \sin^2(\theta - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \\ -\frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\rho_0} - \sin(\theta - \theta_0)(\cos(\theta - \theta_0) - 1) \frac{Gm}{l^2} + \cos(\theta - \theta_0) \sin(\theta - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho_0} + (1 - \cos(\theta - \theta_0)) \frac{Gm}{l^2} \\ -\frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\rho_0} \sin(\theta - \theta_0) \frac{Gm}{l^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Referències

- [1] Arnold, V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989
- [2] Boatto, S.; Dritschel, D.G.; Schaefer, R. G.: *N-body dynamics on closed surfaces: the axioms of mechanics*. 2016.
<http://rspa.royalsocietypublishing.org/>
- [3] Borisov, A.V. , García-Naranjo, L.C., Mamaev I.S. and Montaldi, J.: Reduction and relative equilibria for the 2-body problem on spaces of constant curvature. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130. 2018.
- [4] Borisov A.V., Mamaev I.S., and Bizyaev I.A.: The spatial problem of 2 bodies on a sphere. Reduction and stochasticity. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016.
- [5] Borisov A.V., Mamaev I.S., and Kilin A.A.: Two-body problem on a sphere. Reduction, stochasticity, periodic orbits. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004.
- [6] Cariñena, J. F; Rañada, M. F.; Santander, M.: Central Potentials on spaces of constant curvature: The Kepler problem on the two-dimensional sphere S^2 and the hyperbolic plane H^2 . *American Institute of Physics*. 2005.
<https://doi.org/10.1063/1.1893214>
- [7] Diacu, F.: The Curved N-Body Problem: Risks and Rewards. *Math. Intelligencer*. 2013.
<http://www.math.uvic.ca/faculty/diacu/>
- [8] Dritschel, D. G.: Point mass dynamics on spherical hyper-surfaces. *The Royal Society Publishing*. 2019.
<https://research-repository.st-andrews.ac.uk/handle/10023/17582>
- [9] Esparza-López, Ch.; Ley-Koo, E.; Rendón, P.L.: Two dimensional harmonic and Green's functions on a spherical surface. *Revista Mexicana de Física*. 2016.
- [10] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations*. Graduate Studies In Mathematics. Vol. 19. American Mathematical Society. 2010.
- [11] Jorba, Á. and Zou, M.: A software package for the numerical integration of ODE by means of high-order Taylor methods. *Experimental Mathematics* 14, pp. 99-117, 2005.
- [12] Meyer, K.R., Kenneth and Hall, G.R.: *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Applied Mathematical Sciences, 90. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [13] MP469: Laplace's Equation in Spherical Polar Co-ordinates.
www.thphys.nuim.ie/Notes/MP469/Laplace.pdf
- [14] Salsa, S.: *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*. Springer. 2008.