

# TRABAJO FINAL DE MÁSTER

---

**Título: TARIFICACIÓN DE SEGUROS HIPOTECARIOS**

**Autoría: Ramon Gayet Mas**

**Tutoría: Luis Ortiz Gracia**

**Curso académico: 2019-2020**



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat d'Economia  
i Empresa

Màster  
**de Ciències  
Actuarials  
i Financeres**

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

# **Tarificación de seguros hipotecarios**

Autoría: Ramon Gayet Mas

Tutoría: Luis Ortiz Gracia

“El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto”.

## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo describir e implementar modelos para la tarificación de seguros hipotecarios mediante técnicas de medición del riesgo de crédito basadas en el modelo de Merton. Todo ello, ha sido realizado considerando el precio de la vivienda como estocástico, ya sea mediante un Movimiento Browniano Geométrico o mediante un Modelo Factorial que permite diferenciar el riesgo de fallida entre sistemático e idiosincrático. Por último, y como aportación innovadora, se propone aproximar el problema descrito mediante el algoritmo de Tilley utilizado habitualmente en la valoración de opciones financieras de estilo americano.

**Palabras clave:** Finanzas estocásticas, Riesgo de crédito, Seguro hipotecario, Incumplimiento hipotecario, Modelo de Merton, Algoritmo de agrupación de Tilley.

## Abstract

This project aims to describe and implement mortgage insurance pricing techniques using risk credit measure methodologies based on Merton's model. For this purpose, the house price is supposed stochastic, either by a Geometric Brownian Motion or a Factorial Model which permits to split the possibility of default depending on where it stems from: systematic or idiosyncratic factors. Finally, and as a novel approach, the pricing issue will be faced using Tilley's bundling algorithm, typically applied to value American financial options.

**Key words:** Stochastic Finance, Credit risk, Mortgage insurance, Mortgage default, Merton model, Tilley's bundling algorithm.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Marco Teórico</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>El modelo básico</b>	<b>9</b>
3.1	Apuntes teóricos . . . . .	9
3.2	Implementación del Modelo y reflexiones . . . . .	11
3.2.1	Cuantía de la pérdida, probabilidad de <i>default</i> y prima justa . . . . .	12
3.2.2	Momento de segundo orden por Montecarlo y recargo de seguridad . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Modelo con más de un prestatario</b>	<b>16</b>
4.1	Apuntes teóricos . . . . .	16
4.1.1	Riesgo sistemático e idiosincrático . . . . .	16
4.1.2	<i>Default</i> agregado . . . . .	18
4.2	Implementación del Modelo y reflexiones . . . . .	20
4.2.1	Diversificación y probabilidad de <i>default</i> . . . . .	20
4.2.2	El efecto de la diversificación sobre la prima justa . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Pagos continuos</b>	<b>24</b>
5.1	Cuotas mensuales constantes . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Cálculo de la prima justa mediante el algoritmo de Tilley</b>	<b>27</b>
6.1	Implementación del Modelo . . . . .	28
6.1.1	Patrones de precios del Activo y la deuda pendiente . . . . .	29
6.1.2	Obtención de la función indicatriz de <i>default</i> . . . . .	30
6.1.3	Obtención de la prima . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>8</b>	<b>Apéndice</b>	<b>35</b>
8.1	Demostraciones . . . . .	35
8.2	Código Utilizado . . . . .	36
<b>9</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>

# 1 Introducción

La reciente aparición del nuevo marco regulador<sup>1</sup> en los créditos hipotecarios ha exigido un gran cambio en la gestión bancaria asociada a estos productos y en concreto, en algunas entidades, ha derivado en una evidente problemática en su implantación. Pensando sobre ello y muy influido por el revuelo mediático acontecido, me interesé sobre la posibilidad de estudiar los productos ofrecidos por el sector asegurador para complementar un instrumento de financiación tan importante en nuestra sociedad como son las hipotecas. Concretamente, el objetivo que me planteé fue seleccionar, implementar e intentar mejorar posibles técnicas de medición del riesgo de *default* de estos contratos vinculados a propiedades de inmuebles y, a partir de esta medición, estudiar modelos de tarificación para seguros hipotecarios.

En este sentido, los mencionados seguros son productos con un uso muy extendido en todo el mundo, con especial presencia en países como Estados Unidos (Mortgage Insurance), Gran Bretaña (Mortgage indemnity guarantee) y Australia (Lenders/borrower Mortgage Insurance) donde habitualmente se asocian a las hipotecas solicitadas por aquellas personas (como los jóvenes) que no han generado ahorro suficiente para hacer frente al pago de la entrada de la finca que quieren adquirir, por lo que se les ofrece la opción de financiarla en su totalidad, a cambio de vincular su operación a un seguro de este tipo al préstamo.

Formalmente, estos seguros constituyen un contrato por el que el asegurador, a cambio de una prima, compensa al prestatario por el importe correspondiente a la diferencia entre el valor de la finca adjudicada y el de la deuda pendiente, siempre que se den los siguientes factores en el préstamo hipotecario asegurado:

- Impago por parte del deudor,
- Que como consecuencia de este, el prestamista deba ejercer su derecho a quedarse con la finca, es decir, lo que en el código civil español se conoce como “Ejecución hipotecaria”
- Y que el valor de la finca adjudicada sea inferior al saldo pendiente de devolución.

Si nos remontamos a sus orígenes contemporáneos, el inicio de la comercialización de este tipo de seguros se situó en 1887 en el estado de Nueva York, USA -ver Herzog (2009)- , junto con el nacimiento de la *Title and Guarantee Company of Rochester* que fue, al albor, la primera compañía de seguros que ofreció este producto. Sin embargo, la relevancia del sector se multiplica exponencialmente con el *boom* inmobiliario acontecido durante los *Roaring Twenties*<sup>2</sup> perpetuándose su expansión hasta el inicio de la gran depresión en la que quiebran todas las

---

<sup>1</sup>Ley 5/2019, de 15 de marzo, reguladora de los contratos de crédito inmobiliario.

<sup>2</sup>Época comprendida entre 1920 y 1930.

compañías aseguradoras dedicadas a esta actividad, momento en el que se empieza a apuntar, como lo hace Kulp (1950), la necesidad de discernir en el sector financiero y asegurador entre un riesgo inherente al asegurado y un riesgo estructural o fundamental (*systematic risk*) asociado al estado de toda la economía.

Sin ir tan lejos en el tiempo, uno de los factores más importantes en la crisis financiera de 2008 fue el *default* generalizado de carteras hipotecarias en los Estados Unidos. La caída de estas afectó de pleno al sector asegurador (destaca por ejemplo el rescate público de AIG). Todo ello, como en la gran depresión, puso de manifiesto la poca consideración del riesgo coyuntural en los modelos de tarificación existentes hasta el momento para esta modalidad de contratos. Claro ejemplo de este tipo de tarificación poco considerada con los shocks sistemáticos lo constituye el modelo propuesto por Bardhan et al. (2006), quienes poco antes de la crisis financiera presentaron y calibraron para la República de Serbia un modelo de tarificación de seguros hipotecarios que no tiene en cuenta este factor e incluso supone independencia entre la probabilidad de *default* y la cuantía de este. En otras palabras, asumen que la probabilidad de impago no estaba relacionada con el estado de la economía<sup>3</sup> ni con la evolución del precio de la vivienda.

Con el ánimo de corregir estos errores de tarificación, se ha extendido el uso de métodos de estimación de riesgos en los que se separa la probabilidad de *default* entre la debida a factores sistemáticos y la debida a los idiosincráticos. El riesgo sistemático, a su vez, tiene una estrecha relación con la diversificación geográfica de la cartera hipotecaria del prestamista (*pools*) y por consiguiente, según este grado de diversificación, la prima del seguro deberá ser mayor o menor. Por todo lo descrito en cuanto a naturaleza del riesgo y experiencia histórica se refiere podemos concluir que tanto aseguradores, asegurados y reguladores están interesados en definir, de una forma justa, la prima asociada a estos seguros y como ya se ha apuntado, este va a ser el fin a perseguir en el presente trabajo.

Para llevar a buen puerto este fin, se han planteado tres campos de actuación diferentes: el primero, es la descripción detallada de las metodologías propuestas por Ming Pu, Gang-Zhi Fan y Chunsheng Ban en su artículo "*The pricing of mortgage insurance premiums under systematic and idiosyncratic shocks*" publicado en la revista *The journal of risk and insurance* en 2016. El segundo, consiste en su implementación en **R**<sup>4</sup>, así como en la presentación de distintas reflexiones que considero permiten profundizar en el análisis y aportan valor añadido al contenido teórico del texto de referencia. El tercero, y último, como síntesis de todo el trabajo de análisis realizado y como se explica con más detalle en el correspondiente apartado, es la presentación práctica, en base a las conclusiones extraídas en los modelos y mediante la adopción

---

<sup>3</sup>Mismo supuesto que se asumirá para el modelo básico presentado.

<sup>4</sup>Se utiliza el entorno RStudio sobre la versión 3.6.3 del software R.

de aquellos supuestos considerados como más realistas, de una metodología de tarificación de estos seguros inspirada en un algoritmo cuyo uso está destinado a la tarificación de opciones put americanas sobre *securities* cotizadas.

## 2 Marco Teórico

Principalmente, para la tarificación de seguros hipotecarios existen dos grandes enfoques:

- a. Los conocidos como *reduced form models* o modelos endógenos.
- b. *Option based pricing models* o modelos exógenos.

A continuación se analiza con más detalle en que consiste cada uno de ellos:

### Modelos Exógenos:

Son modelos que consideran que la probabilidad de *default* está determinada por factores exógenos al comportamiento racional del individuo. Destaca por ejemplo el modelo propuesto por Kau et al. (2004) que consiste en:

- Suponer cuatro estados en los que se puede encontrar el préstamo hipotecario tales como: Tipo de interés en banda 1 (bajo), en banda 2 (alto), impago y *default*.
- Aproximar la variable tipo de interés mediante el modelo de *Cox–Ingersoll–Ross (CIR)*.
- Suponer aleatoriedad en la determinación del estado del préstamo.
- Añadir otras variables explicativas exógenas conocidas como el diferencial sobre el tipo de interés, importe del contrato y el tipo de interés del bono americano a 10 años.

Con todo ello, se obtienen las probabilidades de *default* de los préstamos hipotecarios y por extensión, de los hipotéticos seguros hipotecarios asociados. La ventaja de estos modelos es que permiten una fácil implementación práctica dada una determinada cartera de hipotecas.

### Modelos endógenos (basados en el modelo de Merton):

El modelo primario de Merton (1974) es un modelo de *pricing* de bonos corporativos con riesgo. Con este fin, el autor define el *default* de una compañía como la posibilidad de que el valor de sus pasivos supere al de sus activos. Defendiendo que si esto sucede, los *shareholders* preferirán liquidar la compañía a favor de los acreedores que seguir con el negocio. Para la implementación teórica del modelo, añade, además los siguientes supuestos:



- El valor de los activos viene definido por un proceso estocástico ( $V_t$ ).
- Solo existen dos clases de *securities*: deuda y acciones.
- La deuda de la compañía tiene un mismo vencimiento ( $T$ ) y es del tipo cupón cero.
- La empresa no reparte dividendos.
- La deuda de la firma ( $B_T$ ) no puede incrementar.

Todo ello, permite establecer el valor de pago de los accionistas como:

$$S_T = \max(V_T - B_T, 0)$$

Es decir, este se define igual al valor en vencimiento de una *Call* europea con un *strike* igual al *lump sum payment* de la deuda. Este mismo concepto, extrapolando y adaptando alguno de los supuestos al escenario de vivienda (activo<sup>5</sup>) e hipoteca (pasivo<sup>6</sup>), es el utilizado en el enfoque endógeno para pricing de seguros hipotecarios, que vamos a desarrollar con los diferentes modelos expuestos en el presente trabajo.

## 3 El modelo básico

### 3.1 Apuntes teóricos

Supongamos que un individuo decide comprar una finca en un momento inicial ( $t=0$ ). Además, en ese instante se le obliga a suscribir un seguro hipotecario para cubrir las pérdidas que puede ocasionar en caso de impago. Para definir el precio justo de este seguro, se asumirá que el precio de la vivienda (activo subyacente) sigue un movimiento browniano geométrico (GBM):

$$\begin{aligned} dP_t &= \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t \\ P_0 &= P > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde:

- $\mu$  corresponde con la tasa esperada de crecimiento del precio de la vivienda.
- $\sigma$  es la desviación estándar esperada en el comportamiento del precio de la vivienda.
- $W_t$  es un movimiento browniano distribuido como:  $\sim N(0, T)$

---

<sup>5</sup> $V_T = P_T$

<sup>6</sup> $B_T = \alpha P e^{iT}$

En este sentido mediante el Lema de Itô<sup>7</sup>, se puede obtener la siguiente expresión, para modelizar el precio del activo en el momento futuro T.

$$P_T = P \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \quad (2)$$

En el momento inicial (t=0) el prestatario compra la vivienda (recibe la propiedad del activo) a cambio de hacer un pago al vendedor por un valor P. A su vez, financia el pago mediante fondos propios en una proporción (1- $\alpha$ ) y mediante un préstamo hipotecario el restante ( $\alpha$ ). Suponiendo que el pago de la hipoteca se realiza en forma de pago único al vencimiento y que el préstamo es de tipo fijo, en T (vencimiento) el prestatario deberá devolver una cuantía igual a:  $\alpha P(1+i)^n$ , expresado en términos de capitalización continua:  $\alpha P e^{iT}$ .

En base a estas definiciones<sup>8</sup> se puede describir la probabilidad de *default*, es decir, que el precio del activo en el momento T sea menor al valor de la deuda como:

$$Q = P[P_T < \alpha P e^{iT}] = P \left[ W_T < \frac{\ln \alpha + (i - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma} \right] \quad (3)$$

$$\Phi \left( \frac{\ln \alpha + (i - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

Es decir, asumiendo que  $W_t \sim N(0, T)$  la probabilidad de que el valor observado para esta variable aleatoria sea menor a la condición de *default* corresponde con la probabilidad acumulada al valor de la función de distribución normal estándar. En base a la anterior ecuación también podemos definir el efecto<sup>9</sup> de las diferentes variables introducidas en el análisis sobre la probabilidad de *default*:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} > 0; \frac{\partial Q}{\partial i} > 0; \frac{\partial Q}{\partial \mu} < 0; \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \geq 0; \frac{\partial Q}{\partial T} \geq 0$$

En este sentido, se puede observar como la probabilidad de *default* incrementa conforme aumenta la parte financiada (LTV-loan to value- inicial) o el tipo de interés. Comportamiento previsible dado que a mayor importe financiado o tipo de interés, se incrementa el importe a devolver en T. Por el contrario, a mayor crecimiento del precio de la vivienda, menor será la probabilidad de *default*.

<sup>7</sup>Ver demostración 2.

<sup>8</sup>Primera demostración de las recogidas en el apartado de demostraciones.

<sup>9</sup>Efectos obtenidos mediante la derivación de Q por regla de la cadena, por ejemplo:  $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \phi \left( \frac{\ln \alpha + (i - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \frac{1}{\alpha \sigma \sqrt{T}} > 0$ .

El efecto de la variación de la volatilidad del precio de la vivienda y del plazo del préstamo tiene un efecto ambiguo, que puede ser positivo o negativo según los rangos que tomen los diferentes valores.

Por todo lo expuesto, la pérdida en T se puede expresar como:

$$L_T = \begin{cases} \alpha P e^{iT} - P_T & \text{si } P_T < P e^{iT} \\ 0 & \text{si } P_T \geq P e^{iT} \end{cases} \quad (4)$$

Donde  $L_t$  es asimilable al valor en vencimiento de una opción put con un strike de  $\alpha P e^{iT}$ , por lo que utilizando el mismo planteamiento que en la valoración de una estas según el modelo clásico de Black-Scholes, se obtiene para la pérdida esperada,  $l = E[e^{-rT} L_T]$ :

$$l = \alpha P \exp((i - r)T) \Phi(-d_-) - P \exp((\mu - r)T) \Phi(-d_+) \quad (5)$$

$$d_- = d_+ - \sigma \sqrt{T} = \frac{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T - \ln \alpha - iT}{\sigma \sqrt{T}}$$

Como se puede observar, este resultado es parecido (pero no idéntico) al obtenido para valorar una *European put* mediante el citado modelo, las diferencias son debidas a que:

- a. Los pagos de los contratos de las aseguradoras pueden presentar limitaciones para ser replicados.
- b. Existen costes de transacción en el mercado asegurador.
- c. Se valora la prima bajo la función del operador esperado y bajo el medidor de probabilidad real en lugar del interés libre de riesgo.
- d. No se establece que el crecimiento esperado del precio de la vivienda sea igual al del tipo de interés libre de riesgo, sino que se mantiene la tasa  $\mu$  en todo el desarrollo.

Además, la varianza ( $v$ ) de la pérdida en caso de default se puede obtener de la siguiente forma:

$$v = Var[e^{-rT} L_t] = E[e^{-2rT} L_t^2] - E[e^{-rT} L_t]^2 \quad (6)$$

### 3.2 Implementación del Modelo y reflexiones

Una vez analizado el modelo básico y desgranados los supuestos básicos sobre los que está construido, intentaremos replicarlo, para observar las principales conclusiones que se pueden extraer y proponer una mejora que permita añadir un recargo de seguridad a la prima justa estimada.

### 3.2.1 Cuantía de la pérdida, probabilidad de *default* y prima justa

Como se ha expuesto en la explicación del modelo, para poner precio a un seguro hipotecario es indispensable conocer o aproximar para  $t = 0$  y  $T$ , dos factores:

- El precio de la vivienda.
- La deuda devengada.

Siendo la deuda un factor determinista creciente en  $i$ , prefijado en el momento de concesión del préstamo y desconocido el precio de la vivienda. Para este segundo valor, se puede obtener una evolución posible si se genera, mediante una distribución normal, un vector aleatorio ( $Wt$ ) y se sustituye en (2). Obteniendo gráficamente y simulando el precio anualmente:

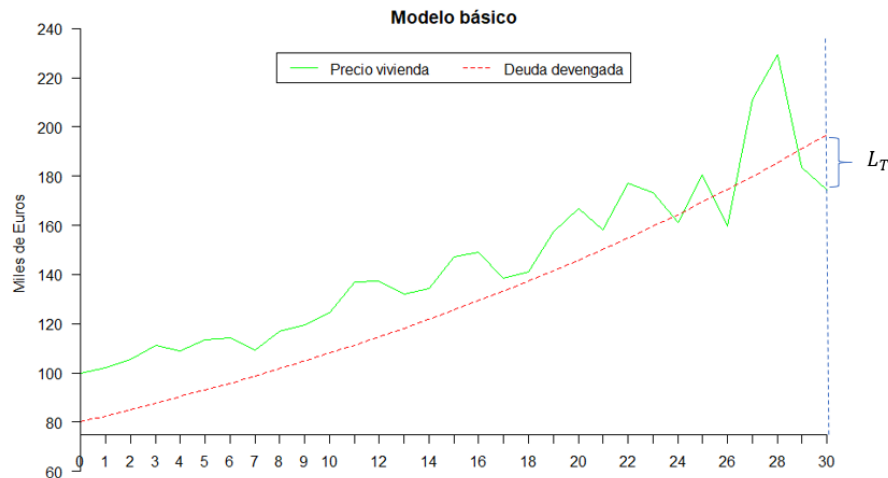


Figura 1: Parámetros utilizados:  $P = 100.000\text{€}$ ;  $\alpha = 0,8$ ;  $r = 0,02$ ,  $\mu = 0,0225$ ;  $\sigma = 0,02$ ;  $T = 30$ . (Fuente: elaboración propia.)

Se puede observar que para una determinada evolución del precio del activo, el *default* se produce cuando la deuda devengada en  $T$  (línea roja discontinua) supera el valor de la vivienda garantía y por lo tanto, se cumple la condición enunciada en (3).

En la simulación realizada en la figura 1, llegados a  $T = 30$  se daría la condición de *default* por lo que la cuantía de este correspondería a la diferencia entre la línea roja discontinua y la verde continua ( $L_T$ ) definida (4) como la parte que el asegurador debería pagar al asegurado o, lo que es lo mismo, la pérdida que sufriría el prestamista al recibir un activo garantía inferior al valor de la deuda.

Una vez presentado gráficamente el problema, se puede estudiar el efecto de algunos factores sobre la probabilidad y cuantía de *default*. En primer lugar se va a analizar el impacto de ciertas variables sobre la probabilidad de *default*. Como ya hemos visto en el apartado anterior, tanto un incremento del LTV financiado como del tipo de interés incrementan inequívocamente la probabilidad de pérdida. Por otra parte, el incremento de la esperanza de crecimiento del precio de la vivienda disminuye su probabilidad.

El efecto del plazo es ciertamente ambiguo y depende de la diferencia entre el crecimiento esperado del precio del inmueble y del tipo de interés. Generando probabilidades de *default* en base a (3) obtenemos los siguientes resultados:

	T=9	T=10	T=15	T=20	T=25	T=30	T=31
$\mu=0.01$	87,74 %	97,02 %	100,00 %	100,00 %	100,00 %	100,00 %	100,00 %
$\mu=0.02$	26,18 %	41,12 %	99,32 %	100,00 %	100,00 %	100,00 %	100,00 %
$\mu=0.03$	0,74 %	0,98 %	8,01 %	52,21 %	97,36 %	100,00 %	100,00 %
$\mu=0.031$	0,44 %	0,55 %	3,66 %	29,43 %	86,51 %	99,90 %	99,98 %
$\mu=0.035$	0,04 %	0,04 %	0,04 %	0,17 %	1,29 %	9,65 %	13,76 %
$\mu=0.04$	0,001 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %

Cuadro 1: Parámetros invariantes utilizados:  $\alpha=0.8$ ,  $\sigma=0.15$ , e  $i=0.03$  .(Fuente: elaboración propia.)

Como se puede observar, en las filas del cuadro se presentan diferentes valores para el parámetro  $\mu$ ; mientras que en las columnas lo hacen diferentes plazos posibles del préstamo (en años). Todo ello, como se indica en la leyenda, considerando un tipo de interés nominal anual del 3%. A simple vista, podemos distinguir dos comportamientos:

- Cuando  $\mu \leq i$ , inequívocamente un incremento del plazo de la operación supone un incremento de la probabilidad de default.
- De lo contrario, cuando  $\mu > i$  y la diferencia entre valores es suficiente para mitigar el efecto de la volatilidad ( $\mu=0,04$ ), el incremento del plazo de la operación supone una disminución de la probabilidad de default.

La explicación de esta ambigüedad es resultante de que  $\mu$ , tal como podemos ver en (2), es uno de los factores que junto a la volatilidad esperada determina el pendiente de la tendencia determinista del precio del activo (sobre la que fluctúa la parte estocástica). Por lo tanto, un incremento de este valor supone un incremento del pendiente de nuestra tendencia. Por su parte, como se puede apreciar en (4), el tipo de interés define la velocidad de crecimiento de la

deuda devengada. Por todo ello, refiriendonos a la figura 1, un incremento de  $T$  cuando el tipo de interés es superior al valor esperado de crecimiento del precio de la vivienda comporta una mayor probabilidad de que para  $t \in [0, T]$  la deuda corte y supere la tendencia de la evolución del precio de la vivienda y como mayor sea este incremento de  $T$ , más probabilidad de que lleguemos a este punto.

Justo lo contrario sucede cuando el valor esperado del crecimiento del precio de la vivienda superior al tipo de interés del préstamo: A mayor plazo en la operación, mayor será la diferencia entre la tendencia del precio de la vivienda y el valor de la deuda devengada. Dicho esto y basándonos en probabilidades razonables de *default* (cuando  $\mu=0,031$  y  $T=15$ , por ejemplo) podemos obtener para una determinada operación y considerando:

- La expresión enunciada en (5)
- Los mismos valores utilizados para la tabla 1.
- Un tipo de interés libre de riesgo del 0,02 y 0,025 respectivamente.

Los siguientes valores para la prima pura justa:

r	0,02	0,025
Prima Justa	4.628,79 €	4.294,33 €

Cuadro 2: Prima única justa. *(Fuente: elaboración propia.)*

Nótese que cuanto mayor es el *gap* entre el tipo de interés del préstamo y el *free risk interest rate*, la prima también es mayor. Esto es debido, a que la expresión (5) se ha obtenido a partir del método de probabilidad real de *default* del activo, y no mediante el método de la probabilidad neutral al riesgo (como se hace, por ejemplo, en el modelo clásico de BS para valorar opciones). Por lo tanto, a mayor diferencia entre el tipo de interés del préstamo y el interés libre de riesgo, mayor es el riesgo asociado a este préstamo (prima de riesgo) y por consiguiente mayor es la prima exigida para el seguro hipotecario asociado.

### 3.2.2 Momento de segundo orden por Montecarlo y recargo de seguridad

Por último, cabe destacar el importante papel de la varianza y desviación estándar para la cuantía de la pérdida, dado que la prima justa calculada puede ser insuficiente o poco “segura” en caso de que la volatilidad de la mencionada pérdida sea muy elevada. Para ello -ver(6)- se puede aproximar su valor a partir de la diferencia entre los momentos de segundo y primer orden (prima justa) al cuadrado. Para el segundo momento, la solución exacta viene dada por

la siguiente expresión -resultante de la combinación de; la función densidad de la normal, (4) y (2)-.

$$E[e^{-2rT} L_T^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2rT} \left[ \left( \alpha P e^{iT} - P \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T - \sigma \sqrt{T} y \right) \right)^+ \right]^2 e^{-\frac{1}{2} y^2} dy$$

Sin embargo, con el objetivo de simplificar el proceso de cálculo (que deriva en una doble integral) y proponer una metodología que permitiría calcular la prima justa si el activo no se comportase de forma log-normal (extensible por tanto al cálculo de  $\ell$ ), se utilizará la simulación por Montecarlo.

En concreto, siguiendo los siguientes pasos:

- Generación de  $n = 10^8$  valores de normal estándar (zt),
- inclusión del vector en (2), obteniendo así n posibles precios del subyacente,
- cálculo de la cuantía de la pérdida (elevada al cuadrado) actualizada,
- promediar los valores obtenidos en el paso anterior,

Se obtiene el momento de segundo orden, con un error de estimación por Montecarlo<sup>10</sup> de 1e-04.

El cálculo de la volatilidad de la cuantía de la pérdida esperada puede ser muy interesante en caso de que el asegurador decidiese optar por un modelo de tarificación que no consista únicamente en el principio de la equivalencia (prima 1), sino que tenga en cuenta la volatilidad de la pérdida esperada, tales como:

- Principio de la varianza (prima 2): consiste en añadir un recargo sobre el valor esperado de la contingencia proporcional al valor de su varianza:

$$P_i = \ell + \delta V[e^{-2rT} L_T]$$

- Principio de la desviación típica (prima 3): consiste en añadir un recargo sobre la cuantía esperada de la contingencia ( $\ell$ ) proporcional al valor de su desviación estándar:

$$P_i = \ell + \delta \sqrt{V[e^{-2rT} L_T]}$$

---

<sup>10</sup>Error de Montecarlo =  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Con todo ello, presentamos, a modo de ejemplo, los valores obtenidos mediante Montecarlo y las comparación entre las primas.

$\ell$	$\sigma$	CV	Prima 1	Prima 2	Prima 3
42,94	260,56	6,07	42,94€	173,22€	173,22€

Cuadro 3: Volatilidad de la cuantía de la pérdida y primas, (*Fuente: elaboración propia.*)

Los parámetros utilizados para la estimación son los mismos que para el cálculo del segundo valor de la tabla 2, pero con  $P=1.000€$  y con unos recargos de  $\delta = 0,19\%$  y  $50\%$  sobre la varianza y la desviación estándar respectivamente.

## 4 Modelo con más de un prestatario

### 4.1 Apuntes teóricos

En el modelo básico, solo se analiza el problema con un único individuo por lo que en la probabilidad de *default* no se está considerando el efecto que podría tener, para la compañía aseguradora o prestamista, una cartera diversificada en diferentes *pools* geográficos. Esta hipotética diversificación, cuya importancia se ha puesto de manifiesto en la introducción, obliga a introducir en el modelo el discernimiento entre la posibilidad de *default* por motivos inherentes al prestatario y por factores que afectan al total de los agentes económicos.

#### 4.1.1 Riesgo sistemático e idiosincrático

Para incorporar este efecto, se supondrá que los diferentes prestatarios adquieren  $N$  fincas distintas, y además:

- Cada prestatario solo puede adquirir una vivienda.
- El precio inicial de su vivienda es idéntico.
- La expectativa de crecimiento de precio y volatilidad esperada es homogénea y única entre agentes.

Como resultado de estos nuevos supuestos, ahora se tienen  $k$  ecuaciones (1), es decir:

$$dP_t^{(k)} = \mu P_t^{(k)} dt + \sigma P_t^{(k)} dW_t^{(k)}, \quad P_0^{(k)} = P : \text{para } k = 1, \dots, N \quad (7)$$



Además, se puede descomponer la volatilidad en el precio de la vivienda entre dos factores, uno idiosincrático-propio- y otro sistemático-coyuntural-, quedando la variación de  $W_t$ :

$$dW_t^{(k)} = \rho dZ_t + \sqrt{1 - \rho^2} dB_t^{(k)} \quad (8)$$

De la anterior expresión se desprenden las siguientes definiciones y conclusiones:

- a.  $\rho$  hace referencia a la relación lineal entre la variación del precio de la vivienda y el factor  $Z_t \sim N(0, T)$ : movimiento browniano estándar, que recoge la posible evolución de la volatilidad debida a factores sistemáticos.
- b.  $B_t \sim N(0, T)$  un movimiento browniano, que recoge el efecto de un shock idiosincrático.
- c. Existe una correlación lineal entre la variación de precio de los activos y los shocks sistemáticos.

Combinando las ecuaciones (6) y (7) podemos modelizar el precio en  $T$  de la vivienda  $k$ , con la siguiente expresión:

$$P_T^{(k)} = P \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \rho Z_T + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} B_T^{(k)} \right) \quad k = 1, \dots, N \quad (9)$$

Donde introduciendo la condición de que el  $Z_t = z$ , (índice macroeconómico) y siguiendo el mismo desarrollo matemático que en (3) se obtiene la probabilidad de *default* condicionada, para un préstamo  $k$ , como:

$$q(z, \rho) = P[P_t^k < \alpha P e^{iT} | Z_t = z] = \Phi \left( \frac{\ln \alpha + (i - \mu + \frac{1}{2} \sigma^2) T - \sigma \rho z}{\sigma \sqrt{(1 - \rho^2) T}} \right) \quad (10)$$

Analizando la expresión, se observa como los signos del efecto de diferentes factores sobre la probabilidad de *default* son iguales a los del modelo básico. Respecto al nuevo factor  $z$ , se puede ver como al aumentar (disminuir) el valor del factor coyuntural -PIB por ejemplo- disminuye (aumenta) la probabilidad de ejecución por motivos sistemáticos<sup>11</sup> o, lo que es lo mismo, cuando la economía entra en recesión, la probabilidad de caída generalizada de precios incrementa y alternativamente disminuye cuando el ciclo se encuentra en fase expansiva.

Examinemos ahora el efecto que tiene la diversificación entre diferentes *pools* geográficos sobre la probabilidad de *default* del prestamista o asegurador. En este sentido, para un determinado prestamista (Banco por ejemplo) el valor total de las garantías de sus préstamos hipotecarios en un momento  $t$  corresponderá con la suma agregada del valor total de fincas en ese instante. Por ello, podemos rescribir  $N$  ecuaciones (2), que modelizan el precio de todos los activos inmobiliarios de la cartera.

---

<sup>11</sup>Dado que  $z$  se encuentra restando en la expresión, un incremento de su valor implica una disminución del valor de la normal estándar para el que obtener la probabilidad acumulada.

### 4.1.2 Default agregado

Ahora se examinará el efecto que tiene sobre el riesgo soportado por el prestatario la diversificación de su cartera de  $N$  préstamos y las correspondientes garantías en diferentes *pools* geográficos. Así pues, para un determinado prestamista, se puede definir el LTV de toda la cartera como el peso de la deuda devengada por los  $N$  préstamos que la forman entre el precio de los activos garantía (viviendas) relacionados.

$$\eta_t = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha P_0 e^{it}}{\sum_{i=1}^N P_t} \quad (11)$$

A su vez, el denominador de la expresión en base a lo establecido en (6) y (7), se puede expresar, para  $k \in [1, N]$ , cómo:

$$\sum_{k=1}^N dP_t^{(k)} = \mu \sum_{k=1}^N P_t^{(k)} dt + \sigma \sum_{k=1}^N P_t^{(k)} \rho dZ_t + \sum_{k=1}^N \sigma \sqrt{1 - \rho^2} P_t^{(k)} dB_t^{(k)} \quad (12)$$

Además, el movimiento browniano para este caso, considerando:  $P_t = \sum_{k=1}^N P_t^{(k)}$ , sigue la siguiente expresión:

$$\widetilde{W}_t = \frac{1}{\theta} \left[ \rho Z_t + \sum_{i=1}^N \frac{P_t^k}{P_t} \sqrt{1 - \rho^2} B_t^{(k)} \right] \quad (13)$$

Donde, suponiendo que todas las fincas de la cartera tienen el mismo peso  $(1/N)^{12}$  y siendo  $\theta = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{N}(1 - \rho^2)}$ , se puede expresar el valor total de las garantías en  $T$  como:

$$P_T = P_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 \right) T + \theta \sigma \widetilde{W}_t \right) \quad (14)$$

Nótese que dado que  $N > 1$ ,  $\theta < 1^{13}$  y  $\theta \sigma < \sigma^{14}$  (consecuencia de la diversificación) la volatilidad del valor total de las viviendas usadas como garantía es menor que la volatilidad de cualquiera de las  $N$  propiedades que la forman. En base a todo lo expuesto, el prestamista puede soportar hasta un cierto LTV agregado a partir del cual, en caso de superarlo, entraría en quiebra. En este sentido, la probabilidad de default del prestamista se puede expresar como la probabilidad

<sup>12</sup>Equivalente a suponer que el capital concedido es siempre el mismo o que en caso de ser superior, se cede la parte que supera  $(1/N)$  a otra compañía, de forma que el prestamista mantiene su cartera homogénea.

<sup>13</sup> $\rho$ , al ser una correlación positiva, siempre toma valores entre 0 y 1.

<sup>14</sup>Dada la anterior nota, se cumple esta afirmación siempre.

de que el LTV agregado en T supere el mencionado valor crítico<sup>15</sup> ( $\tilde{\eta}$ ).

$$P[\eta_T > \tilde{\eta}] = P\left(\frac{N\alpha P_0 e^{iT}}{NP_0 \exp((\mu - (\sigma^2\theta^2/2))T + \sigma\theta\tilde{W}_t)} > \tilde{\eta}\right) = \Phi\left(\frac{\theta\sigma\sqrt{T}}{2} + \frac{(i - \mu)T - \ln(\tilde{\eta}/\alpha)}{\sigma\theta\sqrt{T}}\right) \quad (15)$$

Donde:

- $\theta$  plasma el efecto de la diversificación sobre la cartera de garantías.
- $N\alpha P_0 e^{iT}$  corresponde al saldo devengado por los N prestamistas de la cartera en el momento T.

De la anterior ecuación se desprende que al incrementar (disminuir)  $\theta$ , la probabilidad de *default* incrementa (disminuye<sup>16</sup>).

La cuantía de *default*, por su parte, como en el modelo básico, se puede expresar igual que en (4). Pero con la diferencia de que ahora tendremos este resultado para  $k \in [0, N]$  elementos. Por ello, y siguiendo el mismo procedimiento utilizado para el modelo inicial, podemos expresar la prima justa para un prestatario k, corregida por el efecto de la diversificación sobre toda la cartera, como:

$$\ell(z, \rho) = \alpha P e^{(i-r)T} \Phi(-g_-) - P \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r + \frac{1}{2}(1 - \rho^2)\sigma^2\right)T + \sigma\rho z\right) \Phi(-g_+) \quad (16)$$

$$g_- = g_+ - \sqrt{1 - \rho^2}\sigma\sqrt{T} = \frac{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\rho z - \ln\alpha - iT}{\sigma\sqrt{(1 - \rho^2)T}}$$

Una vez definida la probabilidad de *default* de toda la cartera y la cuantía de este para los N elementos que la forman, podemos definir la pérdida agregada que sufre la compañía en un determinado momento  $-S_T^N$  como la suma de las pérdidas de los N elementos que la forman ( $S_T^N = L_T^{(1)} + L_T^{(2)} + \dots + L_T^{(N)}$ ). Donde  $L_T^{(k)}$  para  $k \in [0, N]$ , tomará valor 0 o diferente según las condiciones enunciadas en (4). A partir de aquí, se puede calcular la pérdida esperada como:

$$E[e^{-rT} S_T^N] = N\ell$$

<sup>15</sup>Expresión que se obtiene con el mismo razonamiento mostrado en la demostración 1.

<sup>16</sup>Efecto que se observa siempre que  $i < \mu$  y  $\alpha < \tilde{\eta}$ , para que el segundo termino de (14) sea negativo.

## 4.2 Implementación del Modelo y reflexiones

Como se ha visto en la descripción teórica de este segundo modelo, la principal novedad respecto al modelo básico es la introducción del efecto diversificación sobre la cartera de préstamos y el discernimiento para la modelización del precio de la vivienda, entre factores resultantes del ciclo económico y aquellos que solo afectan a un determinado contrato.

### 4.2.1 Diversificación y probabilidad de *default*

Para analizar el efecto enunciado, es fundamental recuperar lo establecido en la expresión (10) en la que, recordamos, se desarrolla la probabilidad de que se de la condición de *default* bajo el supuesto de una determinada situación económica que debemos suponer o estimar ( $z$ ). Esta condición económica esperada, puede ser el crecimiento promedio del PIB durante la vigencia del préstamo u otros indicadores económicos que podrían afectar significativamente nuestra cartera, como puede ser la tasa de desempleo, inflación, etc. Por ello, en este caso supongamos<sup>17</sup> que  $z \in (-3, 3)$  siendo -3 el peor entorno económico para la cartera y +3, el mejor escenario posible.

Por ejemplo, fijándonos en el numerador de la mencionada expresión y suponiendo una correlación entre activos constante, si el escenario económico es negativo (-3, por ejemplo) el segundo término del numerador se volverá positivo y por lo tanto, incrementará el valor de crítico para el que calculamos la probabilidad acumulada y con él, la probabilidad de *default* agregado.

Este mismo efecto y su cuantificación exacta se puede extrapolar para diferentes valores posibles de  $\rho$  (diversificación de nuestra cartera) y de  $z$  (contexto macro).

Por ello, y con el fin de poder diseñar una superficie de impacto para la probabilidad de *default* ante variaciones de  $\rho$  y de  $z$ , generamos dos vectores de 101 posibles valores de los parámetros, ordenados de forma ascendente. A partir de sus 10.201 combinaciones y utilizando como link la expresión enunciada en (10) obtenemos mediante la librería Soetaert (2013) las siguientes superficies de impacto, en dos y tres dimensiones:

---

<sup>17</sup>Se recuerda que  $Z_t$  se ha asumido distribuida como una normal con media 0 y varianza  $T$  por lo que para un año, casi todos los valores probables se encuentran entre -3 y 3.

Probabilidad de Default, Correlación y escenario macroeconómico (1)

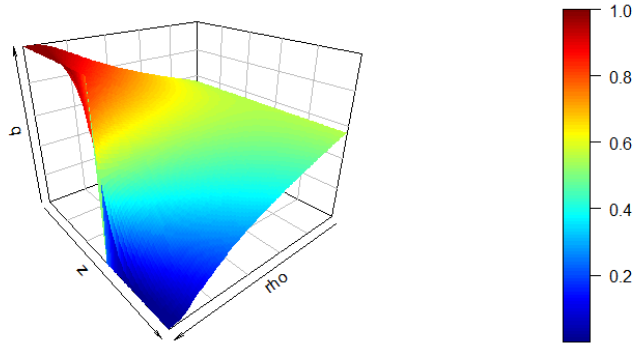


Figura 2: Parámetros utilizados:  $i=0,03$ ;  $\alpha=0,9$ ;  $\mu=0,03$ ;  $\sigma=0,2$ ;  $T=10$ . (Fuente: elaboración propia.)

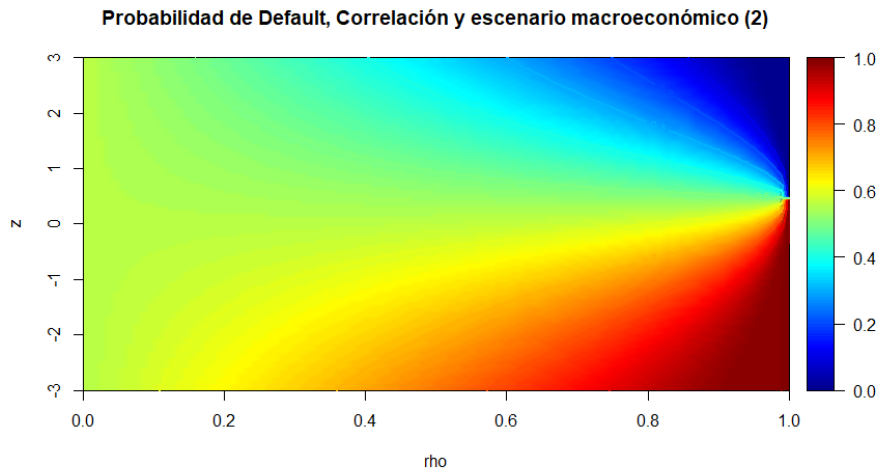


Figura 3: Parámetros utilizados:  $i=0,03$ ;  $\alpha=0,9$ ;  $\mu=0,03$ ;  $\sigma=0,2$ ;  $T=10$ . (Fuente: elaboración propia.)

Ambos gráficos muestran en color rojo las posibles combinaciones de  $\rho$  y  $z$  donde la probabilidad de *default* es mayor (cercana al 100 %), y en azul aquellas zonas más favorables, es decir, con probabilidad de default cercana a 0 %.

Observando la figura 2, se aprecian diferentes situaciones a destacar:

- La zona con menor probabilidad de *default* es aquella con un escenario económico positivo y los activos muy correlacionados (todo va bien).
- La zona más “peligrosa” en términos de probabilidad de *default* es aquella en la que el escenario macroeconómico es muy desfavorable y todos los activos de la cartera están altamente correlacionados.
- Cuando la correlación es 0, o cercana a este valor (cartera muy diversificada), el efecto del escenario macro tiene poca afectación sobre la probabilidad de *default*.

La figura 3, por su parte, permite poner de manifiesto un fenómeno que puede llegar a pasar desapercibido en el gráfico 3D, como es el coste de conseguir una cartera más diversificada. Entendiendo este como el sacrificio en términos de probabilidad de *default* que se debe realizar para contextos macroeconómicos positivos y carteras con una alta correlación para poder reducir el impacto potencial en caso de que el shock económico sea de signo negativo.

Por ejemplo, si pasamos de una correlación de 1 a una de 0,4, la probabilidad de default para contextos económicos negativos  $z \in (-3, -1)$  pasa a situarse entre 0,8 y 0,6 o, lo que es lo mismo, se reduce entre un 20 % y 40 %. A cambio, en caso de coyuntura económica favorable  $z \in (1, 3)$  la probabilidad de default pasa de situarse en valores cercanos a 0 a valores situados entre 0,4 y 0,6, lo que supone un incremento de la probabilidad de default a valores de entre el 40 % y 60 %.

En conclusión, la disminución de correlación en la cartera tiene diferentes repercusiones según el escenario: incrementará (disminuirá) la probabilidad de *default* en caso de contexto económico favorable (desfavorable). Sin embargo, esta variación, en valor absoluto, será mayor en caso de contexto macro favorable, tal y como se observa en la asimetría del eje de ordenadas de la figura 3.

#### 4.2.2 El efecto de la diversificación sobre la prima justa

El análisis realizado para la probabilidad de *default* se puede hacer extensible a la prima pura. Como se muestra en la siguiente figura, y en base la expresión (16), la prima justa presenta dependencia con la correlación de la cartera de la compañía.

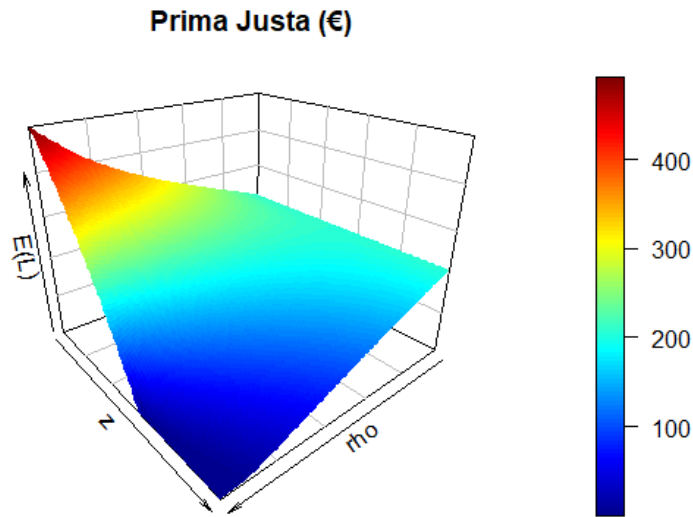


Figura 4: Parámetros utilizados:  $P=1.000$ ,  $i= 0,03$ ;  $r=0,02$ ;  $\alpha=0,9$ ;  $\mu=0,03$ ;  $\sigma= 0,2$ ;  $T=10$ . (Fuente: elaboración propia.)

En este caso, el análisis del gráfico es similar al obtenido para la probabilidad de *default*. Sin embargo, el resultado permite plantear una interesante reflexión, como es que bajo un supuesto de tarificación por valor esperado, una empresa comercializadora de este tipo de seguros puede ser más o menos competitiva según la correlación de su cartera.

Si su cartera está poco correlacionada, podrá ofrecer una prima menor y más constante en el tiempo a sus clientes. Incluso, podría llegar a ofrecer rebajas sobre la prima de un potencial asegurado en caso de que el efecto marginal de este, en términos de correlación, sobre la cartera agregada sea beneficioso para la compañía<sup>18</sup>.

<sup>18</sup>Compra, en forma de bonificación, la disminución de su actual correlación en cartera que le proporciona el nuevo asegurado.

## 5 Pagos continuos

### 5.1 Cuotas mensuales constantes

Los dos modelos de *pricing* expuestos hasta el momento se basan en el supuesto limitativo de que el préstamo hipotecario se devuelve en forma de pago único en  $T$  y, por consiguiente, las aproximaciones utilizadas para la probabilidad y cuantía de *default* siguen la misma metodología aplicada por el modelo de *Black-Scholes* para la valoración de una *European put option*. Este esquema de amortización, no suele ser corriente en préstamos hipotecarios (sí en créditos corporativos). Por ello, para dotar de realismo al modelo, se puede suponer que los préstamos objeto de estudio siguen un sistema de amortización con canon francés y continuo, a partir del cual se puede calcular el saldo pendiente para un momento  $t(0 < t < T)$  como:

$$B_t = \alpha P e^{it} - \int_0^t c e^{is} ds = \alpha P e^{it} - c \frac{e^{it} - 1}{i} \quad (17)$$

Donde, el primer término de la diferencia corresponde al capital inicial financiado y el segundo corresponde con el agregado de cuotas constantes y continuas ( $c$ ) devengadas y pagadas hasta  $t$ . En este caso, por tanto, el *default* ya no se limita a establecer la posibilidad de que en el vencimiento el valor del inmueble sea inferior al valor del saldo a devolver, sino que esta condición se debe cumplir para toda  $t \in [0, T]$ . Definimos por tanto el umbral de *default* en relación con  $P_t$  y  $t$ , como un porcentaje del saldo pendiente del préstamo:

$$H_t = \beta B_t \quad (18)$$

A partir de este umbral, podemos definir algunas zonas entre  $P_t$  y  $t$ <sup>19</sup>

---

<sup>19</sup> $\mu$ ,  $i$  y  $r$  están expresados términos de tipo de interés efectivo anual, para la obtención del gráfico se han transformado a interés efectivo mensual mediante:  $I_m = (1 + I_A)^{1/M} - 1$ . La volatilidad ( $\sigma$ ), por su parte, también se ha mensualizado considerando una base de cálculo: ACT/360.



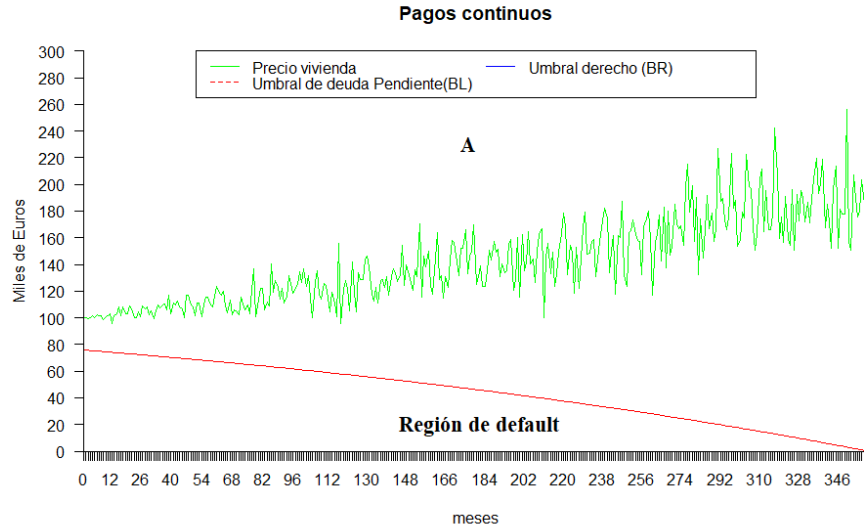


Figura 5: Simulación mensual, Parámetros utilizados:  $P=100.000\text{€}$ ;  $\alpha=0,8$ ;  $r=0,02$ ,  $\mu=0,0225$ ;  $\sigma=0,02$ ;  $i=0,03$ ;  $\beta=0,95$ ;  $T=30$  (360 meses). (Fuente: elaboración propia.)

- $A$  es el área de no *default* que cumple:
  - $t$  situado entre 0 y  $T$ , es decir, es estrictamente positivo.
  - $P_t > H_t$ : el precio del activo no supera el umbral de *default*.
- $B_R$  cómo el límite derecho del análisis, que recoge todas las posibles combinaciones de precios cuando:
  - $t = T$  (nos situamos en el vencimiento del préstamo).
  - $P_t$  es estrictamente positivo.
- $B_L$  representa el umbral que delimita el área de no *default*  $A$  con el área en el que se da y por consiguiente cumple:
  - $t$  se encuentra entre 0 y  $T$ .
  - $P_t = H_t$ .

Además definimos el tiempo de Markov como aquel  $\tau \in [0, T]$  posterior a  $t$  (instante en el que no se ha cumplido aún la condición de *default*) por el que el activo deja el área  $A$  y penetra en el área delimitada por  $B_L$ .

Cuando nos encontramos en  $t$ , siguiendo la misma lógica expuesta en (4), podemos definir la cuantía de default como la diferencia entre el saldo pendiente del préstamo y el umbral de default.

$$L_\tau = (B_\tau - H_\tau) = (1 - \beta) \left[ \alpha P e^{it} - c \frac{e^{it} - 1}{i} \right] \quad (19)$$

Obteniendo para  $t \in A$ , la cuantía de default esperada que nos permite calcular la prima justa:

$$\ell(t, P) = E \left[ e^{-r\tau} L_\tau | P_t = P \right] \quad (20)$$

Es decir, la cuantía esperada de *default* para el supuesto de un único prestatario corresponde con la esperanza de la actualización de la cuantía de *default*  $L_t$  condicionada a la filtración de  $P$  en  $t$  donde, dado que  $(t, P) \in A$ , no se cumplía la condición de *default*. Si, como en el modelo de múltiples prestatarios, añadimos el efecto de la diversificación sobre toda una cartera de préstamos, podemos expresar la cuantía de default promedio como la esperanza del sumatorio de pérdidas  $L_t^{(k)}$  para  $k = 1 \dots N$  condicionada a que  $P_t = P$  donde  $P \in A$ :

$$\ell^{(N)}(t, P_k) = E \left[ \frac{\sum_k e^{-r\tau(k)} L_{\tau_k}^{(k)}}{N} | P_t^{(k)} = P_k \right] \text{ para } k = 1 \dots N \quad (21)$$

Aplicando a la anterior expresión el lema de Itô y considerando, como en los anteriores modelos, que los precios de las viviendas de la cartera siguen la estructura de precios expuesta en (6), obtenemos la siguiente PDE:

$$\frac{\partial \ell^{(N)}}{\partial t} + \mu \sum_{k=1}^N P_k \frac{\partial \ell^{(N)}}{\partial P_k} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \sum_{k=1}^N P_k^2 \frac{\partial^2 \ell^{(N)}}{\partial P_k^2} + 2 \sum_{k < j} P_k P_j \rho^2 \frac{\partial^2 \ell^{(N)}}{\partial P_k \partial P_j} \right) = 0 \quad (22)$$

Esta expresión se encuentra sujeta a las siguientes condiciones<sup>20</sup>:

- Cuando el precio de la vivienda subyacente (o el promedio de precios de la cartera) se cruza con  $B_L$ , la cuantía de default corresponde a la diferencia entre el saldo pendiente en ese momento y el umbral de default.

---

<sup>20</sup>Analíticamente:

$$1) \ell^{(N)}(t, P_k) | P_k = H(t) = \frac{1}{2} (1 - \beta) \left[ \alpha P e^{(i-r)t} - c e^{-rt} \frac{e^{it} - 1}{i} \right] + \frac{1}{2} \ell^{(N-1)}(t, P_k) \text{ para } k = 1 \dots N.$$

$$2) \ell^{(N)}(T, P_1 \dots P_N) = 0.$$

- En el vencimiento ( $t=T$ ), la cuantía de default para cualquier combinación de precios de los  $N$  activos subyacentes es 0, ya que en dicho instante el préstamo está completamente amortizado.

## 6 Cálculo de la prima justa mediante el algoritmo de Tilley

Una vez descrito el problema de la tarificación de seguros hipotecarios y justificada la necesidad de discernir entre shocks sistemáticos e idiosincráticos en su tarificación, a continuación se presentará un posible método de tarificación aplicable a los supuestos que de los tres apartados, se han identificado como más realistas.

Como se ha descrito en el anterior apartado y graficado en la figura 5, con pagos continuos, la posibilidad de *default* y la cuantía de este es similar a la posibilidad de ejercer o no una put americana sobre una *security* cotizada, que en este caso sería la vivienda. Todo ello con la diferencia de que en el caso del seguro hipotecario, el *strike* no es constante en el tiempo sino que va decreciendo al mismo ritmo que lo hace la deuda pendiente.

Por todo ello, se plantea -como ya se apuntaba analíticamente en las expresiones 21 y 22- la posibilidad de aproximar la prima justa de este producto de forma similar a la tarificación de las mencionadas opciones. Una posibilidad, por tanto, sería resolver analíticamente las mencionadas expresiones, pero el proceso para hacerlo es complejo y el resultado solo es aplicable en el caso de que el activo subyacente siga una distribución log-normal. Por ello, como se muestra a continuación, existen enfoques más prácticos y extrapolables a cualquier distribución de los precios del activo subyacente.

En la literatura, no son pocos los autores que han propuesto métodos de tarificación de *american puts*, utilizando para ello:

- Enfoques no basados en la simulación de Montecarlo.
- Enfoques basados en el método de simulación de Montecarlo.

Respecto a los modelos no basados en Montecarlo, destacan, entre otros, el modelo binomial de Cox, Ross, and Rubinstein (1979), y el método trinomial de Boyle (1986).

Sin embargo, en este trabajo se centra en el uso de métodos para pricing basados en las técnicas de Montecarlo. Los principales modelos que utilizan este enfoque son:

- El modelo de Tilley (1993)
- El modelo de “simulated random tree” propuesto por Broadie, Glasserman and Jain (1997),

- y el modelo de “least square method” propuesto por Longstaff and Schwartz (2001).

Una idea tentadora sería, como Cortis (2019), para el riesgo de crédito, comparar los resultados obtenidos con cada modelo para así determinar cuál de ellos presenta mejores estimaciones. Sin embargo, este no es el objeto del presente trabajo, por ello únicamente se implementará el método de Talley ya que, como señala Zhao (2018), a pesar de que no proporcionar una estimación insesgada, presenta unos resultados predictivos incluso más ajustados en la tarificación de derivados que otros de los nombrados modelos.

La implementación se realizará en base a la definición original del autor, intentando relacionar en todo momento los pasos propuestos con el problema de tarificación de seguros hipotecarios que nos ocupa. Además, se adaptarán las ecuaciones y expresiones que nos permitan dotar de realismo los resultados obtenidos.

## 6.1 Implementación del Modelo

El modelo de Tilley se basa en la generación de  $R$  patrones aleatorios de los precios del activo subyacente para los que, en base a un *strike* dado, se pueden calcular sus respectivos *payoff* en cualquier momento de la vigencia del contrato. A partir de los patrones generados, y en base al algoritmo que se describirá, se calcula  $z(k, t)$ , una función indicatriz que toma valores 0 o 1 según si para un patrón  $k \in (1, R)$  en  $t \in (1, T)$  se ejerce la opción, todo ello considerando que la opción no se ha ejercido antes. Por último, se calcula el valor justo mediante la siguiente expresión.

$$Prima = R^{-1} \sum_{k=1}^R \sum_{t=1}^N z(k, t) D(k, t) I(k, t) \quad (23)$$

Donde:

- $z(k, t) = \mathbb{1}_{\{z(k,t)=z(k,\tau)\}}$  y  $\tau$  es el momento en el que se ejerce la opción (en nuestro caso se cancela la deuda por el valor del inmueble, hay *default*).
- $D(k, t) = e^{(-r\Delta t)}$  corresponde con el factor de descuento. En el modelo se utiliza, al igual que el modelo original, el tipo de interés libre de riesgo, pero teniendo en cuenta que para la deuda devengada, la aplicación de este factor comportará la actualización de la misma según el principio de probabilidad real ( $i - r$ ).
- Corresponde al valor intrínseco del seguro  $I(k, t) = [Debt(t) - P(k, t)]^+$ .

### 6.1.1 Patrones de precios del Activo y la deuda pendiente

Como se ha mencionado, el primer paso es la generación de  $R$  patrones de precios posibles para la vivienda. Para ello, según lo expuesto en los modelos teóricos descritos, es importante tener en cuenta el posible efecto de los shocks sistemáticos e idiosincráticos, como se contempla en la expresión (9).

$$P_t = P_{(t-1)} \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \rho Z_t + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} B_t \right)$$

Por tanto, discretizando en intervalos de  $\Delta t = 1/360^{21}$  y aplicando esta expresión se generan 100 patrones de precios distintos.

Este periodo de generación de precios mensuales es coherente con la realidad del mercado inmobiliario: menos líquido que cualquier otro mercado financiero debido a que los precios son discretos y por consiguiente, menos elásticos<sup>22</sup>.

Las cuotas de la deuda, para ser coherentes con la periodicidad normal de amortización de hipotecas, se calculan suponiendo una amortización mensual por canon francés. Todo ello mediante el esquema de amortización expuesto en (17), por el cual se puede expresar la deuda pendiente en cualquier instante  $t \in [0, T]$  como:

$$Debt(t) = \alpha P e^{it} - c \frac{e^{it} - 1}{i}$$

En el siguiente gráfico mostramos el resultado obtenido<sup>23</sup> hasta  $t = 100$ :

---

<sup>21</sup>Equivalente a suponer que los precios de las viviendas varían mensualmente.

<sup>22</sup>Al ser un activo real, también operan los costes conocidos como de “menú”.

<sup>23</sup>Para el código en **R**, se ha obtenido la matriz *sample (361x100)* que recoge los patrones de precio posibles y el vector *Debt* de 361 valores. Todo ello para  $t \in (0, 360)$ .

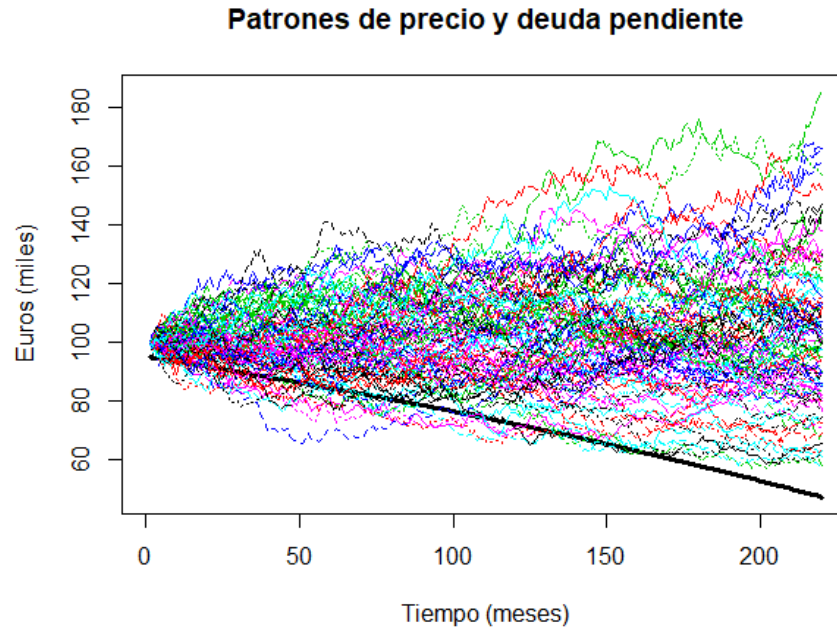


Figura 6: Patrones de precio y deuda , Parámetros utilizados:  $P= 100.000\text{€}$ ;  $\alpha$  (LTV)=0,95;  $r=0,02$ ,  $\mu=0,01$ ;  $\sigma= 0,30$ ;  $i=0,03$ ;  $\beta=1$ ;  $T=30$  (360 meses).*(Fuente: elaboración propia en base a la metodología expuesta por Ojasvin Sood en towardsdatascience.com.)*

### 6.1.2 Obtención de la función indicatriz de *default*

Una vez generados los patrones y los valores de la deuda, iniciamos el proceso para la obtención de  $z(k,t)$ . Para ello implementamos los pasos del algoritmo de Tilley. Previamente, marcamos con un valor infinitesimal los precios generados de la matriz *sample* ( $361 \times 100$ ), estos nuevos valores simplemente nos permitirán identificar a que patrón pertenece cada precio y además, son lo suficientemente pequeños para no influir en los subsiguientes cálculos.

#### Primer paso: Reordenar los patrones de precios

A continuación, se reordenan los patrones de precios en orden decreciente. Este reordenamiento, lo propone el autor para la tarificación de una opción put, es decir, aquella en la que el *payoff* se define como la diferencia entre el *strike* y el precio del activo subyacente en el momento de análisis.

## Segundo paso: Valor intrínseco

Para cada precio en  $t$  se define su valor intrínseco  $I(k, t)$  como la diferencia entre *strike* y precio (tipo put). Para el caso hipotecario -ver (4)- este valor es definido como la diferencia entre la deuda pendiente en cada momento<sup>24</sup> menos el precio del activo  $P(k, t)$ .

## Tercer paso: *Bundles*

Se clasifican los valores decrecientes en  $Q$  *bundles* . En este caso se toma  $Q=10$ . Para cada *bundle*, se obtiene un  *Holding value*  $H(k, t)$  que se define como:

$$H(k, t) = e^{(-r\Delta t)} P^{-1} \sum_{\forall j \in P(k, t)} V(j, t + 1)$$

$V(k, t)$  se define integramente en el séptimo paso.

## Cuarto paso: Valor intrínseco y *holding value*

Se genera un nuevo indicador  $x(k, t)$  que permite comparar el valor intrínseco y el *holding value* calculado, en concreto:

$$x(k, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(k, t) > H(k, t) \\ 0 & \text{si } H(k, t) \geq I(k, t) \end{cases}$$

## Quinto paso: *Sharp boundary*

Se busca para  $\forall k \in x(k, t)$  el primer valor para el que se cumple el *Sharp boundary* definido como aquel espacio de  $x(k, t)$  en el que por primera vez la serie de 1, supera la serie de 0 subsiguiente:

$$\begin{array}{c} \text{Sharp Boundary } (k^*(t)) \\ \downarrow \\ 0\dots 01000[11100]10\dots 1 \end{array}$$

## Sexto paso: $y(k, t)$

Se señala mediante una nueva variable  $y(k, t)$  los valores que se encuentran por debajo y aquellos que son superiores (o iguales) al *Sharp boundary*, en concreto:

$$y(k, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } k(t) \geq k^*(t) \\ 0 & \text{si } k^*(t) > k(t) \end{cases}$$

---

<sup>24</sup>En R, Debt[t]





- La fila 1 de esta matriz corresponde con los precios del activo sin ordenar pero añadiéndoles a los mismos el ya mencionado infinitesimal de posición.
- La fila 2, corresponde al primer paso descrito.
- Las filas 3 y 4 nos permiten clasificar los patrones en *Bundles* y calcular sus holding valúes. El grupo al que pertenece cada patrón viene dado por la siguiente expresión:

$$B(k, t) = ENT \left[ \frac{(k - 0,0001)}{Q} \right]$$

- Las subsiguientes filas, corresponden al resto de pasos mencionados en la descripción<sup>25</sup>.
- Por último, la fila nueve es simplemente una extracción, del vector de precios ordenados (mat[2,]) con los infinitesimales añadidos inicialmente a cada patrón, que permite reconocer la posición de cada valor generado desde la fila 2 hasta a 9 respecto al orden original de los patrones.
- Con esta última fila, se reorganizan los valores de  $y(k, t)$  y  $Vkt(k, t)$  y se añaden a las matrices  $results(361x100)$  y  $vkt(361x100)$  antes de repetir el proceso para t-1.

### 6.1.3 Obtención de la prima

Una vez generados los patrones de precios y obtenida  $z(k, t)$ , mediante la expresión (23) y con los mismos datos utilizados para la generación de la figura 5, se calcula la prima del seguro como:

$$Prima = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} \sum_{t=1}^{360} e^{-rt} z(k, t) I(k, t) = 808,18 \text{ euros}$$

Para el cálculo de la prima en  $\mathbf{R}$ , a partir de los pasos anteriores, se ha generado la matriz  $Ival(361X100)$ , que recoge  $\forall t \in (0, t)$  y  $\forall k \in (1, Q)$  los valores intrínsecos. Con esta matriz, y mediante el vector  $z(k)(100)$ , que se recuerda indica para cada patrón su periodo de default (si lo hay), se busca el valor intrínseco en el momento de *default* y se actualiza  $t=z(k)$  periodos. Por último, se han agregado los valores y se ha dividido entre  $Q$ <sup>26</sup>.

<sup>25</sup>Para el paso 5, se obtiene el primer uno que aparece, y se confirma visualmente que en todos los casos corresponde con el “sharp boundary” anunciado.

<sup>26</sup>En el código, adicionalmente, se multiplica por 1.000 para no expresar el resultado en miles de euros.

## 7 Conclusiones

El principal objetivo del trabajo era describir e implementar técnicas de medición del riesgo de *default* asociado a contratos hipotecarios y, con este cálculo, obtener primas para los posibles seguros hipotecarios vinculados.

En este sentido, el modelo básico, bajo unos supuestos muy limitativos, ha permitido aproximar el problema planteado como la tarificación de una put europea. En la implementación práctica se ha puesto de manifiesto, mediante ejemplos numéricos, la evidencia de que a mayor diferencia positiva entre la tasa de crecimiento de la vivienda y el tipo de interés del préstamo, ante un incremento de plazo de la operación, menor es la probabilidad de *default* del préstamo y, por consiguiente, disminuye la prima justa asociada al contrato.

También se ha definido que, como mayor es el *gap* entre el interés del préstamo y el tipo de interés libre de riesgo, mayor es la prima a pagar. Por último, se ha descrito como la prima justa obtenida bajo el principio de la pérdida esperada, puede llegar a ser insuficiente en escenarios de alta volatilidad de la cuantía de la pérdida y se ha propuesto como solución, siguiendo la práctica habitual en la tarificación actuarial, añadir un recargo de seguridad sobre la varianza o la desviación estándar, estimando el momento de segundo orden mediante simulación por Montecarlo.

A continuación, se ha presentado un modelo factorial para la modelización del precio de la vivienda según la situación económica. Todo ello ha permitido diferenciar entre *default* provocado por factores inherentes al asegurado y por factores relacionados con el estado general de la economía. En la parte práctica de este apartado, se ha analizado el efecto de la diversificación sobre la probabilidad de *default* y la prima justa mediante superficies de impacto. Observando como a menor correlación entre elementos de la cartera, más inmunizada se encuentra esta ante shocks económicos desfavorables. Sin embargo, los dos modelos (básico y factorial) presentan una limitación muy importante: para poder medir el riesgo como una put europea, se asume que la deuda se estructura en forma de préstamo *Bullet*. Este supuesto, no se ajusta completamente al esquema de amortización habitual observado en los préstamos hipotecarios, por lo que es poco realista. Por ello, en el último apartado, se ha enfocado el problema de tarificación asumiendo que la deuda que se va amortizando periódicamente y mediante canon francés y se han propuesto las fórmulas exactas por las que, bajo los supuestos básicos del modelo de *Black-Scholes* se podría obtener la prima justa del seguro.

Por último, se ha puesto de manifiesto que, bajo el supuesto de pagos continuos mensuales y asumiendo que se cumple el modelo factorial, el problema de medición del riesgo existente en estos contratos es muy similar a la valoración de una put americana. Por ello, se ha propuesto e implementado el algoritmo de *Tilley* para la tarificación de este tipo de seguros y se ha obtenido

un prima en base a 100 patrones generados mediante la técnica de Montecarlo.

Para terminar es necesario recordar que desde el modelo básico, implícitamente y en base a la lógica del modelo de Merton, se ha asumido el *default* como la posibilidad de que el precio de la vivienda sea inferior a la deuda hipotecaria pendiente. Sin embargo y como se apuntaba en la introducción, aunque esta es una condición necesaria, no es suficiente ya que para declarar en *default* el contrato debería coincidir con el impago de la deuda. Puede ser, por tanto, que en un momento dado, el valor del activo sea menor a la deuda pendiente pero el prestatario no incurra en impago y por tanto el seguro no deba actuar. Así pues, como investigación futura, sería muy interesante tener en cuenta esta apreciación en los modelos desarrollados ya que muy probablemente provocaría una disminución del precio de la prima.

## 8 Apéndice

### 8.1 Demostraciones

**Demostración 1:**

$$\begin{aligned} Q &= P[P_T < \alpha P e^{iT}] = P \left[ P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) < \alpha P e^{iT} \right] = \{W_T \sim N(0, T)\} = \\ &P \left[ P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T \sqrt{T}\right) < \alpha P e^{iT} \right] = P \left[ W_T < \frac{\ln \alpha + \left(i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma \sqrt{T}} \right] \\ &= \Phi \left( \frac{\ln \alpha + \left(i - \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

**Demostración 2:**

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t$$

Definimos:  $Y(t) = \ln(P_t)$  y calculamos aplicando el lema de Itô:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx^2 = \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{x^2} \right) = \frac{1}{x} (\mu x dt + \sigma x dw) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dw$$

Dado que en el inicio  $dy=Y(t)-Y(0)$  y por consiguiente  $\Delta t = t$ . Esta expresión corresponde a la

de un movimiento browniano arimético. Deshacemos el cambio inicial:

$$\ln(P(t)) = \ln(P) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t); \quad \frac{\ln(P(t))}{\ln(P)} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t);$$
$$P_t = P \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t)\right)$$

## 8.2 Código Utilizado

Paquetes necesarios:

```
install.packages("plot3D")
library("plot3D")
```

Cuadros:

```
###Cuadro 1###

##Probabilidad de default##
alpha<-(0.8);alpha
i<-c(0.03);i
mu<-c(0.01,0.02,0.03,0.031,0.035,0.04)
sigma<-c(0.15);sigma
T<-c(9,10,15,20,25,30,31);T
Q<-dnorm((log(alpha)+(i-mu+(1/2)*sigma^2)*T)/sigma*sqrt (T));Q
Q1<-function (mu,T) {pnorm((log(alpha)+(i-mu+(1/2)*sigma^2)*T)
/sigma*sqrt (T))};Q1
Q1<-round(outer(mu,T,Q1),5);Q1
colnames(Q1)<-c("T=9","T=10","T=15","T=20","T=25","T=30","T=31")
rownames(Q1)<-c("mu=0.01","mu=0.02",
"mu=0.03","mu=0.031","mu=0.035","mu=0.04")
```

```
###Cuadro 2###

##Expected Default loss##
P<-100000
Pt<-300000
i<-0.03
mu<-0.031
```

```

r=c(0.02,0.025)
sigma<-(0.15)
T<-15
alpha<-0.8
dneg<-((mu-(1/2)*sigma^2)*T-log(alpha)-i*T)/sigma*sqrt(T); dneg
dpos<-dneg+sigma*sqrt(T) ; dpos
lt<-alpha*P*exp((i-r)*T)*dnorm(-dneg)-P*exp((mu-r)*T)*dnorm(-dpos)
lt

```

```

###Cuadro 3###

P<-1000
i<-0.03
mu<-0.031
r=c(0.025)
sigma<-(0.15)
alpha<-0.8
T<-15
dneg<-((mu-(1/2)*sigma^2)*T-log(alpha)-i*T)/sigma*sqrt(T); dneg
dpos<-dneg+sigma*sqrt(T) ; dpos
lt<-alpha*P*exp((i-r)*T)*dnorm(-dneg)-P*exp((mu-r)*T)*dnorm(-dpos)
lt
n<-10^8
zi<-rnorm(n)
Pt<-P*exp((mu-(1/2)*sigma^2)*T+sigma*zi*sqrt(T))
Lt<-pmax(alpha*P*exp(i*T)-Pt,0)
Lt2<-exp(-r*T)*(Lt)^2
ELt2<-mean(Lt2)
ELt2
vars<-ELt2-lt^2;vars
sds<-sqrt(vars);sds
CV<-sds/lt
CV
##MC ERROR##

SDMC<-1/sqrt(n)
SDMC

```

```

###Cuadro 4###
##Correspondiente al octavo paso del apartado Tilley's Bundling Algorithm##

```

```
for(j in 1:100){results[i,j]<-mat1[7,(which(mat1[9,]==j))]}
```

## Figuras:

```
####Figura 1####

##Data##
P<-100000
alpha<-0.8
r<-0.02
i<-0.03
mu<-0.0225
sigma<-0.02
Tmx<-30
n<-1
##Price##
wt<-rep(0,times=30);wt
for (T in 1:Tmx) {wt[T+1]<-rnorm(n)*sqrt(T)};wt
fpt<-rep(100000,times=30);fpt
for (T in 1:Tmx) {fpt[T+1]<-P*exp((mu-(1/2)*sigma^2)*T+sigma*wt[T])};fpt
##Debt##
Debt0<-alpha*P;Debt0
Debt<-rep(Debt0,times=30)
for(T in 1:Tmx) {Debt[T+1]<-alpha*P*exp(i*T)};Debt
fpt<-fpt/1000
Debt<-Debt/1000
plot(x=0: 30, y=fpt, type="l", lty=1, ylim=c(75,230),
a xes=F, bty="n", xa xs="i",
yaxs="i", main = "
Modelo_basico" ,xlab="", ylab="Miles_de_Euros", col="Green")
lines(x=0:30, y=Debt, lty=2, col="red")
# add axes#
axis(side=1, labels=0:30, at=0:30)
axis(side=2, at=c(60,80,100,120,140,160,180,200,220,240),las=1)
# add legend#
par(xpd=TRUE)
legend(x="top", legend=c("Precio_vivienda", "Deuda_devengada"),
col =c("green","red"), lty=1:2, box.lty=1, ncol=2)
```

```

###Figuras 2 y 3###

i<-0.03
mu<-0.03
sigma<-(0.2)
T<-10
alpha<-0.90
options(digits=10)
pnorm(0.1405589185)
log(alpha)
Qzp<-function (p,z) {pnorm((log(alpha)+(i-mu+((1/2)*sigma^2))*T
-sigma*p*z)/(sigma*sqrt((1-p^2)*T)));Qzp
Qzp(0.9,-3)
p<-seq(0, 1, by=0.01);p
z<-seq(-3, 3, by=0.06);z
length(z)
length(p)
qzp<-outer(p,z,Qzp);head(qzp);head(qzp)
persp3D(z =qzp, theta = 140,phi=25,expand=0.80,main=
"Probabilidad_de_Default,
Correlacion_y_escenario_macroeconomico_1",xlab="rho",ylab="z",zlab="q"
,ticktype ="simple",bty = "b2")
image2D(qzp,xlab="rho",ylab="z", main="Probabilidad_de_Default,
Correlacion_y_escenario_macroeconomico_2",
y = seq(-3,3,length.out = ncol(qzp)), rasterImage = TRUE,
contour = list(lwd = 2, col = jet.col(11)))

```

```

###Figura 4###

##Prima Justa##
alpha*P*exp((i-r)*T)*pnorm(-(((mu-0.5*sigma^2)*T+sigma*p*z)-log(alpha)-i*T)/
(sigma*sqrt((1-p^2)*T)))-P*exp((mu-0.5*sigma^2-r+
0.5*(1-p^2)*sigma^2)*T+sigma*p*z)*
pnorm(-(((mu-0.5*sigma^2)*T+sigma*p*z)
-log(alpha)-i*T)/(sigma*sqrt((1-p^2)*T))+sqrt(1-p^2)*sigma*sqrt(T))
P<-1000
i<-0.03
mu<-0.03
r=0.02

```

```

sigma<-0.2
alpha<-0.9
T<-10
prima<-function (rho,z){
g2<-((mu-0.5*sigma^2)*T+sigma*rho*z-log(alpha)-i*T)/(sigma*sqrt((1-rho^2)*T))
g1<-g2+sqrt(1-rho^2)*sigma*sqrt(T)
result<-alpha*P*exp((i-r)*T)*pnorm(-g2)-
P*exp((mu-0.5*sigma^2-r+0.5*(1-rho^2)*sigma^2)*T
+sigma*rho*z)*pnorm(-g1)
print(result)}
prima(0.5,1)
p<-seq(0, 1, by=0.01);p
z<-seq(-3, 3, by=0.06);z
primmtx<-outer(p,z,prima);head(primmtx)
tail(primmtx)
persp3D(z =primmtx, theta = 140,phi=25,expand=0.8, main= "Prima_Justa",xlab="rho",
ylab="z",zlab="E(L)",ticktype ="simple",bty = "b2")

```

```

###Figura 5###

##Data##
P<-100000
alpha<-0.8
r<-(1+0.02)^(1/12)-1
i<-(1+0.03)^(1/12)-1
mu<-(1+0.0225)^(1/12)-1
sigma<-0.15*(1/sqrt(360))
n<-1
##Price##
Tmx<-360
wt<-rep(0,times=360);wt
for (T in 1:Tmx) {wt[T+1]<-rnorm(n)*sqrt(T)};wt
fpt<-rep(100000,times=360);fpt
for (T in 1:Tmx) {fpt[T+1]<-P*exp((mu-(1/2)*sigma^2)*T+sigma*wt[T])};fpt
fpt
##Debt##
Tmx<-361
c<-alpha*P*i/(1-exp(-i*Tmx))
Debt<-rep(0,times=361)
beta<-0.95

```



```

for(T in 1:Tmx) {Debt[T]<-beta*(alpha*P*exp(i*T)-(c/i)*(exp(i*T)-1))};
Debt<-round(Debt,0)
Debt
fpt<-fpt/1000
Debt<-Debt/1000
Debt
length(fpt)
plot(x=0:360, y=fpt, type="l", lty=1, ylim=c(0,300),
axes=F, bty="n", xaxs="i", yaxs="i", main="Pagos_continuos",
xlab="meses", ylab="Miles_de_Euros", col="Green")
lines(x=0:360, y=Debt, lty=1, col="red")
segments(360,0,360,300,lty=1,col="blue")
# add axes#
axis(x=0:360,side=1,at=0:360)
axis(side=2, at=c(0,20,40,60,80,100,120,
140,160,180,200,220,240,260,280,300),las=1)
# add legend
par(xpd=TRUE)
legend(x="top", legend=c("Precio_vivienda", "Umbral_de_deuda_Pendiente(BL)",
"Umbral_derecho_(BR)"),col =c("green","red","blue"),
lty=c(1,2,1), box.lty=1, ncol=2)

```

```

###Figura 6###

paths<-100
count<-360
interval<-1/360
mu<-0.01
sigma<-0.30
p<-0.8
p0<-100
sample<-matrix(0,nrow=(count+1),ncol=paths)
for(i in 1:paths)
{
  sample[1,i]<-p0
  for(j in 2:(count+1))
  {
    sample[j,i]<-sample[j-1,i]*exp(interval*(mu-((sigma)^2)/2)+(sigma*p*rnorm(1)*((
      interval)^.5))
+ (sigma*sqrt(1-p^2)*((interval)^.5)*rnorm(1)))

```

```

}
}

##Deuda###

alpha<-0.95
P<-p0
r<-(1+0.02)^(1/12)-1
i<-(1+0.03)^(1/12)-1

Tmx<-(count+1)
c<-alpha*P*i/(1-exp(-i*Tmx));c
Debt<-rep(0,times=Tmx)
beta<-1
for(T in 1:Tmx) {Debt [T]<-beta*(alpha*P*exp(i*T)-(c/i)*(exp(i*T)-1))};
Debt<-as.vector(Debt)
sample2<-cbind(Debt,sample)
sample3<-matrix(0,220,101)
for(i in 1:220){
  for(j in 1:101){
    sample3[i,j]<-sample2[i,j]
  }
}
Debt
matplot(sample3,main="Patrones de precio y deuda pendiente",xlab="Tiempo (meses)",
        ylab="Euros (miles)",type="l",lwd =c(3,rep(1,times=100)))

```

### Tilley's Bundling Algorithm:

```

###Se utilizan elementos de la figura 6###
##Matrices generales##

options(digits=8)
options(scipen=999)
results<-matrix(0,361,100)
Vkt<-matrix(0,361,100)
Vkt[361,]<-pmax((round(Debt [361], 2))-(sample[361,]),0)

```

```

###Digitos de posicion de los patrones###

```

```
mat1<-matrix(0,9,100)
for(i in 360:1){
  for(j in 1:100){mat1[1,j]<-round((round(sample[i,j],2)+0.000001*j),7)}
```

```
###PASO 1 ordeno de forma decreciente###
```

```
mat1[2,]<-sort(mat1[1,], decreasing = TRUE)
```

```
###Paso2 Valor intrinseco###
```

```
mat1[3,]<-(pmax((Debt[i]-mat1[2,]),0))
```

```
###Paso 3.1 Bundles###
```

```
for(j in 1:100){mat1[4,j]<-(1+trunc(((j/10)-0.0001),0))}
```

```
###Paso 3.2 Holding value de cada bundle (individual)###
```

```
Q<-10
P<-paths/Q
for(j in 1:100){mat1[5,j]<-exp(-r*interval)*sum(Vkt[(i+1),
(which(mat1[4,]==(1+trunc(((j/10)-0.0001),0))))])/Q}
```

```
###Paso 4###
```

```
for(j in 1:100){mat1[6,j]<-if(mat1[3,j]>mat1[5,j]){1}else{0}}
mat1[6,]<-as.integer(mat1[6,])
```

```
###Paso 5 momento en el que tenemos el primer 1###
```

```
a<-min(which(mat1[6,]>=1))
```

```
###Paso 6 Vector que indica el momento en el que tenemos el primer 1###
```

```
if(a==Inf){for(j in 1:100){mat1[7,j]<-0}}else{
  for(j in 1:(a-1)){mat1[7,j]<-0}
  for(j in a:100){mat1[7,j]<-1}
}
```

```
###Paso 7 VKt###
```

```
for(j in 1:100){mat1[8,j]<-if(mat1[7,j]==1){mat1[3,j]}else{mat1[5,j]}}
```

```
###Paso 8 reorganizamos las filas 7 y 8 segun orden original y las almacenamos en las matrices de resultados###
```

```
mat1[9,<-((mat1[2,]-trunc(mat1[2,],3))*100)%%1
```

```
mat1[9,<-round((mat1[9,]*10000),0)
```

```
for(j in 1:100){results[i,j]<-mat1[7,(which(mat1[9,]==j))]}
```

```
for(j in 1:100){Vkt[i,j]<-mat1[8,(which(mat1[9,]==j))]}
```

```
}
```

```
###Calculo de la prima###
```

```
##zt##
```

```
Zt<-rep(0,times=100)
```

```
for(j in 1:100){Zt[j]<-min(which(results[,j]>=1))}
```

```
Zt
```

```
##Intrinsec value##
```

```
debt<-as.matrix(Debt)
```

```
tdebt<-t(debt)
```

```
length(debt)
```

```
ival<-matrix(0,361,100)
```

```
for (i in 1:361){
```

```
  for ( j in 1:100){
```

```
    ival[i,j]<-pmax((Debt[i]-sample[i,j]),0)
```

```
  }}
```

```
##Prima##:
```

```
prima<-rep(0,times="100")
```

```
for ( j in 1:100){
```

```
  prima[j]<-exp(-r*Zt[j])*ival[Zt[j],j]
```

```
}}
```

```
prima[is.na(prima)] <- 0  
prima<-(sum(prima)/100)*1000;prima
```

## 9 Bibliografía

- Bardhan, A., Karapandža, R., Urošević, B., 2006. Valuing mortgage insurance contracts in emerging market economies. *The Journal of Real Estate Finance and Economics* 32, 9–20.
- Cortis, D., 2019. Evaluating credit counterparty risk of american options via monte carlo methods: A comparison of tilley bundling and longstaff-schwartz lsm. *Front. Appl. Math. Stat.* 5: 60. doi: 10.3389/fams .
- Coskan, C., 2008. Pricing american options by simulation.
- Culp, C.L., 2002. The ART of risk management: alternative risk transfer, capital structure, and the convergence of insurance and capital markets. volume 142. John Wiley & Sons.
- Glasserman, P., 2013. Monte Carlo methods in financial engineering. volume 53. Springer Science & Business Media.
- Herzog, T., 2009. History of mortgage finance with an emphasis on mortgage insurance (society of actuaries).
- Kau, J.B., Keenan, D.C., Smurov, A.A., 2004. Reduced-form mortgage valuation .
- Kulp, C.A., 1950. The rate-making process in property and casualty insurance. goals, technics, and limits. *Law and Contemporary Problems* 15, 493–522.
- Merton, R.C., 1974. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of finance* 29, 449–470.
- Pu, M., Fan, G.Z., Ban, C., 2016. The pricing of mortgage insurance premiums under systematic and idiosyncratic shocks. *Journal of Risk and Insurance* 83, 447–474.
- Soetaert, K., 2013. plot3D: Plotting multi-dimensional data.
- Tilley, J.A., 1993. Valuing american options in a path simulation model, in: *Transactions of the Society of Actuaries*, Citeseer.
- Zhao, J., 2018. American option valuation methods. *International Journal of Economics and Finance* 10.