

Tècniques de reconstrucció d'imatges en SPECT

D. Ros*, I. Juvells†, J. Pavía‡ i C. Falcón§

Introducció

L'espectacular avenç en la tecnologia mèdica que s'ha produït en els darrers anys, i l'augment de potència de càlcul dels ordinadors, han generalitzat la utilització de tècniques cada vegada més sofisticades en l'àmbit del diagnòstic per la imatge. En l'actualitat disposem de tècniques d'obtenció d'imatges biomèdiques que, en aportar informació complementària morfològica i funcional, estan augmentant la capacitat de diagnòstic mitjançant tècniques no invasives. Com a exemple cal destacar la tomografia per ordinador de raigs X (TO) —impròpiament coneguda com a TC o tomografia computeritzada—, l'ecografia, la ressonància magnètica nuclear (RMN) i la tomografia d'emissió de fotons, en les dues vessants, emissió de fotó únic (SPECT, *single photon emission computed tomography*) o emissió de dos fotons d'anihilació (PET, *positron emission tomography*). Així, les radiografies convencionals d'atenuació de raigs X, o les gammagrafies planars obtingudes per emissió de radiació γ d'un traçador, s'han vist complementades amb imatges transversals del cos humà, obtingudes a partir de projeccions bidimensionals.

La tomografia de SPECT és una de les tècniques rellevants en l'àmbit del diagnòstic per la imatge en medicina nuclear. Aquesta tècnica permet obtenir la distribució tridimensional d'un traçador radioactiu a l'organisme a partir de les projeccions bidimensionals obtingudes en diferents angles.

Encara que la finalitat de la reconstrucció tomogràfica és la d'obtenir la distribució tridimensional del traçador a partir del coneixement de les projeccions bidimensionals, la manera pràctica de resoldre el problema no és, en general, efectuar una inversió tridimensional, sinó que el càlcul s'efectua per seccions, resolent una sèrie de problemes bidimensionals independents. L'algorisme més comú en la rutina mèdica és el basat en el mètode de retroprojecció filtrada (Kak, 1984), però altres mètodes iteratius, deterministes (ART, *algebraic reconstruction technique*) (Oshoui-Fard, 1988) o basats

en el coneixement de la distribució estadística de les dades (MLE, *maximum likelihood estimation*) (Shepp, 1982) han estat desenvolupats al llarg dels darrers anys.

En aquest treball es fa un estudi dels diferents mètodes de reconstrucció i, des d'una perspectiva general, es donen els fonaments dels algorismes. Cal remarcar que, atès que en moltes de les tècniques d'obtenció d'imatges el problema de la reconstrucció és formalment idèntic, si més no en condicions ideals sense efectes degradants, els algorismes de reconstrucció d'imatges tomogràfiques són aplicables en diferents camps.

En l'estudi dels algorismes de reconstrucció en SPECT s'utilitzen objectes simulats (*fantomes numèrics*) que permeten reproduir el procés de formació de les projeccions de forma controlada. A partir de les projeccions es realitza la reconstrucció pels diferents mètodes i es comparen els resultats obtinguts. Finalment es presenten els resultats d'aplicar un dels mètodes, ART, a un estudi real del cervell.

Plantejament del problema de la reconstrucció tomogràfica

El problema general que es vol resoldre és el de generar una imatge tridimensional a partir de diferents projeccions bidimensionals obtingudes experimentalment a partir d'aquella imatge. Aquest problema és, en general, de difícil solució i molt costós de realitzar, tant pel que fa al temps de càlcul com per la memòria que necessita l'ordinador. Com ja s'ha dit, una simplificació que es fa de manera quasi sistemàtica és resoldre el problema per cada secció. Això implica que no hi ha interacció entre les diferents seccions, la qual cosa no és estrictament certa, ja que la difusió Compton i la geometria del detector fan que a un punt de la projecció arribin fotons de diferents plans de l'objecte. Encara que amb aquesta simplificació no és possible obtenir la reconstrucció ideal, la pèrdua de resolució derivada es considera acceptable. En aquest treball considerarem la reconstrucció bidimensional a partir de projeccions unidimensionals. El procés es pot ampliar de forma senzilla a la reconstrucció tridimensional, ja que el problema és formalment idèntic i l'única dificultat és de tipus pràctic.

La figura 1 mostra un esquema que descriu el procés de formació d'una projecció. Sigui $f(x, y)$ la distribució bidimensional de la secció considerada. La projecció en una direcció que forma un angle θ amb l'eix de les x es

*D. Ros és del Laboratori de Biofísica i Bioenginyeria. Facultat de Medicina. Universitat de Barcelona.

†I. Juvells és del Laboratori d'Òptica. Departament de Física Aplicada i Electrònica. Universitat de Barcelona

‡J. Pavía és del Servei de Medicina Nuclear. Hospital Clínic i Provincial de Barcelona.

§C. Falcón és del Laboratori de Biofísica i Bioenginyeria. Facultat de Medicina. Universitat de Barcelona.

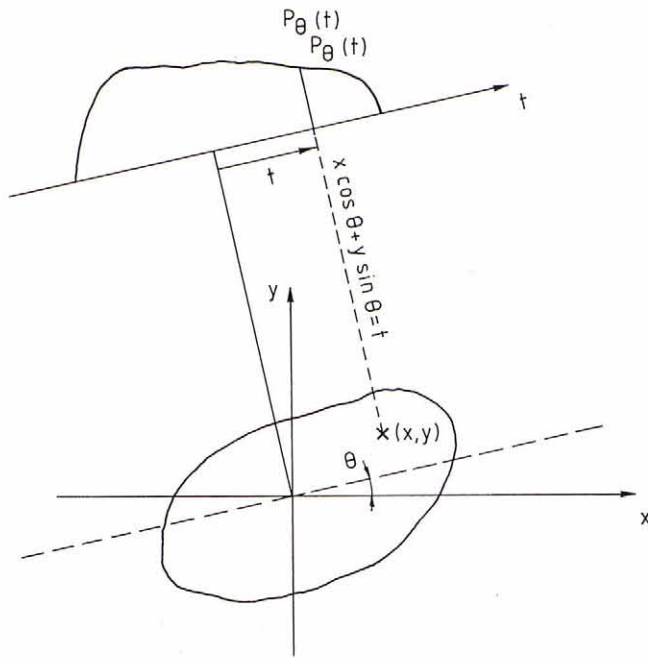


Figura 1: Esquema del procés de projecció analítica d'una secció tomogràfica

pot expressar de la forma

$$p_{\theta}(t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy.$$

Variant l'angle θ obtindrem la projecció per a cada orientació. El problema de la reconstrucció és el d'obtenir cada secció $f(x, y)$ a partir de les corresponents projeccions $p_{\theta}(t)$. El conjunt de totes les seccions constituirà la imatge tridimensional.

Reconstrucció en condicions ideals

Retroprojecció filtrada

El mètode de retroprojecció filtrada, deduït de manera formal a l'apèndix A, per reconstruir $f(x, y)$ a partir de les seves projeccions es pot descriure a partir dels següents passos:

- Es filtra cadascuna de les projeccions $p_{\theta}(t)$ amb un filtre $h(t)$, que és la transformada inversa del filtre de rampa $H(\omega) = |\omega|$, a l'espai de Fourier. Això es pot fer convolucionant a l'espai real cada projecció amb $h(t)$, o passant a l'espai de Fourier i multiplicant pel filtre $H(\omega)$. L'efecte d'aquest filtre és recuperar les components d'alta freqüència que s'han perdut en el procés de projecció.

- Se sumen punt a punt les projeccions, ja filtrades, tenint-ne en compte la direcció. Això requerirà un procés d'interpolació.

El mètode de retroprojecció filtrada, tal com l'hem descrit, proporciona una reconstrucció exacta quan les

projeccions són les teòriques (Kak, 1984).

A la pràctica, però, i com a conseqüència del mateix disseny de la tècnica, l'obtenció d'imatges en SPECT inclou una sèrie de fenòmens que l'allunyen de ser un cas ideal. Entre d'altres, que seran estudiats en els apartats següents, un d'especialment important és el soroll que afecta les projeccions, a causa, sobretot del caràcter aleatori del fenomen radioactiu que les origina. El fet que aquest soroll estadístic contingui components d'alta freqüència té conseqüències importants en la reconstrucció. En efecte, la utilització del filtre $H(\omega) = |\omega|$, associat al mètode de retroprojecció filtrada, potencia molt les components d'alta freqüència i, per tant, amplifica el soroll. Aquest fet es compensa filtrant l'alta freqüència de les projeccions abans de retroprojectar, i l'elecció del filtre és de gran importància en el resultat final.

Es pot demostrar que el mètode de retroprojecció filtrada fa la hipòtesi implícita que la distribució de soroll és gaussiana i, per aquesta distribució, minimitza el soroll de la reconstrucció. En realitat, la detecció dels fotons que contribueixen al valor de cada pixel de la projecció segueix una estadística de Poisson, amb valor mitjà i variància n , on n és el nombre de fotons acumulats a cada pixel. Aquest fenomen a més d'altres que seran discutits posteriorment, fa que la retroprojecció filtrada no sigui el mètode òptim de reconstrucció tomogràfica en SPECT i que tingui sentit plantejar-se la utilització d'altres algorismes. Cal dir, però, que la rapidesa informàtica de la retroprojecció fa que, avui en dia, encara sigui el mètode més emprat en la rutina clínica.

Mètodes iteratius de reconstrucció

Mètodes deterministes: reconstrucció algebraica (ART)

En el procés de formació de les projeccions en un sistema de SPECT ideal es pot fer un plantejament geomètric a partir d'un esquema tal com el descrit a la figura 2. En la figura, x_j representa el valor del pixel j de la imatge bidimensional i p_i , el valor en un punt i del conjunt de totes les projeccions. El procés de projecció es pot descriure pel sistema

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j = p_i \quad i = 1, \dots, M,$$

on N és el nombre de pixels de la imatge i M el nombre total de punts en les projeccions (igual al nombre de punts de cada projecció multiplicada pel nombre de projeccions). El coeficient w_{ij} representa la contribució del pixel j de la imatge al punt i de la projecció. Tenint en compte només consideracions de tipus geomètric, el valor de w_{ij} es pot considerar igual a la fracció d'àrea interceptada pel pixel j en la direcció del punt i de la projecció, tal com ho indica la figura 2.

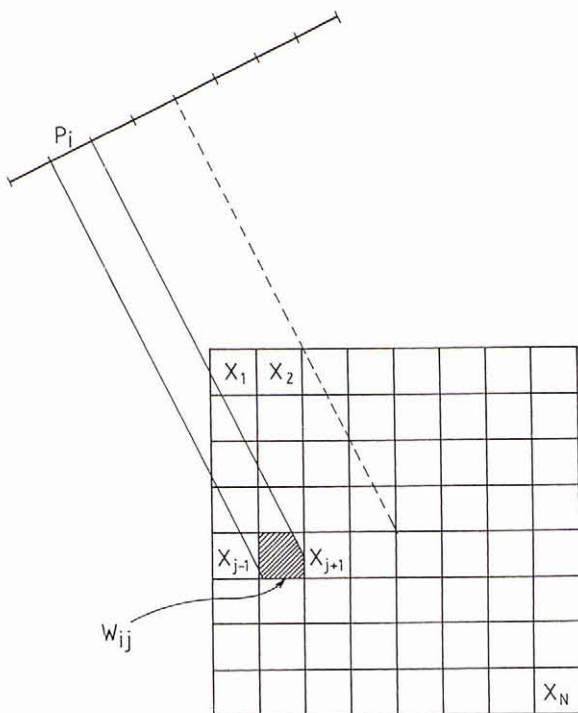


Figura 2: Esquema que descriu el plantejament algebraic de la projecció d'una secció tomogràfica

D'acord amb l'equació de projecció anterior, el procés de reconstrucció tomogràfica consisteix a invertir el sistema lineal per determinar x_j a partir del coneixement de les projeccions p_i i dels pesos w_{ij} .

La inversió del sistema d'equacions anterior presenta dificultats pràctiques en la realització. Cal tenir present que el nombre d'equacions és molt gran (en un cas real d'aplicació, amb seccions de 64×64 pixels i 60 projeccions de 64 punts, $N = 4.096$ i $M = 3.840$). Això fa que per invertir el sistema d'equacions anterior s'utilitzin mètodes iteratius.

Un dels mètodes més coneguts és el de les projeccions, proposat per primera vegada per Kaczmarz (Kak, 1984). Cada solució es pot considerar com un punt de coordenades (x_1, \dots, x_N) en un espai de N dimensions. En aquest espai cada una de les M equacions del sistema que s'ha de resoldre representa un hiperpla. Si el sistema té solució, els hiperplans corresponents a totes les equacions del sistema es tallen en un únic punt, que és la solució. El mètode consisteix a partir d'una solució inicial arbitrària i projectar-la successivament sobre cadascun dels hiperplans, iterant el procés fins a arribar a la solució desitjada. La figura 3 descriu aquest procés en un cas senzill amb dues variables. És fàcil deduir la fórmula d'iteració (Kak, 1984):

$$x_j^k = x_j^{k-1} + \alpha \left[\frac{(p_k - \sum_i x_i^{k-1} w_{ki})}{\sum_i w_{ki}^2} \right] w_{kj},$$

on $x^k = (x_1^k, \dots, x_N^k)$ representa la solució obtinguda a la iteració k , i $w_k = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kN})$ són els coeficients corresponents a l'hiperespai k . El paràmetre α controla la rapidesa en la convergència del mètode. En aquest treball hem utilitzat un valor de 0,1 que permet aconseguir imatges amb bona relació senyal/soroll amb poques iteracions. Com en tots el processos iteratius, una de les dificultats d'aquest procediment de reconstrucció és determinar el nombre òptim d'iteracions necessari per obtenir una imatge amb les característiques més adients. En els exemples que es presenten en aquest treball s'ha utilitzat el nombre d'iteracions deduït en un estudi realitzat prèviament (Ros, 1994; Llovet, 1993).

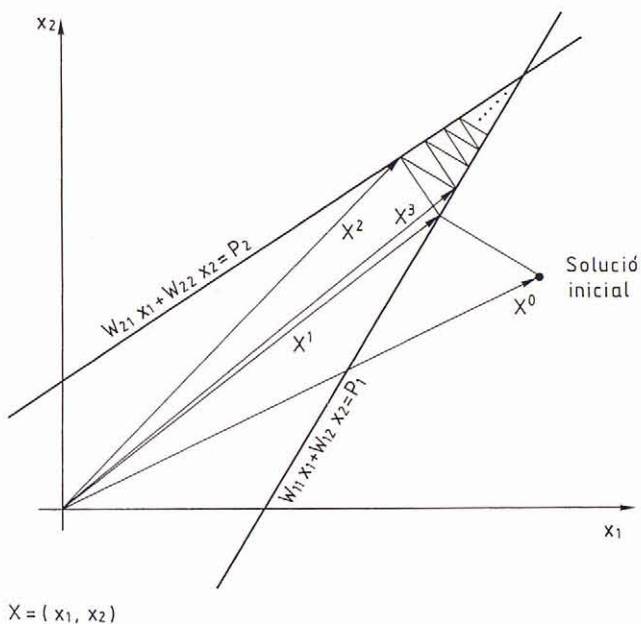


Figura 3: Mètode iteratiu d'inversió del sistema d'equacions de projecció

Mètodes estadístics: estimació de màxima versemblança (MLE)

L'estimació de màxima versemblança es basa en la naturalesa estadística del soroll de les projeccions, que segueix una distribució de Poisson.

El sistema d'equacions

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j = p_i \quad i = 1, \dots, M$$

que descriu el procés de projecció s'interpreta de manera diferent a l'algebraica de l'apartat anterior. En aquest cas els coeficients w_{ij} representen la probabilitat que un fotó detectat en el punt i d'una projecció sigui degut a una emissió produïda en el pixel j de la imatge, i p_i és el valor esperat de la variable que descriu les projeccions. Suposant una distribució de Poisson per a aquesta

variable, es pot escriure l'expressió de la funció de distribució per a cada variable aleatòria de la projecció i , a partir d'aquí, una funció de versemblança, $L(x)$, com a producte de totes les funcions de distribució. Aquesta funció de versemblança descriu la probabilitat d'obtenir unes determinades projeccions a partir d'una imatge. El mètode consisteix a buscar la solució que fa màxima aquesta funció de versemblança, és a dir, aquella solució que té la màxima probabilitat de donar les projeccions experimentals.

La funció $L(x)$ és una funció no lineal amb x i, per tant, no existeix una solució analítica general que la faci màxima. Per això cal usar tècniques iteratives d'optimització numèrica. En aquest cas, s'utilitza l'algorisme EM (*expectation-maximization*). En cada iteració, el valor del pixel i s'actualitza d'acord amb l'expressió:

$$x_j^k = \left(\frac{x_j^{k-1}}{\sum_i w_{ij}} \right) \sum_i \left(\frac{w_{ij} p_i}{\sum_l w_{il} x_l^{k-1}} \right).$$

Reconstrucció en condicions reals

Degradacions associades a l'obtenció de les projeccions

Com ja s'ha apuntat anteriorment, en els casos reals les projeccions obtingudes en SPECT estan degradades per diferents causes:

Difusió Compton. Una de les causes d'error en la reconstrucció d'imatges de SPECT és la detecció de fotons que han sofert difusió per efecte Compton en el pacient i, com a conseqüència, els han canviat la direcció i l'energia. Així, en ser detectats donen informació falsa sobre el punt d'emissió. L'efecte de la difusió Compton sobre les imatges reconstruïdes és, en general, una pèrdua de contrast i resolució.

Atenuació. Una altra conseqüència de la interacció radiació-matèria és l'atenuació dels fotons en travessar els diferents medis fins a arribar al detector. L'atenuació, que produeix una disminució del nombre de fotons que arriben al detector, segueix una llei exponencial, amb una constant que correspon al coeficient d'atenuació, μ , dels fotons en el medi. Això implica també una causa de degradació ja que punts amb la mateixa activitat en l'objecte original tindran diferent contribució sobre les projeccions, depenent de la distància al detector. Si no es corregeix l'efecte de l'atenuació, les imatges reconstruïdes presenten un distribució característica, amb valors més elevats en la perifèria per la major contribució dels fotons emesos en aquesta regió.

Resposta del detector. Les gammacàmeres utilitzades en SPECT presenten una baixa resolució, per diferents factors: l'estructura geomètrica dels forats del collimador, la penetració i la difusió dels fotons en el collimador, i la resolució intrínseca dels detectors em-

prats. Com a conseqüència, si tinguéssim un punt emissor, la imatge reconstruïda a partir de les seves projeccions no seria un punt sinó una taca d'intensitat no uniforme anomenada funció de dispersió puntual (PSF, *point spread function*). Així, les característiques del sistema detector de la mateixa gammacàmera fan disminuir la resolució de les imatges. La PSF és una funció de les coordenades del punt emissor i es pot aproximar a una gaussiana amb una desviació estàndard que depèn de la distància des del punt emissor al detector.

Soroll. L'emissió de fotons γ en una desexcitació nuclear és un procés aleatori. Així, les projeccions enregistrades presenten fluctuacions estadístiques que segueixen una distribució de Poisson. La presència de soroll en les imatges resulta, així, una característica intrínseca de les imatges de medicina nuclear.

A la figura 4 es presenta gràficament l'efecte que tenen la difusió, l'atenuació i la PSF del detector sobre les projeccions. La presentació dels fenòmens implicats en l'obtenció de les projeccions, encara que esquemàtica, és suficient per veure que la realitat està molt allunyada de la situació ideal. Com a conseqüència, si no es té cap precaució, les imatges reconstruïdes poden estar fortament degradades i la seva utilitat pot quedar limitada a l'observació visual. Si l'objectiu final és la quantificació d'un estudi a partir de les imatges reconstruïdes, es fa necessari corregir l'efecte d'aquests factors degradants.

Correcció de les degradacions en el mètode de retroprojecció filtrada

Per corregir la difusió Compton s'ha utilitzat el mètode de convolució amb una funció de difusió (Axelsson, 1984; Llovet, 1992). Aquest mètode modelitza l'efecte de la difusió mitjançant la convolució dels fotons primaris amb una funció exponencial de la forma $f(x) = A \exp(-Bx)$, on els paràmetres A i B , determinats experimentalment, tenen el valor: $A = 0,0031$ i $B = 0,15 \text{ cm}^{-1}$. El procés de correcció consisteix a realitzar una desconvolució sobre les projeccions (Llovet, 1992).

El filtre de rampa, que proporcionaria la solució exacta sense soroll, amplifica les components d'alta freqüència del soroll i per tant les imatges reconstruïdes resulten molt sorolloses, i són, en alguns casos, inacceptables. Per millorar la relació senyal/soroll de les reconstruccions cal utilitzar un filtre que esmorteixi les altes freqüències (Oppenheim, 1988). Encara que, en general, la PSF depèn del collimador i de la posició de l'emissor, a la pràctica es fan aproximacions per tal de simplificar el problema. Una de les més usuals és la de suposar que la PSF és invariant, es a dir, independent de la posició del punt emissor. Suposant la invariància espacial de la PSF, la degradació introduïda pot ser corregida mitjançant les tècniques de restauració d'imatges basades en la utilització del filtre invers a l'espai de Fourier (González, 1982). La correcció es pot realitzar tant sobre la imatge final reconstruïda com so-

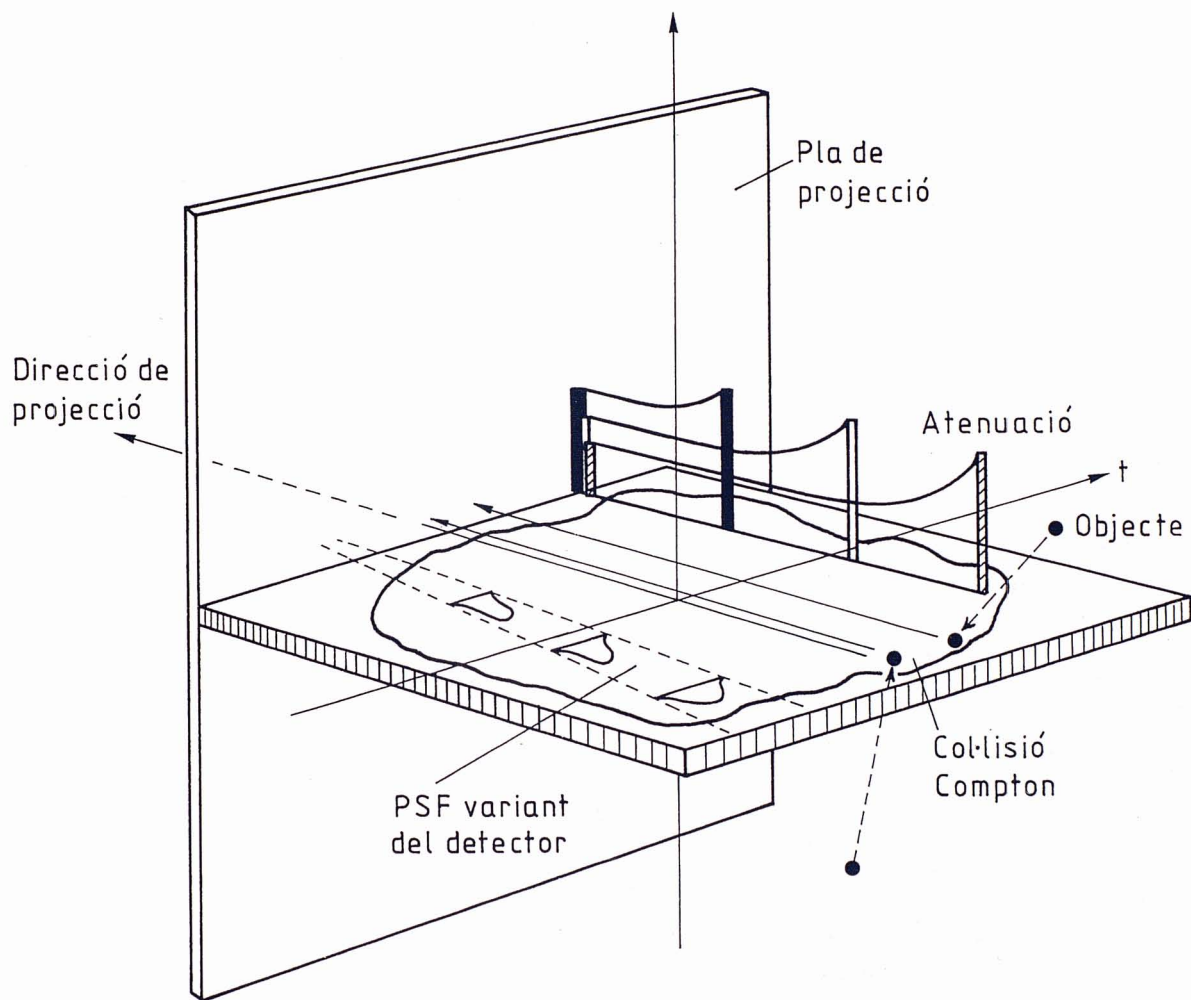


Figura 4: Esquema descriptiu de les degradacions que poden afectar les projeccions en un estudi de SPECT

bre les projeccions abans de la reconstrucció. En aquest treball s'ha utilitzat el filtre de Metz (Todd-Pokropek, 1982) que permet la millora de la relació senyal/soroll i la correcció simultània de la PSF sobre les projeccions. Aquest filtre s'aplica en l'espai de Fourier, de manera que la transformada de cada projecció es multiplica per la funció

$$F(\omega) = \omega \cdot [1 - (1 - H^2(\omega))^q] \cdot [1/H(\omega)],$$

on ω és la freqüència i $H(\omega)$ és la funció de transferència del sistema (transformada de Fourier de la PSF sobre les projeccions). Així, el terme ω és la funció rampa, $1 - (1 - H^2(\omega))^q$ és el factor de suavitat i $1/H(\omega)$ el filtre invers de restauració. El paràmetre q controla el grau de suavitat de la imatge final.

Per corregir l'efecte de l'atenuació hem utilitzat el mètode de Chang (Chang, 1978), que s'aplica a cada secció reconstruïda considerant el coeficient d'atenuació constant ($\mu = 0,15\text{cm}^{-1}$).

Veiem, doncs, que en la retroprojecció filtrada, la correcció de les degradacions es realitza sobre les projeccions (difusió), en el procés de reconstrucció (soroll i PSF) o sobre la imatge reconstruïda (atenuació).

Correcció de les degradacions en els mètodes iteratius

L'avantatge que presenten els mètodes iteratius sobre la retroprojecció filtrada és que permeten incorporar la correcció de les degradacions en el mateix procés de reconstrucció. Una vegada escollit un model de projecció podem anar incorporant en la matriu de pesos w_{ij} l'efecte dels diferents fenòmens. El grau de precisió en la modelització de les projeccions dependrà de cada problema concret i de la capacitat de l'ordinador. En aquest treball hem inclòs en la matriu de pesos l'atenuació i la PSF del detector com a funció de la distància. Per a l'atenuació, la contribució de cada pixel a una projecció ha estat pesada pel factor $\exp(-\sum \mu_i d_i)$, on μ_i és el coeficient d'atenuació de cada pixel travessat pel fotó en el seu camí cap al detector, d_i , la distància mesurada sobre cada pixel i la suma s'estén sobre tots els pixels que travessa el fotó fins al detector. Pel que fa a la PSF, mesures experimentals ens han permès determinar la σ de la gaussiana que representa la PSF del sistema per les distàncies d'interès ($\sigma = 0,0275d + 0,2$, σ i d en cm). La difusió s'ha modelitzat per una funció única que no depèn del punt, igual que en el cas de la retroprojecció filtrada. Amb aquesta simplificació, l'efecte de la difusió es pot corregir sobre les projeccions de manera senzilla.

Imatges reconstruïdes

A la figura 5 es presenta la reconstrucció d'una imatge corresponent a un objecte amb coeficient d'atenuació constant de valor $0,15\text{cm}^{-1}$. Com podem veure a la figura 5a, la secció és circular (de 20 cm de diàmetre)

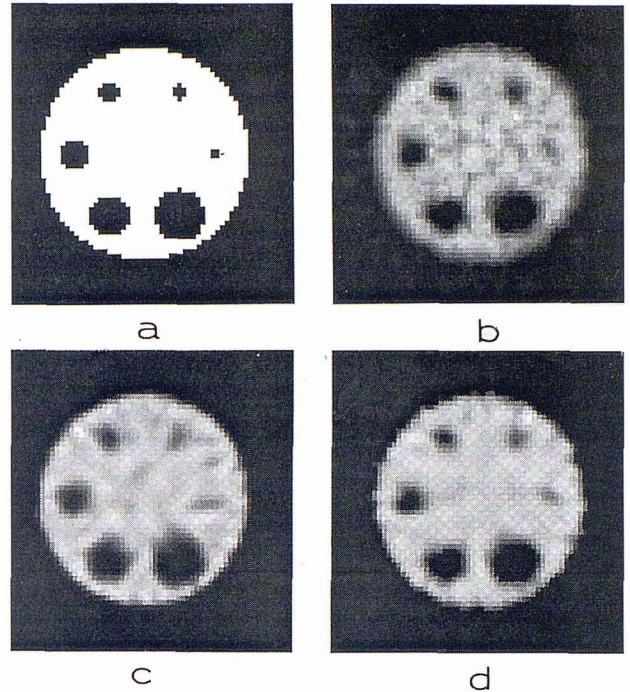


Figura 5: Exemple de reconstrucció amb atenuació uniforme: (a) Objecte, (b) Reconstrucció amb RF corregint totes les degradacions, (c) Reconstrucció amb ART corregint totes les degradacions, (d) Reconstrucció amb MLE corregint totes les degradacions

amb el traçador repartit uniformement excepte dins els sis cercles interns (de diàmetres 5, 4, 3, 2, 1,5 i 1 cm) en els quals no hi ha traçador. Les figures 5b, 5c i 5d mostren les reconstruccions del model amb els diferents mètodes i corregint totes les degradacions. Així, la figura 5b correspon a la reconstrucció utilitzant la retroprojecció filtrada amb un filtre de Metz en el qual $q = 3$ i PSF gaussiana amb $\sigma = 0,67\text{cm}$, que correspon a una distància mitjana del detector a l'objecte de 17 cm. La figura 5c correspon a la reconstrucció amb l'ART i després de 10 iteracions. A la figura 5d es presenta el resultat amb MLE i 64 iteracions. Podem veure que, en aquest cas d'atenuació uniforme, les tres tècniques proporcionen reconstruccions similars, amb petites diferències en la uniformitat del fons que estan associades al grau de suavització.

A la figura 6 podem veure el model, (a), i les imatges reconstruïdes amb els diferents mètodes (b), (c) i (d), per a un objecte en què les diferents regions presenten un coeficient d'atenuació diferent. Així, l'el·lipse major té un coeficient d'atenuació de $0,15\text{cm}^{-1}$, les dues el·lipses col·locades simètricament, que simulen el pulmó, tenen un coeficient de $0,016\text{cm}^{-1}$ i els cercles petits tenen un coeficient d'atenuació de $0,18\text{cm}^{-1}$. Les imatges reconstruïdes estan corregides de totes les degradacions i varen ser obtingudes utilitzant els mateixos valors dels paràmetres de reconstrucció que a la figura 5.

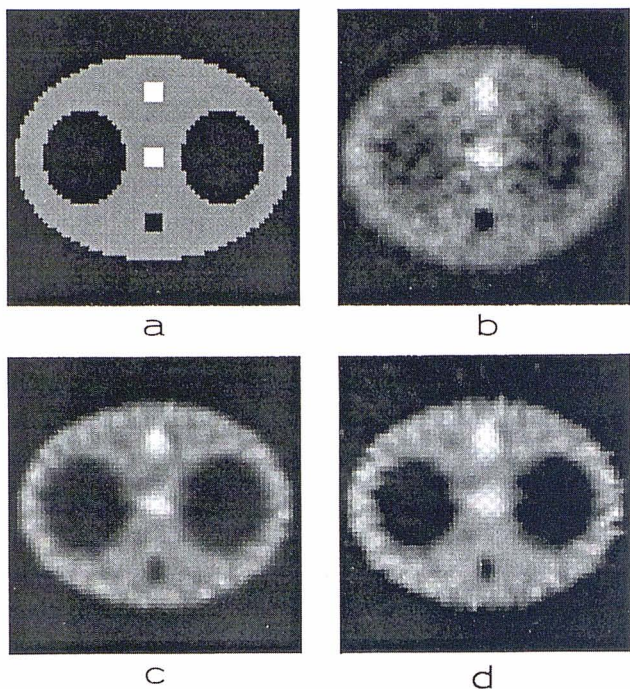


Figura 6: Exemple de reconstrucció amb atenuació no uniforme: (a) Objecte, (b) Reconstrucció amb RF corregint totes les degradacions, (c) Reconstrucció amb ART corregint totes les degradacions, (d) Reconstrucció amb MLE corregint totes les degradacions

Es pot apreciar una notable diferència entre les reconstruccions obtingudes amb la retroprojecció filtrada i els dos mètodes iteratius. A diferència del cas d'atenuació uniforme de la figura 5, en la reconstrucció amb un mapa d'atenuació no uniforme, els mètodes iteratius aconseguen reconstruccions de qualitat sensiblement millor. Veiem també, que ART conserva millor la grandària de les el·lipses interiors que MLE.

Finalment, a la figura 7 presentem la reconstrucció d'una secció d'un estudi de SPECT cerebral utilitzant l'ART com a mètode de reconstrucció. Per poder comparar la influència de la correcció de les diferents degradacions, a la figura 7a es pot veure la reconstrucció sense cap correcció i, a la figura 7b, després de corregir totes les degradacions, amb l'utilització d'un mapa d'atenuació uniforme amb $\mu = 0,15 \text{ cm}^{-1}$ i 20 iteracions. En aquest exemple es fa palesa la importància de la correcció en la qualitat de la imatge.

Apèndix A

A1. Teorema de la secció central

Sigui $f(x, y)$ la funció bidimensional que representa una imatge plana. Suposem que tenim una projecció d'aquesta imatge en una determinada direcció. Triant els eixos de referència de manera que l'eix x quedi en la

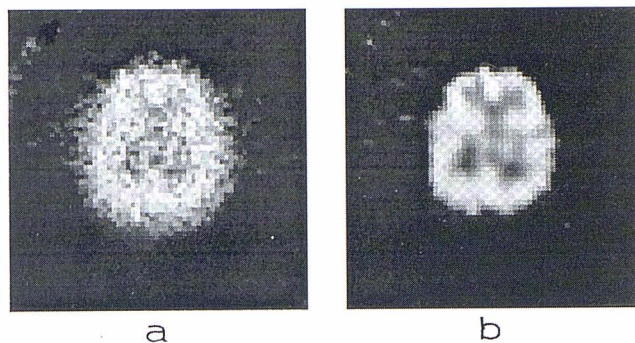


Figura 7: Reconstrucció d'un estudi real del cervell: (a) Reconstrucció amb ART sense corregir cap degradació, (b) Reconstrucció amb ART corregint totes les degradacions

direcció de projecció, podem escriure:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

La transformada de Fourier de la imatge $f(x, y)$ es pot expressar com:

$$F(u, v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xu + yv)] dx dy,$$

on (x, y) són les coordenades en el pla de la imatge i (u, v) les corresponents freqüències espacials en el pla de Fourier.

Agafant $u = 0$ podem escriure:

$$F(0, v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi yv] dx dy,$$

és a dir

$$F(0, v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \exp[-i2\pi yv] dy,$$

Aquesta expressió descriu l'anomenat teorema de la secció central: la transformada de Fourier unidimensional d'una projecció $p(y)$ és una secció central de la transformada de Fourier bidimensional de la imatge $f(x, y)$.

Ja que l'elecció dels eixos cartesianes de referència és arbitrària, el resultat final és vàlid per a qualsevol projecció, encara que no coincideixi amb la direcció d'un dels eixos. Així, generalitzant la notació, sigui $p_{\theta}(t)$ la projecció de $f(x, y)$ en la direcció θ :

$$p_{\theta}(t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy.$$

La seva transformada de Fourier serà

$$P_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(t) \exp[-i2\pi t\omega] dt$$

sent $t = x \cos \theta + y \sin \theta$.

Si escrivim $F(u, v)$ en coordenades polars, i l'anomenem $F(\omega, \theta)$, on $u = \omega \cos \theta$ i $v = \omega \sin \theta$, el teorema de la secció central s'escriu:

$$P_\theta(\omega) = F(\omega, \theta).$$

A2. L'algorisme de retroprojecció filtrada

A partir de la descomposició de Fourier de la imatge $f(x, y)$ podem escriure:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp [i2\pi(xu + yv)] \, dudv = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) \exp [i2\pi(x\omega \cos \theta + \\ &\quad + y\omega \sin \theta)] \, \omega d\omega d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) |\omega| \exp (i2\pi\omega t) \, d\omega \right] d\theta, \end{aligned}$$

on s'ha aplicat que $F(\omega, \theta + \pi) = F(-\omega, \theta)$.

Tenint en compte el teorema de la secció central, podem escriure:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} p'_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta,$$

on

$$p'_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(\omega) |\omega| \exp [i2\pi t\omega] \, d\omega,$$

o bé: $p'_\theta(t) = p_\theta(t) * h(t)$, amb

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \exp [i2\pi t\omega] \, d\omega.$$

És a dir: la imatge bidimensional $f(x, y)$ pot obtenir-se punt a punt com una integral o suma per a totes les direccions θ de les projeccions $p_\theta(t)$ filtrades amb un filtre $h(t)$ que és la transformada de Fourier inversa d'una funció rampa $H(\omega) = |\omega|$.

Referències

- KAK, A.C., *Image Reconstruction from Projections, a Digital Image Processing Techniques*, M.P. Ekstrom (Ed), Academic Press, (1984).
- OSKOUI-FARD, P. i STARK, H., Tomographic Image Reconstruction Using the Theory of Convex Projections, *IEEE Trans. Med. Imag.*, **MI-1**, 45 (1988).
- SHEPP, L.A. i LOGAN, B.F., Maximum likelihood reconstruction for Emission Computed Tomography, *IEEE Trans. Med. Imag.*, **MI-1**, 113 (1982).
- ROS, D., FALCON, C., JUVELLS, I. i PAVIA, J., *Influence of a relaxation parameter in SPET iterative reconstruction algorithms*, Phys. Med. Biol. (enviat).
- LLOVET, X., FALCON, C., ROS, D., JUVELLS, I. i PAVIA, J., *Algoritmos iterativos de reconstrucción tomográfica en SPECT. Determinación del número de iteraciones a partir de la optimización de la relación señal/ruido de las imágenes*, Proc. XXIV Bienal de R.S.E.F., OP11, Jaca, Setembre (1993).
- AXELSSON, B., MSAKI, P. i ISRAELSSON, A., Subtraction of Compton-Scattered Photons in Single-Photon Emission Computerized Tomography, *J. Nucl. Med.*, **25**, 490 (1984).
- LLOVET, X., ROS, D., PAVIA, J. i JUVELLS, I., *Corrección del efecto Compton en imágenes de SPECT*, Optica Pura y Aplicada, 692 (1992).
- OPPENHEIM, B.E. i ROBERT APPLIEDORN, C., *Single Photon Emission Computed Tomography a Effective Use of Computers in Nuclear Medicine*, M.J. Gerfand and S.R. Thomas (Ed), McGraw-Hill, (1988).
- GONZÁLEZ, R.C. i WINTZ, P., *Digital Image Processing*, Addison Wesley, (1977).
- TODD-POKROPEK, A. i DI PAOLA, I., The use of computers for image processing in Nuclear Medicine, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-29**, 1299 (1982).
- CHANG, L.T., A method for attenuation correction in radionuclide computer tomography, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-25**, 638 (1978).