ESTRUCTURAS CIRCULARES Y SU ORIENTACION

por

GRISELDA PASCUAL

I

ESTRUCTURAS CIRCULARES

1. *Definición*

Sea C un conjunto, $D(C)$ el conjunto de las partes de C que tienen dos elementos, $\Delta(C)$ el conjunto de los elementos de la forma $\{C_1, C_2\}$ donde $C_1 \subset C$ y $C_2 \subset C$. Se postula la existencia de una aplicación Γ de $D(C)$ en $\Delta(C)$ que verifica los siguientes axiomas (para expresar que el correspondiente de $\{a, b\}$ $a, b \in C$ en Γ es $\{C_1, C_2\}$ se escribirá $s(ab)$ en vez de C_1 y $\bar{s}(ab)$ en vez C_2) :

AXIOMA 1. Para cada $\{a, b\} \in D(C)$, si $\{s(ab), \bar{s}(ab)\} \in \Delta(C)$

$$\Gamma(\{a, b\}) = \{s(ab), \bar{s}(ab)\} \Longrightarrow s(ab) \cup \bar{s}(ab) = C$$
$$\text{y} \quad s(ab) \cap \bar{s}(ab) = \{a, b\}.$$

Son consecuencias inmediatas del Axioma 1, las dos siguientes :

a) Si $c \in C - \{a, b\}$, c pertenece a uno y sólo uno de los dos conjuntos $s(ab)$ y $\bar{s}(ab)$, por tanto para cada $\{a, b\}$ la aplicación Γ determina una partición de $C - \{a, b\}$ en las dos clases $s(ab) - \{a, b\}$ y $\bar{s}(ab) - \{a, b\}$.

b) Γ es inyectiva. Pues :

$$\Gamma(\{c, d\}) = \{s(cd), \bar{s}(cd)\} = \{s(ab), \bar{s}(ab)\} \Longrightarrow s(cd) = s(ab)$$
$$\text{y} \quad s(cd) = \bar{s}(ab) \Longrightarrow \{c, d\} = s(cd) \cap \bar{s}(cd) = s(ab) \cap \bar{s}(ab) =$$
$$\{a, b\} \Longrightarrow c = a,\ d = b.$$

Por tanto, dos elementos a y b de C cualesquiera determinan unívocamente dos subconjuntos $s(ab)$ y $\bar{s}(ab)$ cada uno de los cuales se denomina segmento de extremos a y b. Los segmentos $s(ab)$ y $\bar{s}(ab)$ se dice que son casi-complementarios uno del otro.

Puesto que todo elemento de C distinto de los extremos, pertenece a uno y sólo uno de dos segmentos casi-complementarios, un segmento queda determinado por sus extremos y uno de sus elementos, o por sus extremos y un elemento que no contiene. El segmento de extremos a, b que contiene c se indica por $s(ab, c)$ mientras que $s(ab, \sim c)$ representa el segmento de extremos a, b que no contiene c.

Obsérvese que no queda excluida la posibilidad de que existan segmentos que sólo contengan como elementos sus extremos. Estos segmentos se denominan reducidos y si $s(ab) = \{a, b\}$ su casi-complementario es $\bar{s}(ab) = C$.

Axioma 2. Si $a, b, c \in C$ son tres elementos cualesquiera:

$$s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a) \quad \text{y} \quad s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}.$$

Si en un conjunto C está definida una aplicación Γ que cumple los axiomas 1 y 2, se dice que C posee una estructura circular que se indicará por $[C, \Gamma]$.

2. *Propiedades de una estructura circular*

Proposición 1. *Si* $c, d \in s(ab)$ *o* $s(cd) \subset s(ab)$ *o* $s(ab) \subset s(cd)$.

Demostración: Si $c, d \in s(ab)$ es $s(ab, c) = s(ab, d)$. En virtud del Ax. 2 es $s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)$ y $s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}$. Puesto que $d \neq c$ y $d \in s(ab, c)$, o $d \in s(ac, \sim b)$ o $d \in s(bc, \sim a)$. Supóngase que $d \in s(ac, \sim b)$. Aplicando de nuevo del Ax. 2. a $s(ac, \sim b) = s(ac, d)$ se tiene: $s(ac, \sim b) = s(ad, \sim c) \cup s(cd, \sim a)$ y $s(ad, \sim c) \cap s(cd, \sim a) = \{d\}$. Sustituyendo $s(ac, \sim b)$ por su valor en la expresión de $s(ab, c)$, resulta: $s(ab, c) = s(ad, \sim c) \cup s(cd, \sim a) \cup s(bc, \sim a)$. Y esto implica: $s(cd, \sim a) \subset s(ab, c)$. Se llegaría al mismo resultado si se supusiera que $d \in s(bc, \sim a)$.

Proposición 2. $s(ab) \cap s(cd) \supset \{a, b, c\} \Longrightarrow \{d\} \subset s(ab) \cap s(cd)$.

Demostración: $s(ab) \cap s(cd) \ni a, b \Longrightarrow b \in s(cd, a) = s(ad, \sim c) \cup s(ac, \sim d)$ y por el Ax. 2. $b \in s(ad, \sim c)$ o $b \in s(ac, \sim d)$ y sólo a uno. Supóngase $b \in s(ad, \sim c)$. Aplicando reiteradamente el mismo axioma: $s(cd, a) = s(ab, \sim d) \cup s(db, \sim a) \cup s(ac, \sim d)$. Pero en virtud del Ax. 1. $C = s(cd, a) \cup s(cd, \sim a) = s(ab, \sim d) \cup s(db, \sim a) \cup$

$\cup\, s(ac, \sim d) \cup s(cd, \sim a) = s(ab, \sim d) \cup [s(db, \sim a) \cup s(ad, c)]$ y por tanto $s(db, \sim a) \cup s(ad, c) \supset s(ab, d)$.

Pero, $s(ab, d) = s(ad, \sim b) \cup s(bd, \sim a)$ y por tanto $s(ad, \sim b) = s(ad, c)$ y $s(ab, d) = s(ad, c) \cup s(bd, \sim a)$, es decir, $s(ab, d) \ni c$, y por tanto $d \in s(ab, c)$ y $d \in s(ab, c) \cap s(cd)$ que es lo que se quería demostrar.

Proposición 3. $s(ab) \cap s(cd) \supset \{a, b\}$ y $s(ab) \cap s(cd) \not\ni c \Rightarrow s(ab) \subset s(cd)$.

Es consecuencia inmediata de la proposición anterior, pues $s(ab, \sim c) = s(ab, \sim d)$ y $s(ab, \sim d) \subset s(cd, a)$.

Proposición 4. $d \notin s(ab, c) - \{a, b\} \Rightarrow s(cd, a) \neq s(cd, b)$.

Demostración: $d \notin s(ab, c) \Rightarrow s(ab, c) \cup s(ab, d) = C$. Aplicando el Ax. 2. a $s(ab, c)$ y $s(ab, d)$ se tiene: $C = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a) \cup s(ad, \sim b) \cup s(bd, \sim a) = [s(ac, \sim b) \cup s(ad, \sim b)] \cup [s(bc, \sim a) \cup s(bd, \sim a)]$. Pero, puesto que $s(ab, c) \cap s(ab, d) = \{a, b\}$, ha de ser $[s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)] \cap [s(ad, \sim b) \cup s(bd, \sim a)] = [s(ac, \sim b) \cap s(ad, \sim b)] \cup [s(bc, \sim a) \cap s(ad, \sim b)] \cup [s(ac, \sim b) \cap s(bd, \sim a)] \cup [s(bc, \sim a) \cap s(bd, \sim a)] = \{a, b\}$, lo que implica: $s(ac, \sim b) \cap s(ad, \sim b) = \{a\}$ y $s(bc, \sim a) \cap s(bd, \sim a) = \{b\}$. Por tanto $C = [s(ac, \sim b) \cup s(ad, \sim b)] \cup [s(bc, \sim a) \cup s(bd, \sim a)] = s(cd, a) \cup s(cd, b)$. Por tanto $s(cd, a)$ y $s(cd, b)$ son casi complementarios y podrían coincidir sólo en el caso en que $\bar{s}(cd) = \{c, d\}$, pero esto es imposible, pues se comprueba fácilmente que $s(cd, a) \cap s(cd, b) = \{c, d\}$.

Proposición 5. *Si* $\{a, b, c, d\} \subset C$ *se verifica una y sólo una de las relaciones:*

$$s(ab, c) \neq s(ab, d), \quad \text{o} \quad s(ac, b) \neq s(ac, d) \quad \text{o} \quad s(ad, b) \neq s(ad, c).$$

Demostración:

1. $s(ab, c) \neq s(ab, d) \Rightarrow s(ac, b) = s(ac, d)$ y $s(ad, b) = s(ad, c)$.

$$s(ab, c) \neq s(ab, d) \Rightarrow C = s(ab, c) \cup s(ab, d) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a) \cup s(ab, d).$$

Pero $\{a, b\} = s(ab, c) \cap s(ab, d) = s(ac, \sim b) \cup [s(bc, \sim a) \cap s(ab, d)] = [s(ac, \sim b) \cap s(ab, d)] \cup [s(bc, \sim a) \cap s(ab, d)]$

implica :

$s(ab, d) \cap s(bc, \sim a) = \{b\}$ y por tanto $s(bc, \sim a) \cup s(ab, d) = s(ac, d)$.

Por tanto $C = s(ac, \sim b) \cup s(ac, d)$ es decir $s(ac, b) = s(ac, d)$.

Análogamente, descomponiendo el segmento

$$s(ab, d) = s(bd, \sim a) \cup s(ad, \sim b)$$

se demuestra la segunda igualdad.

2.º Si $s(ab, c) = s(ab, d)$, $d \in s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)$ lo que implica que o $d \in s(ac, \sim b)$ o $d \in s(bc, \sim a)$. Si $d \in s(ac, \sim b)$, es $s(ac, b) \neq s(ac, d)$ y si $d \in s(bc, \sim a)$ es $s(bc, a) \neq s(bc, d)$ y en virtud de la proposición 4. es $s(ad, b) \neq s(ad, c)$.

Proposición 6. *Si* $s(ab) \cap s(cd) = \phi$ *es* $s(ab) \subset \bar{s}(cd)$ *y* $s(cd) \subset \bar{s}(ab)$.

Demostración : $s(ab) \cap s(cd) = \phi \Rightarrow \{a, b\} \subset \bar{s}(cd)$ y puesto que $c \notin s(ab)$, $s(ab) \subset \bar{s}(cd)$. Análogamente resulta : $s(cd) \subset \bar{s}(ab)$.

Proposición 7. *Si* $s(ab) \cap s(cd) = \phi$ y $s(ad, b) \neq s(ad, c)$ *se verifican las dos inclusiones:* $s(ab) \cup s(cd) \subset s(ac, d)$ *y* $s(ab) \cup s(cd) \subset s(bd, c)$.

Demostración : $s(ac, d) = s(ad, \sim c) \cup s(cd, \sim a) = s(ad, b) \cup$ $\cup\, s(cd, \sim a) = s(ab, \sim d) \cup s(db, \sim a) \cup s(cd, \sim a)$, y puesto que $d \notin s(ab)$ y $a \notin s(cd)$ es $s(ab) = s(ab, \sim d)$ y $s(cd) = s(cd, \sim a)$, por tanto $s(ac, d) \supset s(ab) \cup s(cd)$.

Análogamente $s(bd, c) = s(bc, \sim d) \cup s(cd, \sim b)$, y puesto que $s(ad, b) \neq s(ad, c)$ implica $s(bc, d) \neq s(bc, a)$, se tiene : $s(bd, c) =$ $= s(bc, a) \cup s(cd, \sim b) = s(ab, \sim c) \cup s(ca, \sim b) \cup s(cd, \sim b)$, es decir, $s(bd, c) \supset s(ab) \cup s(cd)$.

Proposición 8. *Si* $s(ab) \cap s(cd) = \{p\}$, p *ha de coincidir con un extremo de* $s(ab)$ *y con un extremo de* $s(cd)$ *y además* $s(ab) \cup$ $\cup\, s(cd) = s(bd, p)$.

Demostración : Supóngase p distinto de a, b, c, d. Puesto que $p \in s(ab)$ $s(ab) = s(ab, p)$ y puesto que el único punto común con $s(cd)$ es p, c y d, no pertenecen a $s(ab)$, es decir, $s(ab, p) \neq s(ab, c) \neq s(ab, d)$. Por tanto si $c, d \in \bar{s}(ab)$ es $s(cd, \sim a) \subset \bar{s}(ab)$, o sea $s(cd, \sim a) \subset$ $\subset s(cd, \sim p)$. Pero por hipótesis $s(cd, \sim a)$ es el segmento $s(cd)$ considerado, que ha de contener el punto p. Resulta, pues, un absurdo, es decir, p ha de coincidir por lo menos con un extremo. Si $p = a$, entonces $s(pb) \cap s(cd) = \{p\}$; b no puede coincidir ni con c ni con d porque $s(pb) \cap s(cd)$ tendría dos elementos, por tanto $b \in s(cd)$ o $b \in \bar{s}(cd)$ y por la misma razón $b \notin s(cd)$. Luego $b \in \bar{s}(cd)$, es decir, $s(cd, p) \neq s(cd, b)$ o sea $s(pb, c) \neq s(pb, d)$ lo cual es absurdo, pues supone que o c o d han de pertenecer a $s(pb)$.

Supóngase $p = a = c$, entonces $b \neq d \neq p$. Si se considera el segmento $s(bd, p)$, éste se descompone en $s(bp, \sim d) \cup s(dp, \sim b)$ y $s(bp, \sim d) \cap s(dp, \sim b) = \{p\}$ y puesto que $s(ab) = s(pb, \sim d)$ y $s(cd) = s(dp, \sim b)$ se tiene la segunda parte de la proposición.

PROPOSICIÓN 9. *Si* $s(ab, c) \neq s(ab, d)$ *se verifica:*

1. $s(ab, c) \cap s(cd, a) = s(ac, \sim b)$ y $s(ab, c) \cup s(cd, a) = s(bd, a)$.
2. $s(ab, c) \cap s(cd, b) = s(cb, \sim a)$ y $s(ab, c) \cup s(cd, b) = s(ad, b)$.
3. $s(ab, d) \cap s(cd, a) = s(ad, \sim c)$ y $s(ab, d) \cup s(cd, a) = s(cb, a)$.
4. $s(ab, d) \cap s(cd, b) = s(bd, \sim a)$ y $s(ab, d) \cup s(cd, b) = s(ac, b)$.

DEMOSTRACIÓN: Se dará la de 1, siendo las demás análogas con un simple cambio de letras. En virtud de Prop. 4 es:

$$s(ab, c) \neq s(ab, d) \Longrightarrow s(cd, a) \neq s(cd, b).$$

Por otra parte (Prop. 5).

$$s(ab, c) \neq s(ab, d) \Longrightarrow s(ac, b) = s(ac, d) \text{ y } s(ad, b) = s(ad, c).$$

Por la Prop. 3 es:

$$s(ad, b) = s(ad, c) \Longrightarrow b, c \in s(ad, b) \Longrightarrow s(bc, \sim a) \subset s(ad, b) \Longrightarrow s(bc, \sim a) \cap s(ad, \sim b) = \phi.$$

En virtud del Ax. 2. es:

$$s(cd, a) = s(ac, \sim d) \cup s(ad, \sim c) = s(ac, \sim b) \cup s(ad, \sim c),$$
$$s(ac, \sim b) \cap s(ad, \sim c) = \{a\} \quad s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)$$
$$s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}.$$

Por tanto:

$$s(ab, c) \cap s(cd, a) = [s(ac, \sim b) \cup s(ad, \sim c)] \cap [s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)] =$$
$$= s(ac, \sim b) \cup [s(ad, \sim c) \cap s(ac, \sim b)] \cup [s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a)] \cup$$
$$\cup [s(ad, \sim c) \cap s(bc, \sim a)] = s(ac, \sim b) \cup \{a\} \cup \{c\} \cup \phi = s(ac, \sim b).$$

Por otra parte:

$$s(ab, c) \cup s(cd, a) = s(bc, \sim a) \cup s(ac, \sim b) \cup s(ad, \sim c) =$$
$$= s(cd, \sim b) \cup s(bc, \sim a) = s(bd, a).$$

PROPOSICIÓN 10. *Si* $s(ab, c) = s(ab, d)$ *y* $s(ac, b) \neq s(ac, d)$ *se verifica:* $s(ab, c) \cap s(cd, a) = s(ac, \sim b) \cup s(bd, \sim a)$.

DEMOSTRACIÓN: Se verifica:

$$s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a) = s(ac, d) \cup s(bc, \sim a) =$$
$$= s(ad, \sim c) \cup s(dc, \sim a) \cup s(bc, \sim a), \quad \text{y} \quad s(ac, d) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}$$
y $s(cd, \sim a) \cap s(ad, \sim c) = \{d\}$ y puesto que $s(cd, \sim a) \subset s(ac, d)$ es $s(cd, \sim a) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}$.

Por otra parte:

$$s(cd, a) = s(ac, \sim d) \cup s(ad, \sim c) = s(ac, b) \cup s(ad, \sim c) =$$
$$= s(ab, \sim c) \cup s(bc, \sim a) \cup s(ad, \sim c) \quad \text{y} \quad s(ac, b) \cap s(ad, \sim c) = \{a\}$$
y $s(ab, \sim c) \cap s(bc, \sim a) = \{b\}$. Pero, puesto que $s(ab, \sim c) \subset s(ac, b)$ es: $s(ab, \sim c) \cap s(ad, \sim c) = \{a\}$.

Finalmente, en virtud de la proposición 3, es:

$$s(cd, \sim a) \cap s(ab, \sim c) = \phi.$$

Resulta, pues:

$$s(ab, c) \cap s(cd, a) = \{[s(ad, \sim c) \cup s(bc, \sim a)] \cup s(cd, \sim a)\} \cap$$
$$\cap \{[s(bc, \sim a) \cup s(ad, \sim c)] \cup s(ab, \sim c)\} =$$
$$= s(ad, \sim c) \cup s(bc, \sim a) \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\} \cup \phi =$$
$$= s(ad, \sim c) \cup s(bc, \sim a).$$

PROPOSICIÓN 11. *Si* $\{a, b, c\} \subset C$ *es* $s(ab, c) \cap s(ac, b) = \{a\} \cup \cup s(bc, \sim a)$.

DEMOSTRACIÓN:

$$s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a) \quad \text{y} \quad s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}$$
$$s(ac, b) = s(ab, \sim c) \cup s(bc, \sim a) \quad \text{y} \quad s(ab, \sim c) \cup s(bc, \sim a) = \{b\}.$$

$$s(ab, c) \cap s(ac, b) = [s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)] \cap [s(ab, \sim c) \cup s(bc, \sim a)] =$$
$$= \{a\} \cup \{c\} \cup \{b\} \cup s(bc, \sim a) = \{a\} \cup s(bc, \sim a).$$

Proposición 12. *Si es,* $s(ab, \sim c) \cap s(cd, \sim a) = \phi$, $s(ab, \sim c) \cup s(cd, \sim a) = C$ *y* $s(ad, c) \neq s(ad, b)$ *se verifica :* $s(ac, \sim d) = \{a, c\}$ *y* $s(bd, \sim a) = \{b, d\}$.

Demostración : $s(ad, c) \neq s(ad, b) \Rightarrow s(ad, c) \cup s(ad, b) = C$ y $s(ad, b) \cap s(ad, c) = \{a, d\}$. Por tanto, aplicando el axioma 2 se tiene :

$$C = s(ac, \sim d) \cup s(cd, \sim a) \cup s(ab, \sim d) \cup s(bd, \sim a).$$

Pero
$$s(ab, \sim d) = s(ab, \sim c)$$

puesto que $s(ab, \sim c) \cap s(cd, \sim a) = \phi \Rightarrow d \notin s(ab, \sim c)$, por tanto:

$$C = s(ac, \sim d) \cup [s(cd, \sim a) \cup s(ab, \sim c)] \cup s(bd, \sim a) =$$
$$= s(ac, \sim d) \cup C \cup s(bd, \sim a).$$

Por otra parte :

$$\{a, d\} = [s(ac, \sim d) \cup s(cd, \sim a)] \cap [s(ab, \sim c) \cup s(bd, \sim a)] =$$
$$= [s(ac, \sim d) \cap s(ab, \sim c)] \cup [s(cd, \sim a) \cap s(ab, \sim d)] \cup$$
$$\cup [s(ac, \sim d) \cap s(bd, \sim a)] \cup [s(cd, \sim a) \cap s(bd, \sim a)]$$

de donde resulta :

$$s(ac, \sim d) \cap s(ab, \sim c) = \{a\}, \qquad s(cd, \sim a) \cap s(ab, \sim d) = \phi$$
$$s(ac, \sim d) \cap s(bd, \sim a) = \{\phi\}, \qquad s(cd, \sim a) \cap s(bd, \sim a) = \{d\}.$$

Ahora bien :

$$s(ac, \sim d) \subset C \Rightarrow s(ac, \sim d) \cap C = s(ac, \sim d) \Rightarrow s(ac, \sim d) \cap$$
$$[s(cd, \sim a) \cup s(ab, \sim c)] = s(ac, \sim d) = [s(ac, \sim d) \cap s(cd, \sim a)] \cup$$
$$\cup [s(ac, \sim d) \cap s(ab, \sim c)] = \{c\} \cup \{a\} = \{a, c\}.$$

Análogamente :

$$s(bd, \sim a) \subset C \Rightarrow s(bd, \sim a) \cap C = s(bd, \sim a), \qquad s(bd, \sim a) =$$
$$= s(bd, \sim a) \cap [s(cd, \sim a) \cup s(ab, \sim c)] = [s(bd, \sim a) \cap s(cd, \sim a)] \cup$$
$$\cup [s(bd, \sim a) \cap s(ab, \sim c)] = \{d\} \cup \{b\} = \{b, d\}.$$

Definición : Dos elementos de C que son extremos de un segmento reducido se dice que son consecutivos en C.

Proposición 13. *Un elemento de C puede tener a lo sumo dos consecutivos.*

Demostración: Si $b, c, d \in C$ son consecutivos de $a \in C$ es $s(ab) = \{a, b\}$, $s(ac) = \{a, c\}$ y $s(ad) = \{a, d\}$. Pero $s(ab, \sim c) \cap s(ac, \sim b) = \{a\}$ y $s(bc, a) = s(ab, \sim c) \cup s(ac, \sim b) = \{a, b, c\}$. Es decir, si $d \neq b$ y $d \neq c$, $d \notin s(bc, a)$ lo que implica $s(bc, a) \neq s(bc, d)$ y, por tanto, $s(ad, b) \neq s(ad, c)$ que contradice el hecho de ser $s(ad) = \{a, d\}$. Por tanto, o $b = d$, o $c = d$ c.q.d.

Proposición 14. *Si C es finito y consta de más de dos elementos, cada elemento tiene dos consecutivos.*

Demostración: Sean a, b dos elementos cualesquiera de C; se verifica $C = s(ab) \cup \bar{s}(ab)$ y $s(ab) \cap \bar{s}(ab) = \{a, b\}$ y puesto que C es finito, también lo son $s(ab)$ y $\bar{s}(ab)$. Si b no es consecutivo de a, $s(ab) \neq \{a, b\}$ y $\bar{s}(ab) \neq \{a, b\}$, por tanto, habrá por lo menos un $c \in s(ab)$ distinto de a y de b. Se tiene $s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)$ y $s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}$ por tanto $s(ac, \sim b)$ tendrá un número de elementos inferior al de $s(ab)$. Si c es consecutivo de a tiene a un consecutivo en $s(ab)$, si no se reitera el proceso con el segmento $s(ac, \sim b)$. Puesto que el número de elementos va disminuyendo ha de llegar un momento en que se obtenga un segmento que contenga sólo dos elementos y que esté contenido en $s(ab)$. El mismo razonamiento se puede aplicar a $\bar{s}(ab)$ y puesto que $s(ab)$ y $\bar{s}(ab)$ sólo tienen en común a y b, los dos consecutivos de a serán distintos. Si b fuera consecutivo de a, $s(ab) = \{a, b\}$, y si C contiene más de dos elementos, el otro consecutivo de a estaría en $s(ab)$ y sería distinto de b.

Consecuencia inmediata de la proposición 14 son las dos siguientes:

Proposición 15. *Si una estructura circular no contiene ningún segmento reducido, cada uno de sus segmentos contiene infinitos elementos.*

Proposición 16. *Si una estructura circular contiene un sólo segmento reducido $s(ab) = \{a, b\}$ cualquier otro segmento de C contiene infinitos elementos.*

3. *Estructura lineal inducida por una estructura circular*

Sea $s(ab)$ un segmento cualquiera no reducido de una estructura circular $[C, \Gamma]$. A partir de la aplicación Γ se puede definir una estructura lineal en $s(ab)$ de la manera siguiente:

Considerado $s(ab)$ como conjunto de elementos, se define una aplicación λ de $D(s(ab))$ en $P(s(ab))$ haciendo corresponder a cada $\{c, d\} \in D(s(ab))$ el segmento $s(cd)$ de C tal que $s(cd) \subset s(ab)$. λ define en $s(ab)$ una estructura que es lineal, pues verifica los axiomas requeridos para este tipo de estructura [1]. En efecto: el primero queda implícito en la misma definición de λ; puesto que el Ax. 2.º en la estructura circular es una condición relativa a cada segmento de C la aplicación λ conserva esta condición que coincide con el Ax. 2.º de la aplicación lineal; el 3.º resulta de ser el mismo $s(ab)$ un segmento. Se dice entonces que λ es una aplicación inducida por la aplicación Γ.

Definición. Se dice que una estructura lineal $[L, l]$ es inducida de una estructura circular $[C, \Gamma]$ si:

1.º $L \subset C$ y L es un segmento en $[C, \Gamma]$.

2.º la aplicación l que define la estructura lineal en L coincide con la aplicación λ inducida por la aplicación Γ.

Si en $[C, \Gamma]$, $\bar{s}(ab) = \{a, b\}$, entonces $s(ab) = C$ y $D(c) = D(s(ab))$. Esto quiere decir que cada segmento en $[C, \Gamma]$ o puede identificarse con un segmento de $[C, \lambda]$ o es casi-complementario de un segmento identificado. Si se indica por S el conjunto de los segmentos de $[C, \Gamma]$, por $S_{(ab)}$ el de los segmentos que se identifican con los de $[C, \lambda]$ y por $\bar{S}_{(ab)}$ el de sus casi-complementarios se puede escribir: $S = S_{(ab)} \cup \bar{S}_{(ab)}$ y $\bar{S}_{(ab)} \cap S_{(ab)} = \phi$ lo que se expresará brevemente $S = S_{(ab)} \oplus \bar{S}_{(ab)}$.

4. *Estructuras circulares subordinada y extensión*

Sea la estructura circular $[C, \Gamma]$ y $H \subset C$. La aplicación Γ de $D(C)$ en $\Delta(C)$ subordina una aplicación Ω de $D(H)$ en $\Delta(H)$ de la manera siguiente: Si $\{a, b\} \in D(H)$ y $\Gamma(\{a, b\}) = \{s(ab), \bar{s}(ab)\}$ entonces: $\Omega(\{a, b\}) = \{s(ab) \cap H, \bar{s}(ab) \cap H\}$. Ω define una estructura en H, $[\Omega, H]$ que se denomina estructura subordinada por Γ que es circular. En efecto:

1.º $s(ab) \cap H \neq \phi$ y $\bar{s}(ab) \cap H \neq \phi$ puesto que ambos contienen por lo menos $\{a, b\}$.

2.º $[s(ab) \cap H] \cup [\bar{s}(ab) \cap H] = [s(ab) \cup \bar{s}(ab)] \cap H = C \cap H = H$

$[s(ab) \cap H] \cap [\bar{s}(ab) \cap H] = s(ab) \cap \bar{s}(ab) \cap H = \{a, b\} \cap H = \{a, b\}$.

3.º Si $a, b, c \in H$ y en $[c, \Gamma]$ $c \in s(ab) - \{a, b\}$ se verifica en virtud del Ax. 2 en $[C, \Gamma]$, $s(ab, c) = s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)$ y $s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a) = \{c\}$.

Por tanto :

$$s(ab, c) \cap H = [s(ac, \sim b) \cup s(bc, \sim a)] \cap H =$$
$$= [s(ac, \sim b) \cap H] \cup [s(bc, \sim a) \cap H] \; ;$$

y

$$[s(ac, \sim b) \cap s(bc, \sim a)] \cap H =$$
$$= [s(ac, \sim b) \cap H] \cap [s(bc, \sim a) \cap H] = \{c\} \cap H = \{c\}.$$

Con lo que queda comprobada la verificación del Ax. 2.º en $[H, \Omega]$.

PROPOSICIÓN 1. *Si en* $[C, \Gamma]$ *existe un sólo segmento reducido* $s(ab) = \{a, b\}$ *las estructuras subordinadas* $[C - \{a\}, \Omega_1]$ y $[C - \{b\}, \Omega_2]$ *no poseen ningún segmento reducido.*

DEMOSTRACIÓN : Se considerará la estructura $[C - \{a\}, \Omega_1]$ puesto que para $[C - \{b\}, \Omega_2]$ es válido el mismo razonamiento cambiando sólo a por b. Se supone además que $C \neq \{a, b\}$.

Si el único segmento reducido en $[C, \Gamma]$ es $s(ab) = \{a, b\}$ todo segmento distinto de $s(ab)$ poseerá infinitos elementos ; en particular $C = s(ab)$ poseerá infinitos elementos. La aplicación Ω_1 subordinada por Γ a $C - \{a\}$ hace corresponder a cada $\{c, d\} \in C - \{a\}$ el elemento $\{s(cd, a) - \{a\}, s(cd, \sim a)\}$ donde $\{s(cd, a), s(cd, \sim a)\} = \Gamma\{c, d\}$. Pero puesto que $a \notin C - \{a\}$ cada $\{c, d\}$ considerado es distinto de $\{a, b\}$, por tanto, $s(cd, a)$ y $s(cd, \sim a)$ son conjuntos infinitos, es decir, los segmentos $s(cd, a) - \{a\}$ y $s(cd, \sim a)$ contienen infinitos elementos cualesquiera que sean $c, d \in C - \{a\}$.

Definición. Si $H \subset C$, $[C, \Gamma]$ es una estructura circular extensión de $[H, \Omega]$, si y sólo si $[H, \Omega]$ es una estructura subordinada de $[C, \Gamma]$.

PROPOSICIÓN 2. *Si la estructura* $[C, \Gamma]$ *no posee ningún segmento reducido, se puede obtener una estructura* $[C_1, \Gamma_1]$ *extensión de* $[C, \Gamma]$ *que posea un segmento reducido y sólo uno, adjuntándole a* C *un sólo elemento.*

DEMOSTRACIÓN : Es constructiva. Los segmentos correspondientes a $[C_1, \Gamma_1]$ se indicarán por σ, para distinguirlos de los de $[C, \Gamma]$ que se seguirán designando por s.

Sea $C_1 = C \cup \{p\}$ donde p es el elemento simbólico que se adjunta; se elige un elemento cualquiera $a \in C$ que en lo sucesivo se considerará como distinguido y se define Γ_1 de la manera siguiente:

$$\Gamma_1(\{a, p\}) = \{\sigma(ap), \bar{\sigma}(ap)\} = \{\{a, p\}, C \cup \{p\}\}.$$

Si $b \in C - \{a\}$ es $\Gamma_1(\{b, p\}) = \{\sigma(bp), \bar{\sigma}(bp)\}$ donde $\sigma(bp, a) = s(ab) \cup \{p\}$ y $\sigma(bp, \sim a) = [\bar{s}(ab) - \{a\}] \cup \{p\}$

$$\Gamma_1(\{a, b\}) = \{\sigma(ab), \bar{\sigma}(ab)\} \quad \text{donde} \quad \sigma(ab, \sim p) = s(ab)$$
$$\text{y} \quad \sigma(ab, p) = \bar{s}(ab) \cup \{p\}$$

Si $b, c \in C - \{a\}$ es $\Gamma_1(\{b, c\}) = \{\sigma(bc), \bar{\sigma}(bc)\}$ donde $\sigma(bc, a) = \sigma(bc, p) = s(bc, a) \cup \{p\}$ y $\sigma(bc, \sim a) = s(bc, \sim a)$.

La estructura $[C_1, \Gamma_1]$ es circular, pues se comprueba fácilmente que se cumplen los Ax. 1 y 2, en cada uno de los casos que se presentan.

5. *Estructuras lineales inducidas por una estructura circular y una subordinada.*

Sea la estructura circular $[C, \Gamma]$ y se considera la estructura lineal $[L, l]$ inducida por $[C, \Gamma]$ en el segmento $s(ab) = L \subset C$. Si $C_1 \subset C$ y $\{a, b\} \subset C_1$ la estructura circular $[C_1, \Gamma_1]$ subordinada por la $[C, \Gamma]$ induce en $L_1 = s(ab) \cap C_1$ una estructura lineal $[L_1, l_1]$. Por otra parte la estructura lineal $[L, l]$ subordina en L_1 una estructura lineal $[L_1, l'_1]$. Se trata de probar que ambas estructuras coinciden, es decir, que todo segmento de $[L_1, l_1]$ es un segmento de $[L_1, l'_1]$ y recíprocamente.

En efecto: El conjunto S de los segmentos de $[L_1, l_1]$ es el conjunto de todos los segmentos de la forma $s(pq) \cap C_1$ que cumplen las condiciones, $p,q \in L_1$ y $s(pq) \cap C_1 \subset s(ab) \cap C_1$. El conjunto S' de los segmentos de $[L_1, l'_1]$ es el conjunto de todos los segmentos de la forma $s(pq) \cap C_1$ que cumplen las condiciones $p,q \in L_1$ y $s(pq) \subset s(ab)$. Puesto que $s(pq) \subset s(ab) \Rightarrow s(pq) \cap C_1 \subset s(ab) \cap C_1$ todo elemento de S' es un elemento de S. El recíproco en general no es cierto pues $s(pq) \cap C_1 \subset s(ab) \cap C_1$ no implica necesariamente $s(pq) \subset s(ab)$. Pero, si $s(pq) \not\subset s(ab)$ puesto que $p, q \in s(ab)$ se tendría $\bar{s}(pq) \subset s(ab)$ y por tanto $\bar{s}(pq) \cap C_1 \subset s(ab) \cap C_1$, es decir $s(pq) \cap C_1$ y $\bar{s}(pq) \cap C_1$ serían ambos segmentos de S, es decir, en una misma estructura lineal habría dos segmentos de extremos p, q iguales, lo que es absurdo.

II

ORIENTACION EN UNA ESTRUCTURA CIRCULAR

1. *Orientación de una estructura circular con un segmento reducido*

En el conjunto S de todos los segmentos de una estructura circular $[C, \Gamma]$, mediante la definición de segmento orientado y una relación de « igual sentido », se establece una orientación, a través de la cual se obtiene una orientación de la estructura $[C, \Gamma]$. Para ello se procede de la manera siguiente :

Se considera en primer lugar el caso particular en el que la estructura $[C, \Gamma]$ tiene por lo menos un segmento reducido $\bar{s}(ab) = \{a, b\}$. En virtud de lo demostrado en el apartado III, el conjunto S admite una descomposición en la forma $S = S_{s(ab)} \oplus \bar{S}_{s(ab)}$ donde $S_{s(ab)}$ es el conjunto de segmentos que coincide con el de segmentos de la estructura lineal inducida por $[C, \Gamma]$ en $s(ab)$. Puesto que se ha definido la orientación en una estructura lineal [1] se puede suponer que el conjunto $s(ab)$ con la estructura lineal inducida, se ha orientado, con lo cual a cada segmento $s(pq) \in S$ le corresponden dos segmentos orientados $\{(pq), s(pq)\}$ y $\{(qp), s(pq)\}$ (que se indicarán brevemente por (pq) y (qp)), y dos segmentos (pq) y (rs) orientados de $S_{s(ab)}$ tienen el mismo sentido si se cumple una por lo menos de las tres condiciones: $s(pr) \cap s(qs) = \phi$, o $s(ps) \supset s(qr)$ o $s(ps) \subset s(qr)$ donde, $s(pr)$, $s(qs)$, $s(ps)$ y $s(qr)$ son elementos de $S_{s(ab)}$. Por analogía se puede definir el segmento orientado en $\bar{S}_{s(ab)}$ mediante una aplicación de los pares ordenados de C en $\bar{S}_{s(ab)}$ de manera que cada segmento $\bar{s}(pq)$ da lugar a dos segmentos orientados $\{(pq), \bar{s}(pq)\}$ y $\{(qp), \bar{s}(pq)\}$ que se indicarán abreviadamente por $\overline{(pq)}$ y $\overline{(qp)}$. Puesto que cada elemento de S pertenece o a $S_{s(ab)}$ o a $\bar{S}_{s(ab)}$ y a uno sólo de ellos, cada segmento de C da lugar a dos y sólo dos segmentos orientados.

Definición. Dos segmentos orientados de C, se dice que son orientados casi-complementarios cuando son casi complementarios en C, es decir, uno pertenece a $S_{s(ab)}$ y el otro a $\bar{S}_{s(ab)}$ y el origen de uno coincide con el extremo del otro.

Relación de igual orientación : En el conjunto Σ de segmentos orientados de C se define una relación de igual orientación, de la manera siguiente :

a) Dos segmentos orientados (pq), (rs) tales que $s(pq)$ y $s(rs)$ pertenecen a $\bar{S}_{s(ab)}$ tienen el mismo sentido, cuando tiene el mismo sentido en la estructura lineal inducida orientada.

b) Dos segmentos orientados $(\overline{pq})$ $(\overline{rs})$ tales que $s(pq)$ y $s(rs)$ pertenecen a $\bar{S}_{s(ab)}$ tienen el mismo sentido cuando sus orientados casi-complementarios tienen el mismo sentido.

c) Dos segmentos orientados (pq) y $(\overline{rs})$ tales que $s(pq) \in S_{s(ab)}$ y $s(rs) \in \bar{S}_{s(ab)}$ tienen el mismo sentido cuando tienen el mismo sentido, (pq) y el orientado casi complementario de $(\overline{rs})$. Si los segmentos (pq) y (rs) tienen el mismo sentido se escribirá $(pq) \equiv (rs)$.

La relación de igual orientación definida en Σ es de equivalencia. La reflexividad y simetría son evidentes, la transitividad se demuestra como sigue:

a) si $(pq) \equiv (rs)$ y $(rs) \equiv (hk)$ por pertenecer $s(pq)$, $s(rs)$ y $s(hk)$ a $S_{s(ab)}$ $(pq) \equiv (hk)$ es consecuencia de la transitividad de la orientación en la estructura lineal en $s(ab)$.

b) si $(\overline{pq}) \equiv (\overline{rs})$ y $(\overline{rs}) \equiv (\overline{hk})$ por pertenecer $s(pq)$, $s(rs)$, $s(hk)$ a $\bar{S}_{s(ab)}$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{pq}) \equiv (\overline{rs}) \Rightarrow (qp) \equiv (sr) \\ (\overline{rs}) \equiv (\overline{hk}) \Rightarrow (sr) \equiv (kh)\end{array}\right\} \Rightarrow (qp) \equiv (kh) \Rightarrow (\overline{pq}) \equiv (\overline{hk}).$$

c) si $(pq) \equiv (rs)$ y $(rs) \equiv (\overline{hk})$, por pertenecer $s(pq)$ y $s(rs)$ a $S_{s(ab)}$ y $s(hk)$ a $\bar{S}_{s(ab)}$ resulta: $(rs) \equiv (\overline{hk}) \Rightarrow (rs) \equiv (kh)$, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}(pq) \equiv (rs) \\ (rs) \equiv (hk)\end{array}\right\} \Rightarrow (pq) \equiv (kh) \Rightarrow (pq) \equiv (\overline{hk}).$$

d) si $(pq) \equiv (\overline{rs})$ y $(\overline{rs}) \equiv (\overline{hk})$ por pertenecer $s(pq)$ a $S_{s(ab)}$ y $s(rs)$ y $s(hk)$ a $\bar{S}_{s(ab)}$ se tiene: $(pq) \equiv (\overline{rs}) \Rightarrow (pq) \equiv (sr)$ y $(\overline{rs}) \equiv (\overline{hk}) \Rightarrow (sr) \equiv (kh)$, por tanto:

$$(pq) \equiv (sr) \text{ y } (sr) \equiv (kh) \Rightarrow (pq) \equiv (kh) \Rightarrow (pq) \equiv (\overline{hk}).$$

La relación de igual orientación define, pues, una partición de Σ en clases de segmentos orientados del mismo sentido. El número de clases es dos, pues en la estructura lineal orientada se ha demostrado la existencia de dos y sólo dos sentidos, y todo segmento de Σ es equivalente a un segmento de la estructura lineal orientada definida en $s(ab)$. Cada una de estas dos clases se denomina un sentido en la estructura circular $[C, \Gamma]$, y la estructura $[C, \Gamma]$ con los dos sentidos se dice que es una estructura circular orientada.

Si la estructura circular $[C, \Gamma]$ posee un sólo segmento reducido, la unicidad de esta relación de orientación así definida es consecuencia de la misma definición. Si la estructura $[C, \Gamma]$ posee más de un segmento reducido, se ha de probar que la orientación no depende de cual sea el segmento reducido del que se haya partido para definirla. Para ello, sean $\bar{s}(ab) = \{a, b\}$ y $\bar{s}(cd) = \{c, d\}$ dos segmentos reducidos en $[C, \Gamma]$; el conjunto S admite las descomposiciones $S = S_{s(ab)} \oplus \bar{S}_{s(ab)}$ y $S = S_{s(dc)} \oplus \bar{S}_{s(cd)}$, y a partir de cada una de ellas se puede definir una orientación en $[C, \Gamma]$. Se trata de ver que si dos segmentos tienen el mismo sentido respecto a una de ellas también lo tienen respecto a la otra.

Sean (pq) y (rs) dos segmentos del mismo sentido en la orientación definida a partir de $s(ab)$; en virtud de la transitividad se puede considerar, sin que suponga restricción, que los segmentos $s(pq)$ y $s(rs)$ pertenecen ambos a $S_{s(ab)}$, pues en caso contrario se pasaría convenientemente a los casi-complementarios orientados. De ser $(pq) \equiv (rs)$ respecto $s(ab)$, resulta que se verifica por lo menos una de las tres condiciones,

$$s(pr) \cap s(qs) = \phi \quad \text{o} \quad s(ps) \subset s(qr) \quad \text{o} \quad s(qr) \subset s(ps)$$

donde los segmentos

$$s(pr),\ s(qs),\ s(ps),\ s(qr) \quad \text{están contenidos en} \quad s(ab).$$

Supóngase en primer lugar que $s(pr) \cap s(qs) = \phi$. Puesto que $\{c, d\} \subset s(ab)$ se pueden presentar los casos siguientes: $\{c, d\}$ no pertenece ni a $s(pr)$ ni a $s(qs)$; $\{c, d\}$ pertenece a uno de los dos; c pertenece a uno y d pertenece al otro de los dos segmentos $s(pr)$ y $s(qs)$.

1. Si $\{c, d\} \not\subset s(pr)$ y $\{c, d\} \not\subset s(qs)$ esto implica que $s(pr) \in S_{s(cd)}$ y $s(qs) \in S_{s(cd)}$ y puesto que $s(pr) \cap s(qs) = \phi$ resulta $(pq) \equiv (rs)$ en la orientación definida por $s(cd)$.

2. Si $\{c, d\} \subset s(pr)$ y $\{c, d\} \not\subset s(qs)$ esto implica que $\bar{s}(pr)$ y $s(qs)$ pertenecen a $S_{s(cd)}$ y puesto que $s(pr) \cap s(qs) = \phi$ esto implica que $s(qs) \subset \bar{s}(pr)$. Por tanto, en virtud de las condiciones de igual sentido $(qp) \equiv (\overline{rs})$, es decir, $(\overline{pq}) \equiv (\overline{rs})$, o sea $(pq) \equiv (rs)$.

3. Si $c \in s(pr)$ y $d \in s(qs)$, c ha de ser un extremo de $s(pr)$ y d ha de ser extremo de $s(qs)$, pues de $s(pr) \cap s(qs) = \phi$ resulta $s(pr) \subset \bar{s}(qs)$ y por tanto $c \in \bar{s}(qs)$ y $d \in s(qs)$ es decir, $s(qs, c) \neq s(qs, d)$ y si c y d no fueran extremos, esto implicaría $s(cd, q) \neq s(cd, s)$ lo que está

en contradicción con la hipótesis de ser c y d consecutivos. Puesto que $s\,(pq)$ y $s\,(rs)$ se suponen distintos de $s\,(cd)$ y $\bar{s}\,(cd)$, si $c = p$, $d = s$ y si $c = r$, $d = q$. Supóngase, por ejemplo, $c = r$ y $d = q$. Entonces ha de ser $s\,(pq, r) \neq s\,(pq, s)$; pues de $s\,(pq, r) = s\,(pr, \sim q) \cup s\,(qr, \sim p) = s\,(pr, \sim q) \cup \{c, d\}$ si $s \in s\,(pq, s)$ sería $s \in s\,(pr, \sim q)$ contra la hipótesis de ser la intersección vacía. Por tanto, el segmento (pq) considerando corresponde al segmento $s\,(pq, r) = s\,(pd, c)$, es decir, contiene $\{c, d\}$. Análogamente $s\,(cs, d)$ corresponde al segmento (cs) considerado. Por tanto (cs) y (pd) pertenecen a $\bar{S}_{s(cd)}$, es decir $(cs) \equiv (pd) \Longrightarrow (\overline{sc}) \equiv (\overline{dp})$ contenidos en $S_{s(cd)}$. Pero $s\,(sd, \sim a) = s\,(sd, \sim c)$, pues si $a \in s\,(sd, \sim c)$ puesto que se ha supuesto que no es extremo, y a y b son consecutivos, también $b \in s\,(sd, \sim c)$ y, por tanto, sería el casi-complementario del segmento $s\,(sd) \in S_{s(ab)}$ es decir, contendría c contra la hipótesis; es decir $s\,(sd) \in S_{s(cd)}$ coincide con $s\,(sd) \in S_{s(ab)}$ y análogamente con $s\,(cp)$. Por tanto $s\,(cp) \cap s\,(ca) = \phi$, es decir $(\overline{sc}) \equiv (\overline{dp})$ y, por tanto $(cs) \equiv (pd)$.

Supóngase ahora que $s\,(ps) \subset s\,(qr)$. Pueden presentarse los casos siguientes:

1) $c, d \notin s\,(qr) \Longrightarrow c, d \notin s\,(ps)$.

2) $$c, d \in s\,(qr) \text{ y } c, d \notin s\,(ps) \Longrightarrow \begin{cases} c, d \in s\,(pr) \text{ o } c, d \in s\,(qs) \\ \quad \text{si } s\,(pq, r) \neq s\,(pq, s) \\ c, d \in s\,(pq) \text{ o } c, d \in s\,(rs) \\ \quad \text{si } s\,(pq, r) = s\,(pq, s). \end{cases}$$

3) $$c, d \in s\,(ps) \Longrightarrow \begin{cases} c, d \notin s(pq) \text{ y } c, d \notin s(rs) \text{ si } s\,(pq, r) = s\,(pq, s) \\ c, d \in s\,(pq) \cap s\,(rs) \text{ si } s\,(pq, r) \neq s\,(pq, s). \end{cases}$$

4) $c \in s\,(ps)$ y $d \notin s\,(ps)$.

El CASO 1 es trivial puesto que $s\,(qr, a) = s\,(qr, b) = s\,(qr, c) = s\,(qr, d)$ y, por tanto, los segmentos $s\,(pq)$ y $s\,(rs)$ considerados pertenecen también a $S_{s(cd)}$ y se cumple la misma condición de igual sentido.

CASO 2. Si $c, d \in s\,(pq)$, $(pq) \in \bar{S}_{s(ab)}$ y, por tanto $(pq) \equiv (rs)$ respecto a $s\,(cd)$ si $(rs) \equiv (qp)$ con $(qp) \in S_{s(cd)}$. Puesto que $s\,(qr, \sim a) = s\,(qr, \sim b) = s\,(qr, c) = s\,(qr, d)$, $s\,(qr, \sim c) = \bar{s}\,(qr, \sim a)$ y puesto que $c, d \notin s\,(ps, \sim a)$, $s\,(ps, \sim a) = s\,(ps, \sim c) \subset s\,(qr, c)$. Por tanto, $s\,(qr, \sim c) \cap s\,(ps, \sim c) = s\,(qr, \sim d) \cap s\,(ps, \sim d) = \phi$. Es decir: $(rs) \equiv (qp)$ respecto a $S_{s(cd)}$ y por tanto $(pq) \equiv (rs)$ también respecto a $S_{s(cd)}$. Las otras posibilidades del caso 2 se demuestran de la misma forma.

Caso 3. Si $c, d \notin s(pq)$ y $c, d \notin s(rs)$ implica que (pq) y (rs) son segmentos orientados que corresponden a $S_{s(cd)}$. Pero $s(ps, c) = s(ps, d) = s(ps, \sim a) = s(ps, \sim b)$ y $s(qr, \sim c) = s(qr, \sim d) = s(qr, a) = s(qr, b)$. Por tanto, $s(ps, c) \subset s(qr, c) \Rightarrow s(ps, \sim c) \supset s(qr, \sim c)$ donde $s(ps, \sim c)$ y $s(qr, \sim c)$ son segmentos de $S_{s(cd)}$. Y esta última condición es suficiente para que $(pq) \equiv (rs)$ respecto (cd).

Si $\{c, d\} \in s(pq, \sim a) \cap s(rs, \sim a)$ se pasa al casi complementario orientado y se está de nuevo en el caso anterior.

Caso 4. Si $c \in s(ps)$ y $d \notin s(ps)$ c tendrá que coincidir o con p o con s y puesto que c y d son consecutivos d tendrá que estar contenido en uno sólo de los segmentos $s(pq, \sim a)$, $s(rs, \sim a)$, $s(pr, \sim a)$, $s(qs, \sim a)$ y sólo a uno de ellos, con lo cual se puede seguir el mismo razonamiento que en el caso 2.

Finalmente si $s(qr) \subset s(ps)$ vale el mismo razonamiento que si se verifica $s(ps) \subset s(qr)$ simplemente haciendo un cambio de letras.

2. *Orientación en una estructura circular subordinada*

Sea la estructura circular $[C, \Gamma]$ que posee un segmento reducido por lo menos y que se considera orientada de acuerdo con el criterio dado en el apartado anterior. Sea $[H, \Omega]$ una estructura circular subordinada de $[C, \Gamma]$.

Se puede definir en $[H, \Omega]$ una orientación subordinada a la de $[C, \Gamma]$ de la manera siguiente: se definen los segmentos orientados $\{pq), s(pq) \cap H\}$ y $\{(qp), s(pq) \cap H\}$ correspondientes a los segmentos orientados $\{(pq), s(pq)\}$ y $\{(qp), s(qp)\}$ de los que proceden, y se dice que $\{(pq), s(pq) \cap H\} \equiv \{(qp), s(pq) \cap H\}$ si y sólo si $\{(pq), s(pq)\} \equiv \{(qp), s(qp)\}$ en la orientación de $[C, \Gamma]$.

Si $[H, \Omega]$ no posee ningún segmento reducido, no se puede orientar siguiendo el criterio de 1, y se considerará como orientación de $[H, \Omega]$ la orientación subordinada por $[C, \Gamma]$.

Si $[H, \Omega]$ tiene algún segmento reducido, entonces ya se puede orientar en sí misma, y se ha de demostrar que coinciden la orientación propia y la orientación subordinada. Pueden presentarse dos casos: que $[H, \Omega]$ y $[C, \Gamma]$ tengan algún segmento reducido común, o que no tengan ningún segmento reducido común. En el primer caso, se podrán considerar ambas, orientadas respecto al mismo segmento reducido, con lo cual aparecerán dos estructuras lineales determinativas de la orientación, una inducida de la subordinada y otra subordinada por la inducida en un mismo segmento de $[C, \Gamma]$. Pero puesto que estas dos estructuras lineales se ha demostrado que coinciden, también coinciden las orientaciones determinadas por ellas. En el segundo caso, si $s(pq) = \{p,q\}$ en $[H, \Omega]$, y $s(pq) \neq \{p, q\}$ en $[C, \Gamma]$, $s(pq) \cap H = H$ y $\bar{s}(pq) \cap H = \phi$ siendo $s(pq)$ y $\bar{s}(pq)$ los segmentos de extremos p y q en $[C, \Gamma]$. Por tanto, la estructura lineal inducida por $[H, \Omega]$ en H coincide con la estructura lineal subordinada por la estructura lineal inducida de $[C, \Gamma]$ en $s(pq)$, y esta será la determinativa de la orientación, ya que los segmentos contenidos en $\bar{s}(pq)$ no tienen ninguna significación en $[H, \Omega]$. Entonces se puede razonar en $s(pq)$ igual que se razonó en el caso anterior en C.

3. *Orientación de una estructura circular que no posee ningún segmento reducido*

Si $[C, \Gamma]$ no posee ningún segmento reducido, se puede construir una estructura extensión de $[C, \Gamma]$ que tenga un sólo segmento reducido y que se puede orientar respecto a este segmento reducido. Puesto que $[C, \Gamma]$ es una estructura subordinada, admitirá la orientación subordinada que por definición se tomará como orientación de $[C, \Gamma]$.

La orientación de $[C, \Gamma]$ es independiente de cual sea el punto C que se haya elegido para formar la estructura extensión, pues si a y b son dos puntos distintos de C, haciendo dos adjunciones simbólicas sucesivas de $\{p\}$ y $\{q\}$ en los elementos $\{a\}$ y $\{b\}$ se tiene el conjunto $C \cup \{p\} \cup \{q\}$; la estructura extensión obtenida por las dos extensiones sucesivas tiene dos segmentos reducidos $s(ap) = \{a, p\}$ y $s(bq) = \{b, q\}$. Puesto que la orientación circular establecida así es independiente del segmento reducido que se haya tomado para definirla, la orientación en la doble extensión, así determinada, es única, y por tanto, también lo es en cada una de las subordinadas sucesivas. Con ello queda univocamente determinada una orientación en $[C, \Gamma]$.

De todas las consideraciones hechas se deduce que : En una estructura circular es posible definir de manera unívoca una relación de orientación con dos sentidos, es decir, en este aspecto se puede afirmar que una estructura circular es orientable.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. LINÉS. — *Estructuras lineales y su orientación.* Collectanea Mathematica. (Vol. XVI - Fasc. 1.º Año 1964).

[2] BORSUK, K. and SZMIELEW, W. — *Fundations of Geometry.* Amsterdam, 1960.

[3] HILBERT, D. — *Grundlagen der Geometrie.* 8 Auflage. Stuttgart, 1956.

[4] PICKERT, G. — *Projektive Ebenen.* Berlín-Göttingen-Heidelberg.