SINGULARIDADES DE UNA HOJA DE SUPERFICIE ALGEBRAICA A PARTIR DE SU SERIE DE PUISEUX

por

E. CASAS ALVERO

INTRODUCCIÓN. En un artículo anterior ([1]) se ha efectuado un estudio de las singularidades unidimensionales de una superficie algebraica; si S es una superficie irreducible sumergida en una variedad de dimensión tres, V_3, y C es una curva de S simple en V_3, se presenta un número finito de hojas de S con origen en C, cada una de ellas está constituida por C y una curva de cada uno de los entornos de C en S. Dichas hojas son el análogo de las ramas de curvas y a cada una de ellas viene también asociada una serie de Puiseux. Mostraré aquí como, a partir de la serie de Puiseux de la hoja, quedan determinadas las curvas infinitamente próximas a C que la componen, así como sus grados y multiplicidades, en un proceso análogo al de ENRIQUES ([2], libro IV, cap. 1). En particular aparecerá, como para las curvas planas, la distinción entre curvas infinitamente próximas libres y satélites. La singularidad de una superficie a lo largo de una de sus curvas admite una descripción por un diagrama análogo al introducido por ENRIQUES (loc. cit.) para las curvas planas.

Mientras no se advierta lo contrario seguiremos bajo las mismas hipótesis y con las mismas notaciones y terminología de [1].

1.— LA SERIE DE PUISEUX

Sea S una superficie irreducible de una variedad irreducible de dimensión tres, V_3, C una curva irreducible de S simple en V_3 y ζ una hoja de S con origen en C. Supondremos, como en [1], representado el completado del anillo local θ de C en V_3 como un anillo de series, $\hat{\theta} \simeq K'[[x, y]]$; K' es isomorfo, a través del paso al cociente, al cuerpo de funciones racionales de C, $K = k(C)$. Asimismo el completado del anillo terminal de la hoja será $\Omega[[t]]$, donde, a través del morfismo canónico $K'[[x, y]] \to \Omega[[t]]$, Ω es una extensión algebraica de K' de grado igual al grado ϱ de ζ.

Identificaremos K' con K a través del morfismo de paso al cociente, con ello podemos identificar Ω con el cuerpo terminal de la hoja como extensiones de $K' = K$, y el cuerpo de funciones racionales de cualquier curva de la hoja se identificará a una extensión de K contenida en Ω.

La serie de Puiseux de ζ tiene la forma

$$\sum_{i \geq \nu} a_i \left(\frac{x}{c}\right)^{i/\nu} \tag{1}$$

donde ν es el orden aparente de la hoja, las a_i y c son elementos de Ω y no existe factor común a ν y todos los numeradores i correspondientes a términos no nulos ([1], corolario II.5).

Como para curvas planas, si $\nu > 1$, llamaremos primer exponente característico de la serie al menor exponente no entero que aparezca en un término no nulo de la misma, sea $\nu'/\nu = \alpha_1'/\alpha_1$ en forma irreducible. El segundo exponente característico será el menor, correspondiente a un término no nulo, que no admita denominador α_1; lo escribiremos en la forma $\alpha_2'/\alpha_1\alpha_2$ con *m.c.d.* $(\alpha_2, \alpha_2') = 1$ y $\alpha_2 > 1$. Así sucesivamente, el último exponente característico tendrá la forma $\alpha_q'/\alpha_1 \dots \alpha_q$ con *m.c.d.* $(\alpha_q', \alpha_q) = 1$, $\alpha_q > 1$ y $\alpha_1 \dots \alpha_q = \nu$. Obviamente, si $\nu = 1$, la serie carece de exponentes característicos.

Será conveniente escribir la serie de Puiseux poniendo en evidencia los exponentes característicos, en la forma

$$\begin{aligned} A_1 x + \dots + A_h x^h + A_{1,0}\left(\frac{1}{c}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1} x^{\alpha_1'/\alpha_1} + \dots + A_{1,h_1}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_1'+h_1}{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1'+h_1}{\alpha_1}} \\ + A_{2,0}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} x^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} + \dots + A_{2,h_2}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_2'+h_2}{\alpha_1\alpha_2}} x^{\frac{\alpha_2'+h_2}{\alpha_1\alpha_2}} + \dots \\ + A_{q,0}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_q'}{\alpha_1\cdots\alpha_q}} x^{\frac{\alpha_q'}{\alpha_1\cdots\alpha_q}} + \sum_{i>0} A_{q,i}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_q'+i}{\alpha_1\cdots\alpha_q}} x^{\frac{\alpha_q'+i}{\alpha_1\cdots\alpha_q}} \end{aligned} \tag{2}$$

donde $A_i = a_{\nu i}/c^i$, $i = 1, \dots, h$ y los restantes coeficientes son los de la expresión (1). Por hipótesis $A_{j,0} \neq 0$ y $1 = m.c.d.\ (\alpha_j, \alpha_j')$ para $j = 1, \dots, q$.

Escribiendo términos nulos si es necesario, supondremos que $\alpha_1 h < \alpha_1' < \alpha_1(h+1)$ y $\alpha_j(h_{j-1} + \alpha'_{j-1}) < \alpha_j' < \alpha_j(h_{j-1} + \alpha'_{j-1} + 1)$ para $j = 2, \dots, q$.

En el caso $\nu = 1$ entenderemos que en la expresión (2) es $h = \infty$, $q = 0$ y no existen los términos con coeficientes $A_{i,j}$.

Para cada $j, j = 1, \ldots, q$, supondremos elegidos enteros β_j y β_j' de manera que

$$1 = \alpha_j \beta_j + \alpha_j' \beta_j' \qquad j = 1, \ldots, q \tag{3}$$

Las conjugadas de la serie de Puiseux tendrán la forma

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma(A_i)\, x^i + \sum_{i=0}^{h_1} \sigma(A_{1,i}) \left(\frac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_1' + i}{\alpha_1}} \varepsilon^{\frac{\nu(\alpha_1' + i)}{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1' + i}{\alpha_1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{h_2} \sigma(A_{2,i}) \left(\frac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_2' + i}{\alpha_1 \alpha_2}} \varepsilon^{\frac{\nu(\alpha_2' + i)}{\alpha_1 \alpha_2}} x^{\frac{\alpha_2' + i}{\alpha_1 \alpha_2}} + \ldots +$$

$$+ \sum_{i \geq 0} \sigma(A_{q,i}) \left(\frac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_q' + i}{\alpha_1 \ldots \alpha_q}} \varepsilon^{\frac{\nu(\alpha_q' + i)}{\alpha_1 \ldots \alpha_q}} x^{\frac{\alpha_q' + i}{\alpha_1 \ldots \alpha_q}}$$

donde σ es una de las ϱ inmersiones de Ω en la clausura algebraica $\bar{\bar{K}}$ de K que extienden la inclusión $K \to \bar{\bar{K}}$, y ε es una raiz ν-ésima de la unidad.

Al escribir las conjugadas debe suponerse elegida, para cada ν, una determinación de $\sigma(c)^{1/\nu}$; variando dicha elección no se produce más que una permutación entre las conjugadas correspondientes a una misma σ. Más adelante haremos uso de esta posibilidad de elección para simplificar algunos cálculos.

Si ε es una raiz ν-ésima de la unidad, convendremos en escribir $\varepsilon_j = \varepsilon^{\nu/\alpha_1 \cdots \alpha_j}$, $j = 1, \ldots, q$. Mientras ε recorre las raices ν-ésimas de la unidad, ε_j recorre las $\alpha_1 \ldots \alpha_j$-ésimas ($\nu/\alpha_1 \ldots \alpha_j$ veces).

2. — Las sumas parciales de las series conjugadas.

Sabemos ([1], corolario II.5) que las $\nu\varrho$ conjugadas de la serie de Puiseux son distintas entre si; obviamente, no ocurre lo mismo si se sustituyen las conjugadas por sus sumas parciales de un grado dado; determinaremos en primer lugar el número de sumas parciales distintas para cada grado, o, equivalentemente, el orden de polidromía de cada suma parcial de la serie de Puiseux considerada como función algebraica del punto de la curva y la variable x.

Las sumas parciales de grado igual o inferior a h no presentan ninguna dificultad: si $K_j = K(A_1, \ldots, A_j)$, $j = 1, \ldots, h$, y $\varrho_j = [K_j$

$: K]$, inmediatamente se observa que el número de sumas parciales distintas de grado j es ϱ_j. Si $\nu = 1$ el cálculo concluye aquí, para cierto j, ϱ_j alcanza su máximo ϱ.

Suponiendo que exista algún exponente característico, consideremos dos sumas parciales de grado α_1'/α_1 :

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{i=1}^{h} \sigma_1 (A_i)\, x^i + \sigma_1 (A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma (c)}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1} \varepsilon_1^{\alpha_1'}\, x^{\alpha_1'/\alpha_1} \\ \textstyle\sum_{i=1}^{h} \sigma_2 (A_i)\, x^i + \sigma_2 (A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma (c)}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1} \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'}\, x^{\alpha_1'/\alpha_1}\end{gathered} \tag{4}$$

donde σ_1 y σ_2 son inmersiones de Ω en $\overline{K}$ sobre K y ε_1 y $\bar{\varepsilon}_1$ provienen de raíces ν-ésimas de la unidad según hemos convenido.

La coincidencia de las dos sumas equivale a

$$\sigma_{1\,|K_h} = \sigma_{2\,|K_h}, \quad \sigma_1 (A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1 (c)}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1} \varepsilon_1^{\alpha_1'} = \sigma_2 (A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2 (c)}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1} \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'}$$

De la segunda condición se obtiene

$$\sigma_1 \left(\frac{A_{1,0}^{\alpha_1}}{c^{\alpha_1'}}\right) = \sigma_2 \left(\frac{A_{1,0}^{\alpha_1}}{c^{\alpha_1'}}\right)$$

es decir, si $K_{1,0} = K_h [A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'}]$, de coincidir las dos sumas parciales, se tiene $\sigma_{1\,|K_{1,0}} = \sigma_{2\,|K_{1,0}}$. Reciprocamente, si se verifica esta última condición resulta $\sigma_1 (A_i) = \sigma_2 (A_i)$, $i = 1, \ldots, h$ y

$$\sigma_1 (A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1 (c)}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1} = \eta\, \sigma_2 (A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2 (c)}\right)^{\alpha_1'/\alpha_1}$$

con $\eta^{\alpha_1} = 1$. Teniendo en cuenta que tanto $\varepsilon_1^{\alpha_1'}$ como $\bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'}$ recorren las raíces α_1-ésimas de la unidad al variar ε_1 y $\bar{\varepsilon}_1$ ($m.c.d\ (\alpha_1, \alpha_1') = 1$), cada una de las sumas parciales correspondientes a σ_1 coincide con una de las correspondientes a σ_2. El número de sumas parciales de grado α_1'/α_1 es pues $\varrho_{1,0}\, \alpha_1$ con $\varrho_{1,0} = [K_{1,0} : K]$,

Para cada familia $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ de inmersiones de Ω en K coincidentes en $K_{1,0}$ ($l = \varrho/\varrho_{1,0}$ por lo tanto) convendremos en elegir la determinación de cada $\sigma_i (c)^{1/\alpha_1}$ de manera que se verifique

$$\frac{\sigma_i (A_{1,0})}{\sigma_i (c)^{\alpha_1'/\alpha_1}} = \frac{\sigma_j (A_{1,0})}{\sigma_j (c)^{\alpha_1'/\alpha_1}} \qquad i, j = 1, \ldots, l \tag{5}$$

De este modo dos sumas parciales de grado α_1'/α_1 correspondientes a σ_i y σ_j coinciden si y solo si coinciden las raices de la unidad que figuran en ellas, es decir, en las sumas (4), supuesto $\sigma_{1\,|K_{1,0}} = \sigma_{2\,|K_{1,0}}$, hay coincidencia si y solo si $\varepsilon_1^{\alpha_1'} = \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'}$, esto es, si y solo si $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ (1).

Si σ_1 y σ_2 son dos inmersiones de Ω en K coincidentes sobre $K_{1,0}$, de la relación (5) resulta

$$\sigma_1\left(A_{1,0}^{\beta_1'}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\beta_1'\alpha_1'}{\alpha_1}} = \sigma_2\left(A_{1,0}^{\beta_1'}\right)\left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\beta_1'\alpha_1'}{\alpha_1}}$$

y, utilizando (3),

$$\sigma_1\left(A_{1,0}^{\beta_1'}\,c^{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{1/\alpha_1} = \sigma_2\left(A_{1,0}^{\beta_1'}\,c^{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{1/\alpha_1}$$

Haciendo

$$H_1 = A_{1,0}^{\beta_1'}\,c^{\beta_1} \in \Omega$$

tendremos

$$\frac{\sigma_1(H_1)}{\sigma_1(c)^{1/\alpha_1}} = \frac{\sigma_2(H_1)}{\sigma_2(c)^{1/\alpha_1}} \tag{6}$$

Pasemos ahora a considerar dos sumas parciales de grado $\dfrac{\alpha_1' + j}{\alpha_1}$ ($j \leqslant h_1$ si $q > 1$):

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma_1(A_i)\,x^i + \sum_{i=0}^{j} \sigma_1(A_{1,i})\left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \varepsilon_1^{\alpha_1'+i}\, x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}}$$

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma_2(A_i)\,x^i + \sum_{i=0}^{j} \sigma_2(A_{1,i})\left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'+i}\, x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}}$$

Su coincidencia equivale a la de las correspondientes sumas parciales de grado α_1'/α_1 y a las relaciones

$$\varepsilon_1^{\alpha_1'+i}\,\sigma_1(A_{1,i})\,\sigma_2(c)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} = \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'+i}\,\sigma_2(A_{1,i})\,\sigma_1(c)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}},\quad i = 1,\ldots,j \tag{7}$$

Al coincidir las sumas parciales de grado α_1'/α_1, según hemos convenido, $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ y vale (6), de modo que las (7) se convierten en

$$\sigma_1\left(\frac{A_{1,i}}{H_1^{\alpha_1'+i}}\right) = \sigma_2\left(\frac{A_{1,i}}{H_1^{\alpha_1'+i}}\right) \quad i = 1,\ldots,j$$

---

(1) Conviene observar que todavía puede elegirse libremente la determinación de uno de los $\sigma_i(c)^{1/\alpha_1}$, fijada esta quedan fijadas las restantes; tampoco quedan fijadas completamente las determinaciones de los $\sigma_i(c)^{1/\nu}$ ni las razones entre ellos si $\alpha_1 < \nu$.

y de ahí resulta inmediatamente que el número de sumas parciales de grado $(\alpha_1' + j)/\alpha_1$, $j \leqslant h_1$ ó $q = 1$, es $\alpha_1 \varrho_{1,j}$ donde $\varrho_{1,j}$ es el grado de $K_{1,j} = K_{1,0}[A_{1,1}/H_1^{\alpha_1'+1}, \ldots, A_{1,j}/H_1^{\alpha_1'+j}]$ sobre K.

El cálculo concluye aquí si $q = 1$; en caso contrario pasemos a considerar dos sumas parciales de grado $\alpha_2'/\alpha_1 \alpha_2$:

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma_1(A_i)\, x^i + \sum_{i=0}^{h_1} \sigma_1(A_{1,i}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \varepsilon_1^{\alpha_1'+i}\, x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} +$$
$$+ \sigma_1(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} \varepsilon_2^{\alpha_2'}\, x^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}}$$

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma_2(A_i)\, x^i + \sum_{i=0}^{h_1} \sigma_2(A_{1,i}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'+i}\, x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} +$$
$$+ \sigma_2(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} \bar{\varepsilon}_2^{\alpha_2'}\, x^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}}$$

Su coincidencia equivale a la de las sumas parciales de grado $(\alpha_1' + h_1)/\alpha_1$ y a la igualdad

$$\sigma_1(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} \varepsilon_2^{\alpha_2'} = \sigma_2(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} \bar{\varepsilon}_2^{\alpha_2'} \qquad (9)$$

Al coincidir σ_1 y σ_2 sobre $K_{1,0}$, $\varepsilon_2^{\alpha_2} = \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2^{\alpha_2}$ y de (9) resulta

$$\sigma_1(A_{2,0}^{\alpha_2}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1}} = \sigma_2(A_{2,0}^{\alpha_2}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1}} \qquad (10)$$

relación que, habida cuenta de la (6), se convierte en la

$$\sigma_1\left(\frac{A_{2,0}^{\alpha_2}}{H_1^{\alpha_2'}}\right) = \sigma_2\left(\frac{A_{2,0}^{\alpha_2}}{H_1^{\alpha_2'}}\right) \qquad (11)$$

Recíprocamente, si se verifica (11) y coinciden las sumas parciales de grado $(\alpha_1' + h_1)/\alpha_1$, se verifica (10) y se tiene una relación de la forma

$$\sigma_1(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} = \eta\, \sigma_2(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} \qquad (12)$$

con $\eta^{\alpha_2} = 1$. Con ello, fijada la suma parcial de grado $(\alpha_1' + h_1)/\alpha_1$ coincidente en ambas series, es $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 : \varepsilon_2^{\alpha_2'}$ y $\bar{\varepsilon}_2^{\alpha_2'}$ recorren las raíces α_2-ésimas de $\varepsilon_1^{\alpha_2'} = \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_2'}$ y la relación (12) fuerza que cada una de las α_2 sumas parciales con σ_1, al variar ε_2, coincida con una de las α_2 sumas parciales con σ_2. El número de sumas parciales de grado $\alpha_2'/\alpha_1 \alpha_2$ es pues, si $K_{2,0} = K_{1,h_1}[A_{2,0}^{\alpha_2}/H_1^{\alpha_2'}]$,

$$\alpha_1 \varrho_{1,h_1} \cdot [K_{2,0} : K_{1,h_1}] \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 \varrho_{2,0}$$

donde $\varrho_{2,0} = [K_{2,0} : K]$.

Tenemos ahora la posibilidad de elegir entre las α_2 determinaciones de $((1/\sigma(c))^{1/\alpha_1})^{1/\alpha_2}$, para cada σ; como en el caso anterior, para las inmersiones cuyas restricciones a $K_{2,0}$ coincidan, se verifican relaciones de la forma (10) y elegiremos las determinaciones de manera que si σ_1 y σ_2 son dos inmersiones cualesquiera cuyas restricciones a $K_{2,0}$ coinciden, se verifique

$$\sigma_1(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sigma_2(A_{2,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1 \alpha_2}} \tag{13}$$

De este modo, la coincidencia de dos sumas parciales de la forma (8) entraña $\varepsilon_2^{\alpha_2'} = \bar{\varepsilon}_2^{\alpha_2'}$, es decir, al ser $\varepsilon_2^{\alpha_2} = \bar{\varepsilon}_2^{\alpha_2}$ y m.c.d. $(\alpha_2, \alpha_2') = 1$, $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2$.

De (13) tenemos

$$\sigma_1(A_{2,0}^{\beta_2'}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{\alpha_2' \beta_2'}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sigma_2(A_{2,0}^{\beta_2'}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{\alpha_2' \beta_2'}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

relación que con la segunda de las (3) es

$$\sigma_1(A_{2,0}^{\beta_2'})\ \sigma_1(c)^{\frac{\beta_2}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sigma_2(A_{2,0}^{\beta_2'})\ \sigma_2(c)^{\frac{\beta_2}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

y, utilizando (6)

$$\sigma_1(A_{2,0}^{\beta_2'}\ H_1^{\beta_2}) \left(\frac{1}{\sigma_1(c)}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sigma_2(A_{2,0}^{\beta_2'}\ H_1^{\beta_2}) \left(\frac{1}{\sigma_2(c)}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Llamando

$$H_2 = A_{2,0}^{\beta_2'}\ H_1^{\beta_2} \in \Omega$$

tendremos

$$\frac{\sigma_1(H_2)}{\sigma_1(c)^{1/\alpha_1 \alpha_2}} = \frac{\sigma_2(H_2)}{\sigma_2(c)^{1/\alpha_1 \alpha_2}} \tag{14}$$

Puede proseguirse ahora de la misma forma, utilizando en primer lugar la (14) como se ha hecho con la (6) y repitiendo con los sucesivos términos con exponentes característicos los cálculos efectuados hasta ahora. En particular será $K_{j,0} = K_{j-1,h_{j-1}} [A_{j,0}^{\alpha_j}/H_{j-1}^{\alpha_j'}]$ y se eligirán las determinaciones de manera que si σ_1 y σ_2 coinciden sobre $K_{j,0}$, se tenga

$$\sigma_1 (A_{j,0}) \left(\frac{1}{\sigma_1 (c)}\right)^{\frac{\alpha_j'}{\alpha_1 \ldots \alpha_j}} = \sigma_2 (A_{j,0}) \left(\frac{1}{\sigma_2 (c)}\right)^{\frac{\alpha_j'}{\alpha_1 \ldots \alpha_j}}$$

Se convendrá en tomar

$$H_j = A_{j,0}^{\beta_j'} H_{j-1}^{\beta_j} \in \Omega$$

resultando

$$\frac{\sigma_1 (H_j)}{\sigma_1 (c)^{\frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_j}}} = \frac{\sigma_2 (H_j)}{\sigma_2 (c)^{\frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_j}}}$$

Por definición:

$$K_{j,i} = K_{j,0} [A_{j,1}/H_j^{\alpha_j'+1}, \ldots, A_{j,i}/H_j^{\alpha_j'+i}]$$

con $1 \leqslant i \leqslant h_j$ si $j < q$ ó $1 \leqslant i$ si $j = q$.

De este modo, el número de sumas parciales de grado $(\alpha_j' + i)/\alpha_1 \ldots \alpha_j$ $(i \leqslant h_j$ si $j < q)$ será

$$\alpha_1 \ldots \alpha_j \varrho_{j,i}$$

donde $\varrho_{j,i} = [K_{j,i} : K]$. El resultado es válido para $j = 0$ si se conviene en tomar $\varrho_{0,i} = \varrho_i$ y $\prod_{s=1}^{0} \alpha_s = 1$.

3. — Resultados auxiliares

Los lemas que siguen resultarán de utilidad a la hora de establecer la estructura de una hoja a partir de su serie de Puiseux.

Sea dada una expresión $f(x) = \sum_{i=\nu}^{m} a_i (x/c)^{i/\nu}$ donde los a_i y c son algebraicos sobre K, $a_\nu \neq 0$ y suponemos que ν no tiene factor en común con el máximo común divisor de los exponentes i para los que $a_i \neq 0$. En particular $f(x)$ puede ser una suma parcial de de una serie de Puiseux. Consideremos las expresiones

$$f_\varepsilon^\sigma (x) = \sum_{i=\nu}^{m} \sigma (a_i) \left(\frac{x}{\sigma (c)}\right)^{i/\nu} \varepsilon^i$$

donde σ recorre las inmersiones sobre K de $K(a_1, \ldots, a_m, c)$ en $\overline{K}$ y ε las raíces ν-ésimas de la unidad. (Como para las conjugadas de la serie de Puiseux, suponemos elegida una determinación de $\sigma(c)^{1/\nu}$ para cada σ, sin que importe cual de las determinaciones se elija). El número de f_ε^σ distintas es un múltiplo de ν, sea $\varrho\nu$: ello resulta de observar que, fijado σ, las f_ε^σ distintas son en número de ν, o también del cálculo completo del número de las f_ε^σ efectuado como en el § anterior. Tenemos:

LEMA 1. *Existe una superficie irreducible S, dotada de una sola hoja con origen en C, de grado ϱ y orden aparente ν, cuya serie de Puiseux tiene por suma parcial de grado m a $f(x)$.*

Demostración. Sea $G(x,y) = \prod (y - f_\varepsilon^\sigma(x))$, con el producto extendido a ϱ de las inmersiones σ y a las ν raíces de la unidad, de manera que aparezcan en los factores los $\varrho\nu$ f_ε^σ distintos. Observemos en primer lugar que $G(x,y) \in K[x,y]$: cada uno de los factores $G_\sigma = \prod_\varepsilon (y - f_\varepsilon^\sigma(x))$ es un elemento de $\overline{K}[x^{1/\nu}, y]$ que permanece invariante por cualquier sustitución $x^{1/\nu} \longleftrightarrow \eta x^{1/\nu}$ con $\eta^\nu = 1$, lo que obliga a que solo presente potencias enteras de x y sea en realidad un elemento de $\sigma(K(a_1, \ldots, a_m, c))[x,y]$. Así G es un polinomio en x, y con coeficientes en la mínima extensión normal de K en $\overline{K}$ que contiene a uno de los $\sigma(K(a_1, \ldots, a_m, c)$ puesto que al no presentar más que potencias enteras de x, sus coeficientes son racionales en los $\sigma(a_i)$, $\sigma(c)$ (variando σ). Basta observar ahora que los elementos del grupo de Galois de la mencionada extensión normal permutan entre si los f_ε^σ y dejan por ello a G invariante.

Sabido ya que $G(x,y) \in K[x,y] \subset K[[x,y]]$, considerado este último anillo como el completado de θ, anillo local de C en V_3, existen elementos en θ cuya diferencia con G es una serie de orden arbitrariamente alto: tomemos $F \in \theta$ tal que *ord* $(F - G) > m\varrho$; Existe una superficie S' cuya ecuación local en un entorno del punto genérico de C es F; por otra parte las formas iniciales de F y G coinciden: en estas condiciones la forma inicial de F es de grado $\varrho\nu$ y en ella aparecen los términos en $x^{\varrho\nu}$ e $y^{\varrho\nu}$; podemos considerar las series de Puiseux de las diversas hojas de S' (o de sus componentes) con origen en C y escribir $F = u \prod_i (y - P_i(x))$ donde u es una serie inversible y las P_i son las conjugadas de las mencionadas series de Puiseux ([1], II.3). Elegida una cualquiera de las σ, al ser $G(x, f_1^\sigma(x)) = 0$, resulta $ord_x F(x, f_1^\sigma(x)) > m\varrho$ y por ello, para cierto i

$ord_x(f_1^\sigma(x) - P_i(x)) > m/\nu$. Asi los términos iniciales de P_i son los prescritos, existe una hoja de S' con origen en C cuya serie de Puiseux se inicia por $f(x)$: el número de conjugadas de dicha serie no puede ser inferior a $\varrho\nu$, que por otra parte es el grado de la forma inicial de F; asi S' consta de una sola hoja con origen en C cuya serie de Puiseux se inicia por $f(x)$. En particular S' tiene una única componente en un entorno del punto genérico de C, si S es dicha componente, S satisface las condiciones del enunciado.

LEMA 2. *Sean $C_1, \ldots, C_m$ curvas infinitamente próximas a C en V_3, C_1 en el primer entorno de C y cada C_i en el primer entorno de C_{i-1}. Existe una superficie irreducible S que contiene a C, $C_1, \ldots, C_{m-1}$* y *no contiene a C_m. Además S puede elegirse de manera que contenga simplemente a C_{m-1}.*

Demostración. Considerando las sucesivas transformadas de V_3 en las que se hallan las C_i,

$$V_3 \leftarrow V_3' \leftarrow V_3'' \leftarrow \ldots \leftarrow V_3^{m-1)} \leftarrow V_3^{m)}$$

C_{m-1} es una curva propia y simple de V_3^{m-1}, una superficie genérica de $V_3^{m-1)}$ por C_{m-1} la contiene simplemente sin contener a C_m; basta tomar la imagen de dicha superficie en V_3.

LEMA 3. *El grado sobre C de una curva infinitamente próxima C_m es el mínimo de los grados de las hojas con origen en C que la contienen.*

Demostración. Obviamente el grado de cualquier hoja por C_m es no inferior al de C_m sobre C. Sea S una superficie irreducible que pase por C y contenga a C_m simplemente (lema 2), todas las curvas que sucedan a C_m sobre S coinciden con C_m ([1], I.4) y el grado de la única hoja de S que contiene a C_m coincide con el de C_m sobre C.

LEMA 4. *Sea ζ una hoja con origen en C que contenga a una curva infinitamente próxima C_m; el producto del grado de C_m sobre C y su multiplicidad en ζ es el mínimo alcanzado por la multiplicidad de intersección de ζ, con las hojas con origen en C que contenga a C_m, no absorbida en curvas anteriores.*

Demostración. Teniendo en cuenta la fórmula de Noether ([1], II,10), basta probar que el pretendido mínimo se alcanza: si C_{m+1} es la curva que sigue a C_m en ζ, ello ocurre para la hoja por C_m de una superficie irreducible que pase simplemente por C_m y no contenga a C_{m+1}.

4. — Primeros cálculos de multiplicidad de intersección

Calculemos en primer lugar la multiplicidad de intersección de ζ, cuya serie de Puiseux tomaremos, como en el § 2, en la forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{h} A_i x^i + \sum_{i=0}^{h_1} A_{1,i} \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_1' + i}{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1' + i}{\alpha_1}} + \ldots$$

con una hoja ξ, con origen en C, grado δ y orden aparente μ, cuya serie de Puiseux sea

$$Q(x) = B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_j x^j + M_{j+1} \left(\frac{x}{D}\right)^{\mu'/\mu} + \ldots$$

con $j < \mu'/\mu \leqslant j+1$ y $j < h$. Haremos la hipótesis de que los $A_1, \ldots, A_j$ coinciden con los $B_1, \ldots, B_j$ a traves de un isomorfismo sobre K, i. e., existe un isomorfismo $K_j = K(A, \ldots, A_j) \simeq K(B_1, \ldots, B_j)$ que es la identidad sobre K y transforma A_i en B_i, $i = 1, \ldots, j$. Indicaremos dicha coincidencia, simbólicamente, en la forma $(A_1, \ldots, A_j) \equiv \equiv (B_1, \ldots, B_j)$ y diremos en este caso que las sumas parciales de grado j de $P(x)$ y $Q(x)$ coinciden. Obsérvese que la hipótesis $(A_1, \ldots, A_j) \equiv \equiv (B_1, \ldots, B_j)$ equivale a la coincidencia de las sumas parciales de grado igual o inferior a j de las conjugadas de $P(x)$ con sus correspondientes de $Q(x)$; el número de sumas parciales de grado $i \leqslant j$ de las conjugadas, es el mismo para P y Q, a saber, $\varrho_i = [K_i : K]$. Supondremos además μ'/μ no entero o $(B_1, \ldots, B_j, M_{j+1}/D^{j+1}) \not\equiv \not\equiv (A_1, \ldots, A_j, A_{j+1})$. Admitiremos el caso $j = 0$ en el que necesariamente $\mu'/\mu = 1$.

Recordemos ([1], cap. II, § 4) que la multiplicidad de intersección de ζ y ξ es el orden de infinitésimo, respecto de x, del producto

$$\prod \left(P_\varepsilon^\sigma(x) - Q_{\bar\varepsilon}^\tau(x)\right) \tag{15}$$

donde $P_\varepsilon^\sigma(x)$ recorre las conjugadas de $P(x)$ y analogamente $Q_{\bar\varepsilon}^\tau(x)$ las de $Q(x)$.

El caso $j = 0$ se resuelve inmediatamente: todos los factores son de orden uno y la multiplicidad es el número de factores: $\nu\varrho\mu\delta$.

Si $j > 0$, observemos que fijada una de las conjugadas de $P(x)$, sea $P_\varepsilon^\sigma(x)$, las conjugadas de $Q(x)$ que tienen coincidente con ella la suma parcial de grado i $(i \leqslant j)$ son en número de $\mu\delta/\varrho_i$ ya que se presentan ϱ_i sumas parciales distintas de grado i entre las conjugadas de $Q(x)$. Resulta así que, de los $\nu\varrho\mu\delta$ factores de (15), contribuyen al producto con orden superior a i, $\nu\varrho\mu\delta/\varrho_i$. Teniendo en cuenta que los factores que contribuyen con orden superior a j lo hacen todos con orden μ'/μ (a causa de la hipótesis $\mu'/\mu < j + 1$ o $(A_1, \ldots, A_{j+1}) \not\equiv (B_1, \ldots, B_j, M_{j+1}/D^{j+1})$), la multiplicidad de intersección será:

$$(\nu\varrho\mu\delta - \nu\varrho\mu\delta/\varrho_1) + 2(\nu\varrho\mu\delta/\varrho_1 - \nu\varrho\mu\delta/\varrho_2) + \ldots + j(\nu\varrho\mu\delta/\varrho_{j-1} - \\ - \nu\varrho\mu\delta/\varrho_j) + \frac{\mu}{\mu} \cdot \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_j}$$

y tenemos:

PROPOSICIÓN 1. *La multiplicidad de intersección de ζ con la hoja ξ con origen en C, orden aparente μ, grado δ y serie de Puiseux*

$$Q(x) = \textstyle\sum_{i=1}^{j} B_i x^i + M_{j+1}\left(\frac{x}{D}\right)^{\mu'/\mu} + \ldots, \quad \mu'/\mu \leqslant j + 1, \quad 0 \leqslant j < h$$

en la hipótesis de que sea $(A_1, \ldots, A_j) \equiv (B_1, \ldots, B_j)$ y además $\mu'/\mu < j + 1$ o bien $(A_1, \ldots, A_{j+1}) \not\equiv (B_1, \ldots, B_j, M_{j+1}/D^{j+1})$, es

$$\nu\varrho\mu\delta + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_1 + \ldots + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_{j-1} + (\mu'/\mu - j). \ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_j$$

Atendamos ahora al caso en que, con las mismas notaciones que hasta ahora, sea $j = h$, $(A_1, \ldots, A_h) \equiv (B_1, \ldots, B_h)$: repitiendo los cálculos anteriores hasta alcanzar los factores de (15) que contribuyen con orden superior a h, tenemos:

PROPOSICIÓN 2. *La multiplicidad de intersección de ζ con la hoja ξ, con origen en C, orden aparente μ, grado δ y serie de Puiseux*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{h} B_i x^i + M_{h+1}\left(\frac{x}{D}\right)^{\mu'/\mu} + \ldots$$

donde $\mu'/\mu \leqslant h + 1$ y $(A_1, \ldots, A_h) \equiv (B_1, \ldots, B_h)$, es superior o igual a

$$\nu\varrho\mu\delta + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_1 + \ldots + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_{h-1} + [min\,(\alpha_1'/\alpha_1, \mu'/\mu) - h]\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h$$

resultando superior solo en el caso en que $\mu'/\mu = \alpha_1'/\alpha_1$ y coincida alguna de las sumas parciales de grado α_1'/α_1 de las conjugadas de $P(x)$ con algunas de las sumas parciales del mismo grado de las conjugadas de $Q(x)$.

Más adelante analizaremos con mayor detenimiento el caso en que la multiplicidad de intersección resulte superior a la expresión del enunciado; por ahora basta señalar que, con una elección genérica de M_{h+1}, la multiplicidad de intersección es la del enunciado.

5. — Primeras curvas infinitamente próximas

Procederemos ahora a determinar un primer grupo de curvas infinitamente próximas a C sobre la hoja ζ, para la que seguiremos utilizando las notaciones introducidas en el § 1, curvas que veremos dependen de los coeficientes $A_1, \ldots, A_h$ de la serie de Puiseux de ζ.

Observemos en primer lugar que la multiplicidad de intersección de ζ con una hoja cualquiera de orden aparente μ, grado δ y serie de Puiseux

$$M_1 x + \ldots$$

es, por la proposición 1, superior o igual a $\nu\varrho\mu\delta$, en particular, cualquiera que sea ξ, superior o igual a $\nu\varrho$. Tomando ξ con $\mu = \delta = 1$ y $M_1 \not\equiv A_1$ (lema 1), la multiplicidad de intersección alcanza su mínimo $\nu\varrho$: aplicando el lema 4, la multiplicidad de C en ζ es $\nu\varrho$.

Sea ahora ξ de grado δ, orden aparente μ y serie de Puiseux

$$B_1 x + M_2 \left(\frac{x}{D}\right)^{\mu'/\mu} + \ldots, \; 1 < \mu'/\mu \leqslant 2$$

La multiplicidad de C en ξ será $\mu\delta$ y $\nu\varrho\mu\delta$ es la multiplicidad de intersección de ζ y ξ absorbida en C; si C_1 es la curva en el primer entorno de C en ζ, ξ contiene a C_1 si y solo si su multiplicidad de intersección con ζ es superior a $\nu\varrho\mu\delta$, lo que ocurre (proposición 1) si y solo si $A_1 \equiv B_1$. Aplicando el lema 1 se obtiene inmediatamente que el mínimo alcanzado por los grados de las hojas que contienen a C_1 es $\varrho_1 = [K(A_1) : K]$: por el lema 3, este es el grado de C_1 sobre C.

Comprobemos ahora que el cuerpo de funciones racionales de C_1 es $k(C_1) = K(A_1) = K_1$, con las notaciones del § 2 : observemos en primer lugar que, por el lema 1, existe una hoja de grado ϱ_1 cuya serie de Puiseux se inicia por $A_1 x$, el cuerpo terminal de dicha hoja es necesariamente $K(A_1)$ y al contener dicha hoja a C_1, debe ser $k(C_1) \subset K(A_1)$: la igualdad resulta de la comparación de los grados

Finalmente, para determinar la multiplicidad de C_1 en ζ, distinguiremos dos casos:

a) $h > 1$: utilizando la proposición 1, con $j = 1$, la multiplicidad de intersección de ζ con una hoja cualquiera ξ que contenga a C_1 es superior o igual a $\nu\varrho\mu\delta + (\mu' - \mu)\,\nu\varrho\mu\delta/\varrho_1$ donde necesariamente $\delta \geqslant \varrho_1$. Si se elige ξ de manera que sea $\mu = 1$, $\mu' = 2$, $\delta = \varrho_1$ y $(A_1, A_2) \not\equiv (B_1, M_2/D^2)$, la multiplicidad de intersección no absorbida en C alcanza su mínimo $\nu\varrho$. Resulta del lema 4 que la multiplicidad de C_1 en ζ es $\nu\varrho/\varrho_1$.

b) $h = 1$: en este caso la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en C es, por la proposición 2, superior o igual a $\frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_1}$ $(min\ (\alpha_1'/\alpha_1,\ \mu'/\mu) - 1)$. Escribiendo $\nu'/\nu = \alpha_1'/\alpha_1$, se comprueba fácilmente que la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en C es siempre superior o igual a $\varrho\,(\nu' - \nu)$ y alcanza este valor si se toma ξ con $\mu = 1$, $\mu' = 2$ y $\delta = \varrho_1$ (lema 1). Aplicando el lema 4, la multiplicidad de C_1 en ζ es $\varrho\,(\nu' - \nu)/\varrho_1$. Conviene observar que $\nu' - \nu$ es, por las convenciones adoptadas en el § 1, el resto de la división de ν' por ν.

Podemos proceder ahora por inducción: supongamos establecido que, si $i - 1 \leqslant h$, sobre la hoja ζ suceden a C curvas $C_1, \ldots, C_{i-1}$, cuyos cuerpos de funciones racionales son $K_1, \ldots, K_{i-1}$, sus grados sobre C, $\varrho_1, \ldots, \varrho_{i-1}$ y sus multiplicidades $\nu\varrho/\varrho_1, \ldots, \nu\varrho/\varrho_{i-1}$ si $h > i - 1$ o $\nu\varrho/\varrho_1, \ldots, \nu\varrho/\varrho_{i-2}$, $(\nu' - h\nu)\,\varrho/_{i-1}$ si $h = i - 1$ (notaciones del § 2). Supongamos establecido también que cualquier hoja ξ que contenga a $C_1, \ldots, C_{i-1}$, tiene una serie de Puiseux de la forma

$$B_1 x + \ldots + B_{i-1} x^{i-1} + M_i \left(\frac{x}{D}\right)^{\mu'/\mu} + \ldots \quad i - 1 < \mu'/\mu \leqslant i$$

con $(B_1, \ldots, B_{i-1}) \equiv (A_1, \ldots, A_{i-1})$.

Observemos en primer lugar que, aplicando a ξ la hipótesis de inducción, $C_1, \ldots, C_{i-1}$ tienen multiplicidades en ξ, respectivamente, $\mu\delta/\varrho_1, \ldots, \mu\delta/\varrho_{i-2}$, $(\mu' - (i - 1)\mu)\,\delta/\varrho_{i-1}$, si μ es el orden aparente y δ $(\geqslant \varrho_{i-1})$ el grado de ξ. Supongamos $i - 1 < h$ y procedamos a la determinación de la curva C_i en el iésimo entorno de C en ζ: la multiplicidad de intersección de ζ y ξ es, por la proposición 1, superior o igual a

$$\nu\varrho\mu\delta + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_1 + \ldots + (\mu'/\mu - i + 1)\,\nu\varrho\mu\delta/\varrho_{i-1}$$

Esta suma corresponde exactamente a la multiplicidad de intersección de ζ y ξ absorbida en las curvas $C, C_1, \ldots, C_{i-1}$, según la fórmula de Noether; aplicando de nuevo la proposición 1, la multiplicidad de intersección de ζ y ξ supera la indicada si y solo si μ'/μ es entero (i. e., $\mu'/\mu = i$) y $(A_1, \ldots, A_i) \equiv (B_1, \ldots, B_{i-1}, M_i/D^i)$; las hojas ξ que contienen a $C, C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i$, quedan caracterizadas por poseer una serie de Puiseux de la forma

$$B_1 x + \ldots B_i x^i + M_{i+1} \left(\frac{x}{D}\right)^{\mu'/\mu} + \ldots \qquad (17)$$

con $i < \mu'/\mu \leqslant i + 1$ y $(A_1, \ldots, A_i) \equiv (B_1, \ldots, B_i)$. El grado δ de tal hoja no puede ser inferior a $\varrho_i = [K_{i-1}(A_i) : K]$ y seguiremos designando por μ su orden aparente. Conviene observar que la condición $(A_1, \ldots, A_i) \equiv (B_1, \ldots, B_i)$, en el supuesto de que la hoja contenga ya a C_{i-1}, equivale a la coincidencia de A_i y B_i como funciones algebraicas sobre C_{i-1}. De esta manera puede entenderse que el coeficiente A_i de la serie de Puiseux determina la posición de C_i respecto de C_{i-1}: una segunda hoja por C_{i-1} contiene a C_i, si y solo si en su serie de Puiseux aparece el término de grado i precediendo al primer exponente característico y su coeficiente coincide con A_i como función algebraica sobre C_{i-1}.

Pasemos ahora a la determinación del grado, cuerpo de funciones racionales y multiplicidad de C_i.

En primer lugar es obvio que toda hoja que contenga a C_i tiene grado no inferior a ϱ_i y el lema 1 permite establecer la existencia de una hoja de grado ϱ_i que contenga a C_i: por el lema 3, el grado de C_i sobre C es ϱ_i.

El cuerpo de funciones racionales de C_i es $k(C_i) = K_{i-1}(A_i) = K_i$: en efecto, la hoja de grado ϱ_i, orden aparente uno y serie de Puiseux

$$A_1 x + \ldots + A_i x^i + \ldots$$

tiene como cuerpo terminal a $K_{i-1}(A_i)$ y contiene a C_i; debe ser pues $k(C_i) \subset K_{i-1}(A_i)$ y ambos cuerpos tienen grado ϱ_i sobre K.

Distinguiremos ahora dos casos para determinar la multiplicidad de C_i en ζ:

a) $i < h$: Por la proposición 1, la multiplicidad de intersección de ζ con una hoja ξ de grado δ, orden aparente μ y serie de Puiseux (17), que contenga a C_i, es superior o igual a

$$\nu\varrho\mu\delta + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_1 + \ldots + \nu\varrho\mu\delta/\varrho_{i-1} + (\mu'/\mu - i)\,\nu\varrho\mu\delta/\varrho_i$$

Por la hipótesis de inducción, las curvas $C, C_1, \ldots, C_{i-1}$ tienen multiplicidades $\nu\varrho, \nu\varrho/\varrho_1, \ldots, \nu\varrho/\varrho_{i-1}$ en ζ y $\mu\delta, \mu\delta/\varrho_1, \ldots, \mu\delta/\varrho_{i-1}$ en ξ de modo que los sumandos que preceden al último son las multiplicidades de intersección absorbidas en $C, C_1, \ldots, C_{i-1}$: la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en curvas anteriores a C_i se mantiene superior o igual a $\nu\varrho$ (necesariamente $\delta \geqslant \varrho_i$). Tomando ξ con $\mu = 1$, $\mu' = i + 1$, $\delta = \varrho_i$ y $(A_1, \ldots, A_{i+1}) \not\equiv (B_1, \ldots, B_i, M_{i+1}/D^{i+1})$ (lema 1), la multiplicidad de intersección no absorbida en $C, \ldots, C_{i-1}$ es exactamente $\nu\varrho$ y, por el lema 4, la multiplicidad de C_i en ζ es $\nu\varrho/\varrho_i$.

b) $i = h$. Calculando de nuevo la multiplidad de intersección con ξ, esta resulta ahora, por la proposición 2, superior o igual a

$$\nu\varrho\mu\delta + \nu\varrho\mu\delta/_1 + \ldots \nu\varrho\mu\delta/\varrho_{h-1} + (min\ (\alpha_1'/\alpha_1,\ \mu'/\mu) - h)\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h$$

y la multiplicidad de intersección no absorbida en $C, \ldots, C_{h-1}$ resulta no inferior a $(min\,(\alpha_1'/\alpha_1,\ \mu'/\mu) - h)\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h$. Escribiendo $\alpha_1'/\alpha_1 = \nu'/\nu$, se obtiene fácilmente que dicha multiplicidad es, en cualquier caso, superior o igual a $\varrho\,(\nu' - h\nu)$ y alcanza este valor si se toma ξ con $\mu = 1$, $\mu' = h + 1$ y $\delta = \varrho_h$: de ahí que la multiplicidad de C_h en ζ sea $(\nu' - h\nu)\ \varrho/\varrho_h$. Conviene observar también aquí que $\nu' - h\nu$ es el resto de la división entera de ν' por ν.

En el caso en que ζ es de orden aparente igual a la unidad, $\nu = 1$, $h = \infty$, quedan analizadas todas las curvas infinitamente próximas a C sobre ζ. Podemos resumir los resultados obtenidos hasta ahora en el siguiente

TEOREMA 1. *Sea ζ una hoja con origen en C, orden aparente ν, grado ϱ y serie de Puiseux*

$$A_1 x + \ldots + A_h x^h + A_{1,0} \left(\frac{1}{c}\right)^{\nu'/\nu} x^{\nu'/\nu} + \ldots$$

donde, según lo convenido en el § 1, $\nu'/\nu = \alpha_1'/\alpha_1$ es el primer exponente característico y $h < \nu'/\nu < h + 1$; sea ν_1 el resto de la división de ν' por ν, $\nu' = h\nu + \nu_1$. Suceden a C sobre ζ curvas infinitamente próximas $C_1, \ldots, C_h$, cuyos cuerpos de funciones racionales son, respectivamente, $K_i = K(A_1, \ldots, A_i)$, $i = 1, \ldots, h$. Las multiplicidades de $C, C_1, \ldots, C_{h-1}, C_h$ en ζ son respectivamente $\nu\varrho, \nu\varrho/\varrho_1, \ldots, \nu\varrho/\varrho_{h-1}, \nu_1\varrho/\varrho_h$, donde, para cada i, $\varrho_i = [K_i : K]$ es el grado de C_i sobre C. La posición de cada curva C_i $(i = 1, \ldots, h)$, respecto de la que la precede, viene dada por el coeficiente A_i de la serie, de modo que otra hoja con origen en C, que contenga a C_{i-1}, contiene a C_i si y solo si en su serie de Puiseux, el primer exponente característico es superior a i y el coeficiente del término de grado i coincide con A_i como función algebraica sobre C_{i-1} (2). *Si $\nu = 1$, se entenderá $h = \infty$.*

6.— El primer grupo de curvas satélites.

Supongamos a partir de ahora que el orden aparente ν de la hoja ξ es superior a la unidad, en cuyo caso existe el primer exponente

(2) Cualquier hoja que contenga a C_{i-1} tiene por cuerpo terminal una extensión finita de K_{i-1} y por ello el coeficiente mencionado es algebraico sobre K_{i-1}.

característico. Determinaremos ahora un grupo de curvas infinitamente próximas a C que suceden a C_h sobre ζ y que dependen del primer exponente característico. Dicho grupo queda descrito en el siguiente

TEOREMA 2. *Con las hipótesis y notaciones del teorema* 1, *sea además* $\nu > 1$ *y supongamos que al efectuar las sucesivas divisiones que conducen al cálculo del máximo común divisor de* ν *y* ν', *resulte*

$$\begin{aligned}
\nu' &= h\nu + \nu_1 \\
\nu &= m_1 \nu_1 + \nu_2 \\
\nu_1 &= m_2 \nu_2 + \nu_3 \\
&\;\;\vdots \\
\nu_{s-2} &= m_{s-1}\, \nu_{s-1} + \nu_s \\
\nu_{s-1} &= m_s\, \nu_s
\end{aligned}$$

En tal caso se presentan sobre ζ, *sucediendo a* C_{h-1}, *ordenadamente*:

$$m_1 \text{ curvas } \nu_1 \varrho/\varrho_h - \text{uples } C_h, \ldots, C_{h+m_1-1}$$

la primera de las cuales ha sido ya determinada,

$$m_2 \text{ curvas } \nu_2 \varrho/\varrho_h - \text{uples } C_{h+m_1}, \ldots, C_{h+m_1+m_2-1}$$

$$\vdots$$

$$m_s \text{ curvas } \nu_s\, \varrho/\varrho_h - \text{uples } C_{h+m_1+\ldots+m_{s-1}}, \ldots, C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$$

todas ellas de grado ϱ_h *sobre* C *y de manera que, mientras la posición de* C_h *respecto de* C_{h-1} *viene determinada por* A_h, *el paso de una hoja que contenga a* C_h *por una o varias de las restantes curvas no depende de coeficientes de su serie de Puiseux sino exclusivamente de la presencia en dicha serie de un término no nulo con exponente fraccionario, sucediendo al de grado h. Precisando, sea* ξ, *de orden aparente* μ *y grado* δ, *una hoja que contenga a* $C, C_1, \ldots, C_h$; *su serie de Puiseux será*

$$B_1 x + \ldots + B_h x^h + M_{h+1} \left(\frac{x}{D}\right)^{\nu'/\nu} + \ldots$$

con $h < \mu'/\mu \leqslant h + 1$. *Supondremos* $\mu'/\mu = h + 1$ *si* $M_{h+1} = 0$: *la hoja* ξ *contiene a* $C_{h+1}, \ldots, C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$ $(0 \leqslant i < s,\ 1 \leqslant t \leqslant m_{i+1}$ *y* $t < m_s$ *si* $i = s - 1)$ *sí y solo si, tomando* $\mu' - h\mu = \mu_1$, *pueden efectuarse las divisiones sucesivas*

$$\begin{aligned}
\mu\ &= d_1\,\mu_1 + \mu_2 \\
\mu_1 &= d_2\,\mu_2 + \mu_3 \\
&\ \,\vdots \\
\mu_{i-1} &= d_i\,\mu_i + \mu_{i+1} \\
\mu_i &= d_{i+1}\,\mu_{i+1} + \mu_{i+2}
\end{aligned}$$

obteniendose $d_1 = m_1, \ldots, d_i = m_i$ y además $d_{i+1} \geqslant t$ *si* $\mu_{i+2} \neq 0$ o $d_{i+1} \geqslant t + 1$ si $\mu_{i+2} = 0$.

Diremos, como en el caso de las curvas planas, que las curvas $C_{h+1}, \ldots, C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$ son satélites de C_h ya que el paso por parte de ellas de una hoja que contenga a C_h se produce independientemente de los coeficientes de su serie de Puiseux y solo en función del valor del primer exponente característico. Señalemos por ejemplo que las hojas de orden aparente uno no pueden contener a C_{h+1}, las hojas de la forma de ξ con $\mu'/\mu = h + 1/2$ contienen a C_{h+1} por el solo hecho de contener a C_h, etc. En cambio llamaremos libres a aquellas curvas cuya posición respecto a la precedente viene dada por uno de los coeficientes de la serie; este es el caso de $C_1, \ldots, C_h$.

Demostración del teorema 2. Procederemos por inducción sobre el entorno de C al que pertenezca la curva. De la proposición 2 y el teorema 1, sabemos que la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en $C, C_1, \ldots, C_h$ es

$$\begin{aligned}
&(min\ (\nu'/\nu,\ \mu'/\mu) - h)\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h - \nu_1\,\varrho\mu_1\,\delta/\varrho_h \\
=\ &min\ (\nu_1/\nu,\ \mu_1/\mu)\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h - \nu_1\,\varrho\mu_1\,\delta/\varrho_h \\
=\ &min\ (\nu/\nu_1,\ \mu/\mu_1)\ \nu_1\,\varrho\mu_1\,\delta/\varrho_h - \nu_1\,\varrho\mu_1\,\delta/\varrho_h \\
=\ &min\left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1,\ \frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)\nu_1\,\varrho\mu_1\,\delta/\varrho_h \qquad (18)
\end{aligned}$$

Por hipótesis $\nu/\nu_1 > 1$, de manera que esta última expresión es no nula sí y solo si $\mu \neq \mu_1$, lo que equivale a que en la división

$\mu = d_1 \mu_1 + \mu_2$ se tenga $d_1 \geqslant 1$, $\mu_2 \neq 0$ ó $d_1 \geqslant 2$, $\mu_2 = 0$. Está pues probada la parte del enunciado que se refiere a las hojas por C_{h+1} (caso $i = 0$, $t = 1$).

El grado de C_{h+1} se determina fácilmente, como en casos anteriores, toda hoja por C_{h+1} tiene grado no inferior a ϱ_h y, usando el lema 1, es inmediato determinar una hoja de grado ϱ_h que contenga a C_{h+1}.

Para calcular la multiplicidad de C_{h+1} en ζ, suponiendo que ξ contiene a C_{h+1}, escribamos (18) en la forma

$$min \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} + m_1 - 1, \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_1 - 1 \right) \nu_1 \varrho \mu_1 \delta / \varrho_h \tag{19}$$

y distingamos dos casos:

a) $m_1 > 1$: En la expresión (19), al variar ξ, se tiene $\delta \geqslant \varrho_h$ y $d_1 \geqslant 1$, teniendo en cuenta que $m_1 \geqslant 2$, al variar ξ, (19) se mantiene no inferior a $\nu_1 \varrho$, alcanzando este valor si se toma ξ con $d_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ (i. e., $\mu = 2$, $\mu' = 2h + 1$) y $\delta = \varrho_h$ (lema 1).

b) $m_1 = 1$: En este caso, necesariamente $s > 1$, i. e., $\nu_2 \neq 0$ y (19) es

$$min \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}, \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_1 - 1 \right) \nu_1 \varrho \mu_1 \delta / \varrho_h$$

y al variar ξ se mantiene superior o igual a $\nu_2 \varrho$ alcanzando este valor para la misma hoja ξ del caso anterior.

Aplicando el lema 4, la multiplicidad de C_{h+1} en ζ es $\nu_1 \varrho / \varrho_h$ si $m_1 > 1$, $\nu_2 \varrho / \varrho_h$ si $m_1 = 1$, de acuerdo con el enunciado, de modo que está probado el teorema para C_{h+1}.

Supongamos ahora probado el teorema para las curvas hasta $C_{h + m_1 + \ldots + m_i + t - 1}$ con $i < s$, $1 \leqslant t \leqslant m_{i+1}$ si $i < s - 1$, $1 \leqslant t \leqslant m_s - 1$ si $i = s - 1$, y pasemos a probarlo para $C_{h + m_1 + \ldots + m_i + t}$. Conviene distinguir dos casos en la demostración:

a) $t = 1$. Suponemos el teorema verificado para las curvas hasta $C_{h + m_1 + \ldots + m_i}$ y podemos suponer $i > 0$ ya que C_{h+1} ya ha sido tratada. Por hipótesis de inducción, si la hoja ξ contiene a $C_{h + m_1 + \ldots + m_i}$, será

$$\begin{gathered} \mu = d_1 \mu_1 + \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{i-2} = d_{i-1} \mu_{i-1} + \mu_i \\ \mu_{i-1} = d_i \mu_i + \mu_{i+1} \end{gathered} \tag{20}$$

con $d_1 = m_1, \ldots, d_{i-1} = m_{i-1}$, $d_i \geqslant m_i$ y $\mu_{i+1} \neq 0$ ó $d_i \geqslant m_i + 1$ si $\mu_{i+1} = 0$.

La multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en C_{h-1} y curvas anteriores es superior o igual a

$$min\ (\nu_1/\nu,\ \mu_1/\mu)\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h$$

resultando superior solo en el caso en que $\nu'/\nu = \mu'/\mu$. Tenemos:

$$min\ (\nu_1/\nu,\ \mu_1/\mu)\ \nu\varrho\mu\delta/\varrho_h = min\ (\nu/\nu_1,\ \mu/\mu_1)\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h =$$
$$= min\left(m_1 + \frac{\nu_2}{\nu_1},\ d_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h$$

Si $i > 1$, $m_1 = d_1$ y $\mu_2 \neq 0$ y se tiene

$$= m_1\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h + min\left(\frac{\nu_2}{\nu_1},\ \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h = m_1\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h +$$
$$+ min\left(\frac{\nu_1}{\nu_2},\ \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\nu_2\ \varrho\mu_2\ \delta/\varrho_h = m_1\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h +$$
$$+ min\left(m_2 + \frac{\nu_3}{\nu_2},\ d_2 + \frac{\mu_3}{\mu_2}\right)\nu_2\ \varrho\mu_2\ \delta/\varrho_h$$

si $i = 2$, el cálculo se detiene aquí, si $i > 2$, $m_2 = d_2$ y $\mu_3 \neq 0$ y se prosigue

$$= m_1\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h + m_2\ \nu_2\ \varrho\mu_2\ \delta/\varrho_h + min\left(\frac{\nu_2}{\nu_3},\ \frac{\mu_2}{\mu_3}\right)\nu_3\ \varrho\mu_3\ \delta/\varrho_h$$

hasta obtener, en cualquier caso

$$= m_1\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h + m_2\ \nu_2\ \varrho\mu_2\ \delta/\varrho_h + \ldots + m_{i-1}\ \nu_{i-1}\ \varrho\mu_{i-1}\ \delta/\varrho_h +$$
$$+ min\left(m_i + \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i},\ d_i + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)\nu_i\ \varrho\mu_i\ \delta/\varrho_h = m_1\ \nu_1\ \varrho\mu_1\ \delta/\varrho_h + \ldots +$$
$$+ m_{i-1}\ \nu_{i-1}\ \varrho\mu_{i-1}\ \delta/\varrho_h + m_i\ \nu_i\ \varrho\mu_i\ \delta/\varrho_h + min\left(\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i},\ d_i - m_i + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)\nu_i\ \varrho\mu_i\ \delta/\varrho_h$$

Debe tenerse en cuenta ahora que, por hipótesis de inducción, a C_{h-1} le siguen m_1 curvas $\nu_1\ \varrho/\varrho_h$ — uples en ζ y $\mu_1\ \delta/\varrho_h$ — uples en ξ, m_2 curvas $\nu_2\ \varrho/\varrho_h$ — uples en ζ y $\mu_2\ \delta/\varrho_h$ — uples en $\xi, \ldots$ etc., hasta m_i curvas $\nu_i\ \varrho/\varrho_h$ — uples en ζ y $\mu_i\ \delta/\varrho_h$ — uples en ξ, la última de las cuales es $C_{h+m_1+\ldots+m_i-1}$. En la expresión anterior se ha puesto pues en evidencia la multiplicidad de intersección absorbida en

$C_h, C_{h+1}, \ldots, C_{h+m_1+\ldots+m_i-1}$; la multiplicidad de intersección no absorbida en $C_{h+m_1+\ldots+m_i-1}$ ni en curvas anteriores es

$$min\left(\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}, d_i - m_i + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right) \nu_i \varrho\mu_i \delta/\varrho_h$$

o superior solo en el caso en que $\mu'/\mu = \nu'/\nu$. Si $d_i > m_i$, $\mu'/\mu \neq \nu'/\nu$ y esta última multiplicidad vale

$$\nu_{i+1} \varrho\mu_i \delta/\varrho_h$$

que es, teniendo en cuenta que $C_{h+m_1+\ldots+m_i}$ es entonces $\mu_i\delta/\varrho_h$ — uple en ξ y $\nu_{i+1}\varrho/\varrho_h$ — uple en ζ, la multiplicidad de intersección absorbida en $C_{h+m_1+\ldots+m_i}$. Concluimos que, para que ξ contenga a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+1}$, es necesario que sea $d_i = m_i$, en este caso $C_{h+m_1+\ldots+m_i}$ es $\mu_{i+1}\delta/\varrho_h$ — uple en ξ y la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en ella ni en curvas anteriores es

$$min\left(\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}, \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right) \nu_i \varrho\mu_i \delta/\varrho_h - \nu_{i+1} \varrho\mu_{i+1} \delta/\varrho_h =$$

$$= min\left(\frac{\nu_i}{\nu_{i+1}} - 1, \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} - 1\right) \nu_{i+1} \varrho\mu_{i+1} \delta/\varrho_h \tag{21}$$

recordando que la hipótesis sobre ξ entraña $\mu_{i+1} \neq 0$ al ser $d_i = m_i$. Evidentemente la expresión (21) es no nula y por tanto la condición necesaria y suficiente para que ξ contenga a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+1}$ es $d_i = m_i$ que fuerza automáticamente las restantes condiciones del enunciado puesto que entonces $\mu_{i+1} \neq 0$, $\mu_{i+1} < \mu_i$ al ser resto de la última de las divisiones (20) y al efectuar $\mu_i = d_{i+1}\mu_{i+1} + \mu_{i+2}$ se tendrá forzosamente $d_{i+1} \geqslant 1$ y $d_{i+1} \geqslant 2$ si $\mu_{i+2} = 0$.

La comprobación de que el grado de $C_{h+m_1+\ldots+m_i+1}$ sobre C es ϱ_h se realiza exactamente igual que en casos anteriores, todas las hojas que la contienen tienen grado superior o igual a ϱ_h y entre ellas las hay de grado ϱ_h.

Pasemos a determinar la multiplicidad de $C_{h+m_1+\ldots+m_i+1}$ en ζ. Suponiendo que ξ la contiene, la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en curvas anteriores está calculada en (21) y resulta

$$min\left(\frac{\nu_{i+2}}{\nu_{i+1}} + m_{i+1} - 1, \frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}} + d_{i+1} - 1\right) \nu_{i+1} \varrho\mu_{i+1} \delta/\varrho_h$$

Se obtiene fácilmente que el valor mínimo de esta expresión, al variar ξ, es $\nu_{i+2}\,\varrho$ si $m_{i+1}=1$ ó $\nu_{i+1}\,\varrho$ si $m_{i+1}>1$. Dichos valores se alcanzan tomando ξ con $\delta=\varrho_h$, $d_{i+1}=2$, $\mu_{i+1}=1$ y $\mu_{i+2}=0$ en el primer caso, y con $\delta=\varrho_h$, $d_{i+1}=1$, $\mu_{i+1}=2$ y $\mu_{i+2}=1$ en el segundo. En consecuencia (lema 4), la multiplicidad de $C_{h+m_1+\ldots+m_i+1}$ es $\nu_{i+2}\,\varrho/\varrho_h$ si $m_{i+1}=1$ y $\nu_{i+1}\,\varrho/\varrho_h$ si $m_{i+1}>1$.

Pasemos ahora al segundo caso:

(b) $t>1$. Supongamos ahora que la hoja ξ contiene a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t-1}$ tendremos, por hipótesis de inducción:

$$\mu=d_1\,\mu_1+\mu_2$$

$$\vdots$$

$$\mu_{i-2}=d_{i-1}\,\mu_{i-1}+\mu_i$$

$$\mu_{i-1}=d_i\,\mu_i+\mu_{i+1}$$

$$\mu_i=d_{i+1}\,\mu_{i+1}+\mu_{i+2}$$

con $d_1=m_1,\ldots,d_i=m_i$, $d_{i+1}\geqslant t-1$ y además $d_{i+1}\geqslant t$ si $\mu_{i+2}=0$. La multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en $C,\ldots,C_{h-1}$ es, para una elección genérica de M_{i+1}, igual a

$$min\left(\frac{\nu_1}{\nu},\frac{\mu_1}{\mu}\right)\nu\varrho\mu\delta/\varrho_h$$

Procediendo como en el caso $t=1$, se obtiene

$$min\left(\frac{\nu_1}{\nu},\frac{\mu_1}{\mu}\right)\nu\varrho\mu\delta/\varrho_h=m_1\,\nu_1\,\varrho\mu_1\,\delta/\varrho_h+m_2\,\nu_2\,\varrho\mu_2\,\delta/\varrho_h+\ldots+$$
$$+\,m_i\,\nu_i\,\varrho\mu_i\,\delta/\varrho_h+min\left(\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i},\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right)\nu_i\,\varrho\mu_i\,\delta/\varrho_h$$

entendiendo que para $i=0$ solo se tiene el último sumando en el que $\nu_0=\nu$, $\mu_0=\mu$. Por la hipótesis de inducción, los i primeros sumandos son las multiplicidades de intersección absorbidas en C_h, $C_{h+1},\ldots,C_{h+m_1+\ldots+m_i-1}$ si $i>0$; en cualquier caso, la multiplicidad de intersección no absorbida en curvas anteriores a $C_{h+m_1+\ldots+m_i}$ es

$$min\left(\frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}, \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}\right) \nu_i\, \varrho\mu_i\, \delta/\varrho_h = min\left(\frac{\nu_i}{\nu_{i+1}}, \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}}\right) \nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h =$$

$$= min\left(m_{i+1} + \frac{\nu_{i+2}}{\nu_{i+1}}, \quad d_{i+1} + \frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}}\right) \nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h = (t-1)$$

$$\nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h + min\left(m_{i+1} - t + 1 + \frac{\nu_{i+2}}{\nu_{i+1}}, \ d_{i+1} - t + 1 + \frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}}\right)$$

$$\nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h$$

donde aparece la multiplicidad de intersección absorbida en $C_{h+m_1+\ldots+m_i}, \ldots, C_{h+m_1+\ldots+m_i+t-2}$; la multiplicidad de intersección no absorbida en curvas hasta esta última es

$$min\left(m_{i+1} - t + 1 + \frac{\nu_{i+2}}{\nu_{i+1}}, \ d_{i+1} - t + 1 + \frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}}\right) \nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h \quad (22)$$

Si $d_{i+1} = t - 1$, $\mu_{i+2} \neq 0$ y, al ser por hipótesis $m_{i+1} \geqslant t$, esta última expresión es

$$\frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}} \cdot \frac{\nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta}{\varrho_h} = \frac{\nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+2}\, \delta}{\varrho_h}$$

Teniendo en cuenta que en este caso, por hipótesis de inducción, $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t-1}$ será $\nu_{i+1}\, \varrho/\varrho_h$ — uple en ζ y $\mu_{i+2}\, \delta/\varrho_h$ — uple en ξ, (22) es exactamente la multiplicidad de intersección absorbida en dicha curva y ξ no contiene a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$.

Si ξ contiene a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$, necesariamente será $d_{i+1} \geqslant t$, en tal caso $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t-1}$ es $\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h$ — uple en ξ y la multiplicidad de intersección en ella absorbida es

$$\nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h$$

que, sustraida de (22), proporciona la multiplicidad de intersección de ζ y ξ no absorbida en curvas anteriores a $C_{h+m_1=\ldots+m_i+t}$:

$$min\left(m_{i+1} - t + \frac{\nu_{i+2}}{\nu_{i+1}}, \quad d_{i+1} - t + \frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}}\right) \nu_{i+1}\, \varrho\mu_{i+1}\, \delta/\varrho_h \quad (23)$$

El paso de ξ por $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$ es equivalente a la no anulación de esta última expresión: la anulación de $m_{i+1} - t + \nu_{i+2}/\nu_{i+1}$ es imposible porque exigiría la de $m_{i+1} - t$ y la de ν_{i+2}; esta última exigiría $i + 1 = s$ y en este caso se ha excluido $t = m_s$. La anulación de (23) equivale pues a $t = d_{i+1}$ y $\mu_{i+2} = 0$; concluimos que para que ξ contenga a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$ es necesario, además de su paso por la curva anterior, que sea $d_{i+1} \geqslant t$ si $\mu_{i+2} \neq 0$ ó $d_{i+1} \geqslant t+1$ si $\mu_{i+2} = 0$. Recíprocamente, de darse estas condiciones, (23) es la multiplicidad de intersección no absorbida en curvas anteriores y no se anula, con lo que ξ contiene a $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$. Está probada pues la parte del enunciado que caracteriza las hojas por $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$.

El grado de $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$ sobre C es ϱ_h, con una demostración totalmente análoga a la de casos anteriores.

Finalmente calculemos la multiplicidad de $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$ en ζ: como en casos precedentes, debemos determinar el valor mínimo de (23)

$$\min\left(m_{i+1} - t + \frac{\nu_{i+2}}{\nu_{i+1}},\ d_{i+1} - t + \frac{\mu_{i+2}}{\mu_{i+1}}\right)\nu_{i+1}\,\varrho\mu_{i+1}\,\delta/\varrho_h$$

donde $\varrho_h \leqslant \delta$ y $d_{i+1} \geqslant t$ para $\mu_{i+2} \neq 0$, $d_{i+1} \geqslant t+1$ para $\mu_{i+2} = 0$:

Si $m_{i+1} = t$, caso que excluye la posibilidad $\nu_{i+2} = 0$, es decir, $i+2 = s+1$, (23) es no inferior a $\nu_{i+2}\,\varrho$ y alcanza este valor tomando $d_{i+1} > t$, $\mu_{i+1} = 1$, $\mu_{i+2} = 0$ y $\delta = \varrho_h$.

Si $m_{i+1} > t$, (23) es mayor o igual que $\nu_{i+1}\,\varrho$ y alcanza este valor para $d_{i+1} = t$, $\mu_{i+1} = 2$, $\mu_{i+2} = 1$ y $\delta = \varrho_h$.

Concluimos pues que $C_{h+m_1+\ldots+m_i+t}$ es $\nu_{i+2}\,\varrho/\varrho_h$ — uple en ζ si $t = m_{i+1}$ y $\nu_{i+1}\,\varrho/\varrho_h$ — uple si $t < m_{i+1}$. Con ello el teorema está totalmente demostrado.

7. — Nuevas multiplicidades de intersección.

Un cálculo sencillo permite comprobar que la multiplicidad de intersección de ζ y ξ que aparece en la proposición 2 resulta de la presencia en ambas hojas de las curvas descritas en los teoremas 1 y 2. Solo en el caso en que ζ y ξ presenten multiplicidad de intersección superior, ξ puede contener alguna de las curvas que suceden a $C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$ sobre ζ y sabemos que ello ocurre si y solo si $\nu'/\nu = \mu'/\mu$ y alguna de las sumas parciales de grado ν'/ν de las conjugadas de la serie de Puiseux de ζ coincide con una de las sumas parciales del mismo grado de las conjugadas de la serie de Puiseux de ξ. Pasemos a analizar este caso; seguiremos tomando ζ como hasta ahora, con serie de Puiseux

$$\sum_{i=1}^{h} A_i x^i + \sum_{i=0}^{h_1} A_{1,i}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} + A_{2,0}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} x^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\alpha_2}} + \ldots \quad (24)$$

y sea ξ de grado δ, orden aparente μ y serie de Puiseux

$$\textstyle\sum_{i=1}^{h} B_i x^i + \sum_{i=0}^{j} B_{1,i} \left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{\alpha_1' + i}{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1' + i}{\alpha_1}} + M_{j+1} \left(\frac{1}{D}\right)^{\frac{\mu''}{\mu}} x^{\frac{\mu''}{\mu}} + \ldots \quad (25)$$

en la que ya se ha tenido en cuenta la coincidencia del primer exponente característico con el de ζ; supondremos $j \geqslant 0$, $\dfrac{\alpha_1' + j}{\alpha_1} < \dfrac{\mu''}{\mu} \leq \dfrac{\alpha_1' + j + 1}{\alpha_1}$ con igualdad si $M_{j+1} = 0$ y también, para asegurar que todas las curvas analizadas hasta ahora son comunes a ambas hojas, $(A_1, \ldots, A_h) \equiv (B_1, \ldots, B_h)$. La coincidencia de un par de sumas parciales de grado $\alpha_1'/\alpha_1 = \nu'/\nu = \mu'/\mu$ de entre las conjugadas de una y otra serie equivale a la existencia de inmersiones σ y τ de los respectivos cuerpos terminales de las hojas y raices α_1 — ésima de la unidad ε_1, $\bar{\varepsilon}_1$ tales que

$$\sigma(A_1) = \tau(B_1), \ldots, \sigma(A_h) = \tau(B_h) \quad (26)$$

y además

$$\sigma(A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}} \varepsilon_1^{\alpha_1'} = \tau(B_{1,0}) \left(\frac{1}{\tau(D)}\right)^{\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}} \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'}$$

Habida cuenta de que α_1 y α_1' son primos entre si, la existencia de las raices de la unidad de modo que se verifique la última igualdad es aquivalente a

$$\sigma\left(\frac{A_{1,0}^{\alpha_1}}{c^{\alpha_1'}}\right) = \tau\left(\frac{B_{1,0}^{\alpha_1}}{D^{\alpha_1'}}\right) \quad (27)$$

es decir, verificadas las (26), la coincidencia de dos sumas parciales es equivalente a la $A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'}$ y $B_{1,0}^{\alpha_1}/D^{\alpha_1'}$ como funciones algebraicas sobre C_h. Supongamos elegidas las determinaciones de los $(c)^{1/\alpha_1}$ y los $(D)^{1/\alpha_1}$ según lo convenido en el § 2, es decir, si σ_1 y σ_2 coinciden sobre $K_{1,0}$, entonces $\sigma_1(A_{1,0})\ \sigma_1(c)^{-\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}} = \sigma_2(A_{1,0})\ \sigma_2(c)^{-\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}}$ y análogamente para la otra serie. Es posible todavía, si se verifica (27) elegir la determinación de $\tau(D)^{1/\alpha_1}$ de manera que para cualesquiera σ y τ las que se verifique la (27) junto con las (26), se tenga

$$\sigma(A_{1,0}) \left(\frac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}} = \tau(B_{1,0}) \left(\frac{1}{\tau(D)}\right)^{\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}} \quad (28)$$

elección que supondremos realizada desde ahora.

En el § 2 habíamos tomado

$$H_1 = A_{1,0}^{\beta_1'} c^{\beta_1}$$

Su análogo para la segunda hoja será

$$L_1 = B_{1,0}^{\beta_1'} D^{\beta_1}$$

y de (28) se obtiene inmediatamente

$$\frac{\sigma(H_1)}{\sigma(c)^{1/\alpha_1}} = \frac{\tau(L_1)}{\tau(D)^{1/\alpha_1}}$$

Ahora la coincidencia de dos sumas parciales de grado $\dfrac{\alpha_1' + j}{\alpha_1}$ $(0 < j \leqslant h_1)$, sean

$$\textstyle\sum_{i=0}^{h} \sigma(A_i) x^i + \sum_{i=0}^{j} \sigma(A_{1,i}) \left(\dfrac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \varepsilon^{\alpha_1'+i} x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}}$$

$$\textstyle\sum_{i=0}^{h} \tau(B_i) x^i + \sum_{i=0}^{j} \tau(B_{1,i}) \left(\dfrac{1}{\tau(D)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \bar{\varepsilon}^{\alpha_1'+i} x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}}$$

equivale a la de las correspondientes sumas parciales de grado α_1'/α_1 y a las relaciones

$$\sigma(A_{1,i}) \left(\frac{1}{\sigma(c)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \varepsilon_1^{\alpha_1'+i} = \tau(B_{1,i}) \left(\frac{1}{\tau(D)}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} \bar{\varepsilon}_1^{\alpha_1'+i}, i = 1, \ldots, j$$

Con nuestra elección de determinaciones, la coincidencia de las sumas parciales de grado α_1'/α_1 fuerza $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ y las relaciones precedentes, utilizando (29), se convierten en

$$\sigma\left(\frac{A_{1,i}}{H_1^{\alpha_1'+i}}\right) = \tau\left(\frac{B_{1,i}}{L_1^{\alpha_1'+i}}\right) \quad i = 1, \ldots, j$$

Concluimos pues que la coincidencia de un par de sumas parciales de grado $\dfrac{\alpha_1' + j}{\alpha_1}$, $0 \leqslant j \leqslant h_1$, de entre las conjugadas de (24) y (25), equivale a

$$\left(A_1, \ldots, A_h, \frac{A_{1,0}^{\alpha_1}}{c^{\alpha_1'}}, \frac{A_{1,1}}{H_1^{\alpha_1'+1}}, \ldots, \frac{A_{1,j}}{H_1^{\alpha_1'+j}}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(B_1, \ldots, B_h, \frac{B_{1,0}^{\alpha_1}}{D^{\alpha_1'}}, \frac{B_{1,1}}{L_1^{\alpha_1'+1}}, \ldots, \frac{B_{1,j}}{L_1^{\alpha_1'+j}}\right) \tag{29}$$

Podemos calcular ahora la multiplicidad de intersección de ζ y ξ; hagamos en primer lugar la hipótesis de que sea $j < h_1$, valga la (29) y además sea

$$\mu''/\mu < \frac{\alpha_1' + j + 1}{\alpha_1}$$

o bien

$$\left(A_1, \ldots, A_h, \frac{A_{1,0}^{\alpha_1}}{c^{\alpha_1'}}, \frac{A_{1,1}}{H_1^{\alpha_1'+1}}, \ldots, \frac{A_{1,j+1}}{H_1^{\alpha_1'+j+1}}\right) \not\equiv$$

$$\not\equiv \left(B_1, \ldots, B_h, \frac{B_{1,0}^{\alpha_1}}{D^{\alpha_1'}}, \frac{B_{1,1}}{L_1^{\alpha_1'+1}}, \ldots, \frac{B_{1,j}}{L_1^{\alpha_1'+j}}, \frac{M_{j+1}}{L_1^{\alpha_1'+j+1}}\right)$$

para que no coincidan sumas parciales de grado superior a $\dfrac{\alpha_1' + j}{\alpha_1}$. Habida cuenta del número de sumas parciales determinado en el § 2, siguiendo un cálculo análogo al que ha llevado a la proposición 1, se obtiene como multiplicidad de intersección:

$$\nu\varrho\mu\delta + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_1} + \ldots + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_{h-1}} + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_h}\left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - h\right) + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_{1,0}} \cdot \frac{1}{\alpha_1^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_{1,j-1}} \cdot \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_{1,j}\,\alpha_1}\left(\frac{\mu''}{\mu} - \frac{\alpha_1' + j}{\alpha_1}\right)$$

Recordando que α_1 era el denominador de $\nu'/\nu = \mu'/\mu$ en forma irreducible,

$$\nu/\alpha_1 = m.c.d.\ (\nu, \nu') = \nu_s \qquad \mu/\alpha_1 = m.c.d.\ (\mu, \mu') = \mu_s$$

de modo que la multiplicidad de intersección calculada es

$$\nu\varrho\mu\delta + \sum_{i=1}^{h-1} \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_i} + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_h}\left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - h\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\nu_s\,\varrho\mu_s\,\delta}{\varrho_{1,i}} + \frac{\nu_s\,\varrho\mu_s\,\delta}{\varrho_{ij}}\left(\frac{\mu''}{\mu_s} - \alpha_1' + j\right) \tag{30}$$

Si en cambio suponemos $j = h_1$ y que se verifica la (29), la multiplicidad resulta

$$\nu\varrho\mu\delta + \sum_{i=1}^{h-1} \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_i} + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_h}\left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - h\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{h_1-1} \frac{\nu_s\,\varrho\mu_s\,\delta}{\varrho_{1,i}} + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_{1,h_1}\,\alpha_1}\left[min\left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_1\,\alpha_2}, \frac{\mu''}{\mu}\right) - \frac{\alpha_1' + h_1}{\alpha_1}\right]$$

pudiendo ser superior solo en el caso en que $\mu''/\mu = \alpha_2'/\alpha_1\,\alpha_2$ y coincidan un par de sumas parciales de dicho grado de entre las conjugadas de una y otra serie. Escribamos el segundo exponente característico con denominador ν, $\alpha_2'/\alpha_1\,\alpha_2 = \nu''/\nu$; transformando el último sumando, la multiplicidad de intersección es

$$\nu\varrho\mu\delta + \sum_{i=1}^{h-1} \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_i} + \frac{\nu\varrho\mu\delta}{\varrho_h}\left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - h\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{h_1-1} \frac{\nu_s\,\varrho\mu_s\,\delta}{\varrho_{1,i}} + \frac{\nu_s\,\varrho\mu_s\,\delta}{\varrho_{1,h_1}}\left[min\left(\frac{\nu''}{\nu_s}, \frac{\mu''}{\mu_s}\right) - \alpha_1' - h_1\right] \quad (31)$$

8. — Nuevas curvas infinitamente próximas.

La multiplicidad de intersección de las hojas ζ y ξ que figura en la proposición 2 es la absorbida en las curvas $C, \ldots, C_h$ y en curvas satélites de esta última, curvas ya analizadas en los teoremas 1 y 2. Sabemos que esta multiplicidad de intersección solo puede superarse en el caso en que coincidan los primeros exponentes característicos y aun en este caso la multiplicidad de intersección es la de la proposición 2 a menos que se verifique la (29) para $j = 0$. En el caso $\nu'/\nu = \mu'/\mu$, la multiplicidad de intersección de la proposición 2 es la absorbida en las curvas $C, C_1, \ldots, C_h, C_{h+1}, \ldots, C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$, todas ellas comunes a ζ y ξ; de este modo, para que ξ contenga a la curva en el primer entorno de $C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$ es necesario y suficiente que, además de ser $\nu'/\nu = \mu'/\mu$, se verifique la (29) para $j = 0$. Ello indica que la curva $C_{1,0}$ que sucede a $C_{h+m_1+\ldots m_s+-1}$ sobre ζ, es libre, su posición respecto a la precedente viene dada por $A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'}$. Están caracterizadas las hojas que contienen a $C_{1,0}$ y es fácil obtener, como en ocasiones anteriores, que el grado de $C_{1,0}$ sobre C es $\varrho_{1,0} = [K_h\,[A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'}]:$ $: K]$ y su cuerpo de funciones racionales es $K_{1,0} = K_h\,[A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'}]$. Procediendo por inducción, con cálculos similares a los que llevan al teorema 1, se determinan $h_1 + 1$ sucesivas curvas libres $C_{1,i}$, $0 \leqslant i \leqslant h_1$, de manera que la posición de la primera viene dada por $A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'}$ y la de las $C_{1,i}$, por $A_{1,i}/H_1^{\alpha_1'+i}$ para $0 < i \leqslant h_1$. El grado y el cuerpo de funciones racionales de $C_{1,i}$ son $\varrho_{1,i}$ y $K_{1,i}$, según las notaciones del § 2. En el caso de no existir segundo exponente característico, deberá entenderse $h_1 = \infty$. En caso contrario sea ν_{s+1} el resto de la división de ν'' por ν_s (no nulo ya que ν''/ν no es reducible a denominador α_1). Las multiplicidades de las $C_{1,i}$ para $0 \leqslant i < h_1$ son, respectivamente, $\nu_s\,\varrho/\varrho_{1,i}$ mientras que, si $h_1 \neq \infty$, la de C_{1,h_1} es $\nu_{s+1}\,\varrho/\varrho_{1,h_1}$ (en el caso $h_1 = 0$, esta es la única curva del grupo).

La situación es pues muy semejante a la descrita en el teorema 1, semejanza que alcanza también a los cálculos que no hemos explicitado: si observamos las fórmulas (30) y (31), los primeros $h + 1$ sumandos de cada una de ellas corresponden a las multiplicidades de intersección absorbidas en C, $C_1, \ldots, C_h$ y las curvas satélites de esta última; los restantes sumandos de (30) y (31) juegan ahora el mismo papel que el de las multiplicidades de las proposiciones 1 y 2, respectivamente; su forma es la misma, con la única salvedad de que figuran ahora ν_s y μ_s en el lugar de ν y μ y ν'' y μ'' en el de ν' y μ'.

Si no aparece segundo exponente característico, el análisis de la hoja queda concluido. En caso contrario, suceden a C_{1,h_1} un grupo de curvas satélites en situación totalmente análoga a la del teorema 2; no repetiremos aquí los cálculos que han permitido su demostración, baste observar la semejanza del sumando

$$\frac{\nu_s\,\varrho\mu_s\,\delta}{\varrho_{1,h_1}}\left[min\left(\frac{\nu''}{\nu_s}, \frac{\mu''}{\mu_s}\right) - \alpha_1' - h_1\right]$$

de (31) con el último sumando de la expresión de la proposición 2, sobre el que se funda toda demostración del teorema 2. Si ν''/ν es el segundo exponente característico, se ha tomado

$$\frac{\alpha_1' + h_1}{\alpha_1} < \frac{\nu''}{\nu} < \frac{\alpha_1' + h_1 + 1}{\alpha_1}$$

es decir

$$\alpha_1' + h_1 < \frac{\nu''}{\nu_s} < \alpha_1' + h_1 + 1$$

En la división de ν'' por ν_s se tiene pues

$$\nu'' = (\alpha_1' + h_1)\,\nu_s + \nu_{s+1}$$

Efectuemos ahora las divisiones sucesivas

$$\nu_s = m_{s+1}\, \nu_{s+1} + \nu_{s+2}$$
$$\nu_{s+1} = m_{s+2}\, \nu_{s+2} + \nu_{s+3}$$
$$\vdots$$
$$\nu_{s+s'-2} = m_{s+s'-1}\, \nu_{s+s'-1} + \nu_{s+s'}$$
$$\nu_{s+s'-1} = m_{s+s'}\, \nu_{s+s'}$$

$\nu_{s+s'}$ será el máximo común divisor de ν_s y ν'', es decir, el de ν, ν' y ν''.

Suceden a C_{1,h_1-1} sobre ζ

$$m_{s+1} \text{ curvas } \nu_{s+1}\, \varrho/\varrho_{1,h_1} - \text{uples } C_{1,h_1}, \ldots, C_{1,h_1+m_{s+1}-1}$$
$$m_{s+2} \text{ curvas } \nu_{s+2}\, \varrho/\varrho_{1,h_1} - \text{uples } C_{1,h_1+m_{s+1}}, \ldots, C_{1,h_1+m_{s+1}+m_{s+2}-1}$$
$$\vdots$$
$$m_{s+s'} \text{ curvas } \nu_{s+s'}\, \varrho/\varrho_{1,h_1} - \text{uples } C_{1,h_1+m_{s+1}+\ldots+m_{s+s'-1}}, \ldots, C_{1,h_1+m_{s+1}+\ldots+m_{s+s'}-1}$$

todas ellas de grado ϱ_{1,h_1} sobre C. C_{1,h_1} es libre, como ya hemos dicho, su posición viene dada por $A_{1,h_1}/H_1{}^{\alpha_1'+h_1}$, y las restantes son satélites de ella, de manera que una segunda hoja por C_{1,h_1}, cuya serie de Puiseux tendrá la forma (25) con $j = h_1$, contiene a parte de dichas curvas satélites exclusivamente en función del exponente μ''/μ: las condiciones de paso por una de las curvas satélites se obtiene tomando $\mu_{s+1} = \mu'' - (\alpha_1' + h_1)\,\mu_s$ y efectuando divisiones sucesivas

$$\mu_s = d_{s+1}\, \mu_{s+1} + \mu_{s+2}$$
$$\mu_{s+1} = d_{s+2}\, \mu_{s+2} + \mu_{s+3}$$
$$\vdots$$

Para que esta última hoja contenga a $C_{1,h_1+m_{s+1}+\ldots+m_{s+i}+t}$, donde $0 \leqslant i < s'$ y además $1 \leqslant t \leqslant m_{i+1}$ si $i < s-1$ mientras $1 \leqslant t < m_{s+s'}$ si $i = s-1$, es necesario y suficiente que se obtenga

$$d_{s+1} = m_{s+1}, \ldots, d_{s+i} = m_{s+i}$$

y además $d_{s+i+1} \geqslant t$ si $\mu_{s+i+2} \neq 0$, ó $d_{s+i+1} \geqslant t+1$ si $\mu_{s+i+2} = 0$.

9. — La situación general.

La continuación del análisis de la hoja es ya una mera repetición. Al último grupo de curvas satélites le sucede un nuevo grupo de curvas libres, la primera de las cuales tiene su posición determinada por $A_{2,0}^{\alpha_2}/H_1^{\alpha_2'}$ y las siguientes por los $A_{2,i}/H_2^{\alpha_2'+i}$. Si existe tercer exponente característico, sucede a estas un nuevo grupo de curvas satélites, y así sucesivamente, hasta que, superado el último exponente característico, se hallan ya tan solo curvas libres, todas simples a partir de la primera de grado igual al de la hoja. Nos limitaremos pues a exponer el análisis completo de la hoja, sin repetir lo ya enunciado en los teoremas 1 y 2:

Teorema 3. *Sea ζ una hoja con origen en C, grado ϱ, orden aparente $\nu > 1$ y serie de Puiseux*

$$\sum_{i=1}^{h} A_i x^i + \sum_{i=0}^{h_1} A_{1,i}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} x^{\frac{\alpha_1'+i}{\alpha_1}} + \ldots +$$

$$+ \sum_{i=0}^{h_{q-1}} A_{q-1,i}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha'_{q-1}+i}{\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}}} x^{\frac{\alpha'_{q-1}+i}{\alpha_1\ldots\alpha_{q-1}}} + \sum_{i=0}^{\infty} A_{q,i}\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{\alpha_q'+i}{\alpha_1\ldots\alpha_q}} x^{\frac{\alpha_q'+i}{\alpha_1\ldots\alpha_q}}$$

en la que supondremos $A_{j,0} \neq 0$ para $j = 1, \ldots, q$, m.c.d. $(\alpha_j, \alpha_j') = 1$, $\nu = \alpha_1 \ldots \alpha_q$ y

$$h < \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} < h+1, \quad \frac{\alpha'_{j-1}+h_{j-1}}{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}} < \frac{\alpha_j'}{\alpha_1\ldots\alpha_j} < \frac{\alpha'_{j-1}+h_{j-1}+1}{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}},$$

$j = 2, \ldots, q$

Sean β_j' y β_j tales que $1 = \alpha_j\beta_j + \alpha_j'\beta_j'$, $j = 1, \ldots, q$
Tomaremos:

$$\begin{aligned}
H_1 &= A_{1,0}^{\beta_1'} c^{\beta_1},\ H_j = A_{j,0}^{\beta_j'} H_{j-1}^{\beta_j},\ j = 2, \ldots, q\\
K_{1,0} &= K_h\,(A_{1,0}^{\alpha_1}/c^{\alpha_1'})\\
K_{j,i} &= K_{j,0}\,(A_{j,1}/H_j^{\alpha_j'+1}, \ldots, A_{j,i}/H_j^{\alpha_j'+i}),\ j = 1, \ldots, q,\ i = 1, \ldots, h_j,\\
&\quad (h_q = \infty)\\
K_{j,0} &= K_{j-1,h_{j-1}}\,(A_{j,0}^{\alpha_j}/H_{j-1}^{\alpha_j'}),\ j = 2, \ldots, q\\
\varrho_{j,i} &= [K_{j,i} : K]
\end{aligned}$$

Sobre la hoja ζ se hallan, sucediendo a la última curva satélite de C_h, $C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$, q grupos de curvas libres $C_{j,0}, \ldots, C_{j,h_j}$, $h_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, q-1$, y *$C_{q,0}, \ldots, C_{q,i}, \ldots$ y además otros $q-1$ grupos de* *curvas, formado cada uno de ellos por sucesivas curvas satélites de una de las* C_{j,h_j}, $j = 1, \ldots, q - 1$, *de manera que* $C_{1,0}$ *está en el primer entorno de* $C_{h+m_1+\ldots+m_s-1}$, $C_{j,i+1}$ *en el primer entorno de* $C_{j,i}$ *para* $j = 1, \ldots, q$ *y* $0 \leqslant i \leqslant h_j - 1$, *y* $C_{j,0}$, *para* $2 \leqslant j \leqslant q$, *en el primer entorno de la última curva satélite de* $C_{j-1,h_{j-1}}$.

La posición de cada curva libre $C_{j,i}$ *respecto a la que la precede viene determinada por* $A_{j,i}/H_j^{\alpha_j'+i}$ *si* $i > 0$, *y por* $A_{j,0}^{\alpha_j}/H_{j-1}^{\alpha_j'}$ *si* $i = 0$; *su cuerpo de funciones racionales es, como extensión de los de las curvas que la preceden,* $K_{j,i}$, *y su grado sobre C es* $\varrho_{j,i}$.

Sean los exponentes característicos reducidos a denominador ν:

$$\frac{\alpha_j'}{\alpha_1 \ldots \alpha_j} = \frac{\nu^{j)}}{\nu}$$

tendremos

$$m.c.d.\ (\nu, \nu', \ldots, \nu^{j)}) = \frac{\nu}{\alpha_1 \ldots \alpha_j}$$

Al efectuar la divsión de $\nu^{j+1)}$ *por* $m.c.d.\ (\nu, \nu', \ldots, \nu^{j)})$ *se obtiene cociente* $\alpha_j' + h_j$: *sea* $\nu_{j+1,1}$ *el resto de dicha división,* $j = 1, \ldots, q - 1$: *la multiplicidad en* ζ *de las curvas libres* $C_{j,i}$ *es*

$$m.c.d.\ (\nu, \nu', \ldots, \nu^{j)})\ \varrho/\varrho_{j,i} \quad si \quad i < h_j$$
$$\nu_{j+1,1}\ \varrho/\varrho_{j,h_j} \quad si \quad i = h_j$$

Las curvas satélites de $C_{j-1,h_{j-1}}$ $(j = 2, \ldots, q)$ *son todas de grado uno sobre* $C_{j-1,h_{j-1}}$. *Su número y multiplicidades en* ζ *dependen del exponente característico* $\nu^{j)}/\nu = \alpha_j'/\alpha_1 \ldots \alpha_j$ *en la forma siguiente: efectuadas las divisiones sucesivas que conducen al cálculo de m.c.d.* $(\nu/\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}, \nu_{j,1}) = m.c.d.\ (\nu, \nu', \ldots, \nu^{j)})$,

sean

$$\nu/\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} = m_{j,1}\, \nu_{j,1} + \nu_{j,2}$$
$$\nu_{j,1} = m_{j,2}\, \nu_{j,2} + \nu_{j,3}$$
$$\vdots$$
$$\nu_{j,s_j-2} = m_{j,s_j-1}\, \nu_{j,s_j-1} + \nu_{j,s_j}$$
$$\nu_{j,s_j-1} = m_{j,s_j}\, \nu_{j,s_j}$$

Figuran entonces en ζ, sucesivamente y a partir del primer entorno de $C_{j-1,\, h_{j-1}}$:

$$m_{j,1} - 1 \;\; \textit{curvas} \;\; \nu_{j,1}\, \varrho/\varrho_{j-1,\, h_{j-1}} - \textit{uples}$$

$$m_{j,2} \;\; \textit{curvas} \;\; \nu_{j,2}\, \varrho/\varrho_{j-1,\, h_{j-1}} - \textit{uples}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$m_{j,s_j} \;\; \textit{curvas} \;\; \nu_{j,s_j}\, \varrho/\varrho_{j-1,\, h_{j-1}} - \textit{uples}$$

satélites de $C_{j-1,\, h_{j-1}}$, *de manera que el paso por parte de ellas de una hoja que contenga a* $C_{j-1,\, h_{j-1}}$ *depende del exponente característico de dicha hoja inmediatamente superior a* $(\alpha'_{j-1} + h_{j-1})/\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}$ *formulandose dichas condiciones tal como se ha hecho para el primer y segundo grupos de curvas satélites (teorema* 2 *y* § 8).

Resulta como corolario el caracter intrínseco de los exponentes característicos ya que estos pueden determinarse a partir de la composición de la hoja; en efecto, con las notaciones del teorema 2 se tiene

$$\alpha_1'/\alpha_1 = \nu'/\nu = h + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{\cdot}{\cdot \; \cdot + \cfrac{1}{m_s}}}}$$

donde $h + 1$ es el número de curvas (incluida C) que preceden al primer grupo de satélites, m_1 el número de curvas de igual multiplicidad que suceden a la última libre incluida esta, m_2 el número de curvas de igual multiplicidad que suceden a estas, etc.

Supuestos determinados $\nu'/\nu, \ldots, \nu^{j-1)}/\nu$, se tiene

$$\frac{\alpha_j'}{\alpha_1 \ldots \alpha_j} = \frac{\nu}{\nu^{j)}} = \frac{m.c.d.\,(\nu, \ldots, \nu^{j-1)})}{\nu} \cdot \frac{\nu^{j)}}{m.c.d.\,(\nu, \ldots, \nu^{j-1)})} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1}} \left[\alpha'_{j-1} + h_{j-1} + \cfrac{1}{m_{j,1} + \cfrac{1}{m_{j,2} + \cdots + \cfrac{1}{m_{j,s_j}}}} \right]$$

donde $h_{j-1} + 1$ es el número de curvas libres entre los grupos $j - 1$ y j de satélite, los $m_{j,i}$ están determinados, como más arriba, como número de curvas de igual multiplicidad y los restantes términos lo están por inducción.

10. — SINGULARIDAD DE UNA SUPERFICIE A LO LARGO DE C. REPRESENTACION GRAFICA.

La composición de la singularidad de una superficie irreducible S (o reducible con componentes simples por C) se obtiene inmediatamente a partir de las de sus hojas con origen en C: basta tener en cuenta la posición de las curvas infinitamente próximas de cada hoja para determinar las que son comunes a varias hojas, y recordar que la multiplicidad en S de una curva infinitamente próxima a C es la suma de sus multiplicidades en las hojas de S, con origen en C, que la contienen.

Las notables semejanzas del caso que nos ocupa con el de los puntos singulares de las curvas planas, permiten utilizar en nuestro caso los diagramas de Enriques ([2], libro IV, cap. I) que proporcionan una excelente representación de las singularidades de una curva plana. Para ello basta seguir las convenciones de Enriques, considerando en este caso que cada punto del diagrama representa una curva infinitamente próxima de la que deberán indicarse la multiplicidad y el grado sobre C; las curva satélites vendrán también representadas sobre segmentos rectilíneos, pero conviene advertir que ahora tales segmentos no aparecen tras un decrecimiento de la multiplicidad, sino tras un decrecimiento del producto de la multiplicidad por el grado. El lector podrá observar como el diagrama pone en evidencia el caracter de libre o satélite de cada curva infinitamente próxima asi como las curvas que son próximas a una dada.

BIBLIOGRAFÍA

1 E. CASAS. *Singularidades unidimensionales de una superficie algebráica.* Coll. Math. Vol. XXIX, Fasc. 1.º, 1978.

2 F. ENRIQUES-O. CHISINI. *Teoría geométrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Zanichelli, Bologna.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona.