SOBRE INMERSIONES ISOMETRICAS DE VARIEDADES RIEMANNIANAS EN ESPACIOS EUCLIDEOS

por

CARLOS CURRAS BOSCH

INTRODUCCION.

En este trabajo se dan algunas aplicaciones de la generalización del teorema de BONNET para inmersiones isométricas de variedades Riemannianas en espacios euclídeos, en codimensión cualquiera.

En el Capítulo I se da un resultado para inmersiones isométricas en codimensión dos con curvatura normal cero. Resultado que está en la línea de los establecidos por ALEXANDER (1), ALEXANDER-MALTZ (1), MOORE (1, 2), BISHOP (1), utilizándose en la demostración resultados obtenidos en los artículos citados.

El Capítulo II es una contribución al estudio del fenómeno de rigidez para inmersiones isométricas, por medio del comportamiento en dichas inmersiones de las isometrías infinitesimales de la variedad.

Conviene recordar la generalización del teorema de BONNET en codimensión cualquiera, que dice que para una variedad Riemanniana conexa, la inmersión isométrica de dicha variedad en un espacio euclídeo, queda determinada, salvo isometrías del espacio euclídeo ambiente, por el sistema de tensores definido por medio del fibrado normal a la variedad inmersa.

En lo sucesivo, si se tienen definidos en un entorno de p, punto de una variedad Riemanniana, inmersa isométricamente en un espacio euclídeo, en codimensión k; campos normales y ortonormales $N_1, \ldots, N_k$. Se designará por A_i, $i = 1, \ldots, k$, a los tensores (1,1) tales que $A_i(X) = C.T.(\overline{\nabla}_X N_i)$. Siendo $C.T.$ la componente tangencial, $\overline{\nabla}$ es la derivación covariante en el espacio euclídeo ambiente. ∇ designará la derivación covariante en la variedad.

Se designará por s_{ij}, $i, j = 1, \ldots, k$, $s_{ij} = - s_{ji}$, a los tensores tales que $s_{ij}(X) = \overline{\nabla}_X N_i \cdot N_j$.

$i(M)$ es el álgebra de LIE de isometrías infinitesimales de la variedad M.

CAPITULO I. INMERSIONES EN CODIMENSION DOS

§ 1. Algunos resultados sobre el algebra de holonomia y temas afines

Si U es un espacio vectorial real con un producto escalar definido en él, que se representará por un punto entre los vectores que se multipliquen. Se considera en $U \wedge U$, la operación

$$[e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4] = (e_1 \cdot e_3)\, e_2 \wedge e_4 + (e_2 \cdot e_4)\, e_1 \wedge e_3 - (e_1 \cdot e_4)\, e_2 \wedge e_3 - (e_2 \cdot e_3)\, e_1 \wedge e_4$$

Con la cual y junto con la suma y producto por escalares, $U \wedge U$ tiene estructura de álgebra de Lie.

Se enuncian los resultados siguientes que van a ser de gran utilidad posteriormente.

Teorema de holonomía I-1.— Sea M variedad diferenciable de dimensión n. El álgebra de holonomía en el punto p de M, es la subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, R)$, engendrada por los traslados paralelos a p, de las transformaciones R_{XY}, para todos X, Y, en todos los puntos de M.

Demostración.— Véase Kobayashi-Nomizu (1) (pág. 89).

Lema I-1.— Sea U espacio vectorial real, en las condiciones indicadas anteriormente, $U = V + W$. Si v es de V y es $\neq 0$, w de W y $\neq 0$, y V tiene intersección no nula con W.
$v \wedge V + w \wedge W$ genera $U \wedge U$.

Demostración.— Véase Bishop (1).

Lema I-2.— Si para una inmersión en codimensión dos, en algún punto el recorrido de A_1 es distinto del de A_2. (rec. A_i) $\wedge$ (rec. A_i) está contenido en el álgebra de holonomía para $i = 1, 2$.

Demostración.— Véase Alexander (1).

Como consecuencia del Lema I-1, se tiene:

Lema I-3. — Dada una inmersión en codimensión dos, si en algún punto el índice de nulidad relativa es cero y rec. $A_1 \neq$ rec. A_2, pero tienen intersección no nula.
El álgebra de holonomía es total.

Lema I-4.— Si $U = V \perp W$ (suma ortogonal), y alguno de los dos tiene dimensión distinta de dos. $V \wedge V + W \wedge W$ es una subálgebra maximal propia de $U \wedge U$.

Demostración.— Véase Bishop (1).

Lema I-5.— Sea M variedad Riemanniana conexa, de dimensión n, inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal cero. Tal que se tienen dos distribuciones involutivas paralelas y ortocomplementarias, de forma que en cada punto se pueden encontrar A_1, A_2 (correspondientes a vectores normales y ortonormales), tales que los recorridos de A_i coinciden con cada una de las distribuciones.

Tesis.— Los tensores A_1, A_2, cumpliendo lo anterior están definidos globalmente.

Demostración.— Hay que ver que los campos N_1, N_2, a los que se asocian A_1 y A_2 son paralelos (en la conexión del fibrado normal), con lo cual como la curvatura normal es igual a cero estarán definidos globalmente.

Se verá que $s_{12} = 0$. Sean X e Y en cada distribución. La ecuación de Codazzi para A_1 es:

$\nabla_X(A_1(Y)) - A_1(\nabla_X Y) - s_{12}(X) A_2(Y) = \nabla_Y(A_1(X)) - A_1(\nabla_Y X) - - s_{12}(Y)\,0$. De donde resulta que $s_{12}(X) = 0$. Haciendo lo mismo con A_2, resulta $s_{12}(Y) = 0$. Luego $s_{12} = 0$ y por tanto N_1 y N_2 son paralelos.

§ 2. Estudio de las inmersiones en codimensión dos, con curvatura normal cero a partir del algebra local de holonomia.

Estudio local

Teorema I-2.— Sea M una variedad Riemanniana de dimensión > 2. Inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal cero. Si p es un punto de M en el que el índice de nulidad relativa es cero y el álgebra local de holonomía no es total en dicho punto.

Existe un entorno de p, N_p, que puede ser :(a) El producto de un segmento por una variedad de dimensión $n - 1$, (b) El producto de dos variedades una de dimensión k y la otra de dimensión $n - k$.

En el caso (a) la codimensión es reducible a uno, y en (b) la inmersión descompone en producto de dos cada una en codimensión uno.

Demostración.— Es preciso hacer la demostración en dos casos distintos que son: dim. $M \neq 4$ y dim. $M = 4$.

Si dim. $M \neq 4$, como la curvatura normal es cero, los tensores A_i son diagonizables simultáneamente, por consiguiente es posible encontrar en cada punto un par de vectores normales y ortonormales N_1, N_2, tales que las expresiones de A_1, A_2, en una base adecuada del espacio tangente sean:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & b_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Como el álgebra local de holonomía no es total, alguna de las a_i ha de ser cero, ya que por Lema I-2, $(rec.\ A_1) \wedge (rec.\ A_1)$ está contenido en el álgebra local de holonomía.

Aplicando Lema I-3, las expresiones de A_1 y A_2 han de ser:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & a_k & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & b_{k+1} & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Aplicando el teorema de holonomía y lema I-6, se tienen dos distribuciones paralelas involutivas y ortocomplementarias, y dos tensores A_1, A_2 con recorridos cada una de las distribuciones.

Pueden darse dos casos: 1.º) $k = 1$ ó $k = n - 1$, 2.º) $k \neq 1$, $k \neq n - 1$.

1.º) Se supone $k = 1$ (el otro caso es análogo). Tomando N_p más pequeño si es preciso para poderlo considerar simplemente conexo, se aplica el teorema de descomposición de de Rham y se tiene $N_p = (a, b) \times V_p$, con V_p variedad de dimensión $n - 1$.

Para ver que en este caso la codimensión es reducible a uno, se consideran las ecuaciones de Codazzi para A_2, con X e Y en la segunda distribución y se tiene:

$$(\nabla_X A_2)(Y) - s_{21}(X) A_1(Y) = (\nabla_Y A_2)(X) - s_{21}(Y) A_1(X).$$

Como $A_1(X) = A_1(Y) = 0$, para A_2 se cumple $(\nabla_X A_2)(Y) = (\nabla_Y A_2)(X)$. Luego A_2 define una inmersión isométrica ψ de V_p en R^n,. Tomando *id.* $\times \psi$ en la forma que se indica a continuación, se tiene reducida a uno la codimensión.

$$N_p = (a, b) \times V_p \xrightarrow{id \times \psi} (a, b) \times R^n \subset R^{n+1}.$$

Conviene observar que esta inmersión isométrica no tiene por qué diferir en una isometría de R^{n+2} de la inicial.

2.º) En este caso $N_p = U_p \times V_p$, dim. $U_p = k$, dim. $V_p = n - k$. Por lema I-5, $s_{12} = 0$, y las ecuaciones de Codazzi son:

X, Y en la primera distribución, Z, W en la segunda.

$$(\nabla_X A_1)(Y) = (\nabla_Y A_1)(X)$$

$$(\nabla_Z A_2)(W) = (\nabla_W A_2)(Z)$$

Luego A_1 (resp. A_2) define una inmersión isométrica de U_p (resp. V_p) en R^{k+1} (resp. R^{n-k+1}), ψ_1 (resp. ψ_2). Se considera

$$N_p = U_p \times V_p \xrightarrow{\psi_1 \times \psi_2} R^{k+1} \times R^{n-k+1} = R^{n+2}.$$

Inmersión que difiere en una isometría de R^{n+2} de la inicial.

Si dim. $M = 4$. Sea V_1, V_2, V_3, V_4, base ortogonal de $T_p(M)$ en la que

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & b_4 \end{bmatrix}$$

Por lema I-1 ha de ser $b_2 = a_3 = 0$, ó $b_2 = b_3 = 0$ Por lema I-4, este carácter ha de conservarse en un entorno de p suficientemente pequeño. Si es $b_2 = b_3 = 0$, está claro que las dos distribuciones son involutivas, y paralelas y ortocomplementarias. Si $b_2 = a_3 = 0$, como no se puede aplicar lema I-4, es presico efectuar un estudio detallado de las ecuaciones de Codazzi, llegándose al mismo resultado que en el caso anterior. Con ésto queda completada la demostración del segundo caso.

ESTUDIO GLOBAL

Proposición I-1.— *Sea M variedad Riemanniana conexa de dimensión $n > 2$. Inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal cero; tal que en todos sus puntos el álgebra local de holonomía no es total, y el índice de nulidad relativa es cero en todos sus puntos.*

Tesis.— *El álgebra local de holonomía es igual al álgebra de holonomía, y es de la forma $U \wedge U$, con dim. $U = n - 1$, ó bien es $U \wedge U + V \wedge V$,* con *U* y *V ortocomplementarios, ambos de dimensión mayor que 1.*

Demostración.— Según se sabe por la demostración del anterior teorema, en cada punto el álgebra local de holonomía es de uno de los dos tipos citados en el enunciado, y también está claro a partir de la demostración anterior, que el conjunto de puntos en que es de un tipo determinado es abierto. Como M es conexa deberá ser del mismo tipo en todos los puntos. Y por ser constante la dimensión del álgebra local de holonomía aplicando Kobayashi-Nomizu (1), Theorem 10. 3, pág. 96, se sabe que ambas álgebras coinciden.

Teorema I-3.— *Sea M variedad Riemanniana simplemente conexa, de dimensión $n > 2$. Inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal cero. Tal que en todos sus puntos el álgebra local de holonomía no es total y el índice de nulidad relativa es* 0.

Tesis.— *M puede ser:*

(a) $M = R \times N$, con N variedad de dimensión $n - 1$, y la codimensión es reducible a uno.

(b) $M = N_1 \times N_2$, con las dos variedades de dimensión mayor que 1, y la inmersión de M es el producto de sendas inmersiones en codimensión uno.

Demostración.— (*a*) Si el álgebra de holonomía es $U \wedge U$ con dimensión de $U = n - 1$. Se tienen $\{V_1, \ldots, V_{n-1}\}$, V_n, distribuciones involutivas, paralelas y ortocomplementarias. Los tensores A_1, A_2, con recorridos en cada distribución definidos globalmente por lema I-5, y $s_{12} = 0$.

Como M es simplemente conexa $M = R \times N$, con *dim.* $N = n - 1$, y de la observación de las ecuaciones de Codazzi para A_1 se deduce una inmersión isométrica ψ de N en R^n, que proporciona

$$M = R \times N \xrightarrow{id \times \psi} R \times R^n = R^{n+1}$$

(*b*) La demostración en este caso es análoga a la del caso (*a*), obteniéndose dos inmersiones isometricas $N_1 \xrightarrow{\psi_1} R^{k+1}$, $N_2 \xrightarrow{\psi_2} R^{n-k+1}$, y la inmersión inicial es, salvo una isometría de R^{n+2}, $\psi_1 \times \psi_2$.

Capitulo II. Estudio de las inmersiones isometricas a partir de las isometrias infinitesimales de la variedad

Siguiendo con la técnica habitual se referirá al sistema de tensores definidos por medio del fibrado normal, el hecho de que X de $i(M)$ sea la restricción de $\overline{X}$ de $i(R^{n+k})$.

§ 1. Estudio por medio de los tensores del fibrado normal del hecho de que X de $i(M)$ sea restriccion de $\overline{X}$ de $i(R^{n+k})$.

Es fácil ver que si M está inmersa en R^{n+k} y X de $i(M)$ es la restricción de $\overline{X}$ de $i(R^{n+k})$, se verifica que para cada punto p de M se puede encontrar un entorno y un sistema de tensores en dicho entorno $\{A_i, s_{jk}\}$, de forma que $L_X A_i = L_X s_{jk} = 0$ (siendo L_X la derivada de Lie según X).

El resultado inverso se demuestra en la forma siguiente.

Proposición II-1.— Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+k}. Sea X isometría infinitesimal de M. Si p es un punto de M y U un entorno de p en la que se tienen definidos los tensores A_i, s_{jk}, tales que $L_X A_i = L_X s_{jk} = 0$.

Existe un entorno de p V, $V \subset U$, de forma que en este entorno, X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+k}.

Demostración.— En U se tienen los k campos normales y ortonormales $N_1, \ldots, N_k$, que se extienden a un entorno tubular de U en R^{n+k}, de la forma siguiente: como se quiere que $[N_i, N_j] = 0$, se define N_j a lo largo de N_i por traslado paralelo euclídeo. Esto se puede realizar en un entorno tubular del que se hablará posteriormente.

Sea Y un campo tangente en U, se quiere que su extensión que se designará por $\overline{Y}$ cumpla $L_{N_i} \overline{Y} = 0$, para $i = 1, \ldots, k$. Si y_t es una curva integral de Y, su trasformada por el grupo uniparamétrico de N_i será $y_t + rN_{iy_t}$, cuyo campo tangente es $(Y + rA_i Y) + r \sum_{j=i}^{k} s_{ij}(Y) N_j = \overline{Y}$. Lo hecho a lo largo de N_i, se puede hacer a lo largo de cualquier dirección normal, resultando que si en p de U, se tiene la dirección $a_1 N_1 + \ldots + a_k N_k$, $\overline{Y}$ a lo largo de esta dirección será $Y + ra_1 A_1 (Y) + \ldots + ra_k A_k (Y) + r \sum_{i,j} a_i s_{ij} (Y) N_j$.

Es fácil probar la existencia de un entorno tubular $\overline{V}$ de V, $V \subset U$, $\overline{V} = \{x \,|x = p + ra_1 N_1 + \ldots + ra_k N_k,\ \ p \in V,\ \ a_1^2 + \ldots + a_k^2 = 1,$ $|r| \leq k_0\}$, imagen diffeomorfa de $V \times S(k_0)^k$, por la aplicación que manda $(p; ra_1, \ldots, ra_k)$ al punto $p + ra_1 N_1 \ldots + ra_k N_k$; en el que las distribuciones $\{N_1, \ldots, N_k\}$, $\{T(M) + ra_1 A_1 (T(M)) + \ldots + ra_k A_k ($ $(TM)) + r \sum_{i,j} a_i s_{ij} (T(M)) N_j\}$ son involutivas y complementarias.

Para probar que $\overline{X}$ es una isometría infinitesimal de R^{n+k} se considera el punto $q = x + rN_x$, para N cierta dirección normal en x, que para no complicar los cálculos puede suponerse $N = N_1$.

Se ha de ver que si $X_1, \ldots, X_n$ es una base ortonormal de campos tangentes en un entorno de x en V, tal que $L_X X_i = 0$, se cumple:

$$L_{\overline{X}} (N_i \cdot N_j) = L_{\overline{X}} N_i \cdot N_j + N_i \cdot L_{\overline{X}} N_j.$$

$$L_{\overline{X}} (\overline{X}_\alpha \cdot N_i) = L_{\overline{X}} \overline{X}_\alpha \cdot N_i + \overline{X}_\alpha \cdot L_{\overline{X}} N_i.$$

$$L_{\overline{X}} (\overline{X}_\alpha \cdot \overline{X}_\beta) = L_{\overline{X}} \overline{X}_\alpha \cdot \overline{X}_\beta + \overline{X}_\alpha \cdot L_{\overline{X}} \overline{X}_\beta.$$

La primera es inmediata. Para la segunda el segundo miembro es cero y el primero es $L_{\overline{X}} ((X_\alpha + rA_1 (X_\alpha) + r \sum_j s_{1j} (X_\alpha) N_j) \cdot N_i) =$ $= L_X (rs_{1i} (X_\alpha)) = r (L_X s_{1i}) (X_\alpha) = 0$. Para la tercera el segundo miembro es cero y se comprueba en forma similar a la anterior que el primero también lo es.

Luego $\overline{X}$ es una isometría infinitesimal de R^{n+k}.

A partir de la proposición anterior es inmediato probar:

Proposición II-2.— Sea M variedad Riemanniana conexa, de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+k}.

Sea X isometría infinitesimal de M, tal que para cada punto p de M, existe U entorno de p, en el que se tienen definidos tensores A_i, s_{jk}, de forma que $L_X A_i = L_X s_{jk} = 0$.

X es la restricción de una isometría infinitesimal de R^{n+k} a la variedad.

Estos resultados permiten reducir a un sistema de ecuaciones el hecho de que X de $i(M)$ sea la restricción de una isometría infinitesimal del espacio euclídeo ambiente.

Conviene recordar que para toda isometría infinitesimal de un espacio euclídeo, se puede encontrar un sistema ortonormal de referencia en el que su grupo uniparamátrico consista de rotaciones de ángulo proporcional al parámetro t, en los planos $(x_1, x_2), \ldots, (x_{2k-1}, x_{2k})$, y traslaciones proporcionales a t según los ejes $x_{2k+1}, \ldots, x_n$.

Si la isometría infinitesimal en cuestión se puede restringir a una isometría infinitesimal sobre una subvariedad compacta y conexa, deben desaparecer las traslaciones antes citadas.

§ 2. Rigidez a partir de las isometrías infinitesimales

Para facilitar la comprensión de este apartado se empieza viendo un resultado de rigidez para superficies, generalizándose después a dimensión mayor.

Teorema II-1.— Sea M variedad Riemanniana de dimensión dos, compacta y conexa, que admite dos inmersiones isométrica inyectivas en R^3, ψ_1 y ψ_2.

Si X es una isometría infinitesimal de M, que es la restricción para ambas inmersiones de una isometría infinitesimal de R^3.

Tesis.— ψ_1 y ψ_2 son mutuamente rígidas localmente (*).

Demostración.— Sean X_1 y X_2, las isometrías infinitesimales de R^3, extensión de X para cada inmersión. Sus grupos uniparamétricos son grupos de rotaciones alrededor de un eje fijo. Por medio de una isometría de R^3 se hacen coincidir estos ejes por lo que puede suponerse que se trata del eje x_3 para ambas inmersiones. $X_1 = (- - kx_2, kx_1, 0)$, $X_2 = (- qx_2', qx_1'\ 0)$. Es fácil ver que $k = q$, en efecto si $|k| > |q|$, se toma $(1/k)\, X_1 = (- x_2, x_1, 0)$, $(1/k)\, X_2 = (- (q/k)\, x_2', (q/k)\, x_1', 0)$. Si ϕ_t y ψ_t son sus grupos uniparamétricos sus expresiones son:

$$\phi_t = \begin{bmatrix} cos t & sen t & 0 \\ - sen t & cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_t = \begin{bmatrix} cos\,(q/k)\, t & sen\,(q/k)\, t & 0 \\ - sen\,(q/k)\, t & cos\,(q/k)\, t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea ψ la isometría de $\psi_1(M)$ en $\psi_2(M)$ dada por $\psi_2 \psi_1^{-1}$. Si p es cualquier punto de M, $\phi_{2\pi}(p) = p$, luego $\psi_{2\pi}(\psi(p)) = \psi(p)$, por tanto $(q/k) = 1$, luego $X_1 = (- x_2, x_1, 0), X_2 = (- x_2', x_1', 0)$.

Va a verse ahora que X es dirección de curvatura para ambas inmersiones; sea $N_1 = (a_1, a_2, a_2)$ el campo normal unitario para la primera inmersión definido en un entorno de un punto. Como L_{X_1}

(*) Para obtener rigidez global habrá que exigir la constancia de la dimensión del primer espacio normal, tanto en este teorema como en los que se establecerán a continuación. No valiendo la rigidez local en los puntos en que «cambia» la dimensión del primer espacio normal.

$N_1 = 0$, a lo largo de una curva integral de X_1 por un punto de la variedad la expresión de N_1 será $(cost \cdot a_1 + sent \cdot a_2, - sent \cdot a_1 + + cost \cdot a_2, a_3)$, luego $\overline{\nabla}_{X_1} N_1 = (-a_2, a_1, 0)$. Como $(-x_2, x_1, 0) \cdot \cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$, se cumple $(a_1, a_2) \perp (-x_2, x_1)$, luego $(a_1, a_2) = = \lambda (x_1, x_2)$ y por tanto $\overline{\nabla}_{X_1} N_1 = \lambda(-x_2, x_1, 0)$, luego X es dirección de curvatura para la primera inmersión. De la misma forma se vería para la segunda inmersión.

A continuación se ve que las curvaturas principales según X, coinciden para ambas inmersiones. En efecto sea p punto de M y considérese $N_{1p}(\|X_1\|) = D_r \sqrt{(x_1 + ra_1)^2 + (x_2 + ra_2)^2}\,\Big|_{r=0} = (1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\,(a_1 x_1 + a_2 x_2)$. Luego $N_{1p}(\|X_1\|) = (1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\,(x_1, x_2, 0) \cdot \cdot (a_1, a_2, a_3)$, de la misma forma se vería $N_{2p}(\|X_2\|) = (1/\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2})\,(x_1', x_2', 0) \cdot (a_1', a_2', a_3')$.

Pero los campos $(1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2})\,(x_1, x_2, 0)$, $(1/\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2})\,(x_1', x_2', 0)$, son de norma uno y si se consideran las expresiones anteriores, que expresan la variación de la norma de X, para campos tangentes a la variedad, tiene que dar lo mismo para ambas inmersiones, luego también ha de dar lo mismo en dirección normal.

$$N_{1p}(\|X_1\|) = D_r(\|X + rA_1(X)\|) = D_r(|1 + r\lambda_1|\,\|X\|)|_{r=0} = = \lambda_1 \|X\|.$$

$$N_{2p}(\|X_2\|) = D_r(\|X + rA_2(X)\|) = D_r(|1 + r\lambda_2|\,\|X\|)|_{r=0} = = \lambda_2 \|X\|.$$

Por tanto $\lambda_1 = \lambda_2$. Si en el entorno de un punto fuese $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, en dicho entorno se cumpliría $a_1 = a_2 = 0$, y dicho entorno estaría en un plano, por tanto se cumpliría $A_1 = A_1' = 0$. Luego puede suponerse $\lambda_1 \neq 0$, por tanto los tensores A son los mismos para ambas inmersiones y en consecuencia son mutuamente rígidas localmente.

Para generalizar este resultado, se necesita el siguiente lema del que se da el enunciado, pudiéndose encontrar la demostración en cualquier texto de Algebra.

Lema II-1.— Se consideran en $R^{2n}(R^{2n+1})$, k endomorfismos antisimétricos independientes que conmutan $\phi_1, \ldots, \phi_k$.

Existe una base ortonormal del espacio euclídeo, en la que las expresiones de los endomorfismos son:

Para R^{2n}.

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & \dots & & & . \\ 0 & . & \dots & & & . \\ . & . & \dots & & & . \\ . & . & \dots & & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & & -b_1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_k & 0 & \dots & & & . \\ 0 & . & \dots & & & . \\ . & . & \dots & & & . \\ . & . & \dots & & 0 & b_k \\ 0 & 0 & \dots & & -b_k & 0 \end{bmatrix}$$

Para R^{2n+1}, las mismas expresiones con las últimas filas y columna todas cero.

Lema II-2.— Sean $X_1, \dots, X_n$, *n isometrías infinitesimales de* R^{2n} (R^{2n+1}), *tales que restringidas a una subvariedad compacta que no puede encontrarse en la intersección de dos hiperplanos, dan n isometrías infinitesimales de la subvariedad, independientes en algún punto de ella, con corchetes de Lie todos cero sobre la subvariedad.*

Tesis.— Existe una referencia ortonormal de R^{2n} (R^{2n+1}), *en la que las expresiones de* $X_1, \dots, X_n$, *son n combinaciones lineales adecuadas, para el caso de* R^{2n} *de* $Y_1 = (-x_2, x_1, 0, \dots, 0), \dots, Y_n = (0, \dots, 0, -x_{2n}, x_{2n-1})$. *Para el caso de* R^{2n+1} *de* $Y_1 = (-x_2, x_1, 0, \dots, 0), \dots, Y_n = (0, \dots, 0, -x_{2n}, x_{2n-1}, 0)$.

Demostración.— Solo se va a dar para R^{2n}, en el otro caso es análoga.

Sean $X_i = \psi_i (x_1, \dots, x_{2n}) + (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{2n}^i)$, con ψ_i antisimétricas. $[X_i, X_j] = [\psi_i, \psi_j] (x_1, \dots, x_{2n}) + (\psi_j (\alpha_1^i, \dots, \alpha_{2n}^i) - \psi_i (\alpha_1^j, \dots, \alpha_{2n}^j))$. Como esta expresión tiene que anularse en la subvariedad, si en $[\psi_i, \psi_j]$ (x_k) hay alguna componente no idénticamente nula, deberán haber como mínimo dos y M se encontraría en la intersección de dos hiperplanos lo que va en contra de la hipótesis. Luego $[\psi_i, \psi_j] = 0$ para todos i, j.

Por lema II-1, existe una base ortonormal de R^{2n}, en la que

$$X_1 = (-a_1 x_2, a_1 x_1, \dots, -b_1 x_{2n}, b_1 x_{2n-1}) + (\beta_1^1, \dots, \beta_{2n}^1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$X_n = (-a_n x_2, a_n x_1, \dots, -b_n x_{2n}, b_n x_{2n-1}) + (\beta_1^n, \dots, \beta_{2n}^n)$$

De forma que

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & b_1 \\ . & \dots & . \\ a_n & \dots & b_n \end{vmatrix} \neq 0$$

Ya que si fuese cero, 0 un campo sería combinación lineal de los otros, lo que va en contra de la hipótesis, o una combinación lineal de los anteriores sería un campo constante, lo que es absurdo por ser compacta la subvariedad.

Luego se pueden obtener, por combinación lineal:

$$Y_1 = (-x_2, x_1, 0, \ldots, 0) + (\lambda_1^1, \lambda_2^1, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_n = (0, \ldots, 0, -x_{2n}, x_{2n-1}) + (0, \ldots, 0, \lambda_{2n-1}^n, \lambda_{2n}^n)$$

Efectuando traslaciones adecuadas en los planos $(x_1, x_2), \ldots,$ (x_{2n-1}, x_{2n}), resulta : (no se cambian las letras para no complicar la notación).

$$Y_1 = (-x_2, x_1, 0, \ldots, 0), \ldots, Y_n = (0, \ldots, 0, -x_{2n}, x_{2n-1}).$$

Teorema II-2.— Sea M variedad Riemanniana de dimensión $2k - 1$ *(resp.* $2k$*), conexa y compacta que tiene dos inmersiones isométricas inyectivas* ψ_1, ψ_2 *en* R^{2k} *(resp.* R^{2k+1}*). Sean* $X_1, \ldots, X_k$, *k isometrías infinitesimales de M, tales que* $[X_i, X_j] = 0$, para todos i, j, *y en algún punto de M dim.* $\{X_i\} = k$.

Si para ambas inmersiones las X_i *son la restricción de k isometrías infinitesimales del espacio euclídeo.*

Tesis.— ψ_1 *y* ψ_2 *son mutuamente rígidas localmente.*

Demostración.— Sólo se va a dar para R^{2k}, el otro caso se demuestra igual.

Aplicando Lema II-2, se pueden encontrar dos referencias ortonormales de R^{2k} en las que las expresiones de los X_i (isometrías infinitesimales en la primera inmersión), serán: $X_1 = (-x_2, x_1, 0, \ldots, 0), \ldots, X_k = (0, \ldots, 0, -x_{2k}, x_{2k-1})$. De hecho se tratará de combinaciones lineales adecuadas que se seguirán designando igual para no complicar la notación. Las expresiones de los X_i' (isometrías infinitesimales en la segunda inmersión) serán:

$$X_1' = (-a_1 x_2', a_1 x_1', -b_1 x_4', b_1 x_3', \ldots, -d_1 x_{2k}', d_1 x_{2k-1}')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_k' = (-a_k x_2', a_k x_1', -b_k x_4', b_k x_3', \ldots, -d_k x_{2k}', d_k x_{2k-1}')$$

Como los X_i son ortogonales los X_i' también lo han de ser de lo que resulta un sistema de ecuaciones que se cumple sobre la variedad y como ésta tiene dimensión $2k - 1$, el rango del sistema ha de ser 0 o 1, luego

$$(\&) \qquad \text{rango} \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 \; \ldots\ldots\ldots \; d_1 \cdot d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1} \cdot a_k \; \ldots\ldots \; d_{k-1} \cdot d_k \end{bmatrix} = 0 \text{ ó } 1$$

Si el rango es 1, puede suponerse $a_1 \cdot a_2 \neq 0$, es inmediato que por ejemplo $b_1 \cdot b_2 \neq 0$. Imponiendo que los menores de orden dos tienen determinante igual a cero y que el determinanta de la matriz formada por los coeficientes $a_1, \ldots, d_k$, es distinto de cero, resulta que $a_3 = b_3 = \ldots = b_k = 0$. Con lo que la matriz de los coeficientes es de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \ldots 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \boxed{\mathbf{A}} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

En la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ hay en cada fila un solo elemento distinto de cero.

Ahora por argumento de cierre de órbitas, ya utilizado en la demostración del teorema II-1, resulta que el rango de (&) ha de ser cero, y por tanto $X_1' = (-x_2', x_1', 0, \ldots, 0), \ldots, X_k' = (0, \ldots, 0, -x_{2k}', x_{2k-1}')$.

Igual que para el caso de dimensión dos se ve que $X_1, \ldots, X_k$, $X_1', \ldots, X_k'$, son direcciones de curvatura y las curvaturas principales correspondientes son iguales dos a dos. Como no todas pueden anularse ya que en este caso resultaría que el campo normal ha de ser $(0, \ldots, 0)$ (en el caso de R^{2k+1}, el campo normal unitario sería $(0, \ldots, 0, 1)$, en cuyo caso $A_1 = A_1' = 0$), y por tanto $A_1 = A_1'$, luego ψ_1 y ψ_2 son mutuamente rígidas localmente.

La generalización de este resultado a codimensión mayor, no es posible sin hipótesis suplementarias. El problema está en probar que las expresiones para $X_1', \ldots, X_k'$, son la obtenidas en el teorema anterior, pero se ha de recordar que en el lema II-2 se exigía que la subvariedad no se encontrase en la intersección de dos hiperplanos y en el teorema anterior no podían haber dos ecuaciones de la forma $a_1 \cdot a_2 (x_1'^2 + x_2'^2) + \ldots = 0$ que fuesen independientes ya que la codimensión era uno, pero en codimensión mayor podría ocurrir esto sin llegar a contradicción. Como consecuencia de ello se enuncia sin demostración el lema siguiente:

Lema II-3.— Sea M variedad Riemanniana de dimensión $\geqslant$ $\geqslant k + 1$ y $\leqslant 2k$, *compacta y conexa, que tiene k isometrías infinitesimales* $X_1, \ldots, X_k$, *que cumplen* $[X_i, X_j] = 0$, *para todos i, j, y en algún punto de M son independientes.*

Si ψ_1 *y* ψ_2 *son dos inmersiones isométricas inyectivas en* R^{2k+1}, *de forma que en cada inmersión las* X_i *son la restricción de k isometrías infinitesimales de* R^{2k+1}, *y además para cada inmersión la subvariedad no está contenida en la intersección de dos hipercuádricas.*

Tesis.— Existen en R^{2k+1} *dos sistemas de referencia ortonormales, para cada inmersión, de forma que*

$$X_1 = (-x_2, x_1, 0, \ldots, 0) \qquad X_1' = (-x_2', x_1', 0, \ldots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_k = (0, \ldots, 0, -x_{2k}, x_{2k-1}) \qquad X_k' = (0, \ldots, 0, -x_{2k}', x_{2k-1}', 0)$$

Lema II-4.— Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, con una isometría infinitesimal X. Dos inmersiones isométricas en R^{k+n}, *de forma que para cada inmersión, X es la restricción de una isometría infinitesimal de* R^{n+k} *de la forma* $\overline{X} = (-x_2, x_1, 0, \ldots, 0)$ *para la 1.ª inmersión y del mismo tipo para la segunda.*

Tesis.— X es dirección de curvatura para cualquier dirección normal en cualquiera de las inmersiones.

Elegidos $N_1, \ldots, N_k$, *referencia ortonormal del fibrado normal para la primera inmersión, existen* $N_1', \ldots, N_k'$, *referencia también ortonormal para la segunda, de forma que* $A_i(X) = A_i'(X)$, *siempre que* $X \neq 0$.

La demostración es análoga a la dada en el caso de superficie en R^3, por lo que se omite.

Con todo esto ya se puede pasar a la demostración de

Teorema II-3.— Sea M variedad Riemanniana, compacta y conexa, de dimensión n. Con $X_1, \ldots, X_k$, *isometrías infinitesimales tales que* $[X_i, X_j] = 0$ *para todos i, j, y existe algún punto de M en el que son independientes.*

Sean ψ_1 *y* ψ_2 *dos inmersiones isométricas inyectivas en* R^{2k+1}, *de forma que* $\psi_1(M)$ *y* $\psi_2(M)$ *no están contenidas en la intersección* *de dos hipercuádricas y para cada inmersión las X_i son la restricción de k isometrías infinitesimales del espacio euclídeo.*

Sabiendo que $k + 1 \leq n \leq 2k$.

Tesis.— *ψ_1 y ψ_2 son mutuamente rígidas localmente.*

Demostración.— Existen dos sistemas de referencia ortonormales en el espacio euclídeo ambiente, en los que las expresiones de las isometrías infinitesimales son las establecidas en lema II-3. Se sabe además que son direcciones de curvatura y se verifican igualdades entre las curvaturas principales en la forma expresada en Lema II-4.

Si en un entorno de cierto punto, todas las curvaturas principales de $X_1, \ldots, X_k$, fuesen nulas, $(-x_2, x_1, 0, \ldots, 0)$, $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, -x_{2q}, x_{2q-1}, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, x_{2q-1}, x_{2q}, 0, \ldots, 0)$ deben dar vectores del espacio tangente (basta considerar $\overline{\nabla}_{X_1} X_1$, etc.). A lo sumo habrá $2q$, con $2q \leq n$ y $X_{q+1} = \ldots = X_k = 0$. La inmersión de hecho tiene lugar en un espacio euclídeo de dimensión $2k + 1 - 2(k - q) = 2q + 1$, pero $2q + 1 \leq n + 1$, luego si la inmersión no es en codimensión cero, debe ser $2q + 1 = n + 1$, la inmersión es en codimensión uno en cuyo caso ya se sabe que los tensores A coinciden.

Si por ejemplo alguna curvatura principal de X_1 no es cero, pueden elegirse $N_1, \ldots, N_{2k+1-n}$ en un entorno de forma que $A_1(X_1) = \lambda_1 X_1 \neq 0$, $A_2(X_1) = \ldots = A_{2k+1-n}(X_1) = 0$. Con lo que $A_1 = A_1'$.

Si las curvaturas principales para $X_2, \ldots, X_k$, según $A_2, \ldots, A_{2k+1-n}$ fuesen todas cero, resultaría que $(-x_2, x_1, 0, \ldots, 0), \ldots, ((0, \ldots, 0, x_{2q-1}, x_{2q}, 0, \ldots, 0)$, darían un subespacio de dimensión $2q \leq n + 1$, $X_{q+1} = \ldots X_k = 0$. La inmersión de hecho tiene lugar en un espacio euclídeo de dimensión $2q + 1$, y como $2q + 1 \leq n + 2$, si la inmersión no es en codimensión uno, caso ya visto, ha de ser $2q + 1 = n + 2$, $2q = n + 1$ y como $(-x_2, x_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, \ldots, 0, x_{2q-1}, x_{2q}, 0, \ldots, 0)$, dan en cada punto $T(M) + N_1$, resulta de observar que en esta distribución la derivación covariante es interna, que la codimensión de hecho es uno y en este caso es sabido que $A_1 = A_1'$.

Así pues puede suponerse que X_2 tiene curvatura principal según N_2 no nula y nula para los restantes, de lo que resulta $A_1 = A_1'$, $A_2 = A_2'$.

Se puede suponer $A_1 = A_1', \ldots, A_r = A_r'$. Si todas las curvaturas principales de lo X_i según $A_{r+1}, \ldots, A_{2k+1-n}$ fuesen cero en un entorno, se tendría que $(-x_2, x_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, x_{2q-1}, x_{2q}, 0, \ldots)$ dan un subespacio de dimensión $2q \leq n + r$. Como $X_{q+1} = \ldots = X_k = 0$, la dimensión del espacio euclídeo ambiente es de hecho $2q + 1$. Pero $2q + 1 \leq n + r + 1$, luego si la codimensión no es r, debe ser $2q + 1 = n + r + 1$. Como $2q = n + r$ y la derivación covariante en $(-x_2, x_1, 0 \ldots), \ldots$ es interna, la codimensión es r y por tanto $A_1 = A_1', \ldots, A_{2k+1-n} = A'_{2k+1-n}$.

Si no todas las curvaturas principales de los X_i, según $A_{r+1}, \ldots$, fuesen cero, se obtendría $A_{r+1} = A'_{r+1}$.

Así pues, para ambas inmersiones los tensores A_i coinciden. Es un simple ejercicio de cálculo ver que $s_{ij} = s'_{ij}$. Por tanto ψ_1 y ψ_2 son mutuamente rígidas localmente.

BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDER, S. (1). «*Reducibility of Euclidean inmersions of low codimension*». Journal of Diff. Geom., 3-1, March 1969, pág. 69-83.

ALEXANDER, S. - MALTZ, R. (1) «*Isometric inmersions of Riemannian products in Euclidean space*». Journal of Diff. Geom. 11-1. March 1976, pág. 47-59.

BISHOP, R. L. (1) «*The holonomy algebra of inmersed manifolds of codimension two*». Journal of Diff. Geom. 2-4, December 1968, pág. 347-355.

KOBAYASHI, S. - NOMIZU, K. (1). «*Foundations of Diff. Geom*»., Vol. I, Interscience Publishers.

MOORE, J. D. (1) «*Isometric inmersions of Riemannian products*». Journal of Diff. Geom. 5-1, March 1971, pág. 159-168.

MOORE, J. D. (2) «*Reducibility of isometric inmersions*». Proc. of the Amer. Math. Soc. 34-1, July 1972, pág. 229-232.