SOBRE EL CALCULO EFECTIVO DEL GENERO DE LAS CURVAS ALGEBRAICAS.

por

EDUARDO CASAS ALVERO.

INTRODUCCIÓN

Sea X una curva algebraica irreducible sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y sea X' un modelo no singular de X. Designemos por Θ (Θ') el haz de anillos locales de X (X'), Θ_x (Θ_x') será su fibra en el punto x y $k(X) = k(X')$ el cuerpo de funciones racionales de ambas curvas. Llamemos g al género (efectivo) de X, es decir, g es el género de la extensión $k \to k(X)$ en el sentido de CHEVALLEY: $g = dim_k H^1(X', \Theta')$.

Si la curva X es plana de orden n, su género se calcula por la fórmula clásica

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_x \frac{\mu_x(\mu_x - 1)}{2}$$

donde μ_x es la multiplicidad de x en X y el sumatorio se extiende a todos los puntos, ordinarios e infinitamente próximos, (I pag. 460).

Sea p el género virtual de X (en el sentido de SEVERI IX, por ejemplo), esto es, $p = 1 - C(0)$ siendo C la postulación o función característica de HILBERT de X, o, equivalentemente, $p = dim_k H^1(X, \Theta)$. Designemos por δ_x, para $x \in X$, el orden de singularidad en x, $\delta_x = dim_k \frac{\overline{\Theta}_x}{\Theta_x}$, siendo $\overline{\Theta}_x$ la clausura entera de Θ_x en $k(X)$. Es conocida (ROSENLICHT VII o también SERRE VIII, pag. 73) la relación

$$g = p - \sum_{x \in X} \delta_x$$

válida para curvas sumergidas en un espacio proyectivo cualquiera. Si la curva es plana de orden n, es sabido que $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ y por otra parte, suponiendo que la curva es localmente sumergible en el plano en x, $\delta_x = \sum \frac{\mu_y(\mu_y - 1)}{2}$ indicando por μ_y la multiplicidad de y y extendido el sumatorio al punto x y a todos los infinitamente próximos a él (HIRONAKA III). El cálculo de p para curvas en un espacio proyectivo cualquiera no presenta dificultades, véase II, libro V cap. V, ó VIII pag. 73 para el caso de intersecciones completas. En este trabajo vamos a ocuparnos del cálculo de los enteros δ_x prescindiendo de hipótesis de inmersión.

1. ALGUNOS RESULTADOS DE NORTHCOTT.

Reproducimos aquí con formulación adecuada a nuestro problema algunas definiciones y resultados de NORTHCOTT (IV, V, VI).

Para un anillo local de curva Θ_x, se define un anillo semilocal, $R(\Theta_x)$, llamado anillo en el primer entorno de Θ_x de manera que

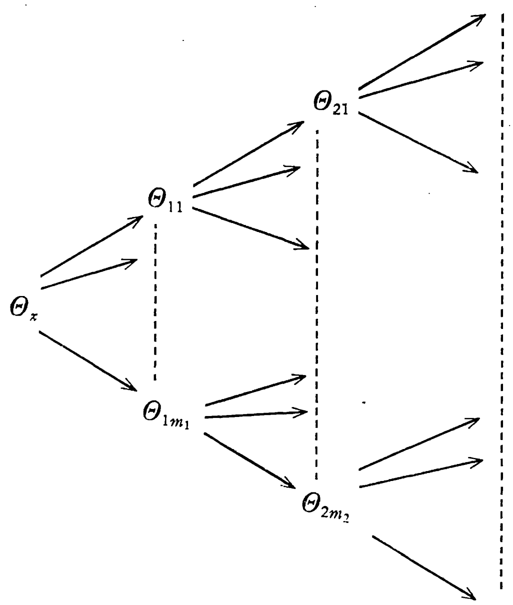
$$\Theta_x \subset R(\Theta_x) \subset \overline{\Theta}_x$$

$R(\Theta_x)$ resulta ser

$$R(\Theta_x) = \Theta[x_1/y, \ldots, x_n/y]$$

con $x_1, \ldots, x_n$ generadores del ideal maximal de Θ_x e y un elemento superficial de grado uno. $R(\Theta_x)$ es independiente de estas elecciones. Tomando en particular una inmersión de un entorno de x en un espacio afín k^n con el origen en x, $(x_1, \ldots, x_n)$ funciones coordenadas e y la ecuación de un hiperplano que pasa por el origen en posición general, si Φ es la transformación $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1/y, \ldots, x_n/y)$, $R(\Theta_x)$ es el anillo de gérmenes de funciones regulares de la curva $\Phi(X)$ en el cerrado $\Phi(x)$.

A los localizados de $R(\Theta_x)$ en sus ideales maximales se les llama anillos en el primer entorno de Θ_x; son anillos de curva y si los designamos por $\Theta_{11}, \ldots, \Theta_{1m_1}$ y reiteramos el proceso a partir de ellos, obtenemos un árbol de anillos locales



llamado árbol de anillos locales de Θ_x. En él se llaman anillos en el enésimo entorno a los del primer entorno de alguno del $(n - 1)$-ésimo. Los anillos locales del árbol de Θ_x son los de los puntos infinitamente próximos a x en X, obtenidos, según la definición clásica, por sucesivas transformaciones cuadráticas. De ahí que un anillo del árbol sea regular (i. e. de valoración discreta) si y sólo si aparece en su primer entorno y en este caso es el único anillo de este primer entorno (V teorema 11). Para n suficientemente grande, todos los anillos en el enésimo entorno de Θ_x son regulares y son precisamente los anillos de las valoraciones de $k(X)$ centradas en el ideal maximal de Θ_x (VI teorema 6 y V teorema 14).

2. Calculo del orden de singularidad.

Designemos por R_i la intersección de los anillos en el iésimo entorno de Θ_x, $R_i = \bigcap_{j=1}^{m_i} \Theta_{ij}$, $R_0 = \Theta_x$ y existe r tal que $R_r = \overline{\Theta}_x$ (intersección de los anillos de valoración que contienen a Θ_x). Tendremos

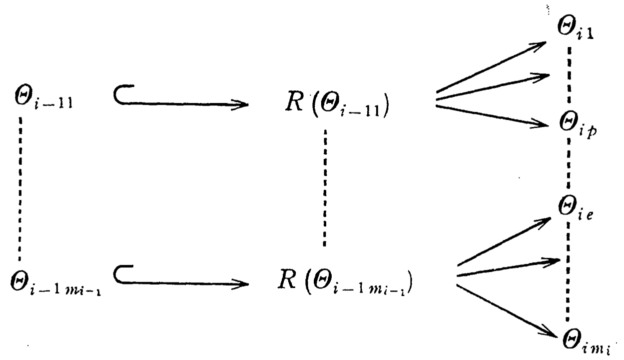
$$\Theta_x = R_0 \hookrightarrow R_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow R_{r-1} \hookrightarrow R_r = \Theta_x$$

con lo que los anillos R_i son forzosamente semilocales y el orden de singularidad en x se expresa por la fórmula

$$\delta_x = dim_k \frac{\overline{\Theta}_x}{\Theta_x} = \sum_{i=1}^{r} dim_k \frac{R_i}{R_{i-1}}$$

y su cálculo se reduce al de las $dim_k \dfrac{R_i}{R_{i-1}}$

La disposición de los anillos es



y simplificaremos las notaciones escribiendo $m_{i-1} = m$, $m_i = m'$.

Por definición tenemos $R_{i-1} = \bigcap_{j=1}^{m'} \Theta_{i-1j}$ y al ser cada $R(\Theta_{i-1j})$ intersección de sus localizados en ideales maximales,

$$R_i = \bigcap_{j=1}^{m'} \Theta_{ij} = \bigcap_{j=1}^{m} R(\Theta_{i-1,j})$$

ROSENLICHT establece (VII, pag. 172) el

LEMA: Sean $D_i \subset D_i'$ anillos semilocales contenidos en $k(X)$, con las mismas valoraciones centradas en los ideales maximales de D_i y D_i' para cada i (es decir $D_i \to D_i'$ extensión entera). Si D_i y D_j no tienen valoraciones en común para $i \neq j$,

$$dim_k \frac{D_1' \cap \dots \cap D_m'}{D_1 \cap \dots \cap D_m} = \sum_{i=1}^{m} dim_k \frac{D_i'}{D_i}$$

En nuestro caso tenemos

$$dim_k \frac{R_i}{R_{i-1}} = \sum_{j=1}^{m} dim_k \frac{R(\Theta_{i-1j})}{\Theta_{i-1j}}$$

y el cálculo se reduce al de $dim_k \dfrac{R(\Theta_{i-1j})}{\Theta_{i-1j}}$. Si por brevedad suprimimos los índices, tenemos:

Proposición 1: La dimensión de $\dfrac{R(\Theta)}{\Theta}$ es el término independiente del polinomio de HILBERT-SAMUEL de Θ, cambiado de signo.

Sea P el polinomio de HILBERT-SAMUEL de Θ, $P(n) = dim_k \dfrac{\Theta}{\mathfrak{M}^n}$ si $\mathfrak{M}$ es el ideal maximal de Θ y n es suficientemente grande.

Al ser Θ de dimensión uno, $P(n) = \mu n + \varrho$ siendo μ la multiplicidad del anillo.

Por ser $\Theta \to R(\Theta)$ extensión entera, $R(\Theta)$ es finito sobre Θ y el anulador de $\dfrac{R(\Theta)}{\Theta}$ (conductor de la extensión) es un ideal no nulo de Θ. Si y es un elemento superficial de grado uno en Θ, para n suficientemente grande, y^n está en dicho anulador. Tensorializando la sucesión exacta de Θ-módulos

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow R(\Theta) \longrightarrow \frac{R(\Theta)}{\Theta} \longrightarrow 0$$

por $\dfrac{\Theta}{y^n}$ se obtiene la

$$\frac{\Theta}{y^n} \longrightarrow \frac{R(\Theta)}{y^n R(\Theta)} \longrightarrow \frac{R(\Theta)}{\Theta} \longrightarrow 0$$

y será exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \frac{\Theta}{\Theta \cap y^n R(\Theta)} \longrightarrow \frac{R(\Theta)}{y^n R(\Theta)} \longrightarrow \frac{R(\Theta)}{\Theta} \longrightarrow 0$$

Los teoremas 5 y 10 de V aseguran que si n es lo suficientemente grande,

$$y^n R(\Theta) \cap \Theta = \mathrm{m}^n$$

con lo que es exacta

$$0 \longrightarrow \frac{\Theta}{\mathrm{m}^n} \text{———} \frac{R(\Theta)}{y^n R(\Theta)} \longrightarrow \frac{R(\Theta)}{\Theta} \longrightarrow 0$$

para $n > n_0$.

Sean $v_1, ..., v_s$ las valoraciones centradas en los ideales maximales de $R(\Theta)$, es decir, en el ideal maximal de Θ. Por localización en los ideales maximales y utilizando el teorema 6 de IV resulta que

$$dim_k \frac{R(\Theta)}{y^n R(\Theta)} = \sum_{i=1}^{s} v_i (y^n) = n \sum_{i=1}^{s} v_i (y)$$

Al ser y superficial de grado uno en Θ, $\sum_{i=1}^{s} v_i (y) = \mu$. De ahí que $dim_k \frac{R(\Theta)}{y^n R(\Theta)} = \mu n$ y con ello

$$dim_k \frac{R(\Theta)}{\Theta} = - P(n) + \mu n = - \varrho$$

En definitiva se obtiene el

TEOREMA 1: El orden de singularidad δ_x es el opuesto de la suma de los términos independientes de los polinomios de HILBERT-SAMUEL de los anillos locales del árbol de Θ_x.

3. CALCULO EXPLÍCITO DEL ORDEN DE SINGULARIDAD.

Exponemos a continuación el contenido geométrico del teorema 1.

Sea Θ_x un anillo local de curva. A una inmersión local de la curva en una variedad no singular le corresponde una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow F \longrightarrow \Theta_x \longrightarrow 0$$

donde F es un anillo local regular y cada sistema de generadores del ideal $\mathfrak{a}$ es un sistema de ecuaciones locales de la curva en la variedad no singular. El graduado del anillo F es un anillo de polinomios, sea $k[X_1, ..., X_s]$ y designemos por $G(\Theta_x)$ el graduado de Θ_x. De la anterior se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \bar{\mathfrak{a}} \longrightarrow k[X_1, ..., X_s] \longrightarrow G(\Theta_x) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

donde $\bar{\mathfrak{a}}$ es el ideal homogéneo engendrado por las formas iniciales de los elementos de $\mathfrak{a}$ (recordemos que la forma inicial de un elemento $f \in F$ es su clase $\bar{f} \in \frac{\mathfrak{M}^p}{\mathfrak{M}^{p+1}}$ si $\mathfrak{M}$ es el ideal maximal de F y supuesto $f \in \mathfrak{M}^p - \mathfrak{M}^{p+1}$). La variedad determinada por $\mathfrak{a}$ en el espacio afín de dimensión s es el cono tangente a la curva en el punto considerado. Si designamos por $C(n)$ la postulación del cono tangente y por $G(\Theta_x)_n$ la parte de grado menor o igual a n de $G(\Theta_x)$,

$$G(\Theta_x)_n = \frac{\Theta_x}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \oplus \dots \oplus \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}$$

a la vista de la sucesión (1) tenemos

$$C(n) = dim_k\, G(\Theta_x)_n \qquad\qquad n >> 0$$

y por otra parte es sabido que $P(n) = dim_k \dfrac{\Theta_x}{\mathfrak{m}_n} = dim_k\, G(\Theta_x)_{n-1}$ también para n alto. Resulta así la

Proposición 2: Si $P(n)$ es el polinomio de Hilbert-Samuel del anillo local de un punto de una curva sumergida en una variedad no singular y $C(n)$ es la postulación del cono tangente a la curva en dicho punto, vale la igualdad $P(n+1) = C(n)$.

En particular, escribiendo $C(n) = d\,n - p_c + 1$, $P(n) = \mu\, n + \varrho$, si p_c es el género virtual del cono y μ la multiplicidad del anillo local, i. e. la del punto sobre la curva, obtenemos

$$\varrho = p_c + \mu - 1$$

de donde resulta el

Teorema 2: Sea x un punto singular de una curva algebraica irreducible. El orden de singularidad de la curva en x es una suma de términos dependientes de los puntos en los sucesivos entornos de x, comprendido el mismo x: para cada uno de estos puntos el término correspondiente es $p_c + \mu - 1$ donde μ es la multiplicidad del punto y p_c el género virtual del cono tangente en dicho punto.

Resulta obvio que la contribución al orden de singularidad de un punto simple es nula ya que $p_c = 0$, $\mu = 1$.

4. Aplicación a algunos casos importantes.

En el caso particular de que la curva se halle sumergida en una superficie, regular en el punto considerado, en particular en el caso de una curva plana, todos los conos tangentes son planos, su grado es la multiplicidad del punto, en virtud de la relación $C(n) = P(n+1)$, y el género virtual del cono se calcula en función de la multiplicidad del punto: $p_c = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2}$. Resulta con ello que la contribución al orden de singularidad en x de un punto de multiplicidad μ es $\frac{\mu(\mu - 1)}{2}$ de acuerdo con la fórmula clásica.

En el caso de que el cono tangente en un punto infinitamente próximo no sea plano pero sea intersección completa de hipersuperficies de grados $\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$, pueden calcularse fácilmente el polinomio de HILBERT-SAMUEL del anillo local o la postulación del cono tangente (véase por ejemplo X, ó, VIII pag. 73) y se obtiene

$$\mu = \nu_1 \ldots \nu_{s-1}, \quad p_c = \frac{1}{2}(\nu_1 + \ldots + \nu_{s-1} - s - 1)\nu_1 \ldots \nu_{s-1} + 1$$

con lo que la contribución del punto al orden de singularidad es

$$\frac{1}{2}\nu_1 \ldots \nu_{s-1}(\nu_1 + \ldots + \nu_{s-1} - s + 1)$$

El orden de singularidad de un punto triple ordinario de una curva en el espacio (tres tangentes no coplanarias) resulta $\delta_x = 2$, mediante cálculo directo de la postulación del cono tangente.

BIBLIOGRAFÍA

I. E. BERTINI. *Geometria proiettiva degli iperspazi*, 2.ª ed., G. Principato, Messina 1923.

II. F. ENRIQUES - O. CHISINI. *Teoria geometrica delle ecuazioni*, N. Zanichelli, Bologna 1924.

III. H. HIRONAKA. *On the aritmetic genera and the efective genera of algebraic curves*, Mem. Kyoto, 30, 1957.

IV. D. G. NORTHCOTT. *A general theory of one-dimensional local rings*, Proc. Glasgow Math. Ass. 2, 1956.

V. D. G. NORTHCOTT. *The neighbourhoods of a local ring*, Journ. London Math. Soc. n.º 30, 1955.

VI. D. G. NORTHCOTT. *Some contributions to the theory of one-dimensional local rings*, Proc. London Math. Soc. (3), 8, 1958.

VII. M. ROSENLICHT. *Equivalence relations on algebraic curves*, Ann. of Math. vol. 56, n.º 1, 1952.

VIII. J. P. SERRE. *Groupes algebriques et corps de classes*, Hermann, Paris 1959.

IX. F. SEVERI. *Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietá. Questioni collegate. Springer-Verlag*, Ergeb. Math., 1958.

X. F. SEVERI. *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di piu altre*, Memorie Scelte, ed. Cremonese, Roma 1950.

Departamento de Geometría y Topología.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Barcelona.