ESTRUCTURA COMPLEJA EN LA TEORIA CLASICA DE CAMPOS (+)

por

PEDRO L. GARCÍA

INTRODUCCION

En este trabajo nos proponemos hacer un análisis estructural de la Teoría clásica de los campos complejos a partir de los métodos generales desarrollados en nuestra tesis doctoral (1).

El principal resultado que se consigue es demostrar que el fundamento de todas las propiedades de este tipo de campos se encuentra en el hecho de dar sobre el fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ (o espacio de configuración del campo) un automorfismo J de fibrado vectorial, con las propiedades siguientes:

a) $J(E_x) \subseteq E_x$ para todo $x \in V$

b) $J^2(P) = -P$ para todo $P \in B$

En otras palabras: dar sobre el fibrado B una estructura de fibrado vectorial complejo.

A partir de este dato previo pueden, en efecto, introducirse con gran amplitud y naturalidad todas las nociones de los campos complejos (invariante de NOETHER de carga-corriente, conjugación de la carga, etc.), según veremos.

La marcha seguida en el trabajo puede ser esquematizada como sigue.

(+) Este trabajo ha sido subvencionado por una beca del P.I.O. y realizado en el Seminario de Física Matemática que dirige el Profesor J. Sancho en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona.

En la sección 1 se introduce el automorfismo fundamental J, al cual llamamos *estructura compleja* sobre el campo clásico dado, y se ve cómo éste puede prolongarse de un modo natural a un automorfismo $\bar{J}$ del fibrado $\bar{B}$ (o espacio de los estados del campo) con las mismas propiedades *a)* y *b)* que J. El resto de la sección lo dedicamos a justificar, en términos de los automorfismos J y $\bar{J}$, el uso de los sistemas de coordenadas locales complejas $(x_i\ z_j\ \bar{z}_j\ p_{ij}\ \bar{p}_{ij})$ tan generalizado en los tratamientos usuales de esta teoría.

En la sección 2 se define a partir del automorfismo J un campo vectorial vertical D_J sobre el fibrado B por la condición $D_J f = Jf$ para toda función f de B lineal sobre las fibras, y se supone que el campo físico que se considera es invariante (en el sentido de la teoría variacional) por el grupo uniparamétrico de automorfismos de B globalmente asociado a D_J. El invariante de E. NOETHER correspondiente $\mathfrak{J}$ es la $(m - 1)$-forma de *carga-corriente* que desde este punto de vista tiene una clara definición intrínseca y global.

En la sección 3 definimos una *conjugación de la carga* como un automorfismo C del fibrado B con las propiedades siguientes:

a) $C(E_x) \subseteq E_x$ para todo $x \in V$

b) $C^2(P) = P$ para todo $P \in B$

c) $(C \cdot J)\, P = -(J \cdot C)\, P$ para todo $P \in B$

y además, tal que: la prolongación natural $\bar{C}$ de C a $\bar{B}$ deje invariante la lagrangiana $\mathfrak{L}$ del campo. Las condiciones *a)*, *b)* y *c)* son las naturales que debe verificar una *conjugación* respecto de la estructura compleja J, y al añadir la cuarta, se consigue que la transformación $\bar{C}$ transforme $\mathfrak{J}$ en $-\mathfrak{J}$, hecho éste que justifica la denominación que se da a este tipo particular de transformaciones.

En el caso de las teorías de campos usuales sobre el espacio-tiempo de MINKOWSKI (que es, por otra parte, el único caso en que se suele estudiar la conjugación de la carga), si se impone además a C la condición de dejar invariantes todos los elementos del álgebra de LIE del grupo de POINCARÉ entonces: $\bar{C}$ deja fijos todos los *invariantes cinemáticos* del campo (impulso-energía, momento angular, etc.), y llegamos, de este modo, al tipo particular de transformación por la que se interesa la física. Naturalmente, el problema fundamental que se plantea ahora es el de la existencia y unicidad de este tipo de transformación para cada campo concreto. Analizamos con detalle, en este sentido, los campos *escalar*, *mesónico vectorial* y de *Dirac* libres. Para los dos primeros se demuestra que, salvo un factor de la forma $e^{i\theta}$, existe una única conjugación de la carga, en cambio, para el campo de Dirac ocurre: que las condiciones *a)*, *b)*, *c)*, y la quinta determinan ya unívocamente (salvo un factor $e^{i\theta}$) una transformación C cuya prolongación natural $\overline{C}$ no verifica la condición cuarta pues se tiene $\overline{C}(\mathcal{L}) = -\mathcal{L}$.

En la sección 4 analizamos, formalmente, la relación que existe entre las estructuras compleja y simpléctica asociadas a un campo clásico. El resultado más importante en este sentido es el siguiente:

El campo vectorial D y la función Q (la carga) definidos de un modo natural por la estructura compleja J y la $(m-1)$-forma de carga-corriente $\mathfrak{J}$, respectivamente, sobre el espacio de BANACH $\overline{\mathfrak{E}}$ (en donde están inicialmente definidas las ecuaciones de HAMILTON del campo), son compatibles con las ligaduras primarias (o gauge) y secundarias del campo, y además, sobre la variedad $\overline{V}$ de los estados dinámicos, el grupo uniparamétrico asociado a D es de isometrías simplécticas con función generatriz Q.

Terminamos el trabajo haciendo observar que la transformación inducida sobre la variedad $\overline{V}$ por una conjugación de la carga es una isometría simpléctica que deja invariante la hamiltoniana H y transforma la carga Q en $-Q$.

1. ESTRUCTURA COMPLEJA SOBRE UN CAMPO CLASICO

Sea V una variedad diferenciable dotada de un elemento de volumen ω y $(B, \mathcal{L})$ un campo clásico sobre V de espacio de configuración B y de lagrangiana $\mathcal{L}$ ((1), Sección 2, Def. 1).

DEFINICIÓN 1

Una *estructura compleja* sobre $(B, \mathcal{L})$ es un automorfismo diferenciable $J: B \to B$ tal que *a)* $J(E_x) \subseteq E_x$ para todo $x \in V$, y *b)* $J^2(P) = -P$ para todo $P \in B$.

El automorfismo J, al operar sobre el módulo M de las secciones transversales de B, deja invariante el submódulo $I_x^2 M_x$ del A_x-módulo M_x de los gérmenes de las secciones de M en cada punto $x \in V$. De este modo J induce en cada espacio vectorial $\overline{E}_x = M_x/I_x^2 M_x$ una transformación $\overline{J}_x$ que es lineal y verifica la condición $\overline{J}_x^2 = -1$.

La transformación $\bar{J}: \bar{B} \to \bar{B}$ tal que: $\bar{J}(\bar{E}_x) \subseteq \bar{E}_x$, $\bar{J}_{\bar{E}_x} = \bar{J}_x$ es un automorfismo diferenciable de $\bar{B}$ que verifica las mismas propiedades *a)* y *b)* que J.

Este proceso para prolongar J de B a $\bar{B}$ es obviamente generalizable a todo automorfismo $\tau: B \to B$ tal que $\tau(E_x) \subseteq E_x$ para todo $x \in V$. Al automorfismo $\bar{\tau}: \bar{B} \to \bar{B}$ que de este modo se obtiene lo llamaremos en lo que sigue *prolongación natural* de τ a $\bar{B}$.

Los automorfismos J y $\bar{J}$ definen sobre B y $\bar{B}$ sendas estructuras de fibrado vectorial complejo. Estas estructuras serán, como veremos, el fundamento de todas las propiedades de los campos que estamos considerando.

Sea $A_{\bar{B}}$ el álgebra de las funciones diferenciables reales sobre $\bar{B}$ y $M_{\bar{B}}$ el $A_{\bar{B}}$-módulo de las aplicaciones diferenciables F, de $\bar{B}$ en B, tales que $\pi \cdot F = \bar{\pi}$. El automorfismo J define sobre $M_{\bar{B}}$ una estructura compleja por la fórmula: $(JF)\bar{P} = J \cdot F(\bar{P})$. Si ahora $A^c_{\bar{B}}$ es el álgebra de las funciones diferenciables complejas sobre $\bar{B}$, podemos dotar a $M_{\bar{B}}$ de una estructura de $A^c_{\bar{B}}$-módulo sin más que dar la siguiente definición de producto:

$$(f + i g) F = f F + J g F$$

Procediendo por analogía con los espacios vectoriales, sea $M^c_{\bar{B}}$ la complejización de $M_{\bar{B}}$, esto es, el módulo dual del $A^c_{\bar{B}}$-módulo $\mathrm{Hom}_{A_{\bar{B}}}(M_{\bar{B}}, A^c_{\bar{B}})$. Si consideramos ahora la teoría de tensores sobre $A^c_{\bar{B}}$ con valores en $M^c_{\bar{B}}$, entonces todas las nociones *reales* que tenemos ya definidas (1-forma canónica θ, t.i.c.g., etc.), pueden ser extendidas de modo obvio a esta nueva estructura. Esta observación, si bien no es esencial para el desarrollo intrínseco de la teoría, sí que es tecnicamente importante por justificar, entre otras cosas, el uso de los sistemas de coordenadas locales complejas $(x_i\ z_j\ \bar{z}_j\ p_{ij}\ \bar{p}_{ij})$, tan generalizado en los tratamientos usuales de esta teoría. Vamos a ver a continuación cómo, en efecto, pueden ser introducidas este tipo de coordenadas a partir de las ideas anteriores.

LEMA 1

Para todo $x \in V$ existe un entorno U de x con coordenadas locales (x_i), $2n$ funciones (u_j, u_j') sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$, $2nm$ funciones (r_{ij}, r'_{ij}) sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$ y $2n$ aplicaciones (φ_j, φ_j') de $M = (M_{\bar{B}})_{\bar{\pi}^{-1}(u)}$, tales que:

a) $(x_i\ u_j\ u'_j)$ es un sistema de coordenadas locales de B sobre $\pi^{-1}(U)$, siendo las (u_j, u_j') lineales sobre las fibras y donde $u_j' = J u_j$.

b) $(x_i\ u_j\ u_j'\ r_{ij}\ r'_{ij})$ es un sistema de coordenadas locales de $\overline{B}$ sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$, siendo las $(u_j\ u_j'\ r_{ij}\ r'_{ij})$ lineales sobre las fibras y donde $u_j' = \bar{J}\ u_j,\ r'_{ij} = \bar{J}\ r_{ij}$.

c) (φ_j, φ_j') es una base de $\overline{M}$ tal que $\varphi_j' = J\ \varphi_j$.

d) Respecto de $(x_i\ u_j\ u_j'\ r_{ij}\ r'_{ij})$ y (φ_j, φ_j') la 1-forma canónica θ toma la expresión:

$$\theta = \sum_j \theta_j\ \varphi_j + \theta_j'\ \varphi_j'$$

donde $\theta_j = du_j - \sum_i r_{ij}\ dx_i,\ \theta_j' = du_j' - \sum_i r'_{ij}\ dx_i$.

Demostración

Basta repetir la demostración del Teorema 2 ((1), Sección 1) tomando como punto de partida 2 n secciones transversales (ϕ_j, ϕ_j') tales que $\phi_j' = J\phi_j$, y luego tomar como $\varphi_j, \varphi_j')$ la base inducida en $\overline{M}$ por el sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\ u_j\ u'_j\ r_{ij}\ r'_{ij})$. c.q.d.

Respecto de un sistema de coordenadas locales $(x_i\ u_j\ u_j'\ r_{ij}\ r'_{ij})$ toda función de $(A\frac{c}{B})_{\bar{\pi}^{-1}(u)}$ puede expresarse unívocamente en la forma

$$f(x_i\ u_j \ldots) + i\,g\ (x_i\ u_j \ldots)$$

donde f y g son funciones diferenciables reales de las variables $(x_i\ u_j \ldots)$, y recíprocamente. En este sentido diremos que $(x_i\ u_j\ u_j'\ r_{ij},\ r'_{ij})$, es un sistema de coordenadas reales de $A\frac{c}{B}$ adaptado a la estructura compleja. Análogas consideraciones podemos hacer respecto de (φ_j, φ_j').

Para pasar ahora de estas coordenadas reales a las complejas $(x_i\ z_j\ \bar{z}_j\ p_{ij}\ \bar{p}_{ij})$ y $(f_j, \bar{f}_j)$, basta hacer la transformación:

$$b_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_j + i\,a_j')$$

$$\bar{b}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_j - i\,a_j')$$

donde a_j y b_j recorren $(u_j\ r_{ij}\ \varphi_j)$ y $(z_j\ p_{ij}\ f_j)$, respectivamente.

Para ilustrar el uso de este tipo de coordenadas vamos a ver las expresiones que toman respecto de éstas la 1-forma canónica θ y las t.i.c.g.

Por un sencillo cálculo se obtiene:

$$\theta = \sum_j \bar{\theta}_j f_j + \theta_j \bar{f}_j$$

donde $\theta_j = dz_j - \sum_i p_{ij}\, dx_i$, $\bar{\theta}_j = d\bar{z}_j - \sum_i \bar{p}_{ij}\, dx_i$,

El caso más interesante de t.i.c.g. es el de las subidas canónicas a $\bar{B}$ de los campos vectoriales reales de B que son proyectables por π sobre V. Si D es uno de éstos:

$$D = \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{\mu}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

(donde las λ_i son funciones reales de las x_i y las μ_j y $\bar{\mu}_j$ son funciones complejas de las $(x_i\ z_j\ \bar{z}_j)$ conjugadas entre sí) entonces, por un sencillo cálculo local, la subida canónica $\bar{D}$ de D a $\bar{B}$ toma la expresión:

$$\bar{D} = D + \gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} + \bar{\gamma}_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{ij}}$$

donde:

$$\gamma_{ij} = -\sum_k p_{kj} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} + \sum_h p_{ih} \frac{\partial \mu_j}{\partial z_h} + \bar{p}_{ih} \frac{\partial \mu_j}{\partial \bar{z}_h}$$

siendo $\bar{\gamma}_{ij}$ la función conjugada de γ_{ij}.

2. (m-1)-FORMA $\mathfrak{J}$ DE CARGA-CORRIENTE SOBRE EL FIBRADO $\bar{B}$

El automorfismo fundamental J define sobre el fibrado B un campo vectorial vertical D_J por la condición $D_J f = Jf$ para toda función f de B lineal sobre las fibras, y análogamente, la prolongación natural $\bar{J}$ de J a $\bar{B}$ define sobre el fibrado $\bar{B}$ un campo vectorial vertical $D_{\bar{J}}$ por la condición $D_{\bar{J}} f = \bar{J} f$ para toda función f de $\bar{B}$ lineal sobre las fibras.

TEOREMA 1

La subida canónica de D_J a $\bar{B}$ coincide con $D_{\bar{J}}$.

DEMOSTRACIÓN

Basta comprobar la afirmación localmente. La expresión de D_J respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, \bar{z}_j\, p_{ij}\, \bar{p}_{ij})$ es:

$$D_J = -i \sum_j \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right)$$

Entonces, la subida canónica de D_J a $\bar{B}$ será por la fórmula de la sección 1:

$$-i \left(D_J + \sum_{ij} p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} - \bar{p}_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{ij}} \right)$$

y este campo vectorial coincide evidentemente con $D_{\bar{J}}$.

c.q.d.

El grupo uniparamétrico $\{\tau_t\}$ globalmente asociado al campo vectorial D_J de B opera sobre B por automorfismos de fibrado vectorial. Si se supone (como es el caso en las teorías de campos usuales) que el campo físico considerado es invariante por $\{\tau_t\}$ en el sentido de la teoría variacional, esto es, si:

$$L_{D_{\bar{J}}} \mathfrak{L}\, \omega = 0$$

entonces tendremos un correspondiente invariante de NOETHER:

$$\mathfrak{J} = \theta\, (D_{\bar{J}})\, \Omega$$

que llamaremos $(m\text{-}1)$-forma de carga-corriente.

Como ya hemos hecho observar otras veces, en esta formulación el invariante es una $(m\text{-}1)$-forma sobre el fibrado $\bar{B}$ de los estados del campo que, por restricción a una sección transversal estacionaria, da una $(m\text{-}1)$-forma ω_{m-1} sobre la variedad base V dependiendo de dicha sección. En particular, si V es el espacio-tiempo de la teoría de la relatividad y $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ es un sistema de coordenadas locales de V, entonces la coordenada $\omega_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, \frac{\partial}{\partial x_2}\, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ de ω_3 se denomina *carga*, y las otras tres *vector corriente*. Naturalmente, esta separación entre carga y corriente es no intrínseca, y por tanto, desprovista de sentido físico.

Vamos a terminar esta sección obteniendo la expresión del invariante de carga-corriente en un sistema de coordenadas locales canónicas complejas.

Si $(x_i\ z_j\ \bar{z}_j\ p_{ij}\ \bar{p}_{ij})$ es un tal sistema de coordenadas y $(f_j, \bar{f}_j)$ es la base local que induce en el $A^c_{\bar{B}}$-módulo $M^c_{\bar{B}}$, entonces se obtiene fácilmente la siguiente expresión de Ω:

$$\Omega = \sum_j \bar{\Omega}_j f_j^* + \Omega_j \bar{f}_j^*$$

donde $(f_j^*, \bar{f}_j^*)$ es la base dual de $(f_j, \bar{f}_j)$ y donde:

$$\Omega_j = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_{ij}} dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m, \quad \bar{\Omega}_j = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{p}_{ij}} dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m$$

De aquí se sigue:

$$\mathfrak{I} = \theta\,(D_{\bar{J}})\,\Omega = \sum_j \theta_j\,(D_{\bar{J}})\,\Omega_j + \bar{\theta}_j\,(D_{\bar{J}})\,\bar{\Omega} = i \sum_{hj} (-1)^h \left(\bar{z}_j \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{p}_{hj}} - z_j \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_{hj}} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_h} \wedge \ldots \wedge dx_m$$

3. CONJUGACION DE LA CARGA

DEFINICIÓN 2

Una *conjugación de la carga* respecto de una estructura compleja J sobre un campo clásico $(B, \mathfrak{L})$ es un automorfismo diferenciable $C : B \to B$ tal que: *a)* $C\,(E_x) \subseteq E_x$ para todo $x \in V$, *b)* $C^2 = 1$, *c)* $C \cdot J = - J \cdot C$ y *d)* la prolongación natural $\bar{C}$ de C a $\bar{B}$ deja invariante la lagrangiana $\mathfrak{L}$ del campo.

Es evidente, a partir de las definiciones, que el automorfismo $\bar{C}: \bar{B} \to \bar{B}$ tiene, respecto de $\bar{J}$, las mismas propiedades *a)*, *b)* y *c)* de C respecto de J. Por otra parte, se verifica el siguiente importante lema:

LEMA 2

$$\bar{C}\,(D_{\bar{J}}) = - D_{\bar{J}}$$

DEMOSTRACIÓN

Puesto que $\overline{C}\,(D_{\overline{J}})$ es un campo vectorial vertical de $\overline{B}$ sólo hará falta comprobar la igualdad sobre las funciones f de $\overline{B}$ lineales sobre las fibras. Se tiene en efecto:

$$(\overline{C}\, D_{\overline{J}})\, f = \overline{C}\, D_{\overline{J}}\, \overline{C}^{-1} f = \overline{C}\, \overline{J}\, \overline{C}^{-1} f = -\, \overline{J}\, \overline{C}\, \overline{C}^{-1} f = -\, \overline{J} f = -\, D_{\overline{J}} f$$

c.q.d.

La denominación dada a este tipo particular de transformaciones está justificada después del siguiente importante teorema:

TEOREMA 2

Si C es una conjugación de la carga y $\mathfrak{J}$ es la $(m\text{-}1)$-forma de carga-corriente, se verifica:

$$\overline{C}\,(\mathfrak{J}) = -\,\mathfrak{J}$$

donde $\overline{C}$ es la prolongación natural de C al fibrado $\overline{B}$.

DEMOSTRACIÓN

Por ser $\overline{C}$ la prolongación natural al fibrado $\overline{B}$ de un automorfismo C de B tal que $C\,(E_x) \subseteq E_x$ para todo $x \in V$, entonces se verifica: $\overline{C}\,\theta = A\,\theta$, donde $A \in Hom_{A_{\overline{B}}}(M_{\overline{B}}, M_{\overline{B}})$ es constante sobre las fibras de $\overline{B}$. Aplicando $\overline{C}$ a la igualdad *b)* del Teorema 1 ((1), sección 2), teniendo en cuenta que $\overline{C}\,(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$, se obtiene:

$$i\,\overline{C}\,(X)\, d\,(A\,\theta) + d\,\mathfrak{L} = \overline{C}\,(F)\, A\,\theta$$

Aplicando esta igualdad a los campos vectoriales D de $\overline{B}$ tales que $p\,(D) = 0$ (p es la proyección canónica de $\overline{B}$ sobre B), entonces se verifica sobre estos campos:

$$i\, A\, \overline{C}\,(X)\, d\,\theta + d\,\mathfrak{L} = 0$$

Esto implica que:

$$A\,\overline{C}\,(\Omega) = i\, A\, \overline{C}\,(X)\,\omega = \Omega$$

De donde entonces:

$$\overline{C}\,(\mathfrak{J}) = \overline{C}\,\theta\,(D_{\overline{J}})\,\Omega = A\,\theta\,(-\,D_{\overline{J}})\,\overline{C}\,(\Omega) = -\,\mathfrak{J}$$

c.q.d.

Hasta aquí nuestro tratamiento ha sido completamente general. Vamos a estudiar ahora con algo más de detalle la conjugación de la carga en el caso particular de la teoría relativista de campos sobre el espacio-tiempo de MINKOWSKI. Como es bien sabido, en este caso se supone que el grupo de POINCARÉ G (o su recubridor universal $\overline{G}$) opera sobre el fibrado B por automorfismos de fibrado vectorial, y deja invariante (en el sentido de la teoría variacional) al campo físico considerado. Los invariantes de NOETHER correspondientes son los tan llamados *invariantes cinemáticos* del campo (impulso-energía, momento cinético, etc.). Pues bien, vamos a probar en estas condiciones el siguiente importante Teorema:

TEOREMA 3

Si una conjugación de la carga C deja fijos todos los elementos del álgebra de LIE A_G *del grupo de* POINCARÉ G *(o de su recubridor universal $\overline{G}$), entonces su prolongación natural $\overline{C}$ al fibrado $\overline{B}$ deja fijos todos los invariantes cinemáticos del campo.*

DEMOSTRACIÓN

Ante todo, $\overline{C}$ deja fijas las subidas canónicas a $\overline{B}$ de todos los elementos del álgebra de LIE A_G. En efecto, sea $D \in A_G$ y $\overline{D}$ la subida canónica de D a $\overline{B}$. Por definición se verificará:

$$L_{\overline{D}}\,\theta = \phi\,\theta$$

Aplicando $\overline{C}$ a esta igualdad tendremos:

$$L_{\overline{C}(\overline{D})}\,(A\,\theta) = \overline{C}\,(\overline{D})\,A\,\;\theta + A\,L_{\overline{C}(\overline{D})}\,\theta = \overline{C}\,(\phi)\,A\,\theta$$

De donde:

$$L_{\overline{C}(\overline{D})} = \phi'\,\theta$$

Entonces $\overline{C}\,(\overline{D})$ es una t.i.c.g. Por otra parte, por la hipótesis del Teorema, $\overline{C}\,(\overline{D})$ se proyecta por p (proyección canónica de $\overline{B}$ sobre B) en D. De aquí se sigue que $\overline{C}\,(\overline{D}) = \overline{D}$.

Para concluir ahora la prueba basta seguir el mismo razonamiento de la demostración del Teorema 2.

c.q.d.

En lo que sigue de esta sección supondremos que la conjugación de la carga C verifica la hipótesis del Teorema 3. Entonces su prolongación natural $\overline{C}$ al fibrado $\overline{B}$ dejará fijos todos los *invariantes cinemáticos* del campo, y transformará el invariante $\mathfrak{J}$ de *carga-corriente* en $-\mathfrak{J}$. A una transformación con este efecto es a lo que en la teoría relativista de campos se llama *conjugación de la carga.* Naturalmente, lo que procede ahora es analizar para cada campo concreto el problema de *existencia* y *unicidad* de este tipo de transformación. Como ejemplo vamos a tratar este problema en los casos elementales de los campos *escalar, mesónico vectorial* y de *Dirac* libres. A este objeto el siguiente Lema será de mucha utilidad.

LEMA 3

Sea E_{2n} un espacio vectorial real de dimensión $2n$ dotado de una estructura compleja J, $*^2$ una conjugación respecto de J (esto es, una transformación lineal de E_{2n} tal que $*^2 = 1$ y $* \cdot J = -J \cdot *$) y E^c_n el espacio vectorial complejo definido por el grupo aditivo de E_{2n} y la multiplicación por escalares $ie = Je$. Entonces, cualquier otra conjugación C es de la forma $C = \tau \cdot *$, donde τ es una transformación lineal de E^c_n con la condición $\tau * \cdot \tau = 1$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\tau = C \cdot *^{-1}$. Bastará probar que τ es lineal sobre E^c_n y que $\tau^* \cdot \tau = 1$. Para lo primero sólo hace falta probar que $\tau(ie) = i\tau(e)$. Se tiene, en efecto:

$$\tau(ie) = (C \cdot *^{-1} \cdot J)e = (C \cdot J \cdot J^{-1} \cdot *^{-1} \cdot J)e = (J \cdot C \cdot *^{-1} \cdot J^{-1} \cdot J)e =$$
$$= (J \cdot C \cdot *^{-1})\, e = (J \cdot \tau)e = i\,\tau\,(e)$$

En cuanto a lo segundo, de $*^2 = C^2 = 1$, se sigue:

$$\tau^* \cdot \tau = (* . \tau . *^{-1})\,\tau = * . C . *^{-1} . *^{-1} . C\, *^{-1} = 1$$

c.q.d.

A. *Campo escalar libre*

El fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ a partir del que se define este campo es el fibrado producto directo $V \times C$ del espacio-tiempo de MINKOWSKI V por el cuerpo de los números complejos C. Entonces, el A-módulo de las secciones transversales de B coincide en este caso con el A-módulo de las funciones diferenciables sobre V con valores complejos.

El producto escalar de MINKOWSKI que tenemos definido en cada espacio tangente V_x a V en x puede extenderse del modo bien conocido a la complejización $V^c{}_x$ de V_x. Esto nos permite definir intrínsecamente la lagrangiana $\mathcal{L}$ de este campo por la fórmula:

$$\mathcal{L}\,(\overline{p}) = \frac{1}{2}\,(d\,f)_x \cdot (d\,\overline{f})_x - \frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2 f\,(x)\,\overline{f}\,(x)$$

donde $\overline{P} \in \overline{B}$, $x = \overline{\pi}\,(\overline{P})$, f es un representante cualquiera de $\overline{P}$, $\overline{f}$ es la función conjugada de f y el $\cdot$ indica producto escalar de MINKOWSKI.

Respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas complejas $(x_i\; z\; \overline{z}\; p_i\; \overline{p}_i)$ $\mathcal{L}$ toma la expresión bien conocida:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i g_{ii}\, p_i\, \overline{p}_i - \frac{1}{2}\, m^2\, z\, \overline{z}$$

La estructura compleja J de este campo viene definida por la fórmula:

$$J\,(x,\, \lambda) = (x,\, i\lambda)$$

El grupo uniparamétrico globalmente asociado al campo vectorial D_J de B opera sobre B por automorfismos de fibrado vectorial y deja invariante al campo físico en cuestión. Por otra parte, el grupo de POINCARÉ G deja también invariante a dicho campo al operar sobre B por la regla:

$$g\,(x,\, \lambda) = (g\,(x),\, \lambda)$$

Bajo estas condiciones tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 4

Salvo un factor arbitrario de la forma $e^{i\theta}$ existe, para el campo escalar libre, una y sólo una conjugación de la carga.

DEMOSTRACIÓN

El automorfismo $C : B \to B$ definido por la fórmula:

$C(x, \lambda) = (x, {}_*\lambda)$ donde $x \in V$, $\lambda \in C$ y ${}_*\lambda$ es el complejo conjugado de λ, satisface todas las condiciones de una conjugación de la carga. Por el Lema 3 cualquier otra C' vendrá definida por la fórmula:

$$C'(x, \lambda) = (x, \tau \cdot * \lambda)$$

donde τ es una transformación lineal del espacio vectorial complejo 1-dimensional C tal que $\tau^* \cdot \tau = 1$. Entonces $\tau = e^{i\theta}$.

c.q.d.

B. *Campo mesónico vectorial libre*

El fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ a partir del que se define este campo es el *Hom* $(T_V, V \times C)$, donde T_V es el fibrado tangente del espacio-tiempo de MINKOWSKI V y $V \times C$ es el fibrado producto directo de V por el cuerpo de los números complejos C. Entonces, el A-módulo de las secciones transversales de B coincide en este caso con el A-módulo de las 1-formas sobre V con valores complejos.

La lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo es la función sobre el fibrado $\overline{B}$ definida por la fórmula:

$$\mathcal{L}(\overline{P}) = -\frac{1}{4}(d\,\omega)_x \cdot (d\,\overline{\omega})_x + \frac{1}{2} m^2\, \omega_x \cdot \overline{\omega}_x$$

donde $\overline{P} \in \overline{B}$, $x = \overline{\pi}(\overline{P})$, ω es un representante cualquiera de $\overline{P}$, $\overline{\omega}$ es la 1-forma conjugada de ω y el $\cdot$ indica producto escalar de MINKOWSKI.

Respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas complejas $(x_i\; z_j\; \overline{z}_j\; p_{ij}\; \overline{p}_{ij})$ $\mathcal{L}$ toma la expresión bien conocida:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sum_{ij} g_{ii}\, g_{jj}\, (p_{ij} - p_{ji})\; (\overline{p}_{ij} - \overline{p}_{ji}) + \frac{1}{2} m^2 \sum_j g_{jj}\, z_j\, \overline{z}_j$$

La estructura compleja J de este campo viene definida por la fórmula:

$$J(x, \omega_x) = (x, i\,\omega_x)$$

El grupo uniparamétrico globalmente asociado al campo vectorial D_J de B opera sobre B por automorfismos de fibrado vectorial y deja invariante el campo físico en cuestión. Por otra parte, el grupo de POINCARÉ G deja también invariante dicho campo al operar sobre B por la regla:

$$g(x, \omega_x) = (g(x), \omega_x \cdot (dg)_x^{-1})$$

Bajo estas condiciones tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5

Salvo un factor arbitrario de la forma e^{i0} existe, para el campo mesónico vectorial libre, una y solo una conjugación de la carga.

DEMOSTRACIÓN

Dado un sistema de coordenadas inercial $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ de V, podemos identificar los fibrados B y $V \times C^4$ por el isomorfismo:

$$(x, \omega_x) \in B \longleftrightarrow (x, z_j) \in V \times C^4$$

donde:

$$\omega_x = \sum_j z_j (d x_j)_x$$

Por otra parte, respecto de $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ toda transformación del grupo de POINCARÉ G tiene por ecuaciones: $\overline{x}_i = a_i + \sum_h b_{ih} x_h$ (donde las a_i son números reales arbitrarios y (b_{ih}) es una matriz del grupo de LORENTZ homogéneo propio $L_+^\uparrow$), y opera sobre el fibrado $B = V \times C^4$ por la regla:

$$g(x, z_j) = (g(x), \sum_h \overline{b}_{jh} z_h)$$

donde $(\overline{b}_{jh})$ es la matriz inversa y transpuesta de la matriz (b_{jh}).

El automorfismo $C: B \to B$ definido por la fórmula:

$C(x, z_j) = (x, * z_j)$, donde $x \in V$, $z_j \in C^4$ y $* z_j$ es el complejo conjugado de z_j, satisface todas las condiciones de una conjugación de la carga. Por el Lema 3 cualquier otra C' vendrá definida por la fórmula: $C'(x, z_j) = (x, \tau \cdot * z_j)$, donde τ es una transformación lineal del espacio vectorial complejo C^4 que verifica las condiciones siguientes: *a)* conmuta con el álgebra de LIE de la representación lineal $(b_{ij}) \in L_+^\uparrow \to (z_j \to \sum_h \overline{b}_{jh} z_h)$ del grupo $L_+^\uparrow$ en el espacio vectorial complejo C^4; y *b)* $\tau \cdot \tau^* = 1$. Por *a)* τ tiene que ser un múltiplo λI del operador identidad; y por *b)* λ tiene que ser de la forma e^{i0}.

C. *Campo de Dirac libre*

Antes de plantear este caso vamos a recordar algunas notaciones y conceptos de la *teoría algebraica de spinores.* Para mayores detalles pueden consultarse (2), (3) y (4).

Sea E_4 el espacio vectorial de MINKOWSKI, C el álgebra de CLIFFORD sobre E_4, C^+ la subalgebra de C de los elementos pares y Γ, Γ^+ y $\Gamma_0{}^+$ los grupos de CLIFFORD, especial de CLIFFORD y reducido de CLIFFORD, respectivamente. $\Gamma_0{}^+$ es el recubridor universal del grupo de LORENTZ homogeneo propio $L_+^\uparrow$. Denotaremos por h el homomorfismo canónico de $\Gamma_0{}^+$ sobre $L_+^\uparrow$.

El álgebra C admite, salvo equivalencias, una sola representación lineal irreducible sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita. El substrato S de una tal representación, que es un espacio vectorial de dimensión 4, se denomina *espacio de spinores.* Un método para seleccionar una de estas representaciones es como sigue: sean $\overline{E}_4$ y $\overline{C}$ la complejización de E_4 y C respectivamente, N un subespacio isotropo máximal de $\overline{E}_4$ (si $(e_1\, e_2\, e_3\, e_4)$ es una base ortonormal de E_4, la pareja de vectores $e_1 + i\, e_2$ y $e_3 + e_4$ generan, por ejemplo, un tal subespacio) y u la forma de área contravariante (única salvo constantes) del subespacio N. Entonces se verifica: *que el ideal por la izquierda S generado en $\overline{C}$ por u es simple,* y, por tanto, define una representación irreducible de $\overline{C}$ que sigue siéndolo de C. La representación así construida se denomina *spinorial.* Esta representación induce sobre los grupos de CLIFFORD Γ, Γ^+ y $\Gamma_0{}^+$ sendas representaciones que también se llaman *spinoriales.* La de Γ sigue siendo irreducible, en cambio, respecto de Γ^+ y $\Gamma_0{}^+$ el espacio S se descompone en dos subespacios de dimensión 2 irreducibles S_i y S_p (los espacios de semiespinores).

Si $(e_1\, e_2\, e_3\, e_4)$ es una base ortonormal de E_4 y u es la forma de área contravariante del subespacio $N = < e_1 + i\, e_2, e_3 + e_4 >$ los spinores $s_1 = u$, $s_2 = e_1 \circ u$, $s_3 = e_3 \circ u$, $s_4 = e_1 \circ e_3 \circ u$ constituyen una base del espacio S de spinores respecto de la cual los vectores (e_i) se representan, por la representación spinorial, en las matrices de DIRAC (γ_i). Por esta razón a $(s_1\, s_2\, s_3\, s_4)$ la llamaremos base DIRAC inducida en S por la base ortanormal $(e_1\, e_2\, e_3\, e_4)$.

Finalmente, sobre los spinores S podemos definir canónicamente una métrica $< \, , >$ hermítica, no degenerada e invariante por la representación spinorial del grupo $\Gamma_0{}^+$ (véase (4)). La poloridad inducida por esta métrica es la tan llamada *adjunción Dirac.*

Tras estas consideraciones previas vamos a plantear ya la teoría lagrangiana del campo de DIRAC libre.

El fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ a partir del que se define este campo es el fibrado producto directo $V \times S$ del espacio vectorial de MINKOWSKI $V = E_4$ y el espacio S de spinores. En este caso el A-módulo de las secciones transversales de B coincide con el A-módulo de las funciones diferenciables sobre V con valores en S (los campos spinoriales).

Si $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ es un sistema de coordenadas inercial de V $(e_1\, e_2\, e_3\, e_4)$ una base ortonormal de E_4 y $(s_1\, s_2\, s_3\, s_4)$ la base DIRAC inducida en S, podemos definir la lagrangiana de este campo por la fórmula:

$$\mathcal{L}(\overline{P}) = \frac{i}{2} \sum_n < \varphi(x), e_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)_x > - < \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)_x, e_n \varphi(x) > - m < \varphi(x), \varphi(x) >$$

donde $\overline{P} \in \overline{B}$, $x = \pi(\overline{P})$, φ es un representante cualquiera de $\overline{P}$ y la métrica $< \, , \, >$ es la mencionada anteriormente (*).

La estructura compleja J de este campo viene definida por la fórmula:

$$J(x, s) = (x, i\, s)$$

El grupo uniparamétrico globalmente asociado al campo vectorial D_J de B opera sobre B por automorfismos de fibrado vectorial y deja invariante al campo físico que estamos considerando. El invariante de NOETHER de carga-corriente $\mathfrak{J}$ correspondiente toma la expresión:

$$\mathfrak{J}(\overline{P}) = i \sum_h (-1)^h < \varphi(x), \; e_h\, \varphi(x) > dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_h} \wedge \dots \wedge dx_4$$

donde $\overline{P}$, x, φ y $< \, , \, >$ son los definidos más arriba a propósito de $\mathcal{L}$.

Por otra parte, el grupo $G_0 \times \Gamma_0{}^+$, producto semidirecto del grupo G_0 de las translaciones de E_4 por el grupo reducido de CLIFFORD $\Gamma_0{}^+$, deja también invariante (en el sentido de la teoría variacional) al campo de DIRAC libre al operar sobre B por la regla:

$$(a, g)\,(x, s) = ((a, g')\, x \, , \, gs)$$

donde $a \in G_0$, $g \in \Gamma_0{}^+$ y $g' = h(g) \in L_+^\uparrow$. Los invariantes de E. NOETHER correspondientes son los invariantes cinemáticos del campo de DIRAC libre (impulso-energía, momento cinético, spin, etc.).

(*) La teoría lagrangiana del campo de Dirac puede formularse de un modo totalmente intrínseco pero esto nos hubiera llevado aquí demasiado lejos respecto del fin que nos proponemos.

Planteada en estos términos la teoría lagrangiana del campo de DIRAC libre vamos a tratar ahora el problema de la conjugación de la carga para este caso.

Por las definiciones dadas todo el problema queda reducido, evidentemente, a encontrar una transformación antilineal e involutiva C del espacio S de spinores tal que:

a) C deje invariantes todos los elementos de la representación spinorial del álgebra de LIE del grupo reducido de CLIFFORD $\Gamma_0{}^+$.

b) la prolongación natural $\overline{C}$ al fibrado $\overline{B}$ del automorfismo $C : B \to B$ definido por la fórmula $C(x, s) = (x, C s)$ deje invariante la lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo.

Pues bien, en este sentido tenemos el siguiente importante teorema:

TEOREMA 6

La transformación C queda unívocamente determinada por la condición *a)* salvo un factor de la forma $e^{i\theta}$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $(e_1\ e_2\ e_3\ e_4)$ una base ortonormal de E_4 y $(s_1\ s_2\ s_3\ s_4)$ la base DIRAC que induce sobre S en el sentido apuntado más arriba. El álgebra de LIE de $\Gamma_0{}^+$ está generada por los elementos

$$e_1 \circ e_2, \quad e_1 \circ e_3, \quad e_1 \circ e_4, \quad e_2 \circ e_3, \quad e_2 \circ e_4, \quad e_3 \circ e_4$$

Denotemos por $*$ la conjugación sobre S definida por la fórmula: $*\,(\Sigma\, \lambda_i\, s_i) = \Sigma\, \overline{\lambda}_i\, s_i$, donde los $\overline{\lambda}_i$ son los conjugados de los λ_i. Por el Lema 3 cualquier otra conjugación C será de la forma $C = \tau \cdot *$, donde τ es una transformación lineal de S tal que $\tau \cdot \tau^* = 1$. Para que C verifique la condición *a)* es necesario y suficiente que τ verifique las condiciones:

$$\begin{cases} \tau\,(e_1 \circ e_2)\,\tau^{-1} = -\,e_1 \circ e_2 \\ \tau\,(e_1 \circ e_3)\,\tau^{-1} = e_1 \circ e_3 \\ \tau\,(e_1 \circ e_4)\,\tau^{-1} = e_1 \circ e_4 \end{cases}$$

Una solución inmediata de estas ecuaciones es $\tau = e_2$, la cual, por verificar también $e_2 \cdot e_2{}^* = 1$, nos proporciona la conjugación

$C = e_2 \cdot *$. Vamos a ver que, salvo un factor de la forma $e^{i\theta}$, esta conjugación es única. En efecto, por el Lema 3 de nuevo, cualquier otra C' será de la forma $C' = A \cdot (e_2 \cdot *)$, donde A es una transformación lineal de S tal que: *a')* conmuta con los elementos $e_1 \circ e_2$, $e_1 \circ e_3$ y $e_1 \circ e_4$ y *b')* $A \cdot (e_2 \cdot *)\ A\ (e_2 \cdot *)^{-1} = 1$. Por *a')* A tiene que ser un elemento del centralizador de la subálgebra C^{+} de los elementos pares, o sea, debe ser de la forma $A = a \cdot 1 + b\ e_1 \circ e_2 \circ e_3 \circ e_4$ siendo a y b números reales. Entonces, como $e_1 \circ e_2 \circ e_3 \circ e_4$ opera sobre S, por la representación spinorial, como el número i, A tiene que ser un múltiplo complejo λI del operador identidad. Aplicando ahora la condición *b')* λ deberá ser de la forma $e^{i\theta}$.

c.q.d.

Según esto, para que en la teoría del campo de Dirac libre tengamos una conjugación de la carga ha de ocurrir que la prolongación natural $\overline{C}$ al fibrado $\overline{B}$ del automorfismo $C: B \to B$ definido por la fórmula $C(x, s) = (x, Cs)$, donde C es la transformación determinada por el Teorema 7, deje invariante la lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo. Pero es el caso que esto no es así pues se verifica $\overline{C}(\mathcal{L}) = -\mathcal{L}$. Entonces en este caso particular *no existe ninguna conjugación de la carga* en el sentido del formalismo general que hemos desarrollado.

Sin embargo, este automorfismo $C : B \to B$ así obtenido sí que llega a satisfacer todas las condiciones de una conjugación de la carga al pasar a la teoría cuantizada. Esta es a nuestro juicio la razón de porqué se considera la conjugación de la carga, para el campo de Dirac libre, solamente en el formalismo cuántico.

4. RELACION ENTRE LAS ESTRUCTURAS COMPLEJA Y SIMPLECTICA DE UN CAMPO CLASICO

Siguiendo la teoría general de (1) (sección 3.2), a la base del estudio simpléctico de un campo clásico $(B, \mathcal{L})$ dotado de una estructura compleja J nos encontramos con dos campos vectoriales fundamentales: los campos $\overline{\overline{D}}_t$ y $D_{\overline{J}}$, en correspondencia respectiva con las densidades hamiltoniana $\mathcal{H}$ y de carga-corriente $\mathfrak{J}$ de dicho campo. $\overline{\overline{D}}_t$ y $D_{\overline{J}}$ verifican las importantes relaciones:

$$L_{\overline{\overline{D}}_t}\,\Theta_m = 0 \quad L_{D_{\overline{J}}}\,\Theta_m = 0$$

La primera ya la tenemos demostrada en (1) y para probar la segunda basta repetir exactamente el mismo razonamiento. En toda esta sección haremos la hipótesis (que desde luego se verifica en todos los casos interesantes) de que el paréntesis de LIE $[\overline{D}_t, D_{\bar{J}}]$ sea nulo. Entonces tendremos la relación:

$$L_{D_{\bar{J}}}\ \mathcal{H} = 0$$

Tras estas observaciones preliminares vamos ya a analizar, desde un punto de vista *formal*, la conexión que existe entre las estructras compleja y simpléctica del campo físico considerado. La rigorización analítica de las consideraciones que aquí hagamos es, naturalmente, cuestión a tratar para cada campo concreto.

El campo vectorial $D_{\bar{J}}$ del fibrado $\overline{B}$ define, vía el Lema 3 de (1) (sección 3.2), un campo vectorial sobre el especio de BANACH $\overline{\mathfrak{E}}$ (en donde tenemos inicialmente definidas las ecuaciones de HAMILTON del campo) que seguiremos denotando por $D_{\bar{J}}$ por simplificar la notación. Por otra parte, la densidad de carga-corriente $\mathfrak{J}$ define sobre $\overline{\mathfrak{E}}$ una función Q por la fórmula:

$$Q(\sigma) = \int_{\sigma} \mathfrak{J}$$

a la que llamaremos función *carga*.

En estas condiciones tenemos ahora el siguiente importante teorema:

TEOREMA 7 (de conexión entre las estructuras compleja y simpléctica).

El campo vectorial $D_{\bar{J}}$ es restringible a la subvariedad $\mathcal{V}$ de $\overline{\mathfrak{E}}$ definida por las *ligaduras secundarias* del campo. Las restricciones a $\mathcal{V}$ de $D_{\bar{J}}$ y de la función *carga* Q son proyectables sobre la variedad $\overline{\mathcal{V}}$ definida por las *ligaduras primarias* (o gauge) del campo. Si $\overline{D}_{\bar{J}}$ y $\overline{Q}$ son las correspondientes proyecciones se verifica: que el grupo uniparamétrico asociado a $\overline{D}_{\bar{J}}$ es de isometrías simplécticas con $\overline{Q}$ como función generatriz.

DEMOSTRACIÓN (formal)

Sean H y $\omega_2 = d\omega_1$ la hamiltoniana y la métrica simpléctica del campo sobre el espacio de BANACH $\overline{\mathfrak{E}}$. Las condiciones $L_{D_{\bar{J}}}\ \mathcal{H} = 0$ y $L_{D_{\bar{J}}}\ \Theta_m = 0$ implican se verifiquen las relaciones $D_{\bar{J}}\ H = 0$, $L_{D_{\bar{J}}}\ \omega_1 = 0$

y $L_{D\bar{J}}\,\omega_2 = 0$. En efecto, siguiendo las definiciones y métodos formales de (1) tendremos:

$$(D_{\bar{J}}\ H)_\sigma = (d\ H)_\sigma\ D_{\bar{J}} = \int_\sigma L'_{D\bar{J}}\,\mathcal{H} = 0$$

$$(L_{D\bar{J}}\ \omega_1)_\sigma\ e = \int_\sigma (L_{D\bar{J}}\ \Theta_m)\ e = 0$$

$$L_{D\bar{J}}\ \omega_2 = L_{D\bar{J}}\ d\,\omega_1 = d\ L_{D\bar{J}}\ \omega_1 = 0$$

Según esto, el grupo uniparamétrico $\{\tau_t\}$ asociado a $D_{\bar{J}}$ dejará invariantes las ecuaciones de HAMILTON del campo sobre $\bar{\mathcal{E}}$ y, por tanto, también dejará invariante la cadena de subvariedades:

$$\bar{\mathcal{E}} \supseteq \mathcal{V}_1 \supseteq \mathcal{V}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{V}$$

Esto implica que $D_{\bar{J}}$ sea restringible a la subvariedad $\mathcal{V}$.
Si ahora D es un elemento cualquiera de rad $(\omega_2)_{\mathcal{V}}$, tendremos:

$$0 = L_{D\bar{J}}\,i\,D\,(\omega_2)_{\mathcal{V}} = i\,[D_{\bar{J}}, D]\,(\omega_2)_{\mathcal{V}} + i\,D\,.L_{D\bar{J}}\,(\omega_2)_{\mathcal{V}} = i\,[D_{\bar{J}}, D]\,(\omega_2)_{\mathcal{V}}$$

o sea $[D_{\bar{J}}, D] \in$ rad $(\omega_2)_{\mathcal{V}}$, lo cual implica que $D_{\bar{J}}$ sea proyectable sobre la variedad $\bar{\mathcal{V}}$.

Por otra parte, de la relación $L_{D\bar{J}}\ \omega_1 = 0$ se sigue:

$$0 = L_{D\bar{J}}\ \omega_1 = i\,D_{\bar{J}}\ \omega_2 + d\ i\,D_{\bar{J}}\ \omega_1 = i\,D_{\bar{J}}\ \omega_2 + d\,Q$$

de donde:

$$i\,D_{\bar{J}}\ \omega_2 = -\,d\,Q$$

Esto implica que para todo $D \in$ rad $(\omega_2)_{\mathcal{V}}$ se tenga:

$$D\,Q = i\,D\,d\,Q = -\,i\,D\,i\,D_{\bar{J}}\ \omega_2 = i\,D_{\bar{J}}\,i\,D\,\omega_2 = 0$$

lo cual demuestra que la función Q es también proyectable sobre la variedad $\bar{\mathcal{V}}$.

Finalmente, proyectando a $\bar{\mathcal{V}}$ las ecuaciones:

$$L_{D\bar{J}}\,\omega_2 = 0\,,\ i\,D_{\bar{J}}\ \omega_2 = -\,d\,Q$$

resulta, por definición, que el grupo uniparamétrico asociado a la proyección $\bar{D}$ del campo vectorial $D_{\bar{J}}$ es de isometrías simplécticas con función generatriz la proyección $\bar{Q}$ de la función carga Q.

c.q.d.

Por razonamientos formales análogos a los anteriores es fácil comprobar que toda conjugación de carga C induce de un modo natural una isometría simpléctica que deja invariante la hamiltoniana H y transforma la carga Q en $-Q$. Este resultado constituye la interpretación dinámica de este importante tipo de transformaciones.

BIBLIOGRAFIA

(1) P. L. García. — *Geometría simpléctica en la teoría clásica de campos*, Collect. Math. Vol. XIX - Fasc. 1.º y 2.º, 1968.

(2) C. Chevalley. — *The Algebraic Theory of spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.

(3) E. Artin. — *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc. New York, 1957.

(4) P. Cavailles. — *Théorie intrinseque des spineurs*, Comp. Rendues, Jun. 1964.