SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO A UNA CIERTA FAMILIA DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.^er ORDEN

por

J. M.ª CASCANTE

Dedicado al querido Profesor Dr. Orts, como ofrenda de nuestro homenaje más sincero y afectuoso.

INDICE

PRÓLOGO

Este trabajo no es más que una extensión de otro nuestro anterior, publicado en Collectánea Mathemática (Vol. XIII.-1961), en el sentido de abordar el problema de CAUCHY, relativo a la ecuación de 3.er orden de tipo hiperbólico: $u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2)$ de una forma ya más general, suponiendo que los valores iniciales de la solución u y de sus derivadas u_1 y u_{12}, vienen dados sobre un arco de curva (C), al que únicamente le imponemos como restricción, la de pertenecer a la denominada por nosotros clase (Γ) respecto a un cierto dominio (G) que lo contiene, en el cual están definidas y admiten derivadas continuas hasta un cierto orden $\varrho(x_1, x_2)$ y $\Phi(x_1, x_2)$. El trabajo publicado consta de una Introducción y un Capítulo. En la introducción después de sentar las hipótesis necesarias y de definir los arcos (C) de la clase (Γ) respecto al dominio (G) demostramos un Lema que permite establecer y construir por simple empleo del teorema de existencia de la función implícita definida por una ecuación, una aplicación $r = h(x_1, x_2)$ unívoca, continua y diferenciable entre los puntos de un cierto dominio $(E) \subset (G)$ bien precisado por el Lema, y los valores del parámetro r del cual dependen las coordenadas $[x_1(r), x_2(r)]$ de los puntos del arco (C), correspondientes a sus intersecciones con las curvas integrales de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, que pasan por los puntos considerados de (E). Finalmente se calculan las expresiones de las derivadas $\frac{\delta r}{\delta x_1}, \frac{\delta r}{\delta x_2}$ y se demuestran que son asimismo continuas en (E), expresiones que luego son utilizadas en el Capítulo que sucede a la Introducción.

En el Capítulo que sigue luego se plantea y resuelve localmente el problema de CAUCHY definido por el sistema :

$$\left.\begin{aligned} u_{112} + \varrho(x_1, x_2).\ u_{122} &= \Phi(x_1, x_2) \\ u(P) &\equiv \varphi(P) \\ u_1(P) &\equiv \psi(P) \\ u_{12}(P) &\equiv \chi(P) \end{aligned}\right\} \quad [P \epsilon (C)]$$

con $\varphi(P)$, $\psi(P)$, $\chi(P)$ continuas y con derivadas continuas hasta un cierto orden sobre (C), determinando los dominios de dependencia de cada punto y prolongación del arco de curva (C) sobre el que son dadas las condiciones iniciales, obteniendo fórmulas resolutivas, demostrativas de que el problema de CAUCHY considerado es adecuado a la ecuación dada. En dicho Capítulo nos valemos del operador lineal J, generalización del operador análogo considerado en nuestro ya citado anterior trabajo publicado en Collectánea.

Es intención nuestra que a éste le sigan un segundo y tercer Capítulos, que se publicarán posteriormente, en donde se plantee y resuelva localmente el mismo problema de CAUCHY, aplicado respectivamente a toda ecuación lineal o a toda ecuación cuasi-lineal de tipo hiperbólico, reducidas a su forma canónica, construyendo la solución de modo análogo a como lo hicimos en nuestro anterior trabajo por el método de aproximaciones sucesivas de PICARD ; aproximaciones que se determinan por recurrencia, como soluciones a problemas de CAUCHY del mismo tipo que el estudiado en el CAPÍTULO I; ésta es la razón, por la cual en dicho CAPÍTULO, se calculan las expresiones de las derivadas 1^{as}, 2^{as} y 3^{as} de la solución u; ya que dichas expresiones se necesitan para los Capítulos siguientes que pensamos publicar.

INTRODUCCIÓN

RELACIONES ENTRE LAS CURVAS INTEGRALES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA Y LOS ARCOS (C) DE LA CLASE (Γ) RESPECTO AL DOMINIO DE EXISTENCIA DE AQUÉLLAS.

1. *Hipótesis preliminares.* Consideremos un recinto plano abierto (R) conexo, en el que es continua y admite derivadas parciales 1^{as} asimismo continuas, una cierta función $\varrho(x_1, x_2)$. Sea (G) a su vez, un dominio cerrado acotado cualquiera (adherencia de un abierto) con frontera conexa, interior en sentido estricto a (R) y tal que sea convexo respecto a la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, (1) en el sentido de que toda curva integral (*) de (1) pasando por todo punto de (G) alcanza la frontera de (G) en dos y solamente dos de sus puntos (eventualmente coincidentes) de modo que el arco de tal curva integral limitado por los dos puntos considerados esté enteramente contenido en (G).

Sea por otra parte (C) un arco de curva que denominaremos de la clase (Γ) respecto a (G), verificando las siguientes condiciones:

a) Es interior en sentido estricto a (G).

b) Está definido por dos funciones uniformes, continuas y con derivadas primeras asimismo continuas, y no nulas en un cierto intervalo cerrado $r_A \leq r \leq r_B$ es decir, dichas derivadas son de signo constante en $[r_A, r_B]$ lo que implica que (C) es un arco abierto, sin puntos múltiples y cortado por toda recta paralela a los ejes, a lo sumo en un sólo punto.

c) En (C) existe al menos un punto $[x_1(\bar{r})\ x_2(\bar{r})]$, con $r_A < \bar{r} < r_B$, tal que la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$ es cortada por las curvas integrales de (1) que pasan por los extremos de (C), estando además enteramente contenido en (G) el segmento de dicha recta, limitado por sus intersecciones con tales curvas integrales.

d) En el intervalo cerrado $r_A \leq r \leq r_B$ no es nula la expresión $x'_2(r) - \varrho[x_1(r), x_2(r)]. x'_1(r)$ (lo que excluye toda clase de contacto

(*) La curva integral de (1) considerada, por las hipótesis efectuadas sobre $\varrho(x_1, x_2)$ alcanza siempre, después de un número finito de prolongaciones en ambos sentidos la frontera de (G). Véase G. SANSONE « Equazioni Differenciali nel Campo Reale » Parte Seconda, págs. 75 y sgts. (Bologna, 1949).

entre el arco (C) y las curvas integrales de (1)), y por tanto en virtud de su continuidad, es de signo constante en aquel intervalo.

Designando por (E) el dominio, (fig. 1), cuya frontera la constituyen las curvas integrales de (1) que pasan por los extremos A y B de (C) y los dos arcos del contorno de (G), interceptados por el haz de curvas integrales que pasan por los diversos puntos del arco (C) nos proponemos demostrar el siguiente:

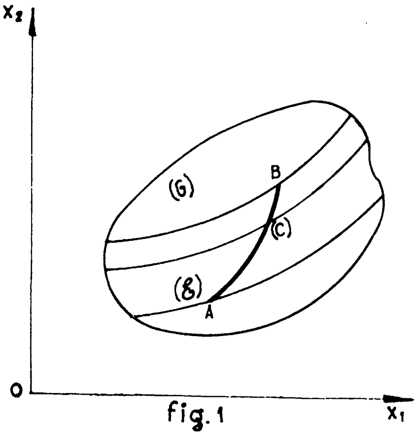

fig. 1

2. LEMA. «El arco (C) de la clase (Γ) respecto a (G) es cortado por toda curva integral de (1), pasando por un punto $P(x_1, x_2)$ de (E) en un sólo punto $[x_1(r), x_2(r)]$, y la variable paramétrica r es función $r(x_1, x_2)$ uniforme, continua, con derivadas parciales asimismo continuas de (x_1, x_2) en (E)».

La demostración de dicho lema la efectuaremos en dos partes.

1.ª parte : Observemos en primer lugar, que por las hipótesis efectuadas al principio sobre $\varrho(x_1, x_2)$, en virtud de los teoremas de existencia, unicidad y prolongación de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, así como dependencia continua de las mismas respecto a los valores iniciales (**), podemos afirmar que la ecuación $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ posee una solución $x_2 = \lambda(x_1, x_1^0, x_2^0)$ y sólo una, definida por las condiciones iniciales $x_2^0 = \lambda(x_1^0, x_1^0, x_2^0)$ [para todo $(x_1^0, x_2^0) \epsilon (G)$], solución que es prolongable en ambos sentidos hasta la frontera de (G) y que al suponer variables (x_1, x_1^0, x_2^0) es continua, con derivadas parciales asimismo continuas respecto a todos sus argumentos en el recinto tridimensional $(\mathfrak{A})$ del espacio de las variables (x_1, x_1^0, x_2^0) cuya proyección sobre el plano de las variables (x_1^0, x_2^0) es precisamente (G), y que para cada (x_1^0, x_2^0) de (G), el intervalo de variabilidad de x_1, es el que tiene por extremos las abscisas de los

---

(**) Consúltese SANSONE « Equazioni Differenziali nel Campo Reale » Seconde edizione, parte prima, págs. 27 y sgts. así como la parte Seconda de la misma obra, págs. 75 y sgts. (Bologna 1948 y 1949, respectivamente).

dos únicos puntos de corte con la frontera de (G) de la curva integral de (1) que pasa por (x_1^0, x_2^0).

En particular, $\lambda[x_1, x_1(r), x_2(r)]$, en donde $x_1(r), x_2(r)$ son las funciones uniformes, continuas y derivables en $r_A \leq r \leq r_B$ que nos definían el arco (C) de la clase (Γ) respecto a (G) considerado anteriormente, es continua y con derivadas parciales, asimismo continuas, respecto a sus argumentos (x_1, r) en el recinto bidimensional $(\mathfrak{A}')$ del plano de las variables (x_1, r) homeomorfo, de la porción de superficie cilíndrica del espacio de las variables (x_1, x_1^0, x_2^0) limitada por el recinto $(\mathfrak{A})$ considerado anteriormente, de generatrices paralelas al eje de la variable x_1, y cuya sección recta por el plano de las variables (x_1^0, x_2^0) es precisamente el arco (C).

En resumen, la expresión $F(x_1, x_2; r) \equiv x_2 - \lambda[x_1, x_1(r), x_2(r)]$ es continua y con derivadas continuas respecto a sus argumentos x_1, x_2, r (también respecto a x_2, pues esta variable figura linealmente) en el recinto (H) tridimensional producto topológico de $(\mathfrak{A}')$ y de la recta real $(-\infty < x_2 < +\infty)$.

2.ª parte: La expresión $F(x_1, x_2; r) \equiv x_2 - \lambda[x_1, x_1(r), x_2(r)]$ en virtud de lo demostrado en la 1.ª parte, es una función uniforme y continua de $x_1, x_2; r$ en el recinto (H) considerado que cumple las condiciones siguientes:

a) se anula para el sistema de valores $x_1 = x_1(\bar{r})$, $x_2 = x_2(\bar{r})$, y $r = \bar{r}$, siendo $\bar{r}$ un valor de r interior a (r_A, r_B), tal que la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$ es cortada por las curvas integrales de (1) que pasan por los extremos A y B de (C), estando además enteramente contenido en (G), el segmento de dicha recta, limitado por sus intersecciones con tales curvas integrales; valor de $\bar{r}$ existente siempre, por las hipótesis efectuadas sobre (C), (fig. 2).

b) Admite la derivada:

$$F_r(x_1, x_2; r) = - exp.\left[\int_{x_1(r)}^{x_1} \varrho_{x_2}\{t, \lambda[t, x_1(r), x_2(r)]\}\, dt\right].$$
$$.[x'_2(r) - \varrho\{x_1(r), x_2(r)\}.\, x'_1(r)]\ (***)$$

(***) Véase la citada obra de G. SANSONE «Equazioni Differenziali nel Campo Reale» Seconda Edizioni Parte Prima, págs. 29 y siguientes (Bologna 1948), así como nuestra Memoria «Aproximaciones sucesivas de las soluciones de Ecuaciones en derivadas parciales de 3er. orden» págs. 115 y 116 publicada en el Volumen XIII, año 1961, de la Revista «Collectanea Mathematica» del Seminario Matemático de Barcelona.

c) Esta derivada, por las hipótesis hechas, al principio sobre el arco de curva (C) no se anula en ningún punto $(x_1, x_2; r) \in (H)$.

d) $F(x_1, x_2; r)$ es diferenciable en todo punto $(x_1, x_2; r) \in (H)$ pues según se acaba de ver $F(x_1, x_2; r)$ admite en (H) derivadas parciales continuas respecto a todos sus argumentos.

Disponemos pues de un sistema de condiciones suficientes para asegurar que la ecuación $F(x_1, x_2; r) = 0$ define una función $r = h(x_1, x_2)$ uniforme, continua y diferenciable en un cierto entorno del punto $[x_1(\bar{r}), x_2(\bar{r})]$ que vamos a determinar con toda precisión, y esta función $r = h(x_1, x_2)$ toma el valor $r = \bar{r}$ para $x_1 = x_1(\bar{r}), x_2 = x_2(\bar{r})$.

Para la determinación precisa del dominio de existencia de $r = h(x_1, x_2)$ basta que examinemos con detalle los puntos esenciales de la demostración (1) del teorema de existencia de la función implícita definida por una ecuación, que refiriéndonos concretamente a la nuestra $F(x_1, x_2; r)$ son:

$$F[x_1(\bar{r}), x_2(\bar{r}); r] = x_2(\bar{r}) - \lambda[x_1(\bar{r}) x_1(r) x_2(r)]$$

es nula para $r = \bar{r}$, y no es nula en este punto, ni en ningún otro de $[r_A, r_B]$ su derivada parcial: $F_r[x_1(\bar{r}), x_2(\bar{r}); r] =$

$$= - ex\varrho \left[\int_{x_1(r)}^{x_1(\bar{r})} \varrho_{x_2}\{t. \lambda[t, x_1(r), x_2(r)]\} dt \right] . \left[\dot{x}'_2(r) - \varrho\{x_1(r), x_2(r)\} x'_1(r) \right],$$

puesto que en primer lugar, dicha derivada existe para todo r de $[r_A, r_B]$, pues la curva integral de (1) que pasa por el punto $[x_1(r), x_2(r)]$ correspondiente, por tener que alcanzar el contorno de (G), (por la convexidad supuesta de (G) respecto al haz de soluciones de (1)) en dos puntos situados a distinto lado de la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$, cortará siempre al segmento de dicha recta limitada por las curvas integrales extremas que pasan por A y B, de lo que se deduce que $x_1(\bar{r})$ pertenece al intervalo de variación de x_1 corres-

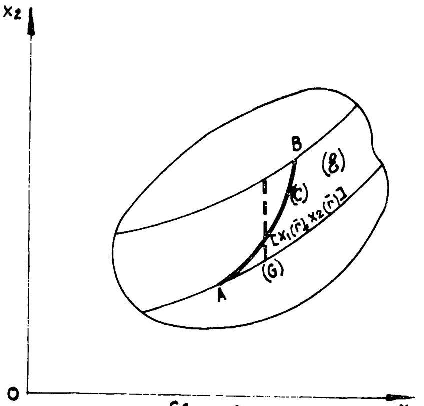

Fig. 2

(1) Véase por ejemplo E. GOURSAT «Cours d'Analyse mathématique, vol. I Troisième Edition» págs. 81 la 86 (París 1917).

pondiente al valor $\bar{r}$ de $[r_A, r_B]$ considerado; es decir, el conjunto $\{x_1 = x_1(\bar{r})\,;\ x_2 = x_2(\bar{r})\,;\ r\epsilon[r_A, r_B]\}$ está contenido enteramente en (H); por lo tanto existe $F_r[x_1(\bar{r})\, x_2(\bar{r})\,; r]$ en $r_A \leq r \leq r_B$, y no es nula, por ser producto de una exponencial por la expresión $x'_2(r) - \varrho[x_1(r), x_2(r)].x'_1(r)$ no nula por hipótesis. De ello se deduce que $F[x_1(\bar{r}), x_2(\bar{r})\,; r]$ tiene signos opuestos en los intervalos semicerrados $[r_A, \bar{r})$ y $(\bar{r}, r_B]$; si suponemos, por ejemplo, dicha derivada negativa (1'), se tendrá en particular:

$$F[x_1(\bar{r}),x_2(\bar{r}); r_A] > 0 \text{ y } F[x_1(\bar{r}),x_2(\bar{r}); r_B] < 0$$

pero además para todo punto $P[x_1(\bar{r}), x_2]$ del segmento de la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$ limitado por las curvas integrales que pasan por A y B, se verifica: $F[x_1(\bar{r}), x_2; r_A] > 0$ y $F[x_1(\bar{r}), x_2; r_B] < 0$ pues (fig. 3):

$$F[x_1(\bar{r}), x_2; r_A] = x_2 - \lambda[x_1(\bar{r}), x_1(r_A), x_2(r_A)] = x_2^{(P)} - x_2^{(P')} > 0,$$

y asimismo:

$$F[x_1(\bar{r}), x_2; r_B] = x_2 - \lambda[x_1(\bar{r}), x_1(r_B), x_2(r_B)] = x_2^{(P)} - x_2^{(P'')} < 0.$$

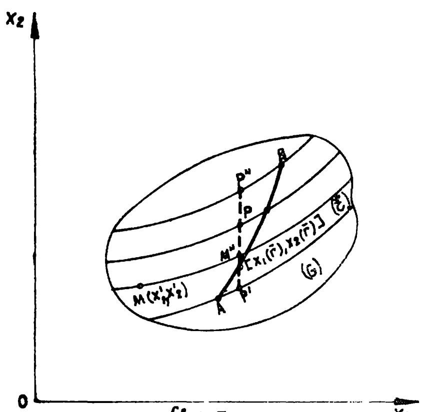

fig. 3

Si ahora consideramos un punto cualquiera $[x_1(\bar{r}), x'_2]$ de este segmento, como $F[x_1(\bar{r}), x'_2; r]$ es función continua de r y toma valores de signos opuestos en los extremos del intervalo $[r_A, r_B]$, habrá al menos un valor intermedio r' tal que $F[x_1(\bar{r}), x'_2; r'] = 0$, y este valor r' es único, pues si a un mismo punto $[x_1(\bar{r}), x'_2]$, del segmento $P'P''$ de la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$ limitado por las curvas integrales que pasan por A y B, correspondiesen dos valores r' y $\bar{r}'$ de $[r_A, r_B]$, la función $F[x_1(\bar{r}), x'_2; r]$ se anularía para $r = r'$, y $r = \bar{r}'$, y por tanto, por el teorema de ROLLE, su derivada $F_r[x_1(\bar{r}), x'_2; r]$ se anularía en un punto intermedio de $(r', \bar{r}') \subset [r_A, r_B]$ contra lo demostrado. Tenemos pues, una función uniforme $r = r(x_2)$, definida en el segmento de recta $x_1 = x_1(\bar{r})$, considerado, que toma el valor $r = \bar{r}$ para $x_2 = x_2(\bar{r})$

La correspondencia unívoca obtenida entre los puntos del segmento $P'P''$ de la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$, y los del intervalo $[r_A, r_B]$, permite

(1') Caso que corresponde al representado en la fig. 3.

asímismo establecerla entre los restantes puntos del dominio (E) y los de $[r_A, r_B]$, teniendo presente que por alcanzar la curva integral de (1) $x_2 = \lambda(x_1, x''_1, x''_2)$ que pasa por todo punto $M(x''_1\ x''_2)$ de (E), (en virtud de la convexidad supuesta de (G) respecto a las mismas), al contorno de (G) en dos puntos situados a distinto lado de $x_1 = x_1(\bar{r})$, dicha curva integral alcanza al segmento $P'P''$ de la recta $x_1 = x_1(\bar{r})$, en un solo punto $M''\{x_1(\bar{r}),\ \lambda[x_1(\bar{r}),\ x''_1, x''_2]\}$, y por tanto, de la conclusión anterior, se sigue que a dicho punto $M''\{x_1(\bar{r}),\ \lambda[x_1,\ (\bar{r}),\ x''_1,\ x''_2]\}$ corresponde unívocamente un valor bien determinado $r = r''$ del intervalo $[r_A, r_B]$; como a su vez $M''\{x_1(\bar{r}), \lambda[x_1(\bar{r}), x_1'', x''_2]\}$ corresponde unívocamente a $M(x''_1, x''_2) \in (E)$, se deduce en definitiva, que a todo punto (E) corresponde unívocamente un valor r'' bien determinado de $[r_A, r_B]$.

Tenemos por tanto construida una función uniforme $r = h(x_1, x_2)$ definida en el dominio (E) considerado.

El resto de lo afirmado en el Lema, continuidad y diferenciabilidad de $r = h(x_1, x_2)$ en (E), se obtiene probando previamente la continuidad y derivabilidad en $P'P''$ de la función, $r = r(x_2)$, primeramente establecida, lo que se deduce fácilmente, siguiendo el proceso habitual en este tipo de demostraciones (2) y de ahí se pasa a la de $r = h(x_1, x_2)$ en (E) teniendo en cuenta que ésta es función compuesta de $\lambda = \lambda[x_1(\bar{r}),\ x_1,\ x_2]$, y $r = r(\lambda)$, es decir, $h(x_1, x_2) \equiv r\{\lambda[x_1(\bar{r}), x_1, x_2]\}$, y que tanto $\lambda = \lambda[x_1(\bar{r}), x_1, x_2]$, como $r = r(\lambda)$, son continuas y diferenciables en sus respectivos dominios de existencia, que son (E) para la primera, y $P'P''$ para la segunda, y que además es siempre: $\{x_1(\bar{r}), \lambda[x_1, (\bar{r}), x_1, x_2];\ (x_1, x_2) \in (E)\} \subset P'P''$.

3. *Cálculo de las derivadas de la función* $r = h.(x_1, x_2)$. Probada la existencia, unicidad, continuidad y diferenciabilidad, de la función $r = h(x_1, x_2)$; $[(x_1, x_2) \in (E)]$, las expresiones de las derivadas parciales $\frac{\delta r}{\delta x_1}, \frac{\delta r}{\delta x_2}$ de la misma, se obtienen inmediatamente, diferenciando totalmente el primer miembro de la ecuación:

$$F(x_1, x_2; r) = x_2 - \lambda[x_1, x_1(r), x_2(r)] = 0;$$

$$dx_2 - \varrho(x_1, x_2)\, dx_1 - exp.\left[\int_{x_1(r)}^{x_1} \varrho_{x_2}\{t, \lambda[t, x_1(r), x_2(r)]\}\, dt\right].$$

$$.\left[x'_2(r) - \varrho\{x_1(r), x_2(r)\}\, x'_1(r)\right] dr = 0$$

(2) E. GOURSAT «Cours d'Analyse Mathématique». Vol. I Troisième Edition, págs. 81 a 86 (Paris 1917).

resultando:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\delta r}{\delta x_1} &= \frac{\varrho(x_1, x_2).\, exp.\left[\int_{x_1}^{x_1(r)} \varrho_{x_2}\{t, \lambda[t, x_1(r), x_2(r)]\}\,dt\right]}{\varrho[x_1(r), x_2(r)].\, x'_1(r) - x'_2(r)} \\ \frac{\delta r}{\delta x_1} &= -\frac{exp.\left[\int_{x_1}^{x_1(r)} \varrho_{x_2}\{t, \lambda[t, x_1(r), x_2(r)]\}\,dt\right]}{\varrho[x_1(r), x_2(r)]x'_1(r) - x'_2(r)} \end{aligned}\right.$$

expresiones que prueban la continuidad de $\frac{\delta r}{\delta x_1}$ y $\frac{dr}{\delta x_2}$ en (E), quedando completada la demostración del Lema y de las que se deduce $\frac{\delta r}{\delta x_1} + \varrho(x_1, x_2).\, \frac{\delta r}{\delta x_2} = 0$, que no hace más que poner de manifiesto que $r = h(x_1, x_2)$ es una integral primera de $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$.

CAPÍTULO I

El problema de Cauchy para la ecuacion hiperbólica:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2).\, u_{122} = \Phi(x_1, x_2)$$

1. *Planteo del problema:* Sea la ecuación en derivadas parciales:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2).\, u_{122} = \Phi(x_1, x_2) \quad (1)$$

en la que $\Phi(x_1, x_2)$ es una función continua que admite derivadas parciales asimismo continuas en un cierto dominio (G) conexo cerrado y acotado, (adherencia de un abierto), con frontera conexa. interior en sentido estricto a un recinto abierto (R) conexo, en el cual es $\varrho(x_1, x_2)$ una función continua, con derivadas parciales primeras y segundas continuas, no anulándose la misma en (G), por tanto de signo constante en él. (G) además es convexo respecto al haz de curvas integrales de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ (n.º 1 de la Introducción). Sean por otra parte $x_1 = x_1(r)$; $x_2 = x_2(r)$, dos funciones uniformes, continuas y con derivadas primeras asimismo continuas, en un cierto intervalo $r_A \leq r \leq r_B$ definiendo un arco de curva (C) perteneciente a la clase (Γ) respecto a (G), considerada en la Introducción a dicho Capítulo, y sean $\varphi(r)$, $\psi(r)$ y $\chi(r)$ tres funciones que cumplen las siguientes condiciones:

1.ª $\varphi(r)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden, continuas en el intervalo $r_A \leq r \leq r_B$ considerado.

2.ª $\psi(r)$, $\chi(r)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de segundo orden en el mismo intervalo $r_A \leq r \leq r_B$.

2. *Curvas características.* Estas vienen determinadas por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales, en que se descompone la expresión diferencial:

$$\varphi^2_{x_1} \cdot \varphi_{x_2} + \varrho(x_1, x_2) \cdot \varphi_{x_1} \cdot \varphi^2_{x_2} = 0 ; \; \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_2} \cdot (\varphi_{x_1} + \varrho \cdot \varphi_{x_2}) = 0$$

que son:

$$\varphi_{x_1} = 0; \; \varphi_{x_2} = 0; \; \varphi_{x_1} + \varrho \cdot \varphi_{x_2} = 0.$$

Las dos primeras tienen por características respectivas las familias de rectas paralelas: $x_2 = C_2$; $x_1 = C_1$, y la tercera las curvas integrales $\lambda[x_1(C_3); x_1, x_2] = x_2(C_3)$ de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ que por las hipótesis hechas sobre $\varrho(x_1, x_2)$ serán monótonas en (G)

Resumiendo, las familias de curvas características de la ecuación (1) son:

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 = C_1 \\ (\beta) & x_2 = C_2 \\ (\gamma) & \lambda[x_1(C_3), x_1, x_2] = x_2(C_3) \end{array}\right\} \quad (2)$$

3. *Dominio de dependencia de un punto M.* Sea un punto $M(x_1, x_2)$ del dominio (E) de existencia de la función $r = h(x_1, x_2)$ considerada en la Introducción, y tracemos las tres características que pasan por él; supongamos que M es lo suficientemente próximo al arco (C), de modo que éste aparte de ser cortado seguramente por la característica (γ), (Véase el n.º 2 de la Introducción), lo sea también por las características de los haces (α) y (β) (figs. 1 y 1′) que pasan por M.

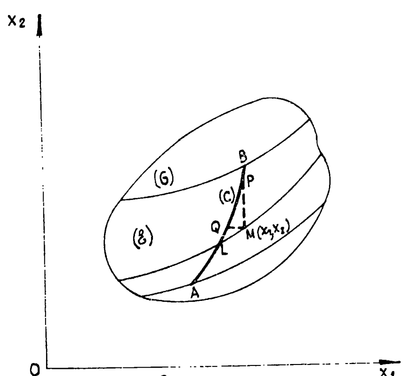

fig. 1

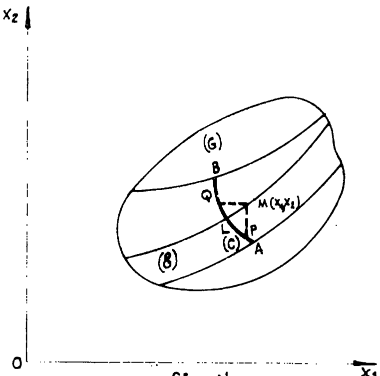

fig. 1′

El dominio de dependencia de M sobre el arco (C) está constituido, como demostraremos posteriormente, por aquel de los tres intervalos curvilíneos PQ, QL, LP que sea reunión de los otros dos, que en dicho arco determinan sus intersecciones con las referidas características.

4. *Determinación del dominio de prolongación.* El dominio de prolongación (D) (figs. 2 y 2') de un arco (C) perteneciente a la clase (Γ) respecto a (G), viene determinado por la intersección $R_{AB} \cap E$ del dominio de existencia (E) de $r = h(x_1, x_2)$, y del rectángulo R_{AB} de lados paralelos a los ejes y de diagonal AB; y está constituído evidentemente por todos los puntos de (E) cuyos dominios de dependencia definidos de acuerdo con el n.º 3, pertenecen al arco (C) enteramente.

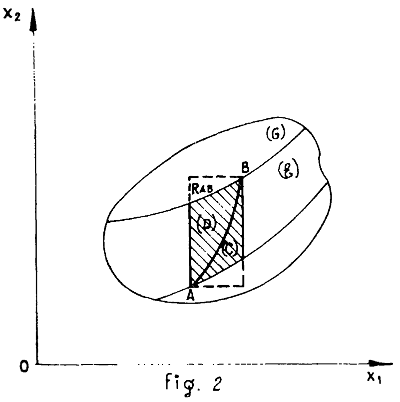

fig. 2

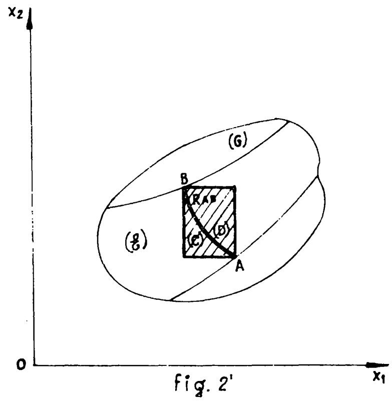

fig. 2'

Estas definiciones serán justificadas más adelante.

5. *Teorema de existencia y unicidad.* La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo el dominio de prolongación (D) de un arco (C) de curva de la clase (Γ), definido por

$$x_1 = x_1(r); \; x_2 = x_2(r), \; (r_A \leq r \leq r_B)$$

que satisface a las condiciones iniciales:

a) se convierte en $\varphi(r)$ sobre (C), es decir $u[x_1(r), x_2(r)] \equiv \varphi(r)$.

b) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ se reduce sobre (C) a la función $\psi(r)$, es decir $u_1[x_1(r), x_2(r)] \equiv \psi(r)$.

c) su derivada parcial mixta $u_{12}(x_1, x_2)$ se reduce sobre (C) a $\chi(r)$, es decir $u_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv \chi(r)$. Además, esta solución es única.

6. *Construcción de la solución al problema de Cauchy para la ecuación* (1). Sea $M(x_1, x_2)$ un punto cualquiera perteneciente al dominio de prolongación (D), (definido de acuerdo con el n.º 4), de un arco (C) de curva de la clase (Γ) y consideremos (fig. 3) las tres características que pasan por él.

Pongamos la ecuación (1) en la forma $s_1 + \varrho(x_1, x_2).\ s_2 = \Phi(x_1, x_2)$ (3) en la que $\underline{s}$ designa la derivada parcial mixta $\underline{u_{12}}$ y $\underline{s_1}$ y $\underline{s_2}$ las derivadas u_{112} y $\overline{u_{122}}$ respectivamente.

La ecuación (3) es una ecuación lineal, en derivadas parciales de primer orden, no homogénea, cuya solución determinaremos con la condición inicial $s[x_1(r), x_2(r)] \equiv \equiv \chi(r)$, y cuyo sistema diferencial asociado es el siguiente:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\varrho(x_1, x_2)} = \frac{ds}{\Phi(x_1, x_2)}$$

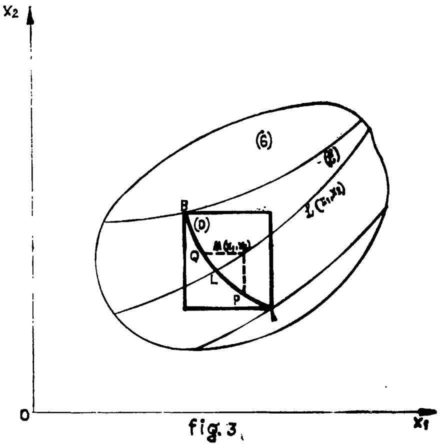

fig. 3

Una integral primera $\lambda[x_1(k_1);\ x_1, x_2] = x_2(k_1)$, del mismo podrá obtenerse de la primera ecuación, siendo

$$\lambda[x_1(k_1);\ x_1,\ x_2) = x_2(k_1),\ \text{ó}\ x_2 = \lambda[x_1;\ x_1(k_1),\ x_2(k_1)]\ (^1)$$

el haz integral de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ (4) (que es la misma que nos definía el haz de características (γ) de (2)). La constante k_1 que figura en la ecuación del haz, representa el valor del parámetro $\underline{r}$, correspondiente al punto del arco (C), en que es cortado por cada curva del haz integral de (4) pasando por todo punto de $(D) \equiv R_{AB} \cap E$.

Otra integral primera podrá deducirse de la ecuación diferencial ordinaria que constituyen la primera y tercera razón del sistema asociado, habiendo sustituido en ellas x_2 por $x_2 = \lambda[x_1;\ x_1(k_1), x_2(k_1)]$ obteniéndose :

$$s - \int_{x_1(k_1)}^{x_1} \Phi\{\xi_1, \lambda(\xi_1;\ x_1(k_1), x_2(k_1)]\}\ d\xi_1 = k_2$$

(1) Véase G. SANSONE « Equazioni Differenziali nel Campo Reale ». Parte prima, págs. 32, 33. Seconda Edizioni (Bologna 1948).

suponiendo que una vez efectuada la cuadratura que figura en el primer miembro, se sustituye k_1 por $h(x_1, x_2)$.

Los dos integrales primeras consideradas pueden ponerse en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[x_1(k_1);\ x_1,\ x_2] &= x_2\ (k_1) \\ s - \oint_{\mathcal{L}(x_1, x_2)} \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 &= k_2 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

en la que la integral curvilínea se supone extendida a lo largo del arco de curva integral $\mathfrak{L}(x_1, x_2)$ de (4) que pasa por el punto $M(x_1, x_2)$ y comprendido entre éste y el punto L en que corta el arco (C) y que en lo sucesivo expresaremos dicha integral por $J[\Phi(x_1, x_2)]$, indicando $J[F(x_1, x_2)]$ o abreviadamente $J(F)$ un operador aplicado sobre $\underline{F}$ definido como sigue:

$$J(F) \equiv \oint_{\mathcal{L}(x_1, x_2)} F(\xi_1, \xi_2) d\xi_1,$$

siendo el camino $\mathfrak{L}(x_1, x_2)$ de integración, el que hemos ya considerado, y que evidentemente es lineal respecto a $\underline{F}$. La integral general de (3) será pues:

$$s = J[\Phi(x_1, x_2)] + \Psi[h(x_1, x_2)]$$

con Ψ arbitraria. Para determinar la forma de la función correspondiente a la solución que verifica las condiciones iniciales señaladas al principio, eliminaremos r entre las dos ecuaciones siguientes, resultantes de haber hecho $x_1 = x_1(r)$; $x_2 = x_2(r)$ en las dos integrales primeras (5) y tener en cuenta que:

$$s[x_1(r), x_2(r)] \equiv \chi(r);\ h[x_1(r), x_2(r)] \equiv r$$

resultando:

$$\left.\begin{aligned} r &= k_1 \\ \chi(r) &= k_2 \end{aligned}\right\} \text{ es decir: } k_2 = \chi(k_1)$$

siendo por tanto la expresión de $s(x_1, x_2)$ con la condición señalada:

$$s(x_1, x_2) = J[\Phi(x_1, x_2)] + \chi[h(x_1, x_2)]$$

y finalmente $u(x_1, x_2)$ se determina como solución al problema de Cauchy, 2.º orden expresado por el sistema:

$$\left.\begin{aligned} s(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 u}{\delta x_1\ \delta x_2} &= J[\Phi(x_1, x_2)] + \chi[h(x_1, x_2)] \\ u[x_1(r)\ x_2(r)] &\equiv \varphi(r) \\ u_1[x_1(r), x_2(r)] &\equiv \Psi(r) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

la cual se calcula como sigue. Toda integral de (1) satisface a la relación :

$$\iint\limits_{(PMQ)} \frac{\delta^2 u}{\delta\xi_1 \delta\xi_2} \delta\xi_1 \delta\xi_2 = \iint\limits_{(PMQ)} \{J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] + \chi[h(\xi_1, \xi_2)]\} \delta\xi_1 \delta\xi_2$$

que se deduce de la primera de las ecuaciones del sistema (6), estando extendidas ambas integrales al área del triángulo mixtilíneo PMQ. Aplicando la fórmula de Green a la integral doble del primer miembro, se puede ésta sustituir por la integral curvilínea $-\int\limits_{(\widehat{PMQP})} \frac{\delta u(\xi_1, \xi_2)}{\delta\xi_1} . \delta\xi_1$ tomada a lo largo del contorno en el sentido directo, integral que se reduce evidentemente a :

$$-\int_M^Q \frac{\delta u(\xi_1, \xi_2)}{\delta\xi_1} d\xi_1 - \oint\limits_{(QP)} \frac{\delta u(\xi_1, \xi_2)}{\delta\xi_1} d\xi_1 = u_M - u_Q - \int_{r(x_2)}^{r(x_1)} \psi(r) . x'_1(r) . dr$$

pues a lo largo de QP: $\left(\frac{\delta u}{\delta\xi_1}\right)_{(QP)} \equiv \psi(r)$, y en donde para abreviar se designa por u_M y u_Q, los valores de $u(x_1, x_2)$ en el punto M y en el Q respectivamente, y $r(x_1)$, $r(x_2)$ son los valores del parámetro $\underline{r}$ para los cuales, los puntos correspondientes del arco (C) son el primero de abscisa $\underline{x_1}$ y el segundo de ordenada $\underline{x_2}$ obteniéndose :

$$u_M = u_Q + \int_{r(x_2)}^{r(x_1)} \psi(r) . x'_1(r) . dr + \iint\limits_{(PMQ)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 + \iint\limits_{(PMQ)} \chi[h(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2$$

Teniendo en cuenta que a lo largo de QP es $u(x_1, x_2) \equiv \varphi(r)$ resulta en definitiva para $u(x_1, x_2)$, la expresión:

$$u(x_1, x_2) = \varphi[r(x_2)] + \int_{r(x_2)}^{r(x_1)} \psi(r) . x'_1(r) dr + \iint\limits_{(PMQ)} \chi[h(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 + \iint\limits_{(PMQ)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2$$

Escolio. Observemos que si en la expresión obtenida de $u(x_1, x_2)$ suponemos $\varphi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) = \chi(x_1 . x_2) \equiv 0$ resulta la solución:

$$u^0(x_1, x_2) = \iint\limits_{(PMQ)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2$$

del problema de Cauchy representado por el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2) . u_{122} = \Phi(x_1, x_2) \\ u[x_1(r), x_2(r)] \equiv 0 \\ u_1[x_1(r), x_2(r)] \equiv 0 \\ u_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (6')$$

mientras que si se supone $\Phi(x_1, x_2) \equiv 0$ se obtiene la solución:

$$v^0(x_1, x_2) = \varphi[r(x_2)] + \int_{r(x_2)}^{r(x_1)} \varphi(r) . \, x'_1(r) . \, dr + \iint_{(PMQ)} \chi([h(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2$$

correspondiente al problema de Cauchy definido por el sistema siguiente :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2) . \, u_{122} = 0 \\ u[x_1(r), x_2(r)] \equiv \varphi(r) \\ u_1[x_1(r), x_2(r)] \equiv \psi(r) \\ u_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv \chi(r) \end{array}\right\} \quad (6'')$$

de los cuales por superposición de las soluciones de los mismos resulta $u(x_1, x_2) = u^0(x_1, x_2) + v^0(x_1, x_2)$ solución al problema de Couchy buscado, representada por el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2) . \, u_{122} = \Phi(x_1, x_2) \\ u[x_1(r), x_2(r)] \equiv \varphi(r) \\ u_1[x_1(r), x_2(r)] \equiv \psi(r) \\ u_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv \chi(r) \end{array}\right\} \quad (7)$$

En lo que sigue consideraremos el problema de Cauchy que nos ocupa planteado en la forma (6′), de cuya solución se pasa a la del sistema (7), sin más que añadirle la solución del sistema (6″), el cual a su vez puede llevarse a la forma (6′), con sólo efectuar el cambio de función $u = w^0 + w$, siendo w^0 una función continua cualquiera, con derivadas parciales, asimismo continuas hasta las de 3^er^. orden, que satisfaga a las condiciones iniciales de (6″), todo lo cual unido a la mayor simplicidad de cálculo, que resulta, justifica la adopción de la forma (6′) cuya solución, según hemos visto es pues :

$$u(x_1, x_2) = \iint_{(PMQ)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2$$

7. *Cálculo de las primeras derivadas.* Por derivación respecto a x_1, x_2 de $u(x_1, x_2) =$

$$= \iint_{(PMQ)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 = \int_{x_1[r(x_2)]}^{x_1} d\xi_1 . \int_{x_2[r(\xi_1)]}^{x_2} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_2 =$$

$$= \int_{x_2[r(x_1)]}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1[r(\xi_2)]}^{x_1} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1,$$

se obtiene inmediatamente:

$$u_1(x_1, x_2) = \int_{x_2[r(x_1)]}^{x_2} J[\Phi(x_1, \xi_2)]d\xi_2 = \int_{(PM)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]d\xi_2 \qquad (7')$$

$$u_2(x_1, x_2) = \int_{x_1[r(x_2)]}^{x_1} J[\Phi(\xi_1, x_2)]d\xi_1 = \int_{(QM)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]d\xi_1 \qquad (7'')$$

deduciéndose de ellas:

$$\left.\begin{aligned} u_1[x_1(r), x_2(r)] &\equiv 0 \\ u_2[x_1(r), x_2(r)] &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (7''')$$

8. *Cálculo de las derivadas segundas.* La existencia de las segundas derivadas u_{11}, u_{22} y de u_{112}, u_{122} se verifica fácilmente mediante las fórmulas (7') y (7'') y mediante la expresión obtenida para la derivada parcial mixta $s(x_1, x_2) = u_{12}(x_1, x_2) = J[\Phi(x_1, x_2)]$ respectivamente, reduciendo la integral curvilínea

$$J[\Phi(x_1, x_2)] = \oint_{\mathcal{L}(x_1, x_2)} \Phi(\xi_1, \xi_2)d\xi_1$$

a definida ordinaria, y teniendo en cuenta que la función subintegral $\Phi\{\xi_1, \lambda[\xi_1, x_1(k_1), x_2(k_1)]\}$ que figura en esta última, admite en virtud de las hipótesis hechas al principio, derivada parcial continua respecto a λ y en consecuencia respecto a x_1 y x_2 por ser $\lambda[x_1; x_1(k_1), x_2(k_1)]$ y $k_1 = h(x_1, x_2)$ funciones diferenciables cuyas derivadas parciales son continuas (2), siendo pues legítimo derivar bajo el signo integral, quedando demostrado lo que se afirmaba al principio. Una vez verificada la existencia de dichas derivadas, el cálculo de las expresiones de $u_{11}(x_1, x_2)$ y $u_{22}(x_1, x_2)$ se logra fácilmente observando que de la ecuación (1) se deducen las relaciones:

$$\left\{\begin{aligned} &\iint_{(PMQ)} u_{112}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + \iint_{(PMQ)} \varrho(\xi_1, \xi_2) \cdot u_{122}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \iint_{(PMQ} \Phi(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \\ &\iint_{(PMQ} \frac{u_{112}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 + \iint_{(PMQ)} u_{122}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \iint_{(PMQ)} \frac{\Phi(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)}, d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}\right.$$

---

(2) Véase G. SANSONE «Equazioni Differenziali nel Campo Reale». Parte prima, págs. 29 y sgts. y los núms. 2 y 3 de la Introducción a este Capítulo.

estando extendidas todas las integrales dobles que figuran, al área del triángulo mixtilíneo PMQ (véase fig. 3) de las que por aplicación de la fórmula de Green, habida cuenta que es:

$$\begin{cases} \varrho(x_1, x_2).\, u_{122}(x_1, x_2) = \dfrac{\delta}{\delta x_2}\Big[\varrho(x_1, x_2).\, u_{12}(x_1, x_2)\Big] - \varrho_{x_2}(x_1, x_2).\, u_{12}(x_1, x_2) \\ \dfrac{1}{\varrho(x_1,x_2)}.\, u_{112}(x_1, x_2) = \dfrac{\delta}{\delta x_1}\Big[\dfrac{1}{\varrho(x_1,x_2)}.\, u_{12}(x_1, x_2)\Big] - \Big[\dfrac{1}{\varrho(x_1,x_2)}\Big]_{x_1}.\, u_{12}(x_1, x_2) \end{cases}$$

resultan las siguientes:

$$\begin{cases} \displaystyle\oint_{(PMQP)} u_{12}(\xi_1, \xi_2)d\xi_2 - \oint_{(PMQP)} \varrho(\xi_1, \xi_2).\, u_{12}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 - \iint_{(PMQ)} \varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2).\, u_{12}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \iint_{(PMQ)} \Phi(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \\ \displaystyle\oint_{(PMQP)} \frac{u_{12}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} d\xi_2 - \oint_{(PMQP)} u_{12}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 + \iint_{(PMQ)} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1,\xi_2)} u_{12}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \iint_{(PMQ)} \frac{\Phi(\xi_1,\xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} \displaystyle u_1(M) - \int_{(MQ)} \varrho(\xi_1, \xi_2).\, u_{12}(\xi_1, \xi_2).\, d\xi_1 - \iint_{(PMQ)} \varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2).\, u_{12}(\xi_1, \xi_2)d\xi_1,\, d\xi_2 = \iint_{(PMQ)} \Phi(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \\ \displaystyle u_2(M) + \int_{(PM)} \frac{u_{12}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho(\xi_1,\xi_2)} d\xi_2 + \iint_{(PMQ)} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1,\xi_2)} u_{12}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \iint_{(PMQ)} \frac{\Phi(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1.\, d\xi_2 \end{cases}$$

(pues u_1, u_2 y u_{12} se anulan sobre QP), de las que por derivación respecto a x_1 y x_2 respectivamente, y sustituyendo $u_{12}(x_1, x_2)$ por su expresión, resulta para $u_{11}(x_1, x_2)$ y $u_{22}(x_1, x_2)$ las siguientes:

$$\begin{cases} \displaystyle u_{11}(x_1, x_2) = -\varrho(x_1, x_2).\, J[\Phi(x_1, x_2)] + \int_{(PM)} \varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2).\, J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]d\xi_2 + \int_{(PM)} \Phi(\xi_1, \xi_2)d\xi_2 \\ \displaystyle u_{22}(x_1, x_2) = -\frac{J[\Phi x_1, x_2)]}{\varrho(x_1, x_2)} + \int_{(MQ)} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1, \xi_2)}.\, J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]d\xi_1 - \int_{(MQ)} \frac{\Phi(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)}.\, d\xi_1 \end{cases}$$

9. *Cálculo de las derivadas terceras.* A partir de las fórmulas anteriores y de la de $s(x_1, x_2)$ se deducen por derivación respecto a x_1 y x_2 las derivadas de tercer orden, las cuales teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas de la integral general $\lambda[x_1, x_1(r), x_2(r)]$ respecto a los valores iniciales, así como las de $r = h(x_1, x_2)$ respecto a x_1, x_2 (Véase el n.º 3 de la Introducción) son las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l}
u_{111}(x_1,x_2) = -\dfrac{\delta}{\delta x_1}\Big\{\varrho(x_1,x_2).\ J[\Phi(x_1,x_2)]\Big\} + \displaystyle\int_{(PM)}\Big\{\varrho_{x_2}(\xi_1,\xi_2).\ J[\Phi(\xi_1,\xi_2)]\Big\}_{x_1} d\xi_2 + \\
\quad + \displaystyle\int_{(PM)} \Phi_{x_1}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 - \Phi(P).\left[\dfrac{x'_2(r)}{x'_1(r)}\right]_{(P)} \\
u_{112}(x_1,x_2) = \Phi(x_1,x_2) + \Phi(L).\left[\dfrac{x'_1(r)}{x'_2(r)-\varrho[x_1(r),x_2(r)].x'_1(r)}\right]_{(L)}.\ \varrho(M).\ exp.\Big\{-J[\varrho_{x_2}(M)]\Big\} - \\
\quad - \varrho(M).\ exp.\Big\{-J[\varrho_{x_2}(M)]\Big\}.\ J\Big[\Phi_{x_2}(M).\ exp.\ \{J[\varrho_{x_2}(M)]\}\Big] \ (3) \\
u_{122}(x_1,x_2) = -\Phi(L).\left[\dfrac{x'_1(r)}{x'_2(r)-\varrho[x_1(r),x_2(r)]x'_1(r)}\right]_{(L)}.\ exp.\Big\{-J[\varrho_{x_2}(M)]\Big\} + \\
\quad + exp.\Big\{-J[\varrho_{x_2}(M)]\Big\}.\ J\Big[\Phi_{x_2}(M).\ exp.\Big\{J[\varrho_{x_2}(M)]\Big\}\Big] \\
u_{222}(x_1,x_2) = -\dfrac{\delta}{\delta x_2}\left\{\dfrac{J[\Phi(x_1,x_2)]}{\varrho(x_1,x_2)}\right\} - \displaystyle\int_{(QM)}\left\{\dfrac{\varrho_{x_1}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho^2(\xi_1,\xi_2)}.\ J[\Phi(\xi_1,\xi_2)]\right\}_{x_2} d\xi_1 + \\
\quad + \displaystyle\int_{(QM)}\left[\dfrac{\Phi(\xi_1,\xi_2)}{\varrho(\xi_1,\xi_2)}\right]_{x_2} d\xi_1 - \dfrac{\Phi(Q)}{\varrho(Q)}.\left[\dfrac{x'_2(r)}{x'_1(r)}\right]_{(Q)}
\end{array}\right.$$

10. *Justificación de las definiciones dadas en los núms.* 3 *y* 4. En la expresión obtenida de la solución correspondiente al problema de Cauchy representado por el sistema (7) figura la integral:

$$\iint_{(PMQ)} \chi[h(\xi_1,\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2 = \int_{x_2[r(x_1)]}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1[r(\xi_2)]}^{x_1} \chi[h(\xi_1,\xi_2)]d\xi_1$$

en la que $h(\xi_1, \xi_2)$ es precisamente el valor del parámetro r que corresponde al punto de intersección del arco $(C) \equiv \begin{cases} x_1 = x_1(r) \\ x_2 = x_2(r) \end{cases}$ con la curva integral $\mathfrak{L}(\xi_1, \xi_2)$ que pasa por el punto (ξ_1, ξ_2) y que para cada valor de ξ_2 comprendido entre $x_2[r(x_1)]$ y x_2, dicho punto varía de

(3) Hemos designado, de acuerdo con la notación adoptada, por $J[\varrho_{x_2}(x_1,x_2)] = J[\varrho_{x_2}(M)]$ la integral curvilínea

$$\int_{x_1(r)}^{x_1} \varrho_{x_2}\{t,\lambda[t,x_1(r),x_2(r)]\}dt = \oint_{\mathfrak{L}(x_1x_2)} \varrho_{x_2}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1$$

que interviene en las derivadas de $\lambda[x_1, x_1(r), x_2(r)]$ respecto a las condiciones iniciales.

R a S, siendo R y S respectivamente (fig. 4) las trazas de (C) con la recta $x_2 = \bar{\xi}_2$ y la curva del haz (γ) que pasa por el punto $(x_1, \bar{\xi}_2)$, y por tanto la variación total de aquel punto, al tomar $\bar{\xi}_2$ todos los valores del intervalo de integración correspondiente, será aquel de los tres intervalos curvilíneos PQ, QL, LP que sea reunión de los otros dos; por otra parte en la expresión de $u(x_1, x_2)$ figuran

$$\varphi[r(x_2)] = \varphi(Q), \text{ y} \int_{r(x_2)}^{r(x_1)} \psi(r) . x'_1(r)\, dr = \int_Q^P \psi . dx_1$$

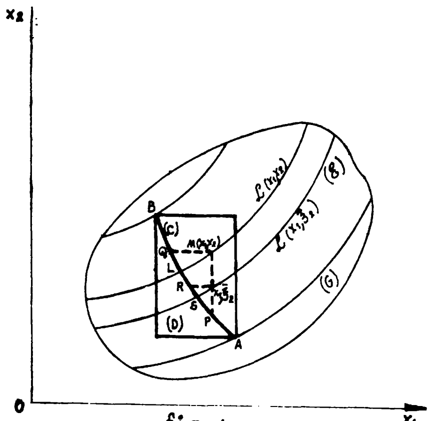

fig. 4

y para determinar $u(x_1, x_2)$, será pues preciso conocer los valores de $\varphi(r), \psi(r), \chi(r)$ sobre dicho arco, no influyendo para nada sobre el valor de $u(x_1, x_2)$ en M, los valores de $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ fuera de dicho arco, quedando pues demostrada la legitimidad de lo afirmado en el n.º 3.

Por otra parte es lícito definir el dominio de prolongación (D) del arco (C) de acuerdo con lo dicho en el n.º 4, ya que el arco (C) contiene los dominios de dependencia de todos los puntos M de (D) y por tanto, dadas las funciones $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ a las cuales deben reducirse sobre (C) respectivamente $u(x_1, x_2); u_1(x_1, x_2); u_{12}(x_1, x_2)$, queda unívocamente determinado el valor de la solución en cada punto M de (D).

11. *Unicidad de la solución.* Precisa ahora demostrar la unicidad de la solución y que el problema de Cauchy es adecuado a la ecuación dada. Para lo primero, si $\bar{u}(x_1, x_2)$ fuese otra solución de (1) verificando las condiciones iniciales:

$$\bar{u}[x_1(r), x_2(r)] \equiv \varphi(r)\,; \; \bar{u}_1[x_1(r), x_2(r)] \equiv \psi(r)\,;$$
$$\bar{u}_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv \chi(r)$$

la función: $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \bar{u}(x_1, x_2)$ satisfará evidentemente a la ecuación homogénea: $\bar{\bar{u}}_{112} + \varrho(x_1, x_2) . \bar{\bar{u}}_{122} = 0$ con las condiciones iniciales: $\bar{\bar{u}}[x_1(r), x_2(r)] = \bar{\bar{u}}_1[x_1(r), x_2(r)] = \bar{\bar{u}}_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv 0$ y por tanto la derivada parcial mixta $\bar{\bar{s}}(x_1, x_2) = \bar{\bar{u}}_{12}(x_1, x_2)$ será solución de la ecuación lineal homogénea de primer orden :

$$s_1 + \varrho(x_1, x_2) . \; s_2 = 0$$

con la condición inicial $\bar{\bar{s}}[x_1(r), \; x_2(r)] \equiv 0$, la cual admite como única solución (por ser homogénea, de condiciones iniciales, homogéneas y en virtud del teorema de existencia de las ecuaciones de 1$^{\text{er}}$. orden) la idénticamente nula: $\bar{\bar{s}}(x_1, x_2) \equiv 0$, lo que implica que $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ sea de la forma :

$$\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) \equiv \alpha(x_1) + \beta\,(x_2)$$

la cual por tener que anularse idénticamente así como su derivada $\bar{\bar{u}}_1(x_1, x_2)$ sobre (C), deberá cumplirse $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) \equiv 0$, es decir, $u(x_1, x_2) \equiv \bar{u}(x_1, x_2)$.

Probada la existencia y unicidad de la solución de (1) sólo resta demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para asegurar que el problema es adecuado a la ecuación dada.

Esto es comprobable inmediatamente mediante la fórmula que da la expresión de $u(x_1, x_2)$, teniendo en cuenta las hipótesis hechas sobre las funciones $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ y las propiedades de las integrales dependientes de un parámetro.