CONSIDERACIONES SOBRE CUERPOS ORDENADOS Y CUERPOS REALES MAXIMALES *

por

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

SUMARIO

El presente trabajo se puede considerar como prolongación del trabajo (I) del autor, se amplía un resultado de este último que era válido sólo en el caso metrizable, y aquí se estudia en el caso general; se hace un estudio de los cuerpos reales maximales y completos, y, finalmente se da un apéndice sobre cuerpos reales contenidos en un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica O.

---

1. *Consideraciones topológicas sobre los cuerpos ordenados*

Sea K un cuerpo conmutativo ordenado, la topología de K dada por la ordenación es la inducida por la estructura uniforme de base

$$N_\varepsilon = \{(x, y) \in K \times K\,;\ |x - y| < \varepsilon\} \tag{1}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ de K, con esta topología K es un cuerpo topológico. La estructura (1) es invariante por traslaciones. Un sistema fundamental de entornos de o es el formado por los

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{x \in K\,;\ |x| < \varepsilon\}$$

y la estructura (1) viene dada por una métrica sí y sólo si tiene base

* Un avance de los resultados del presente trabajo, apareció en Actas de la VII R.A.M.E.

numerable, lo que equivale a decir que existe un sistema fundamental numerable de entornos de O.

PROPOSICIÓN 1. *Si K es metrizable, también lo es la estructura* (1).

Pues si la estructura (1) no lo fuera, el filtro de entornos de O no tendría base numerable, y por consiguiente K no sería metrizable.

PROPOSICIÓN 2. *K metrizable es equivalente a que exista una sucesión que tiende a O y cuyos términos son todos distintos de O.*

Si K es metrizable, la existencia de tal sucesión es trivial. Si existe una tal sucesión, la sucesión de los valores absolutos de sus términos también tenderá a O, basta suponer, pues, que exista una sucesión de elementos positivos que tiende a O, sea $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, \dots$ formemos la sucesión de término general $\varepsilon_n = \mathrm{Min}\,(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ que también tenderá a O y será monótona decreciente, los $\mathcal{M}_{\varepsilon_n}$ forman un sistema fundamental numerable de entornos de O.

q.e.d.

COROLARIO 1. *Si K no es metrizable toda sucesión de Cauchy (respecto a la estructura* (1)*) es quasi-constante.* (Sólo tiene un número finito de términos distintos).

En efecto: Sabido es que si K es un cuerpo ordenado, su completado por sucesiones es un cuerpo ordenado Ω extensión de K y que prolonga su ordenación; supongamos que en K exista una sucesión de CAUCHY (a_n) no quasi-constante, esta sucesión es convergente en Ω, sea α su límite, entonces la sucesión $(a_n - \alpha)$ es una sucesión de Ω que tiende a o y no es quasi-constante, por consiguiente Ω, y por lo tanto K es metrizable.

q.e.d.

COROLARIO 2. *Si K no es metrizable, es completo por sucesiones.*

PROPOSICIÓN 3. *El completado de K por la estructura* (1) *es un cuerpo ordenado extensión de K y que prolonga su ordenación, que es isomorfo-semejante sobre K a la extensión ordenada de K formada por la adjunción de todas las cortaduras de tipo A.* (i)

En efecto: Sea Σ el cuerpo obtenido del K por la adjunción de todas sus cortaduras de tipo A.

Tenemos que K es denso en Σ, pues si $\alpha \in \Sigma - K$, α viene determinado por una cortadura de tipo A $(A\,;\,A')$ de K sin elemento de separación en K, consideremos el filtro $\mathcal{F}$ de Σ de base los intervalos $[a, a']$ para $\forall\, a \in A$, $\forall\, a' \in A'$, este filtro es convergente y tiene por límite α, pues en Σ es $\alpha = \text{Inf } A' = \text{Sup } A$. Trivialmente, la estructura (1) correspondiente a Σ prolonga la correspondiente a K. Nuestra proposición quedará demostrada si Σ es completo por esta estructura.

Sea, en efecto, $\mathcal{F}$ un filtro de CAUCHY en Σ, y definamos

$$\mathcal{A}' = \{a' \in \Sigma\,;\ \exists\, F \in \mathcal{F} \ \text{ con } \ x \notin \bar{F} \ \text{ para } \ \forall\, x \geq a'\}$$

se verifican:

a) $\mathcal{A}' \neq \Sigma$ y $\mathcal{A}' \neq \phi$

b) $a' \in \mathcal{A}' \Rightarrow b' \in \mathcal{A}'$ para $\forall\, b' \geq a'$

c) $\mathcal{A}'$ no tiene primer elemento.

En efecto: Sea un $F \in \mathcal{F}$ acotado inferiormente (su existencia es) consecuencia inmediata por ser $\mathcal{F}$ filtro de CAUCHY), si a es una cota inferior de F, se tiene $a \notin \mathcal{A}'$ pues si $a \in \mathcal{A}'$ el conjunto

$$B_a = \{x\,;\ x \geq a\} \supset F \Rightarrow B_a \in \mathcal{F}$$

contra la definición de $\mathcal{A}'$; por otra parte, existe un $F \in \mathcal{F}$ acotado superiormente, y todo elemento mayor que una cota superior dada es de $\mathcal{A}'$, con lo cual queda demostrado *a)*. En cuanto a *b)*, resulta trivial.

Supongamos que a' sea el primer elemento de $\mathcal{A}'$, existirá $F \in \mathcal{F}$ con $\overline{F} \cap B_a = \phi$, y por consiguiente un entorno de a'

$$\mathcal{M}_{a'} = \{x\,;\, |x - a'| < \varepsilon\}$$

será disjunto con $\overline{F}$, sea $a \in \mathcal{M}_{a'}$ con $a < a' \Rightarrow a \in \mathcal{A}'$, lo que contradice que a' sea el primer elemento de $\mathcal{A}'$. *c)* queda con esto demostrado.

Es $\mathcal{A}'$, pues, la clase posterior de una cortadura en Σ (ii), $(\mathcal{A}\,;\ \mathcal{A}')$, veamos que es de tipo A, en efecto; sea un $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \Sigma$ y $F \in \mathcal{F}$ de orden menor que N_η con $\eta < {}^{\varepsilon}/_{2}$, y sea $\gamma \in F$, tenemos que $\gamma + \eta \in \mathcal{A}'$

y $\gamma - \eta \in \mathcal{A}$ según resulta inmediatamente; por consiguiente, existen $\alpha' \in \mathcal{A}'$, $\alpha \in \mathcal{A}$ con $\alpha' - \alpha < \varepsilon$.

Existirá, pues, en Σ elemento de separación de esta cortadura, y este elemento es el límite de $\mathcal{F}$.

q.e.d.

Observación. La demostración de (I), págs. 258, 259 supone que existe una sucesión de elementos positivos que tiende a O, es decir, K metrizable; la proposición 3 tiene a aquélla como caso particular.

Ejemplo de un cuerpo ordenado no metrizable

Sea K un cuerpo ordenado cualquiera, y sea X un conjunto de indeterminadas de potencia $\aleph_1$ demos a X una buena ordenación de tipo de orden ω_1 (primer número ordinal de 3.ª clase), o sea $X = \{x_\alpha\}$ con $\{\alpha\}$ todos los números ordinales de 1.ª y 2.ª clase.

Consideremos el cuerpo $K(X)$ de funciones racionales sobre K con estas indeterminadas, y vamos a darle una ordenación por inducción transfinita.

Sea X_α el segmento de X determinado por x_α, es decir

$$X_\alpha = \{x_\beta\}_{\beta<\alpha} \; (X_0 = \phi, \; X_1 = \{x_0\})$$

tenemos $K(X_0) = K$ y está ordenado por la ordenación de K, supongamos que $K(X_\beta)$ con cualquier $\beta < \alpha$ estén ordenados, de tal forma que cada uno de ellos prolonga la ordenación de todo subcuerpo del mismo, sea

$$f \in K(X_\alpha)$$

f es una función racional que depende estrictamente de un número finito $x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}, \dots x_{\gamma_\nu}$ de indeterminadas de x_α, supongamos que $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_\nu$ si $\gamma_\nu + 1 < \alpha \Rightarrow f \in K(X_{\gamma+1})$ y es positivo si lo es en este cuerpo, lo que sucederá siempre si α es de 2.ª especie. Si $\gamma_\nu + 1 = \alpha$, será

$$f = \frac{a_0 \, x^n{}_{\gamma\nu} + - + a_n}{b_0 \, x^m{}_{\gamma\nu} + - + b_m}$$

con los a_i, $b_i \in K(X_{\gamma_\nu})$, $a_0 \, b_0 \neq 0$, diremos que f es positivo si lo es $a_0 \, b_0$ en $K(X_{\gamma_\nu})$, así por inducción transfinita hemos ordenado $K(X)$.

Sea

$$(2) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

una sucesión de elementos positivos de $K(X)$, como cada uno de sus términos depende estrictamente de un número finito de indeterminadas, sea $X^{(n)}$ el subconjunto finito (que puede ser vacío) de X del cual depende estrictamente f_n, y $X' = \bigcup_{n>1}^{\infty} X^{(n)}$, X' es a lo sumo numerable, y como para todo subconjunto finito o numerable de números ordinales de 1.ª y 2.ª clase, existen números de 2.ª clase mayores que todos ellos, sea $\alpha > \gamma$ para cualquier γ con $x_\gamma \in X'$ y

$$\frac{1}{x_\alpha} \in K(X),\ f_n - \frac{1}{x_\alpha} = \frac{f_n x_\alpha - 1}{x_\alpha}$$

es positivo, tenemos que la sucesión (2) no puede tender a O, es decir: $K(X)$ no es metrizable.

PROPOSICIÓN 4. *Si K es un cuerpo ordenado, y Ω una extensión ordenada de K, la estructura uniforme* (1) *correspondiente a Ω induce sobre K la correspondiente a este último sí y sólo si K es confinal en Ω. En otro caso la estructura inducida sobre K es la discreta.*

En efecto: Es trivial que toda vecindad (1) correspondiente a K es la intersección de $K \times K$ con una vecindad correspondiente a Ω, sea ahora N_ε una vecindad para la estructura correspondiente a Ω, y sea

$$(3) \qquad N_\varepsilon \cap (K \times K).$$

Si K es confinal en Ω, sea $\varepsilon \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ existirá un $\varepsilon' \in K$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < \varepsilon$, y (3) contendrá la vecindad $N_{\varepsilon'}$ correspondiente a K, si K no es confinal en Ω, existe un $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \Omega$ menor que todos los elementos positivos de K, y (3) es la diagonal de $K \times K$.

q.e.d.

Observación. Si Ω es una extensión ordenada algebraica sobre K, entonces K es confinal en Ω. (Pues si $\alpha \in \Omega$, sea

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

el polinomio irreductible de $K[x]$ con el cero α, y se tiene

$$|\alpha| \leqq \text{Máx}\ (1, \sum_{i=1}^{n} |a_i|)$$

Proposición 5. *Si K es un cuerpo ordenado y Ω una extensión ordenada de K, tal que K es confinal en Ω, K es denso en Ω sí y sólo si la intersección de una cortadura de tipo A en Ω con K es una cortadura de tipo A en K.*

En efecto: Por ser K confinal en Ω, la estructura (1) correspondiente a Ω induce sobre K su estructura (1) correspondiente (proposición 4), de donde resulta que $\widetilde{K} \subset \widetilde{\Omega}$, y $\widetilde{K} \supset \Omega$ es equivalente a $\widetilde{K} = \widetilde{\Omega}$.

Supongamos que $\widetilde{K} \neq \widetilde{\Omega}$, y sea $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\alpha} \notin K$, sea

$$A' = \{a' \in K\,;\ a' > \widetilde{a}\} \tag{4}$$

se verifica que A' es la clase posterior de una cortadura en K, pues *a)* $A' \neq K$, $A' \neq \phi$, por ser K confinal en Ω y por consiguiente en $\widetilde{\Omega}$; *b)* Si $b' \in K$, y $b' > a' \in A' \Rightarrow b' \in A'$ trivial; *c)* A' no tiene primer elemento, pues si $a' \in A'$, es decir, $a' - \widetilde{a} > 0$, sea $\varepsilon \in K$ con $0 < \varepsilon < a' - \widetilde{a}$ (que existe por ser K confinal en Ω), se tiene

$$a' - \varepsilon > \widetilde{a} \Rightarrow a' - \varepsilon \in A',\ a' - \varepsilon < a'$$

Sea $A = K - A'$, la cortadura $(A\,;\,A')$ de K es de tipo B, pues si fuera de tipo A, tendría un elemento $\alpha \in \widetilde{K}$ como elemento de separación, y sería $|a' - \alpha| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$, y como $\widetilde{a} \neq \alpha$ por hipótesis, sería $\dfrac{1}{|\widetilde{a} - \alpha|} \in \Omega$ mayor que todo elemento de K, contra la hipótesis que K es confinal en Ω.

La cortadura $(A\,;\,A')$ es la intersección con K de la cortadura en Ω cuya clase posterior es

$$A' = \{a' e\, \Omega\,;\ \widetilde{a}' < \tilde{a}\}$$

y la cortadura en Ω $(A\,;\,A')$ es de tipo A pues determina $\tilde{a}$. Si $\widetilde{K} = \widetilde{\Omega}$, la cortadura (4) es de tipo A.

q.e.d.

Observación. Si la cortadura (A, A') en K es de tipo B, y existe $\tilde{a} \in \tilde{\Omega}$ con $a < \tilde{a} < a'$ para $\forall\, a \in A$, $\forall\, a' \in A'$ este $\tilde{a}$ no es único, pues si fuera único, habría en el hemianillo Φ un cuerpo más amplio que K, lo que es absurdo (iii); por otra parte, si $a' - a < \eta$ para $\forall\, a \in A$ $\forall\, a' \in A'$, $\tilde{a} + \eta/_2$ ó $\tilde{a} - \eta/_2$ está también entre A y A', y entre éstos hay elementos de $\tilde{\Omega}$, es decir, entre A y A' hay infinitos elementos de Ω.

Ejemplo. Sea Γ el cuerpo de los números racionales, y $\mathbf{R}$ el de los reales; consideremos $\Gamma(x) \subset \mathbf{R}(x)$ con la ordenación

$$\frac{a_0\ x^n + - + a_n}{b_0\ x^m + - + b_m} > 0 \Leftrightarrow a_0\ b_0 > 0$$

$\Gamma(x)$ es confinal en $\mathbf{R}(x)$, pero $\widetilde{\Gamma(x)}$ no contiene ningún número irracional.

2. *Cuerpos reales maximales completos*

Si K es ordenado arquimediano y completo, es isomorfo al cuerpo de los números reales, que es real maximal. Si K es completo y ordenado no arquimediano, puede no ser real maximal, como lo prueba el ejemplo $\widetilde{\Gamma(x)}$ en el que 2 es positivo y no es un cuadrado; o también $\widetilde{\mathbf{R}(x)}$ en el que x es positivo y no es cuadrado (Cfr. (II), pág. 59).

Por otra parte, un cuerpo real maximal admite una sola ordenación; podemos, pues, considerarlo ordenado. (iv)

Proposición 6. *Si P es un cuerpo real maximal, $\tilde{P}$ es también real maximal.*

En efecto: Si $\tilde{P}$ no fuera real maximal, sea Σ un cuerpo real maximal algebraico sobre $\tilde{P}$ y que prolongue la ordenación de $\tilde{P}$, (tal cuerpo está determinado salvo un isomorfismo que deja invariantes todos los elementos de $\tilde{P}$). Por hipótesis es $\tilde{P} \neq \Sigma$.

Sea $\theta \in \Sigma$, $\theta \notin \tilde{P}$, como que $-\theta \notin \tilde{P}$, podemos suponer que $\theta > 0$ en Σ. $\tilde{P}$ es confinal en Σ (observación a la proposición 4), por consiguiente P es confinal en Σ.

Sea

$$f(x) = x^n + c_1\, x^{n-1} + \dots + c_n$$

el polinomio irreductible y normalizado de $\widetilde{P}[x]$ con el cero θ, evidentemente los c_i no pertenecen todos a P, pues θ sería algebraico sobre P, y por consiguiente no sería real maximal; sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in P$ arbitrario, existen $a_i \in P$, $a_i \leq c_i$ con

$$-\varepsilon < \theta^n + a_1 \theta^{n-1} + \dots + a_n < 0$$

pues por ser $\theta > 0$, es $a_i \theta^{n-i} \leq c_i \theta^{n-i}$ de donde resulta la segunda desigualdad, pues para al menos un i no vale el signo $=$. Por otra parte, de $c_i - a_i < \eta$ se deduce

$$(\theta^n + \sum_{i=1}^{n} c_i \theta^{n-1}) - (\theta^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \theta^{n-i}) = \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i) \theta^{n-i} < \eta \sum_{i=1}^{n} \theta^{n-i} < \varepsilon$$

para $\eta < \dfrac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} \theta^{n-i}}$ de donde resulta la primera desigualdad.

Sea

$$g(x) = x + a_1 x^{n-1} + - + a_n \in P[x]$$

es $g(\theta) < 0$ y $g(s) > 0$ para $s \in P$, $s > \theta$, $s > \text{Máx}(1, \sum_{i=1}^{n} |a_i|)$ que por ser Σ real maximal, existen ceros de $g(x)$ en Σ entre θ y s, un tal cero, por ser P real maximal, debe pertenecer a P.

Sea α el menor cero de $g(x)$ que sea mayor que θ, es $g(x) = (x - \alpha) g_1(x)$ donde $g_1(x) \in P[x]$ y en particular

$$g(\theta) = (\theta - \alpha) g_1(\theta) \tag{5}$$

que por ser $g(\theta) < 0$, $\theta - \alpha < 0$ se deduce que $g_1(\theta) > 0$.

Haciendo variar ε en el conjunto de los elementos positivos de P, $g(x)$ depende de ε, la llamaremos $g_\varepsilon(x)$ y α también depende de ε, lo indicaremos $\alpha(\varepsilon)$, sea $A = \{\alpha(\varepsilon)\}$, hay dos casos posibles: *a)*, $\theta \in \overline{A}$ (la adherencia en Σ), lo que implica $\theta \in \overline{P} = \widetilde{P}$ lo que es una contradicción; *b)* $\theta \notin \overline{A}$, es decir, existe un $\varrho > 0$, $\varrho \in \Sigma$ con $\varrho + \theta < \alpha(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in P$ pero de (5) resulta que al tender $\{\varepsilon\} \to O$ implica que $\{g_\varepsilon(\theta)\} \to 0$, y, por consiguiente $\{g_{1,\varepsilon}(\theta)\} \to 0$, y siendo $1, \theta, \dots \theta^{n-1}$ linealmente independiente sobre $\widetilde{P}$, se deduce que una red (sistema dirigido) de polinomios de grado $n - 1$ que tienda a O, sus coeficientes tienden también a O (por ser $\widetilde{P}$ completo, se generaliza sin dificultad la demostración de (IV), pág. 268), y como los $g_{1,\varepsilon}(x)$ (considerados como de $\widetilde{P}[x]$) son de grado $n-1$ y su coeficiente máximo es 1, hemos llegado a un absurdo. Queda, pues, demostrado que es absurdo suponer $\widetilde{P}$ no real maximal.

q.e.d.

COROLARIO. *Si K es un cuerpo ordenado, existen cuerpos reales maximales completos que prolongan la ordenación de K; de tales cuerpos existen minimales (es decir, que un cuerpo intermedio entre K y un tal cuerpo que sea real maximal y completo, implica que coincide con este último), dos tales cuerpos son isomorfo-semejantes sobre K.*

En efecto: Sea P un cuerpo real maximal algebraico sobre K y que prolongue la ordenación de K, $\widetilde{P}$ el cuerpo completación de P, $\widetilde{P}$ es real maximal y completo, según acabamos de ver, P es el conjunto de elementos algebraicos sobre K de $\widetilde{P}$, sea $K \subset \Delta \subset \widetilde{P}$; si Δ es real maximal, implica que $\Delta \supset P$, es decir, Δ es denso en $\widetilde{P}$, luego no puede ser completo a menos que coincida con $\widetilde{P}$; si Δ es completo, y distinto de $\widetilde{P}$, no puede contener a P, pues no puede ser denso en $\widetilde{P}$, y por consiguiente no es real maximal, pues existen elementos de P algebraicos sobre K que no le pertenecen; $\widetilde{P}$ es, pues, un tal cuerpo minimal. Sea P^* un tal otro, los elementos de P^* algebraicos sobre K forman un cuerpo P_1 real maximal y algebraico sobre K, P_1 es, pues, isomorfo-semejante sobre K a P, $\widetilde{P}_1$ es real maximal y completo y contenido en P^*, y además isomorfo a $\widetilde{P}$, pero por el carácter minimal de P^* resulta que $P^* = \widetilde{P}_1$.

q.e.d.

3. *Cuerpos algebraicamente cerrados de característica O.* (Apéndice)

Sea Ω un cuerpo algebraicamente cerrado de característica O, y Γ su cuerpo primo, el de los números racionales, y m el grado de trascendencia de Ω sobre Γ (m es un número cardinal, que será O si Ω es algebraico sobre Γ).

Si dos cuerpos algebraicamente cerrados y de característica O Ω_1 y Ω_2 tienen el mismo grado de trascendencia sobre Γ son isomorfos, pues si M_1 y M_2 son dos bases trascendentes de Ω_1 y Ω_2 respectivamente, son de la misma potencia m, entonces es:

$$\Gamma(M_1) \cong \Gamma(M_2)$$

pues ambos son isomorfos al cuerpo de las funciones racionales con un conjunto de indeterminadas de potencia m; y sus clausuras algebraicas son también isomorfas. Por ejemplo, si m es el continuo, Ω es isomorfo al cuerpo de los números complejos. Dado al arbitrio un número cardinal, existe uno, y salvo isomorfismos un solo cuerpo algebraicamente cerrado y de característica nula que tenga este cardinal como grado de trascendencia sobre su cuerpo primo.

Para que un subcuerpo propio $\Delta \underset{\neq}{\subset} \Omega$ sea isomorfo a Ω, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes dos condiciones: *a)* que Δ sea algebraicamente cerrado, *b)* que el grado de trascendencia sobre Γ de Δ y Ω coincidan; lo que es posible sí y sólo si el grado de trascendencia es transfinito, pues si M es una base de trascendencia de Δ sobre Γ, y N es una base de trascendencia de Ω sobre Δ, N no puede ser vacío, pues sería Ω algebraico sobre Δ, y Δ es algebraicamente cerrado; entonces $M \cup N$ es una base de trascendencia de Ω sobre Γ, que ha de tener la misma potencia que M, lo que es equivalente a $m \geq \aleph_0$ y $m \leqq n$, siendo n la potencia de N, y m la de M. (Todo lo que antecede es válido también para los cuerpos algebraicamente cerrados y de misma característica, considerando su grado de trascendencia sobre su cuerpo primo).

Sea P un cuerpo real tal que $P(i) = \Omega$, un tal cuerpo es real maximal, y una base de trascendencia de P sobre Γ, también lo es de Ω sobre Γ, pues Ω es algebraico sobre P. Recíprocamente, si M es una base de trascendencia de Ω sobre Γ, como $\Gamma(M)$ es real (pues toda extensión trascendente pura de un cuerpo real también lo es), y se puede extender a un tal cuerpo P.

Si M no es vacío, se pueden dar infinitas ordenaciones a $\Gamma(M)$ (las habrá arquimedianas sí y sólo si M es de potencia menor o igual que el continuo), tomemos por ejemplo una en la que Γ no sea confinal a ningún otro subcuerpo de $\Gamma(M)$ y otra ordenación en la que esto no suceda, entonces los cuerpos reales maximales que prolongan respectivamente estas ordenaciones no serán isomorfos, es decir, *para que dos tales cuerpos P sean isomorfos siempre es necesario y suficiente que Ω sea algebraico sobre Γ.*

Si $m > \aleph_0$ existen cuerpos P no metrizables; basta dar a $\Gamma(M)$ una ordenación que prolongue nuestro ejemplo de la página 6.

Por ejemplo, si $\Omega = \mathbf{C}$, cuerpo de los números complejos, un tal cuerpo P es $\mathbf{R}$, cuerpo de los números reales, otro tal cuerpo P no tiene por qué ser isomorfo a éste, ni aún siendo arquimediano (puede no ser completo), basta ver para ello que si $\mathbf{C}_1 \subsetneq \mathbf{C}$ e isomorfo a él, el cuerpo $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} \cap \mathbf{C}$ es real como subcuerpo de $\mathbf{R}$, y es real maximal pues $\mathbf{R}_1(i) = \mathbf{C}_1$ que es algebraicamente cerrado; $\mathbf{R}_1$ como subcuerpo propio de $\mathbf{R}$ no puede ser completo, un isomorfismo de $\mathbf{C}_1$ sobre $\mathbf{C}$ transforma $\mathbf{R}_1$ en un cuerpo P con $P(i) = \mathbf{C}$ arquimediano y no completo. (El conjunto de subcuerpos de $\mathbf{C}$ isomorfos a $\mathbf{R}$ tiene la potencia del continuo, según demostró ARTIN).

NOTAS

(i) Véase (I), pág. 252.

(ii) Véase (I), pág. 251.

(iii) Véase (I), págs. 259-260.

(iv) Véase (VI), párr. 71, 72; o (III), Cap. 6, párr. 2.

BIBLIOGRAFIA

(I) R. AGUILÓ. — *Aplicación del método de Dedekind a un cuerpo ordenado no arquimediano*. Actas III R.A.M.E. (Barcelona, 1963), 247-260.

(II) R. AGUILÓ. — *Cuerpos maximales arquimedianos contenidos en uno ordenado no arquimediano*. Actas IV R.A.M.E. (Salamanca, 1965), 51-60.

(III) N. BOURBAKI. — *Algèbre*. ASI 1179.

(IV) N. BOURBAKI. — *Topologie Générale*. ASI 1142, 1143.

(V) W. SIERPINSKI. — *Leçons sur les nombres transfinis*. Collection de monographies sur la Théorie des Fonctions. Gauthier-Villars (Paris, 1928).

(VI) B. L. VAN DER WAERDEN. — *Algebra* I Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, B. XXXIII, 4. Auflage, Springer (Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955).