

UNAS APLICACIONES DE UN CALCULO FUNCIONAL HOLOMORFO EN DIMENSION INFINITA

por

JOAQUÍN M.^a ORTEGA ARAMBURU

Introducción

El cálculo funcional holomorfo sobre álgebras de Banach por funciones holomorfas en espacios de dimensión infinita introducido por L. Waelbroeck (5) se extiende a funciones holomorfas valoradas en un espacio de Banach. Una variante de este teorema ha sido enunciado recientemente por Taylor J. (4), independientemente de este trabajo y sin la publicación de las demostraciones. Dicho cálculo permite establecer dos generalizaciones de aplicaciones ya clásicas del «cálculo funcional holomorfo finito»: una generalización del teorema de Lévy-Wiener y un teorema de la función implícita para álgebras de Banach con funciones analíticas en espacios de dimensión infinita.

1. — *Extensión del cálculo funcional holomorfo en dimensión infinita de Waelbroeck a funciones valoradas en un espacio de Banach.*

Sean E y F espacios de Banach, A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Todos los espacios vectoriales que aparezcan se entenderán sobre los números complejos. Los elementos de $A \hat{\otimes} E$ se expresan como $a = \sum_{n \geq 0} a_n \otimes e_n$ con $\sum_{n \geq 0} \|a_n\| \cdot \|e_n\| < \infty$. Waelbroeck define $\text{Spec } a = \{ \sum_{n \geq 0} a_n(x) e_n; x \in \text{Spec } A \}$ y establece un morfismo φ_a de álgebra de $O(\text{Spec } a)$ en A que transforma todo polinomio continuo u en $u[a] = \sum u_k[a]$ donde u_k es la parte homogénea de grado k del polinomio y $u_k[a] = \sum_{n_1, \dots, n_k} \check{u}_k(e_{n_1}, \dots, e_{n_k}) a_{n_1} \dots a_{n_k}$; donde \check{u}_k es la forma k -lineal simétrica continua polar de u_k y $O(\text{Spec } a)$

designa el álgebra de los gérmenes de funciones holomorfas en $\text{Spec } a$. Este cálculo con alguna condición suplementaria es único.

Se trata de dar un cálculo funcional pero para funciones valoradas en un espacio de Banach F , es decir, de establecer un morfismo de $O(\text{Spec } a; F)$ en $A \hat{\otimes} F$ que extienda y sea compatible con el anterior.

Obsérvese que la generalización no es trivial en el sentido de que $O(\text{Spec } a; F) = \lim_{\text{Spec } a \subset U} O(U; F) = \lim_{\text{Spec } a \subset U} O_b(U; F)$; $O_b(U; F)$ funciones holomorfas acotadas sobre los U -acotados. Por otra parte $O_b(U; F)$ contiene estrictamente a $O_b(U) \hat{\otimes}_\epsilon F$ que, como ahora veremos, en condiciones muy generales, se puede identificar con $O_k(U; F)$, funciones holomorfas en U a valores en F tales que la imagen de todo U -acotado es un relativamente compacto de F . Tendremos entonces que el morfismo natural $O_b(U) \hat{\otimes} F \rightarrow A \hat{\otimes} F$ inducido a partir del morfismo continuo $O_b(U) \rightarrow A$ no da una extensión, como ocurría en el caso de ser E de dimensión finita, de un morfismo de $O_b(U; F)$ en $A \hat{\otimes} F$. Veamos la proposición anunciada:

Proposición 1

Sea U un abierto de un espacio de Banach E y F un segundo espacio de Banach que verifique la propiedad de la aproximación. Entonces $O_b(U) \hat{\otimes}_\epsilon F \simeq O_k(U; F)$.

La demostración es standard. $O_b(U) \hat{\otimes}_\epsilon F \simeq \mathcal{L}_e(F'_c; O_b(U))$. Establezcamos la aplicación $O_k(U; F) \xrightarrow{i} \mathcal{L}_e(F'_c; O_b(U))$ tal que a f asigna la aplicación $u \rightarrow u \circ f$. De ser la imagen por f de todo U -acotado un relativamente compacto se sigue la continuidad de dicha aplicación.

La aplicación i es inyectiva y la topología inducida por $\mathcal{L}_e(F'_c; O_b(U))$ en $O_k(U; F)$ es la de la convergencia uniforme sobre los U -acotados. Puesto que $O_k(U; F)$ contiene a $O_b(U) \otimes F$ que es denso en $\mathcal{L}_e(F'_c; O_b(U))$ y de la completitud de $O_k(U; F)$ se sigue el isomorfismo de i .

Sin ser entonces obvio el establecimiento del morfismo buscado puede, no obstante, seguirse en el mismo la línea trazada por L. Waelbroeck (5) con las naturales precisiones del caso:

En primer lugar si $a = \sum_n a_n \otimes e_n \in A \hat{\otimes} E$ con $\sum_n \|a_n\| \|e_n\| < \infty$

y u_k es un polinomio homogéneo de grado k , continuo de E en F , se puede definir un elemento de $A \hat{\otimes} F$ mediante:

$$u_k[a] = \sum_{n_1, \dots, n_k} a_{n_1} \dots a_{n_k} \otimes \check{u}_k(e_{n_1}, \dots, e_{n_k})$$

ya que

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, \dots, n_k} \|a_{n_1} \dots a_{n_k}\| \|\check{u}_k(e_{n_1}, \dots, e_{n_k})\| &\leq \sum_{n_1, \dots, n_k} \|a_{n_1}\| \dots \|a_{n_k}\| \|\check{u}_k\| \|e_{n_1}\| \dots \|e_{n_k}\| \leq \\ &\leq \|\check{u}_k\| \left(\sum_n \|a_n\| \|e_n\| \right)^k. \end{aligned}$$

Proposición 2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad; E y F espacios de Banach y $a \in A \hat{\otimes} E$. Sea U la bola en E de centro el origen y radio $r > e\|a\|$. Existe una aplicación φ_a lineal continua de $O_b(U; F)$ en $A \hat{\otimes} F$ tal que la imagen de un polinomio u_k es $u_k[a]$. φ_a es morfismo de $O_b(U)$ -módulos, donde $A \hat{\otimes} F$ es un $O_b(U)$ -módulo vía el morfismo continuo natural de álgebras de $O_b(U)$ en A .

En efecto, si $f \in O_b(U; F)$; $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n(z)$ su desarrollo de Taylor en el origen. Se verifica, supuesto $r > e$ y $\|a\| < 1$, lo que no supone restricción:

$\|f_n\| \leq K/e^n$, y, de la identidad polar, $\|\check{f}_n\| \leq n^n/n! \|f_n\| \leq K$. Puede entonces definirse $f[a] = \sum_{n \geq 0} f_n[a]$ ya que $\|f_n[a]\|_{A \hat{\otimes} F} \leq K \left(\sum_n \|a_n\| \|e_n\| \right)^n$ y $\sum_n \|a_n\| \|e_n\|$ puede tomarse menor que 1.

Es una comprobación directa verificar que la aplicación $f \rightarrow f[a]$ cumple las condiciones de la proposición.

Para proseguir la construcción debemos establecer dos lemas.

Lema 1

Sea E_1 un espacio vectorial de dimensión finita, E_2 y F espacios de Banach; U_1 un abierto de E_1 y U_2 una bola abierta centrada en el origen en E_2 . Se verifica:

$$O_b(U_1 \times U_2; F) \simeq O(U_1; O_b(U_2; F)) \simeq O(U_1) \hat{\otimes}_{\overline{\mathbb{C}}} O_b(U_2; F)$$

El segundo isomorfismo se sigue de ser E_1 de dimensión finita. En cuanto al primero, sea $f \in O_b(U_1 \times U_2; F)$, para cada x de U_1 la función de U_2 en F $y \rightarrow f(x, y)$ es holomorfa y fijados B_1 (resp. B_2) conjunto U_1 -acotado (resp. U_2 -acotado), existe $\varrho > 1$ y V abierto con $B_2 \subset V \subset U_2$ y $B_\varrho(0) \subset V$ U_2 -acotado y por tanto

$$L = \sup_{\substack{x \in B_1 \\ y \in V \\ | \lambda | \leq \varrho}} \|f(x, \lambda y)\| < \infty$$

de donde se verifica la desigualdad:

$$\|f(x, y) - \sum_{m=0}^l \frac{1}{m!} d^m f(x, 0) [y]\| \leq \frac{L}{\varrho^l (\varrho - 1)} \rightarrow 0$$

que nos expresa, en particular, que la función $x \rightarrow f(x, y)$ es límite en $O(U_1; O_b(U_2; F))$ de las funciones $x \rightarrow \sum_{m=0}^l \frac{1}{m!} d^m f(x, 0) [\]$ que son de dicho espacio. Luego la función $x \rightarrow f(x, y)$ es holomorfa de U_1 en $O_b(U_2; F)$.

Recíprocamente, toda función $g \in O(U_1, O_b(U_2; F))$ define una función de $U_1 \times U_2$ en F que es G -holomorfa y de tipo acotado, luego define un elemento de $O_b(U_1 \times U_2; F)$. Por otra parte, trivialmente, las topologías coinciden.

Lema 2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. $a = a_1 \oplus a_2$ un elemento de $A \hat{\otimes} (E_1 \oplus E_2)$; E_1 espacio vectorial de dimensión finita y E_2 de Banach. Sea U un abierto de $E_1 \oplus E_2$ que contiene a uno del tipo $U_1 \times U_2$ donde U_1 es un entorno de $\text{Spec } a_1$ y U_2 es la bola abierta de E_2 de centro el origen y radio $r > \varepsilon \|a_2\|$; F un espacio de Banach. Existe entonces un morfismo continuo $O_b(U; F) \rightarrow A \hat{\otimes} F$ de $O_b(U)$ -módulos que asocia a todo polinomio homogéneo continuo $u, u[a]$.

La demostración se sigue como en (5) o en (1) combinando el morfismo $O(U_1) \rightarrow A$ del cálculo operacional finito respecto a $a_1 \in A \hat{\otimes} E_1$ y el morfismo $O_b(U_2; F) \rightarrow A \hat{\otimes} F$ establecido en la proposición 2 y teniendo en cuenta el lema 1.

Obsérvese que si U_1 es un abierto polinomialmente convexo el

morfismo en las condiciones del lema 2 es único ya que al determinar la imagen de los polinomios y ser la aplicación continua queda determinado el morfismo sobre $O(U_1) \otimes C$ y sobre $C \otimes O_b(U_2; F)$ que engendran un sub- $O_b(U)$ -módulo denso en $O_b(U_1 \times U_2; F)$.

Teorema 1 (de existencia)

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, E y F dos espacios de Banach. Para cada $a \in A \hat{\otimes} E$ existe un morfismo φ_a de $O(\text{Spec } a)$ -módulo de $O(\text{Spec } a; F)$ en $A \hat{\otimes} F$ (este último es un $O(\text{Spec } a)$ -módulo vía el morfismo establecido por Waelbroeck de $O(\text{Spec } a)$ en A) que transforma todo polinomio homogéneo continuo u en $u[a]$ y cuya restricción a $O_b(U; F)$ para cada $U \supset \text{Spec } a$ es continua.

Nuevamente la demostración puede desarrollarse en forma parecida a la de (5) o (1) por lo que la describimos muy brevemente:

Sea U un entorno abierto de $\text{Spec } a$ en E ; $\varepsilon > 0$ tal que U contiene un ε -entorno de $\text{Spec } a$. Para cada $\eta > 0$ podemos descomponer $a = a_1 + a_2$ con $a_1 \in A \otimes E_1$, E_1 de dimensión finita y $\|a - a_1\| < \eta$. Sea U_1 un η -entorno de $\text{Spec } a_1$ en E_1 y U_2 la bola de centro 0 y radio r en E con r y η que verifiquen:

$$r = \varepsilon - 2\eta > 0 \quad \varepsilon - 2\eta > e\eta$$

de manera que $r > e\|a_2\|$ y que $U_1 + U_2$ está contenido en el ε -entorno de $\text{Spec } a$.

Podemos entonces definir un morfismo:

$$O_b(U; F) \rightarrow O_b(U_1 \times U_2; F) \quad f \rightarrow g(z_1, z_2) = f(z_1 + z_2)$$

que es continuo. Componiéndolo con el morfismo $O_b(U_1 \times U_2; F) \rightarrow A \hat{\otimes} F$ $g \rightarrow g[a_1, a - a_1]$ inducido por $a_1 \oplus (a - a_1) \in A \hat{\otimes} (E_1 \oplus E)$ según el lema 2 se obtiene una aplicación continua que es morfismo de $O_b(U)$ -módulos y tal que si u es un polinomio homogéneo continuo, su imagen es $u[a]$.

Al intentar establecer que los morfismos construidos anteriormente son compatibles con los morfismos restricción

$O_b(U_2; F) \rightarrow O_b(U_1; F)$ si $U_1 \subset U_2$ fuerza a establecer un teorema de unicidad, lo que puede conseguirse sustituyendo los morfismos anteriores por otros definidos sobre funciones en abiertos polinomial-

mente convexos. Tras un teorema de Arens-Calderon se puede considerar un espacio de dimensión finita \tilde{E}_1 , una aplicación lineal $v_1: \tilde{E}_1 \rightarrow E_1$, un $b_1 \in A \otimes \tilde{E}_1$ tal que $v_1[b_1] = a_1$ por el morfismo extensión $A \hat{\otimes} \tilde{E}_1 \rightarrow A \hat{\otimes} E_1$ y un entorno abierto de Spec b_1 polinomialmente convexo V_1 tal que $v_1(V_1) \subset U_1$.

Podemos ahora definir un morfismo:

$$O_b(U; F) \xrightarrow{s_1} O_b(V_1 \times U_2; F) \quad f \rightarrow s_1(f)(z_1, \xi) = f(v_1(z_1) + \xi)$$

y definir después $f[a] = s_1(f)[b_1, a - v_1[b_1]]$.

De esta manera se obtiene un morfismo continuo $f \rightarrow f[a]$ que es el ya obtenido. Se puede ahora seguir como en (1) para establecer la independencia de los representantes de los gérmenes en $O_b(\text{Spec } a; F)$ y el conjunto de propiedades enunciadas en el teorema.

También, como en (1) se puede dar un teorema de unicidad, pero ahora para funciones valoradas en F . Establecemos ya sin demostración:

Teorema 2

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, E un espacio de Banach. Si para cada $a \in A \hat{\otimes} E$ existe un morfismo $\varphi_a: O(\text{Spec } a; F) \rightarrow A \hat{\otimes} F$ continuo, de $O(\text{Spec } a)$ -módulos, tal que:

- a) $\varphi_a(u) = u[a]$ para todo polinomio homogéneo continuo u .
- b) Para toda aplicación lineal continua $T: E \rightarrow \tilde{E}$ (\tilde{E} de Banach) y toda $f \in O(\text{Spec } T[a]; F)$ se tiene $\varphi_a(f \circ T) = \varphi_{I \otimes T(a)}(f)$.

Entonces $\varphi_a(f) = f[a]$.

Teorema 3

Sean A y B dos álgebras de Banach conmutativas con unidad; E y F espacios vectoriales de Banach y φ un morfismo de álgebras de A en B . Si $a \in A \hat{\otimes} E$ entonces $\varphi \otimes I(a) \in B \hat{\otimes} E$ y para $f \in O(\text{Spec } a; F)$ se verifica $f[\varphi \otimes I(a)] = \varphi \otimes I(f[a])$

Corolario 1

Siguiendo las notaciones del teorema 3, si $a \in A \hat{\otimes} E$ y $f \in O(\text{Spec } a; F)$, existe un elemento $b \in A \hat{\otimes} F$ tal que $f \circ a^\wedge = b^\wedge$ y $\text{Spec } f[a] = f[\text{Spec } a]$

Corolario 2

Si A es un álgebra de Banach conmutativa unitaria y $a \in A \hat{\otimes} A$, existe un morfismo de álgebra continuo $O(\text{Spec } a; A) \rightarrow A$ que asocia a los polinomios homogéneos continuos u la imagen de $u[a]$ por el morfismo canónico $A \hat{\otimes} A \rightarrow A$.

Teorema 4

Sea A un álgebra de Banach, E_1, E_2, E_3 espacios de Banach. Sea $a \in A \hat{\otimes} E_1$, f una función holomorfa en un entorno de $\text{Spec } a$, a valores en E_2 y g una función holomorfa definida en un entorno de la imagen de f a valores en E_3 . Entonces se verifica:

$$g[f[a]] = g \circ f[a]$$

En primer lugar observemos que las aplicaciones que asignan a cada elemento de $A \hat{\otimes} E_1$ con espectro en el dominio de definición de f (que sin restricción puede suponerse, como g , acotado), $g \circ f[a]$ o bien $g[f[a]]$ son funciones continuas (el lema de la pág. 45 de (1) puede traducirse directamente). Es pues suficiente probar la proposición en el caso en que $a \in A \hat{\otimes} E_1$ con E_1 de dimensión finita. En este caso y si f tomase valores en un espacio de dimensión finita se reduciría al caso clásico.

Para verificar el teorema en general procederemos por pasos sucesivos. En primer lugar si g es un polinomio homogéneo y f también lo es se reduce al caso clásico como hemos dicho antes o bien la comprobación es directa. Sea $f \in O_b(U; E_2)$, U bola de centro el origen en E_1 y radio $r > e \|a\|$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n f_n(x), \text{ de donde } f[a] = \sum_n f_n[a]. \text{ De aquí que } g[f[a]] = \\ &= \check{g}(f[a], \dots, f[a]) = \sum_l \sum_{n_1 + \dots + n_r = l} \check{g}(f_{n_1}[a], \dots, f_{n_r}[a]) = \sum_l \sum_{n_1 + \dots + n_r = l} \check{g}(f_{n_1}, \dots, \\ & f_{n_r}) [a] = (g \circ f) [a]. \end{aligned}$$

Siguiendo las notaciones del lema 2 sea $f \in O(U_1) \hat{\otimes} O_b(U_2; E_2)$, veamos que $g[f[a_1, a_2]] = (g \circ f) [a_1, a_2]$. En efecto, si

$$\begin{aligned} f &= \sum f_i \otimes g_i, g[f[a_1, a_2]] = \sum \check{g}(f_{i_1}[a_1]g_{i_1}[a_2], \dots, f_{i_r}[a_1]g_{i_r}[a_2]) = \\ &= \sum f_{i_1}[a_1] \dots f_{i_r}[a_1] \check{g}(g_{i_1}[a_2], \dots, g_{i_r}[a_2]) = \\ &= \sum f_{i_1} \dots f_{i_r} \check{g}(g_{i_1}, \dots, g_{i_r}) [a_1, a_2]. \end{aligned}$$

Sea ahora f definida en un entorno de $\text{Spec } a$. Siguiendo las notaciones del teorema 1:

$f[a] = Sf[a_1, a - a_1]$ con $Sf(z_1, z_2) = f(z_1 + z_2)$, función definida en $U_1 \times U_2$.

Se tendrá $g[f[a]] = g[Sf[a_1, a - a_1]] = S(g \circ f)[a_1, a - a_1] = (g \circ f)[a]$.

Está pues demostrado en el caso de ser g polinomio y el caso en que f tenga recorrido de dimensión finita.

Sea ahora g holomorfa en una bola de centro el origen de E_2 y radio mayor que $e\|f[a]\|$. De esta manera si $g(z) = \sum_n g_n(z)$ $g[f[a]] = \sum_n g_n[f[a]] = \sum_n (g_n \circ f)[a] = (g \circ f)[a]$.

Por último el caso general de g se reduce a los dos anteriores. Sean $\varphi_1 : E_2 \rightarrow E'_2$ $\varphi_2 : E_2 \rightarrow E_2$ lineales, E'_2 subespacio de dimensión finita de E_2 , las aplicaciones asociadas a g y a $f[a]$ y que permiten definir $g[f[a]]$ como

$$g[f[a]] = (Sg)((I \otimes \varphi_1)f[a], (I \otimes \varphi_2)f[a]).$$

Por otra parte:

$$g(f(x)) = g(\varphi_1 f(x) + \varphi_2 f(x)) = Sg(\varphi_1 f(x), \varphi_2 f(x))$$

De aquí, teniendo en cuenta los casos anteriores se sigue la demostración del teorema.

2 Extensión del teorema de Lévy- Wiener

Teorema 5

Sea $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ una serie absolutamente convergente de elementos de un espacio de Banach E y sea f una función holomorfa definida en un entorno del compacto de $E \{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i; |z| = 1 \}$ con valores en un espacio de Banach F . Entonces, la función $g(z) = f(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i)$ admite una expresión $\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i z^i$ donde $b_i \in F$ y $\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i$ constituye una serie absolutamente convergente en F . Puede darse un teorema análogo para series en que el conjunto de índices recorrido es el de los números naturales, es decir, si g es una función definida en $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$

a valores en E , holomorfa en su interior, con desarrollo de Taylor en el origen absolutamente convergente para $z = 1$ y f es una función holomorfa en un entorno de $g(D)$, a valores en F , entonces $f \circ g$ admite un desarrollo de Taylor en el origen $\sum_{i \geq 0} b_i z^i$ con $\sum_{i \geq 0} \|b_i\| < \infty$.

En efecto, basta aplicar el cálculo operacional construido anteriormente, tener en cuenta que el espectro de $1^1(Z)$ (resp. $1^1(N)$) es $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ (resp. $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$) con representación de Gelfand $z \rightarrow \sum a_i z^i$, y, por último, que $1^1(Z) \hat{\otimes} E \simeq 1^1[Z; E]$ (resp. $1^1(N) \hat{\otimes} E \simeq 1^1[N; E]$).

Si $a = (a_i)$ pertenece, por ejemplo, a $1^1[Z; E] \simeq 1^1(Z) \hat{\otimes} E$, $\text{Spec } a = \{\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i; |z| = 1\}$, f estará definida en un entorno de $\text{Spec } a$ y mediante el cálculo operacional $f(\sum_i a_i z^i)$ representará la función asociada a un elemento de $1^1(Z) \hat{\otimes} F \simeq 1^1[Z; F]$. Haciendo unas consideraciones análogas para $1^1[N; E]$ se acaba la demostración.

3 Teorema de la función implícita para álgebras de Banach por funciones holomorfas definidas en espacios de Banach.

Teorema 6

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad, E y F espacios de Banach. Sea $f \in A \hat{\otimes} E$ y $h: \text{Spec } A \rightarrow F$ una función continua; G una función definida en un entorno de $X = \{(h(x), f^\wedge(x)); x \in \text{Spec } A\}$ a valores en F , holomorfa, con $dG_{|F \times \{0\}}$ biyectiva de F en F en todo punto de X y tal que para cada $x \in \text{Spec } A$, $G(h(x), f^\wedge(x)) = 0$. Existe entonces un único elemento $g \in A \hat{\otimes} F$ tal que $g^\wedge(x) = h(x)$ para $x \in \text{Spec } A$ y que bajo el cálculo operacional holomorfo ya definido verifica $G[g, f] = 0$.

Demostración de la existencia:

Obsérvese en primer lugar que, restringiendo si es preciso el dominio de definición de G , puede suponerse que G es de tipo acotado y que $dG_{|F \times \{0\}}$ es biyectiva en todo punto del dominio de definición de G .

Consideremos un punto $x_0 \in \text{Spec } A$. Puesto que $dG_{|F \times \{0\}}$ en $(h(x_0), f^\wedge(x_0))$ es biyectiva, por el teorema de la función implícita existen entornos de $h(x_0)$ en F y de $f^\wedge(x_0)$ en E y una única aplicación holomorfa del segundo en el primero $z \rightarrow 1(z)$ tal que $1(z)$ es el único punto de dicho entorno que verifica $G(1(z), z) = 0$. En par-

particular, existe un entorno de $x_0 \in \text{Spec } A$ tal que si $f^\wedge(x) = f^\wedge(y)$, x e y en dicho entorno, entonces $h(x) = h(y)$. De esta forma verificamos la existencia de un recubrimiento $\{U\}$ de $\text{Spec } A$ tal que $h(x) = h(y)$ siempre que x e y pertenezcan al mismo abierto del recubrimiento y $f^\wedge(x) = f^\wedge(y)$.

Existe, entonces, un elemento $f^\epsilon \in A \hat{\otimes} (E \oplus E_1)$, E_1 de dimensión finita, tal que mediante la proyección natural sobre $A \hat{\otimes} E$ tenga f como imagen y si $f^{\epsilon^\wedge}(x) = f^{\epsilon^\wedge}(y)$ entonces $h(x) = h(y)$.

Podemos, por tanto, definir una función continua H sobre $\text{Spec } f^\epsilon$ a valores en F mediante la relación $H(f^{\epsilon^\wedge}(x)) = h(x)$.

La continuidad de H puede probarse tomando un cerrado de F , C y verificando que $H^{-1}(C) = f^{\epsilon^\wedge}(h^{-1}(C))$ que es un compacto. No hay inconveniente en extender G a un entorno de $X \times E_1 \subset F \oplus (E \oplus E_1)$ mediante la composición con la proyección natural de $F \oplus (E \oplus E_1)$ en $F \oplus E$. Sea G^ϵ esta extensión. Se tendrá: $G^\epsilon(H(w), w) = 0$ para $w \in f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$.

Apliquemos de nuevo el teorema de la función implícita. Para cada $w_0 \in f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$, sea $H(w_0) = \theta_0$; existe un entorno de θ_0 , una bola de centro w_0 y una función H^{w_0} definida en esta y con valores en el primero tal que $H^{w_0}(w)$ es el único punto de él que verifica $G^\epsilon(H^{w_0}(w), w) = 0$, de manera que H^{w_0} coincide con H en la intersección de los dominios de definición de ambas. Sea 2ϵ el número de Lebesgue del recubrimiento de $f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$ formado por las bolas anteriores al variar w_0 en $f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$. Tomemos bolas de centro los diversos puntos de $\text{Spec } A$ y radio ϵ y seleccionemos un recubrimiento parcial finito de $f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$. Cada una de estas bolas $B(w_1, \epsilon)$ será tal que $B(w_1, 2\epsilon)$ estará contenida en alguna de las bolas sobre las que definíamos las H^{w_0} . Llamemos H^{w_1} a la restricción de esta a $B(w_1, \epsilon)$. Si $B(w_1, 2\epsilon)$ está contenida en dos bolas del tipo anterior, por el teorema de la función implícita aplicado a G^ϵ en w_1 tendremos que las funciones H^w coincidirán en $B(w_1, \epsilon)$.

Formemos $\bigcup_{w_i \in f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)} B(w_i, \epsilon)$ y definamos \tilde{H} sobre este entorno de $f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$ mediante $H(z) = H^{w_i}(z)$ si $z \in B(w_i, \epsilon)$. La definición es correcta pues si $B(w_i, \epsilon) \cap B(w_j, \epsilon) \neq \emptyset$, se tiene que $w_j \in B(w_i, 2\epsilon)$ que está contenida en una de las bolas sobre las que estaba definida una de las funciones H^{w_i} . Análogamente la función definida en $B(w_j, \epsilon)$ es la restricción de una H^{w_i} . Ambas están definidas en bolas que tienen al menos el punto w_j en común que es de $f^{\epsilon^\wedge}(\text{Spec } A)$ y sobre el que por lo tanto coinciden. Aplicando el teorema de la función implícita

a G^ε en este punto se sigue que H^{W_i} y H^{W_j} coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

La función \tilde{H} construida es holomorfa y de tipo acotado pues hemos partido para construirla de un número finito de funciones H^{W_i} acotadas. Tiene sentido mediante el cálculo operacional establecer:

$$\tilde{H}[f^\varepsilon] \in A \hat{\otimes} F$$

Se verifica entonces, teniendo en cuenta el teorema 4:

$$\tilde{H}[f^\varepsilon](x) = \tilde{H}(f^\varepsilon(x)) = H(f^\varepsilon(x)) = h(x)$$

$$G[\tilde{H}[f^\varepsilon], f] = G^\varepsilon[\tilde{H}[f^\varepsilon], f^\varepsilon] = 0 \text{ pues } G^\varepsilon(\tilde{H}(w), w) = 0.$$

Demostración de la unicidad:

Sea $g_1 \in A \hat{\otimes} F$ con $G[g_1, f] = 0$ y $g_1^\wedge(x) = h(x)$. Se verificará $g_1 = g + r$ con $G[g + r, f] = 0$, $r^\wedge(x) = 0$ para $x \in \text{Spec } A$. Sea U el dominio de definición de G , en el que se ha supuesto ya que en todo punto $d_1 G = dG_{|F \times \{0\}}$ es un isomorfismo y G es acotado. Existe un entorno V de X y un $\varepsilon > 0$ tal que si $(\theta, w) \in V$ y $\|\theta_1\| \leq 2\varepsilon \cdot e$ entonces $(\theta + \theta_1, w) \in U$.

Desarrollemos la función G en la primera variable en un entorno de θ con $(\theta, w) \in V$ y agrupemos todos los términos a partir del segundo en la forma:

$$G(\theta + \theta_1, w) = G(\theta, w) + d_1 G_{(\theta, w)}(\theta_1) + 1/2! d_1^2 G_{(\theta, w)}(\theta_1, \theta_1) + \dots$$

Escribamos:

$$1_{2(\theta, w, \theta_1)}(\theta_2, \theta_3) = 1/2! d_1^2 G_{(\theta, w)}(\theta_2, \theta_3) + 1/3! d_1^3 G_{(\theta, w)}(\theta_2, \theta_3, \theta_1) + \\ + 1/4! d_1^4 G_{(\theta, w)}(\theta_2, \theta_3, \theta_1, \theta_1) + \dots$$

de manera que

$$G(\theta + \theta_1, w) = G(\theta, w) + d_1 G_{(\theta, w)}(\theta_1) + 1_{2(\theta, w, \theta_1)}(\theta_1, \theta_1)$$

Todas las funciones que aparecen en esta igualdad son holomorfas como funciones de (θ, w, θ_1) , así como la aplicación $(\theta, w, \theta_1) \rightarrow 1_{2(\theta, w, \theta_1)}$. Esta última puede verse teniendo en cuenta que cada uno de los sumandos lo es y que la convergencia es uniforme sobre los compactos pues

$$\|1/m! d_1^m G_{(\theta, w)}\| \leq K/(2\varepsilon)^m e^m$$

de donde:

$$\|1/m! d_1^m G_{(\theta, W)}(\cdot, \cdot, \theta_1, \dots, \theta_1)\| \leq K/(2\varepsilon)^m \|\theta_1\|^{m-2}$$

Tomando $\|\theta_1\| < \varepsilon$ se verifica la convergencia uniforme sobre todo compacto.

Podremos aplicar el cálculo operacional y tendremos:

$$G[g + r, f] = G[g, f] + d_1 G_{[g, f]}[r] + 1_{2_{[g, f, r]}}[r, r] = 0$$

luego

$$d_1 G_{[g, f]}[r] + 1_{2_{[g, f, r]}}[r, r] = 0$$

Teniendo en cuenta el teorema 4, si

$d_1 G_{[g, f]} + 1_{2_{[g, f, r]}}[r, \cdot] \in A \hat{\otimes} \mathcal{L}(F, F)$ es el elemento que resulta mediante el cálculo operacional a partir de la función:

$$(\theta, w, \theta_1) \rightarrow d_1 G_{(\theta, W)} + 1_{2_{(\theta, W, \theta_1)}}(\theta_1, \cdot)$$

se verifica que

$(d_1 G_{[g, f]} + 1_{2_{[g, f, r]}} + [\cdot, \cdot])[r] = 0$ y donde este elemento debe interpretarse como la imagen de

$(d_1 G_{[g, f]} + 1_{2_{[g, f, r]}}[r, \cdot]) \oplus r \in A \hat{\otimes} (\mathcal{L}(F, F) \oplus F)$ vía el cálculo operacional definido mediante la aplicación:

$$\mathcal{L}(F, F) \oplus F \rightarrow F, (\alpha, e) \rightarrow \alpha(e).$$

Ahora bien, tomando θ_1 de norma suficientemente pequeña se podrá hacer $\|1_{2_{(\theta, W, \theta_1)}}(\theta_1, \cdot)\|$ arbitrariamente pequeño para (θ, w) en un entorno adecuado de $X \times \{0\}$ en que $1_{2_{(\theta, W, \theta_1)}}$ permanezca acotada. De esta manera para (θ, w, θ_1) en un entorno adecuado de $X \times \{0\}$ existirá $T_{(\theta, W, \theta_1)} \in \mathcal{L}(F, F)$ con:

$$T_{(\theta, W, \theta_1)} \circ (d_1 G_{(\theta, W)} + 1_{2_{(\theta, W, \theta_1)}}(\theta_1, \cdot)) = I$$

siendo $T_{(\theta, W, \theta_1)}$ función holomorfa en (θ, w, θ_1) .

Tendremos entonces que:

$$T_{(\theta, W, \theta_1)} \circ (d_1 G_{(\theta, W)} + 1_{2_{(\theta, W, \theta_1)}}(\theta_1, \cdot))(\theta_1) = \theta_1$$

Aplicando reiteradamente el teorema 4 se sigue que $r = 0$ y vale la unicidad de la solución.

BIBLIOGRAFIA

- (1) CHIDAMI, M. *Calcul fonctionnel holomorphe en dimension infinie*, (Thèse de Doctorat de 3^e cycle, Université de Bordeaux 1977).
- (2) GAMELIN T.W. *Uniform algebras*. Prentice Hall. 1969.
- (3) HAYASHY, M. *Implicit Function Theorem for Banach Algebras*. London Math. Soc. (2) 13. 1976.
- (4) TAYLOR, J. *Twisted products of Banach algebras and third Čech cohomology* L.N. Springer 575.
- (5) WAELEBROECK, L. *Topological Vector Spaces and Algebras*. L.N. Springer 1971.
- (6) WAELEBROECK, L. *The holomorphic Functional Calculus and Infinite Dimensional holomorphy*. L.N. Springer 364.