APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DEDEKIND A UN CUERPO ORDENADO NO ARQUIMEDIANO

por

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

INTRODUCCIÓN

A partir del cuerpo de los números racionales, hay dos métodos históricos de introducción de los números reales : el método de DEDEKIND mediante cortaduras, y el de CANTOR mediante sucesiones de CAUCHY. Estos dos métodos se pueden aplicar a cualquier cuerpo ordenado arquimediano, y el resultado es el mismo, el cuerpo de los números reales salvo isomorfismos semejantes (es decir : isomorfismos entre los cuerpos que conservan el orden).

El presente trabajo trata de la aplicación del método de DEDEKIND a cuerpos ordenados no arquimedianos, y el resultado no es un cuerpo, tiene una estructura algebraica de *hemianillo*, según se define en el trabajo, y contiene un cuerpo máximo que es, salvo isomorfismos semejantes, el cuerpo completo sobre el cuerpo dado, es decir, el cuerpo obtenido mediante sucesiones de CAUCHY. Se precisa la condición necesaria y suficiente para que un conjunto acotado en un cuerpo ordenado completo tenga extremo superior.

1. CONJUNTOS ORDENADOS

Como preliminares damos aquí propiedades conocidas de los conjuntos ordenados (véase *Sierpinski* Cap. VII).

En un conjunto ordenado se pueden definir las cortaduras, siendo una cortadura una partición del conjunto en dos clases ($\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}'$) que cumple las tres condiciones :

1.ª Ni $\mathfrak{A}$ ni $\mathfrak{A}'$ son vacías

2.ª $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}' = E \quad \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \phi$ (E indica el conjunto dado).

3.ª $\forall a \in \mathfrak{A}$ es anterior a $\forall a' \in \mathfrak{A}'$

Dada una cortadura, pueden ocurrir los siguientes casos :

I.—Que $\mathfrak{A}$ tenga último elemento y $\mathfrak{A}'$ primero. En este caso se dice que la cortadura determina un salto.

II. Ni $\mathfrak{A}$ tiene último elemento ni $\mathfrak{A}'$ primero. En este caso se dice que la cortadura determina una laguna.

III. Que $\mathfrak{A}$ tiene último elemento y $\mathfrak{A}'$ no tiene primero, o $\mathfrak{A}$ no tiene último y $\mathfrak{A}'$ tiene primero. En este caso hay un elemento de separación.

Un conjunto ordenado se llama *denso* si ninguna cortadura en él determina un salto.

Un conjunto ordenado se llama *continuo* si toda cortadura en él tiene elemento de separación.

En un conjunto ordenado continuo se verifica la propiedad de que todo subconjunto acotado tiene extremo superior (Weierstrass) (un conjunto es acotado si todos sus elementos son anteriores a un cierto elemento del conjunto). En efecto : Formemos una cortadura de la siguiente manera : La clase $\mathfrak{A}$ sea la formada por los elementos del subconjunto y todos los anteriores a cualquiera de ellos, y la $\mathfrak{A}'$ por todos los posteriores a todos los elementos del subconjunto. Evidentemente es una cortadura; ahora bien, por ser el conjunto continuo, tiene ésta un elemento de separación α, y éste no es anterior a ningún elemento del subconjunto, pues todo elemento posterior a α pertenece a $\mathfrak{A}'$, y cualquier elemento anterior a α tiene elementos del subconjunto posteriores a él, pues existen elementos del conjunto comprendidos entre éste y α (ya que en caso contrario el conjunto no sería denso, y por tanto no continuo), y éstos pertenecen a la clase $\mathfrak{A}$, y por tanto son anteriores o coinciden con elementos del subconjunto, por tanto cualquier elemento anterior a α no es cota superior, de aquí se deduce que α es el extremo superior de este subconjunto. α puede pertenecer a $\mathfrak{A}$, y en este caso es elemento del subconjunto (pues no puede ser anterior a ninguno de ellos), o pertenecer a $\mathfrak{A}'$, y en este caso no pertenece al subconjunto ; es decir, en el primer caso el extremo es accesible y en el segundo inaccesible.

En cambio, en un conjunto ordenado denso no continuo, existen subconjuntos acotados que no tienen extremo superior, pues si formamos la cortadura correspondiente, así como acaba de ser explicado, si ésta determina una laguna, se ve inmediatamente que no hay extremo superior.

Sea, por otra parte, un conjunto ordenado denso D, existe un mínimo superconjunto C de D que es continuo y prolonga su ordenación. (Dedekind).

Como es sabido, C es el conjunto de todas las cortaduras de D identificando dos cortaduras si tienen el mismo elemento de separación y les hacemos corresponder este elemento. La ordenación en C y la demostración de que es continuo puede verse en Sierpinski (pág. 148 y sgs.).

Sea, por otra parte, Γ un superconjunto continuo de D (que prolongue su ordenación), y sea $(A; A')$ una cortadura en Γ tal que

$$\mathfrak{A} = A \cap D \neq \phi \qquad \mathfrak{A}' = A' \cap D \neq \phi$$

ésta tiene un elemento de separación $\gamma \epsilon \Gamma$ (por ser Γ continuo), $(\mathfrak{A} ; \mathfrak{A}')$ es una cortadura en D, que define, por tanto, un elemento $\alpha \epsilon C$. Recíprocamente, a cualquier cortadura en D corresponde por lo menos una cortadura en Γ, elijamos una de éstas (se aplica el Axioma de la Elección), tenemos así una aplicación φ de C en Γ que es un isomorfismo, pues si α, $\beta \epsilon C$ y $\alpha < \beta$ ha de ser $\varphi(a) < \varphi(\beta)$ pues cualquier elemento de D intermedio entre α y β (que siempre existe) será también, evidente, intermedio entre $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$. De donde resulta que Γ contiene un subconjunto semejante al C, por tanto C (salvo isomorfismos) es el superconjunto continuo mínimo.

2. Cuerpos ordenados.

Sabido es que un cuerpo K se llama ordenado si se pueden definir unos elementos llamados positivos (> 0) que verifican (véase Van der Waerden I Cap. 9).

1) $\forall a \epsilon K$ verifica una y sólo una de las relaciones

$$a = 0 \qquad a > 0 \qquad -a > 0$$

2) Si $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$, $ab > 0$

Diremos que $a > b$ si $a - b > 0$

De aquí resulta que los elementos de un cuerpo ordenado forman un conjunto ordenado. (Emplearemos la nomenclatura de menor o mayor en vez de anterior o posterior).

Un cuerpo ordenado es denso. En efecto: supongamos que hubiera una cortadura $(\mathfrak{A} ; \mathfrak{A}')$ que determinara un salto; sea a el último elemento de $\mathfrak{A}$ y a' el primero de $\mathfrak{A}'$, entre a y a' no puede haber ningún elemento, pero el elemento $\dfrac{a + a'}{2}$ (que es un elemento de K puesto que todo cuerpo ordenado es de características 0) es mayor que a y menor que a', pues (evidentemente es $a < a'$)

$$\frac{a' + a}{2} - a = \frac{a' - a}{2} > 0 \qquad a' - \frac{a' + a}{2} = \frac{a' - a}{2} > 0$$

Evidentemente en un cuerpo ordenado no hay primero ni último elemento.

Recordemos que un cuerpo se llama ordenado no arquimediano si $\exists\ a \in K$ tal que $a > n$ siendo n cualquier número entero (múltiplo del elemento unidad). Estos elementos se llaman *infinitamente grandes*. (Evidentemente $-\ a < n$, para $\forall n, \frac{1}{a} < \frac{1}{n}$ para $\forall n > 0$).

Tenemos:

Un cuerpo o un anillo ordenado no arquimediano no es continuo.

En efecto: Basta demostrar que existen conjuntos acotados que no tienen extremo superior.

Sea Z el conjunto de todos los enteros, que es un conjunto acotado (por ser la ordenación no arquimediana), veamos que cualquier cota superior tiene una cota superior menor.

Sea a una cota superior, y n cualquier entero positivo, $a - n$ es también cota superior, pues si no lo fuera, se verificaría para un cierto entero m; $a - n < m$ de donde $a < n + m$ lo que es absurdo pues a es cota superior de Z. *q. e. d.*

En un cuerpo ordenado se pueden definir las sucesiones de Cauchy (Van der Waerden I párr. 68), llamaremos *completo* un cuerpo ordenado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente (equivalente a una sucesión constante). Cualquier cuerpo ordenado se puede completar.

Conocido es que un cuerpo completo arquimediano es continuo e isomorfo-semejante al cuerpo de los números reales (Van der Waerden I párr. 68, Aufgabe 2).

Los elementos de K (K cuerpo ordenado no arquimediano), considerados como los de un conjunto ordenado denso, podemos sumergirlos en los de un conjunto ordenado continuo Φ por la introducción de cortaduras; en Φ todo conjunto acotado tiene extremo superior, lo que implica que Φ no puede ser un cuerpo ni un anillo, pues está en contradicción con lo que acabamos de ver.

DEFINICIÓN. *Un hemianillo conmutativo es un conjunto con dos operaciones binarias, llamadas suma y producto, tales que dados dos* *elementos arbitrarios de él (distintos o iguales) la suma y el producto de éstos con elementos de este conjunto, y que cumple las propiedades:*

I. *Asociativa de la suma.*

II. *Conmutativa de la suma.*

III. *Existencia de elemento neutro para la suma.*

IV. *Asociativa del producto.*

V. *Conmutativa del producto.*

VI. *Que el conjunto de elementos que tienen opuesto forman un anillo.*

Definamos en Φ las operaciones de suma y producto, de forma que prolonguen las de K.

Los elementos de Φ son las cortaduras en K. A $\forall\, a \in K$ corresponden dos cortaduras, una en la que a es el último elemento de la clase $\mathfrak{A}$ y otra en la que a es el primer elemento de la clase $\mathfrak{A}'$. Excluyamos estas últimas, así sólo consideraremos las cortaduras $(\mathfrak{A}\,;\,\mathfrak{A}')$ tales que $\mathfrak{A}'$ no tenga primer elemento.

Para que un subconjunto no vacío $\mathfrak{A}'$ de K sea la clase posterior de una cortadura (de las consideradas) es necesario y suficiente que:

1.º $\mathfrak{A}' \neq K$

2.º Si $\forall\, a \in \mathfrak{A}'$ todo $b > a$ le pertenece también.

3.º $\mathfrak{A}'$ no tiene primer elemento.

Llamaremos cortadura de 1.ª especie si tiene elemento de separación en K, y cortadura de 2.ª especie si no tiene elemento de separación.

A cada elemento de K le corresponde una cortadura de 1.ª especie, y recíprocamente. Llamaremos *cortadura nula* la que corresponde al O, y *cortadura unidad* la que corresponde al 1.

Cortadura positiva si $\exists\, a \in K,\ a > 0,\ a \notin \mathfrak{A}'$, negativa si $O \in \mathfrak{A}'$.

Dos cortaduras $(\mathfrak{A}\,;\,\mathfrak{A}')$ y $(\mathfrak{B};\,\mathfrak{B}')$ se llaman asociadas, si $\mathfrak{B}'$ es el conjunto de los opuestos de los elementos de $\mathfrak{A}$, excepto el opuesto del elemento de separación si es de 1.ª especie. (En general dos cortaduras asociadas no son opuestas, como veremos).

De aquí resulta inmediatamente que cada cortadura tiene una sola asociada, que la asociada de la asociada es la cortadura de origen, que la asociada de una cortadura positiva es una cortadura negativa y recíprocamente, que la cortadura nula es la única asociada a sí misma, que una cortadura y su asociada son ambas de 1.ª especie o ambas de 2.ª especie.

Definiremos la suma de dos cortaduras $(\mathfrak{A}\,;\ \mathfrak{A}') + (\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}')$ a la cortadura $(\mathfrak{C}\,;\ \mathfrak{C}')$ donde $\mathfrak{C}' = \{a' + b'\}$ para $\forall\, a' \in \mathfrak{A}'$, $\forall\, b' \in \mathfrak{B}'$ (cfr. Perron párr. 5).

$\mathfrak{C}'$ es la clase posterior de una cortadura, pues verifica:

I. $\mathfrak{C} \neq K$ pues dado un $a \in \mathfrak{A}$ y un $b \in \mathfrak{B} \Rightarrow a + b \notin \mathfrak{C}'$

II *Todo elemento mayor que uno de $\mathfrak{C}'$ pertenece a $\mathfrak{C}'$* Sea $c' = a' + b'$ para unos dados $a' \in A'$, $b' \in \mathfrak{B}'$ y sea $\forall\, c'' > c'$, $c'' = a' + b' + c'' - c'$, $b' + c'' - c' \in \mathfrak{B}'$ pues es mayor que b'

III $\mathfrak{C}'$ *no tiene primer elemento*, pues no lo tienen $\mathfrak{A}'$ ni $\mathfrak{B}'$.

La suma así definida cumple las propiedades asociativas y conmutativas (comprobación inmediata), la cortadura nula es elemento neutro en efecto: Sea $(\mathfrak{O} : \mathfrak{O}')$ la cortadura nula, $\mathfrak{O}'$ es por tanto el conjunto de todos los elementos positivos de K. Dada cualquier cortadura $(\mathfrak{A}\,;\ \mathfrak{A}')$

$$(\mathfrak{A}\,;\ \mathfrak{A}') + (\mathfrak{O}\,;\ \mathfrak{O}') = (\mathfrak{B};\ \mathfrak{B}')$$

$\forall\, b' \in \mathfrak{B}'$ es $b' = a' + o';\ o' \in \mathfrak{O}' \Rightarrow b' > a' \Rightarrow \mathfrak{B}' \supset \mathfrak{A}'$

$\forall\, a' \in \mathfrak{A}'$, $\exists a'' \in \mathfrak{A}'$ con $a'' < a' \Rightarrow a'' - a' > 0 \Rightarrow a'' - a' \in \mathfrak{O}'$

y $a' = a'' + (a' - a'') \Rightarrow \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{B}'$ o sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$ q. e. d.

Si $(\mathfrak{A}\,;\ \mathfrak{A}')$ y $(\mathfrak{B}\,;\ \mathfrak{B}')$ son de 1.ª especie, y h, k sus elementos de separación respectivamente, su suma es también de 1.ª especie y su elemento de separación es $h + k$.

En efecto: Sea $(\mathfrak{C}\,;\ \mathfrak{C}')$ la suma de estas dos cortaduras, basta probar que $\mathfrak{C}'$ está formado por todos los elementos de K mayores que $h + k$ y sólo por éstos. Comprobación inmediata: $\forall\, c' \in \mathfrak{C}'$ es $c' = a' + b'$, $a' > h$, $b' > k \Rightarrow c' > h + k$; $\forall\, c' > h + k \Rightarrow c' - (h + k) = \gamma > o$ y $c' = h + \dfrac{\gamma}{2} + k + \dfrac{\gamma}{2};\ h + \dfrac{\gamma}{2} \in A';\ k + \dfrac{\gamma}{2} \in \mathfrak{B}'$

Identificando cualquier cortadura de 1.ª especie con su elemento de separación, resulta que la reducción a K de la suma definida en Φ es la suma de K (principio de conservación de las leyes formales).

DEFINICIÓN. *Una cortadura $(\mathfrak{A}\,;\ \mathfrak{A}')$ en K es de tipo A si a* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K\ \exists\ a' \in \mathfrak{A}'$, $a \in \mathfrak{A}$ tales que $a' - a < \varepsilon$; *las restantes cortaduras son de tipo B.*

Una cortadura de 1.ª *especie es de tipo A*, pues si k es su elemento de separación, dado $\forall \varepsilon > o \exists$ un $\eta \in K$ tal que $o < \eta < \varepsilon$ y $k + \frac{\eta}{2} \in \mathfrak{A}'$

$$k - \frac{\eta}{2} \in \mathfrak{A} \quad k + \frac{\eta}{2} - \left(k - \frac{\eta}{2}\right) = \eta < \varepsilon \qquad \text{q. e. d.}$$

En cambio, existen en K cortaduras de tipo B, sea, por ejemplo, la cortadura ($\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}'$) donde $\mathfrak{A}'$ es el conjunto de todos los elementos de K infinitamente grandes (mayores que cualquier entero), la diferencia $a' - a$ para $\forall a' \in \mathfrak{A}'$ y $\forall a \in \mathfrak{A}$ es infinitamente grande, ya que si no lo fuera sería $a' - a < n$, n entero, es decir $a' < a + n$, pero $\exists\, m$ entero tal que $a \leq m$ (por no ser infinitamente grande), de donde $a' < m + n$ contradicción. Por tanto esta cortadura es de tipo B.

Otro ejemplo : A' todos los elementos positivos no infinitamente pequeños (un elemento positivo se llama infinitamente pequeño si es menor que los inversos de todos los números naturales), la cortadura ($\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}'$) es también de tipo B, pues $a' - a$ no puede ser infinitamente pequeño. (Pues si lo fuera resultaría a' infinitamente pequeño, contra la hipótesis).

Resulta inmediatamente que una cortadura y su asociada son ambas del mismo tipo.

La suma de dos cortaduras de tipo A es de tipo A, pues sea

$(\mathfrak{T}; \mathfrak{T}') = (\mathfrak{A}; \mathfrak{A}') + (\mathfrak{B}\,;\, \mathfrak{B}')$

para $\forall \varepsilon > o \exists\, a' \in \mathfrak{A}',\ a \in \mathfrak{A},\ b' \in \mathfrak{L}',\ b \in \mathfrak{L},\ a' - a < \varepsilon/2,\ b' - b < \varepsilon/2$

y $a' + b' - (a + b) < \varepsilon$ pero $a' + b' \in \mathfrak{T}'$, $a + b \in \mathfrak{T}$ q. e. d.

En una cortadura de tipo A, su asociada es su opuesta (es decir : la suma de una cortadura de tipo A y su asociada es la cortadura nula).

En efecto : La clase $\mathfrak{C}'$ de una cortadura suma de una y de su asociada es el conjunto $\{a' - a\}$ con $\forall a' \in \mathfrak{A}'$ y $\forall a \in \mathfrak{A}$ excepto el elemento de separación (si existe), para probar que es la cortadura nula, hay que probar que $\mathfrak{C}'$ es el conjunto de todos los elementos positivos de K, evidentemente $\mathfrak{C}'$ consta solamente de elementos positivos, sea, por otra parte, $\forall \varepsilon > o$ de K, $\exists\, a' \in \mathfrak{A}'$ y $a \in \mathfrak{A}$ tales que

$a' - a < \varepsilon \Longrightarrow \varepsilon \in \mathfrak{C}'$ q. e. d.

En cambio, *la suma de una cortadura de tipo B y su asociada es* *una cortadura positiva,* pues $\exists\, \varepsilon > o$ de K tal que $a' - a < \varepsilon$ para $\forall\, a' \epsilon\, a'$ y $\forall a \epsilon \mathfrak{A}$ por tanto $\varepsilon \notin \mathfrak{C}'$ q. e. d.

Todavía más : *Una cortadura de tipo B no tiene opuesta.* Sea, en efecto, $(\mathfrak{A}\,;\, \mathfrak{A}')$ una cortadura de tipo B, y supongamos que tuviera opuesta $(\mathfrak{C}\,;\, \mathfrak{C}')$, entonces $\mathfrak{D}' = \{a' + c'\}$ sería el conjunto de todos los elementos positivos de K, por tanto $\forall\, a' \epsilon\, \mathfrak{A}'$, $\forall\, c' \epsilon\, \mathfrak{C}' \Longrightarrow a' + c' > o \Longrightarrow c' > - a' \Longrightarrow (\mathfrak{C}; \mathfrak{C}') \geq (\mathfrak{B}; \mathfrak{B}')$

siendo $(\mathfrak{B}\,;\, \mathfrak{B}')$ la asociada de $(\mathfrak{A};\, \mathfrak{A}')$, de donde resulta que dado

$c' \epsilon\, \mathfrak{C}'$ $\exists\, a \epsilon\, \mathfrak{A}$ tal que $a + c' \geq o \Longrightarrow a' + c' \geq a' - a > \varepsilon$

para un cierto $\varepsilon > o$ de K (por ser $(\mathfrak{A}\,;\, \mathfrak{A}')$ de tipo B). q. e. d.

La ley de monotonía se verifica en el siguiente sentido :
si $\alpha < \beta$ para $\forall \gamma \epsilon \Phi \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ pues $\alpha = (\mathfrak{A}\,;\, \mathfrak{A}')$, $\beta = (\mathfrak{B}\,;\, \mathfrak{B}')$, $\mathfrak{B}' \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}'$, $\gamma = (\mathfrak{C};\, \mathfrak{C}')$ cualquier elemento $b' + c'$ de la clase posterior de $\beta + \gamma$ es también de la clase posterior de $\alpha + \gamma$, pues $b' \epsilon\, \mathfrak{A}'$. Pero si $(\mathfrak{A}\,;\, \mathfrak{A}')$ es de tipo B, sea $\varepsilon > o$ de K tal que $a' - a > \varepsilon$ para $\forall a' \epsilon \mathfrak{A}'$ y $\forall a \epsilon \mathfrak{A}$. Sea $(\mathfrak{N}\,;\, \mathfrak{N}')$ la cortadura que tiene como elemento de separación η con $o < \eta < \varepsilon$, $\alpha + \eta$ viene definido por la cortadura cuya clase posterior es $\mathfrak{C}' = \{a' + e'\}$, $\forall\, a' \epsilon\, \mathfrak{A}'\, \forall\, e' \epsilon\, \mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{C}' \subset$ A' pues es todo $e' > o$. Pero, por otra parte, $\forall\, a' \epsilon\, \mathfrak{A}' \Longrightarrow a' - \varepsilon\, \epsilon\, \mathfrak{A}'$ pues en caso contrario habría un elemento de $\mathfrak{A}'$ y uno de $\mathfrak{A}$ que diferirían en ε, y como $\varepsilon\, \epsilon\, \mathfrak{N}'$ resulta

$$(a' - \varepsilon) + \varepsilon\, \epsilon\, \mathfrak{C}'$$

es decir : $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{C}'$ o sea $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}'$

En resumen, tenemos

$$\varepsilon > o, \quad \alpha + \varepsilon = \alpha$$

es decir : en la Ley de monotonía no hay que descartar el signo $=$.

De ahí se deduce que en general no es válida la ley de simplificación. (Si $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ y α es de tipo A, entonces es válida, pero si es de tipo B no).

Si consideramos las cortaduras de tipo A, del estudio hecho se deduce que forman un módulo.

Procedamos ahora a definir el producto en Φ.

Dadas dos cortaduras (en K) positivas $\alpha = (\mathfrak{A} : \mathfrak{A}')$, $\beta = (\mathfrak{B}\,;\, \mathfrak{B}')$ el conjunto $\mathfrak{C}' = \{a'\, b'\}$ para $\forall\, a' \epsilon\, \mathfrak{A}'$ y $\forall\, b' \epsilon\, \mathfrak{B}'$ es la clase posterior de una cortadura positiva, pues cumple las tres condiciones para que lo sea, en efecto :

I. $\mathfrak{C}' \neq K$ pues no contiene ningún elemento negativo, y es una cortadura positiva, pues $\exists\, a > o,\ a \in \mathfrak{A}$ y $b > o,\ b \in \mathfrak{B}$ (por ser ambas positivas), y $a\, b \notin \mathfrak{C}$

II. Sea $c' = a'\, b'$ y $c'' > c' \Longrightarrow c''/c' > 1,\ c'' = a'\, b'.\, c''/c'$ y $b'\, c''/c' \in \mathfrak{B}'$ es decir, cualquier elemento mayor que uno de $\mathfrak{C}'$ pertenece a $\mathfrak{C}'$

III. $\mathfrak{C}'$ no tiene primer elemento, pues no lo tienen $\mathfrak{A}'$ ni $\mathfrak{B}'$

Por tanto el producto $\alpha\beta$ lo definiremos como la cortadura cuya clase posterior es $\mathfrak{C}'$.

Si un factor es el O (la cortadura nula) el producto es O.

Si $\alpha > o,\ \beta < o$ definiremos

$$\alpha\,\beta = (\alpha\,\beta^*)^*$$

siendo α^* la cortadura asociada a α

Si $\alpha < o,\ \beta > o$

$$\alpha\,\beta = (\alpha^*\,\beta)^*$$

Y si $\alpha < o,\ \beta < o$

$$\alpha\,\beta = \alpha^*\,\beta^*$$

(Recordemos que la asociada de una cortadura positiva es negativa e inversamente).

De la definición de producto resulta que el producto de dos cortaduras positivas o de dos negativas es una cortadura positiva, y el de una positiva por una negativa, o en orden inverso, es negativa.

Resulta inmediatamente que el producto es conmutativo.

La propiedad asociativa $\alpha.\,\beta\gamma = \alpha\,\beta.\,\gamma$ también se verifica, pues si $\alpha > o,\ \beta > o,\ \gamma > o$ es inmediato a partir de la definición; si una de las tres (por lo menos) es nula, también se verifica, pues el resultado es la cortadura nula en ambos casos.

En todos los demás casos se comprueba fácilmente, p. e. si

$\alpha > o,\ \beta > o,\ \gamma < o$

$\alpha.\,\beta\gamma = \alpha.\,(\beta\gamma^*)^* = (\alpha.\,\beta\,\gamma^*)^*$

$\alpha\,\beta.\,\gamma = (\alpha\,\beta.\,\gamma^*)^*$

y como $\gamma^* > o \Longrightarrow \alpha\,.\,\beta\gamma^* = \alpha\,\beta.\,\gamma^*$ de donde resulta.

Si $\alpha > o,\ \beta > o,\ \gamma > o$ se verifica la propiedad distributiva

$$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$$

que resulta inmediatamente de la definición. Si una de las cortaduras es nula, también se verifica.

La cortadura unidad es elemento neutro para el producto. En efecto :

Si $\alpha > o$, $\alpha = (\mathfrak{A};\ \mathfrak{A}')$ y $1 = (\mathfrak{U};\ \mathfrak{U}')$ es el producto $a'u' > a'$, $\forall a' \in \mathfrak{A}'$, $\forall u' \in \mathfrak{U}'$ pues $\forall u' > 1$

Sea $\forall a' \in \mathfrak{A}'$, $\exists a'' < a'$ y $a'' \in \mathfrak{A}'$, $a' = a''. \frac{a'}{a''}$, $\frac{a'}{a''} > 1 \Longrightarrow \frac{a'}{a''} \in \mathfrak{U}'$

Si $\alpha = 0$ es inmediato.

Si $\alpha < 0$ resulta de $\alpha . 1 = (\alpha^*. 1)^* = (\alpha^*)^* = \alpha$ q. e. d.

Fácilmente se demuestra también que el prodcuto de dos cortaduras de tipo A es una cortadura de tipo A ; y que el producto de dos cortaduras de 1.ª especie es una cortadura de 1.ª especie y su elemento de separación es el producto de los elementos de separación de cada una de ellas.

De la propiedad de que la asociada de una cortadura de tipo A es su opuesta, se deduce inmediatamente que la propiedad distributiva es válida siempre para cortaduras de tipo A.

De donde resulta :

Φ es un hemianillo que contiene al cuerpo K.

Vamos a demostrar ahora una propiedad fundamental.

En una cortadura positiva de tipo A, $(\mathfrak{A};\ \mathfrak{A}')$ a $\forall \varepsilon > 0$ de K $\exists a' \in \mathfrak{A}'$ y $a \in \mathfrak{A}$ $(a > 0)$ tal que $\frac{a'}{a} < 1 + \varepsilon$, y recíprocamente, si en una cortadura positiva se verifica dicha propiedad, es de tipo A.

En efecto : Sea un $c > 0$, $c \in \mathfrak{A}$ y distinto del elemento de separación (si existe). Tenemos que $\exists a' \epsilon' \mathfrak{A}'$, $a \in \mathfrak{A}$ y $a > c$ tal que $a' - a <$ $< c\,\varepsilon$ y por tanto $\frac{a'}{a} - 1 = \frac{a' - a}{a} < \frac{a' - a}{c} < \varepsilon$

Recíprocamente, sea $c' \in \mathfrak{A}'$ y dado un $\varepsilon > 0$ de K, se verifica que $\exists a' < c'$ y a, $a' \in \mathfrak{A}'$, $a \in \mathfrak{A}$ tales que

$$\frac{a'}{a} - 1 < {}^{\varepsilon}/_{c'} \Longrightarrow \frac{a' - a}{a} < {}^{\varepsilon}/_{c'} \Longrightarrow a' - a < \frac{a}{c'}\,\varepsilon < \varepsilon \quad \text{q. e. d.}$$

Sea $\alpha = (\mathfrak{A};\ \mathfrak{A}')$ una cortadura positiva, el conjunto de los inversos de los elementos positivos de $\mathfrak{A}$, excepción del inverso del elemento de separación, si existe, es la clase superior de una cortadura, también positiva, que llamaremos la *relativa* a α e indicaremos α', evidentemente $(\alpha')' = \alpha$

Vamos a demostrar:

Si $\alpha > 0$ *es de tipo A, su relativa es su inversa, si* $\alpha > 0$ *es de tipo B su relativa no es su inversa, y carece de inversa.*

En efecto: La clase posterior del producto de una cortadura positiva $\alpha = (\mathfrak{A}; \mathfrak{A}')$ por su relativa es el conjunto $\left\{\frac{a'}{a}\right\}$ de $\forall a' \in A'$, $\forall a \in \mathfrak{A}$, $a > 0$ distinto del elemento de separación (si existe), si α es de tipo A, hay que probar que este conjunto es el de todos los elementos de K mayores que 1, lo que resulta de la existencia de un a' y un a tales que $\frac{a'}{a} < 1 + \varepsilon$ para $\forall \varepsilon > 0$ de K.

Si α es de tipo B, $\exists\, \varepsilon > 0$ de K tal que $\forall a' \in A'$ y $\forall a \in \mathfrak{A}$ es $\frac{a'}{a} > 1 + \varepsilon$, es decir, el producto $\alpha\alpha' \neq 1$

Si $\alpha > 0$ es de tipo B, y existiera $\beta = (\mathfrak{B}; \mathfrak{B}')$ tal que $\alpha\beta = 1$ (notemos que debe ser $\beta > 0$), sería $\{a'\, b'\}$ para $\forall a' \in \mathfrak{A}'$, $\forall b' \in \mathfrak{B}'$ el conjunto de todos los elementos de K mayores que 1

$$a'\, b' > 1 \Rightarrow b' > \frac{1}{a'} \Rightarrow \beta \geq \alpha'$$

y dado un $b' \in \mathfrak{B}'$, $\exists\, a \in \mathfrak{A}$ $(a > 0)$ tal que

$$a\, b' \geq 1 \Rightarrow a'\, b' \geq \frac{a'}{a} > 1 + \varepsilon$$

para un cierto $\varepsilon > 0$ de K, por ser α de tipo B, es decir $\{a'\, b'\}$ no puede ser el conjunto de todos los elementos de K mayores que 1.

q. e. d.

La ley de monotonía, si $\alpha < \beta$ y $\gamma > 0$ es $\alpha\,\gamma \leq \beta\,\gamma$ se demuestra fácilmente.

Para una cortadura α negativa, llamamos su relativa a $(\alpha^{*\prime})^{*}$ que es su inversa sólo si α es de tipo A.

Del estudio hecho resulta:

El conjunto de las cortaduras de tipo A forma un cuerpo ordenado Σ, *tal que* $K \subset \Sigma \subsetneq \Phi$ *y es el máximo cuerpo contenido en* Φ.

La segunda parte resulta de que todo elemento $\alpha \in \Phi$ y $\alpha \notin \Sigma$ no tiene opuesto (pues es cortadura de tipo B).

Veamos ahora:

Σ *es isomorfo-semejante al cuerpo completo construido sobre* K.

En efecto: Sea Ω el cuerpo completo sobre K, sabido es que entre dos elementos distintos de Ω hay elementos de K.

(Como que en Van der Waerden, párr. 68 no está demostrado explícitamente, vamos a demostrarlo aquí. Sea $\alpha < \beta$ dos elementos de $\Omega, \{a_p\}$ una sucesión de Cauchy en K que converge a α y $\{b_p\}$ una sucesión de Cauchy (en K) que converge a β, la sucesión $\{b_p - a_p\} \to \to \beta - \alpha > 0$ es decir: $\exists\, \eta > 0$, $\eta \in K$, n_1 número natural, tal que para $\forall p > n_1 \Rightarrow b_p - a_p > \eta$ por otra parte $\exists\, n_2$ natural tal que para $\forall p > n_2$, $\forall q > n_2$ es $|a_p - a_q| < \frac{\eta}{2}$, sea $n = \text{Máx}\ (n_1, n_2)$ para $\forall p > n$ y un $q > n$ fijo, es:

$$\eta < b_p - a_p = b_p - a_q + a_q - a_p < b_p - a_p + \frac{\eta}{2} \Rightarrow b_p > a_q + \frac{\eta}{2} \Rightarrow$$

$$\beta \geq a_q + \frac{\eta}{2} \in K$$

$$a_p - a_q < \frac{\eta}{2} \Rightarrow a_p < a_q + \frac{\eta}{2} \Rightarrow \alpha \leq a_q + \frac{\eta}{2}$$

o sea $a_q + \frac{\eta}{2}$ está entre α y β. q. e. d.)

Sea, pues, α_1 cualquier elemento de Ω, consideremos la siguiente cortadura en K $(\mathfrak{A} : \mathfrak{A}')$, $\mathfrak{A}$ son todos los elementos de K menores o iguales que α_1 y $\mathfrak{A}'$ todos los de K mayores que α_1, esta cortadura es de tipo A, pues dado $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ entre α_1 y $\alpha_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ existen elementos de K que son de $\mathfrak{A}'$, sea a' uno de ellos, y entre $\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ y α_1 existen elementos de K que son de $\mathfrak{A}$ sea a uno de ellos; tenemos

$$a' - a < \alpha_1 + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

con lo que queda demostrado que es de tipo A. Esta cortadura define, por tanto, un elemento $\alpha \in \Sigma$, y la correspondencia $\alpha_1 \to \alpha$ se ve fácilmente que es un isomorfismo que conserva el orden. Tenemos por tanto que Ω es isomorfo-semejante a un subcuerpo de Σ. Sea, por otra parte, $\forall \alpha \in \Sigma$, α viene definido por una cortadura de tipo A en K, $\alpha = (\mathfrak{A}; \mathfrak{A}')$, sea

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots\ldots$$

una sucesión monótona decreciente de K que tiende a O. Por ser α de tipo A, $\exists\, a'_1 \in \mathfrak{A}'$ y $a_1 \in \mathfrak{A}$ tales que $a'_1 - a_1 < \varepsilon_1$, $\exists\, a'_2 \leq a'_1$ $a'_2 \in \mathfrak{A}'$ $a_2 \geq a_1$, $a_2 \in \mathfrak{A}$ tales que $a'_2 - a_2 < \varepsilon_2$ y así sucesivamente ; tenemos pues :

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_p \leq \ldots.$$
$$a'_1 \geq a'_2 \geq a'_3 \geq \ldots\ldots \geq a'_p \geq \ldots.$$

cada una de las sucesiones es de Cauchy, pues a $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n$ tal que para $p > n$, $q > n$, $\varepsilon_p < \varepsilon_q < \varepsilon$ y si $p \geq q \Rightarrow a_p - a_q < a'_p - - a_q \leq a_q' - a_q < \varepsilon_q < \varepsilon$ la segunda es congruente con la primera respecto al ideal de sucesiones nulas, por tanto cualquiera de estas dos sucesiones converge a un $\alpha_1 \in \Omega$, pero

$$\alpha - a_p \leq a'_p - a_p < \varepsilon \Rightarrow \lim a_p = \alpha$$

es decir : Σ isomorfo-semejante a un subcuerpo de Ω, comparando con la anterior,

$$\Sigma \cong \Omega$$

De aquí resulta :

La condición necesaria y suficiente para que un conjunto acotado en un cuerpo ordenado completo Ω tenga extremo superior es que dado $\forall \varepsilon < 0$, $\varepsilon \in \Omega$ exista una cota superior M y un elemento del conjunto a tales que $M - a < \varepsilon$.

En efecto : Formemos la cortadura $(\mathfrak{A}\,;\,\mathfrak{A}')$ en la que la clase $\mathfrak{A}'$ está formada por todas las cotas superiores, si la condición se cumple es de tipo A, y si no de tipo B. en el primer caso tiene elemento de separación en Ω, que es el extremo superior, y en el segundo caso el elemento de separación no pertenece a Ω. q. e. d.

Finalmente, queda una cuestión pendiente : Dado un cuerpo ordenado no arquimediano K, hemos construido el conjunto continuo Φ, y hemos definido en Φ las operaciones de suma y producto de forma que forma hemianillo ordenado que prolonga la ordenación de K, y el cuerpo máximo contenido en él es Ω el cuerpo completo sobre K, la cuestión es la siguiente: ¿ Sería posible definir las operaciones de suma y producto en Φ de otra manera de forma que siendo hemianillo contuviera un cuerpo más amplio que Ω, u otro cuerpo no contenido y que no contuviera a Ω, y prolongara la ordenación de K ?

La respuesta es negativa, pues en las cortaduras de tipo A no podemos definir las operaciones de otra manera, pues si $(\mathfrak{A}\,;\,\mathfrak{A}')$ y

$(\mathfrak{B}\,;\ \mathfrak{B}')$ son de tipo A, todo elemento que no es expresable en la forma $a' + b'$, $a' \in \mathfrak{A}'$, $b' \in \mathfrak{B}'$ es expresable en la forma $a + b$ $a \in \mathfrak{A}$ $b \in \mathfrak{B}$ que se deduce fácilmente del hecho que la asociada es la opuesta y $\forall\, a' + b'$ debe pertenecer a la clase posterior y $\forall\, a + b$ a la anterior, Análogamente para el producto ; por tanto en las cortaduras de tipo A no es posible definir las operaciones de otra forma, es decir : Ω pertenecerá al hemianillo.

Si en las cortaduras de tipo B, definiendo las operaciones de otra forma, resultara que el hemianillo contuviera un cuerpo o un anillo $\mathfrak{Y}$ más amplio que Ω, existiría alguna cortadura de tipo B que tendría opuesta, y por tanto existiría en $\mathfrak{Y}$ un conjunto acotado $\mathfrak{M}$ teniendo extremo superior (en $\mathfrak{Y}$) y un $\varepsilon > 0$ de K tal que la diferencia entre cualquier cota superior y cualquier elemento del conjunto $\mathfrak{M}$ sería mayor que ε, y esto es absurdo, pues si σ fuera el extremo superior, $\sigma - \varepsilon < \sigma$ ya no sería cota superior, por tanto existiría $a \in \mathfrak{M}$ tal que $a > \sigma - \varepsilon$, $\sigma - a < \varepsilon$ lo que es absurdo.

q. e. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. PERRON.—*Irrationalzahlen*. Göschens Lehrbücherei,—Berlín u. Leipzig (1921).

[2] W. SIERPINSKI.—*Leçons sur les nombres transfinis*.—Collection de monographies sur la Théorie des Fonctions.—Gauthier-Villars. París (1928).

[3] B. L. VAN DER WAERDEN.—*Algebra*, I.—4. Auflage, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1955)