APROXIMACIONES SUCESIVAS DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.ER ORDEN

POR

JOAQUÍN M.A CASCANTE

ÍNDICE

Capítulo III

Teorema de existencia y unicidad para la ecuación lineal de tipo hiperbólico :

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) . u_{122} + \sum_{i, j = 1, 2} a_{ij} \cdot u_{ij} + \sum_{k = 1, 2} b_k \cdot u_k + c \cdot u = g(x_1, x_2)$$

Capítulo IV

Teorema de existencia y unicidad para la ecuación cuasi-lineal de tipo hiperbólico :

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) . u_{122} = f(x_1, x_2, u, u_k\, u_{ij})$$

NOTA COMPLEMENTARIA AL CAPÍTULO IV

PRÓLOGO

En la Asignatura de Doctorado «Ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico», nos fue propuesto por el Prof. Dr. AUGÉ la clasificación y reducción a formas canónicas de las ecuaciones cuasi-lineales en derivadas parciales de 3.er orden con dos variables independientes. Resuelto este problema, se nos sugirió la posibilidad de obtener un teorema de existencia para las ecuaciones lineales de 3.er orden con dos variables independientes de tipo hiperbólico, por el método de aproximaciones sucesivas en el campo real, que fuese, por decirlo así, una prolongación de los resultados obtenidos por PICARD en las ecuaciones en derivadas parciales de 2.º orden.

Concretando, el problema que nos hemos planteado y resuelto puede resumirse en los Apartados siguientes:

a) Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden con dos variables independientes y separación de los casos hiperbólicos.

b) En los casos hiperbólicos, construcción y cálculo de la solución al problema de CAUCHY, por el método de aproximaciones sucesivas en el campo real.

c) Teorema de unicidad.

d) Generalización a ecuaciones no lineales.

De acuerdo con dichas ideas, hemos creído conveniente subdividir nuestro trabajo en cuatro Capítulos para la mejor metodización y exposición del mismo.

En el Capítulo I, hemos clasificado las ecuaciones en derivadas parciales cuasi-lineales de 3.er orden con dos variables independientes, hallando los cambios de variables que permiten reducirlas a las formas canónicas más sencillas separando los casos hiperbólicos de los demás.

Asimismo se consideran los casos particularmente interesantes de ser constantes los coeficientes del operador $L[u]$ primer miembro de la ecuación. Y en el caso de coeficientes, variables se obtienen las condiciones necesarias y suficientes, para que la ecuación supuesta de tipo hiperbólica, admita un cambio que la reduzca a la misma forma canónica que, en el caso de ser constantes los coeficientes de $L[u]$, cuestión que se ha resuelto cómodamente mediante la teoría de los tritejidos hexagonales, quedando reducido el problema a determinar las condiciones necesarias y suficientes de hexagonalidad del tejido T_3, constituido por las familias de curvas características de la ecuación objeto de estudio.

En el Capítulo II, planteamos y resolvemos en el campo real, el problema de CAUCHY para toda ecuación hiperbólica de la forma: $u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2)$ con las condiciones iniciales: $u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)$; $u(x_1^0, x_2) \equiv \Psi(x_2)$; $u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$ determinando los dominios de dependencia de cada punto y prolongación del arco de curva sobre el que son dadas las condiciones iniciales, obteniendo fórmulas resolutivas, demostrativas de que el problema de CAUCHY considerado es adecuado a la ecuación dada. En dicho Capítulo, introducimos el operador lineal J mediante el cual se simplifican notablemente los cálculos efectuados para la resolución del problema propuesto, operador que también utilizamos en los capítulos que siguen.

En el Capítulo III demostramos el teorema de existencia y unicidad para toda ecuación lineal de tipo hiperbólico, reducida a su forma canónica:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u_k + c \cdot u = g(x_1, x_2)$$

con (a_{ij}, b_k, c, g funciones continuas y derivables) siendo las condiciones iniciales impuestas a la solución las mismas que las de la ecuación anterior, por el método de las aproximaciones sucesivas de PICARD, viniendo expresada la solución al problema de CAUCHY considerado por la suma de la serie de dichas aproximaciones, cuya convergencia uniforme en todo el dominio de prolongación, demostramos previamente mediante los correspondientes teoremas de acotación de tales aproximaciones. Éstas, se determinan por recurrencia como soluciones de ecuaciones en derivadas parciales del mismo tipo que la estudiada en el anterior Capítulo, así como también con las mismas condiciones iniciales, y por tal razón hemos antepuesto su estudio, como preliminar del planteo y resolución del problema de CAUCHY para la ecuación lineal hiperbólica en su forma más general. Asimismo determinamos los dominios de dependencia y prolongación correspondientes.

En los cálculos de las aproximaciones nos valemos del operador J definido en el Capítulo anterior.

Finalmente, en el IV y último Capítulo, planteamos y resolvemos localmente el problema de CAUCHY para las ecuaciones de tipo hiperbólico más general, de la forma :

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = f(x_l, u, u_k, u_{ij}); \ (l, k, i, j = 1, 2)$$

es decir, para toda ecuación cuasi-lineal de 3.er orden de tipo hiperbólico, con dos variables independientes, previamente reducida a su forma canónica, con el mismo sistema de condiciones iniciales que el de las ecuaciones consideradas en los anteriores Capítulos, supuestas verificadas ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad respecto a sus argumentos de las funciones ϱ y f.

Utilizamos asimismo el método de las aproximaciones sucesivas, en el campo real, y los teoremas de acotación de las mismas, así como demostración de la convergencia uniforme de las correspondientes sucesiones, son análogos a los utilizados en el Capítulo anterior, razón por la que abreviamos en lo posible los largos cálculos a que dan lugar, dejando para la Nota Complementaria que sigue al Capítulo, las demostraciones más laboriosas.

Se determinan al igual que en los anteriores capítulos, los dominios de dependencia y prolongación, y se demuestra que el problema de CAUCHY considerado es apropiado a la ecuación propuesta.

El método que hemos seguido para la construcción de las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden con dos variables, de tipo hiperbólico, no se aparta, pues, esencialmente, como ya hemos indicado más arriba, del empleado por PICARD y otros en la demostración de los teoremas de existencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden cualquiera, y las de derivadas parciales de 2.º orden; y la creencia por parte nuestra, de que el mismo no había agotado todas sus posibilidades, así como de que es todavía susceptible de ser aplicado al cálculo de soluciones en el campo real de ecuaciones de más de dos variables independientes, y de orden superior al tercero, es la principal razón que nos ha impulsado a redactar el presente trabajo.

Es deber, por parte nuestra, expresar nuestro agradecimiento al profesor Dr. AUGÉ, quien no ha dejado de alentarnos en todo momento y a cuyas atinadas observaciones y acertada orientación se debe en gran parte la culminación de este modesto trabajo.

CAPITULO I

CLASIFICACIÓN Y REDUCCIÓN A FORMAS CANÓNICAS DE LAS ECUACIONES CUASI-LINEALES DE 3.ER ORDEN

1. CAMBIOS DE VARIABLES. Consideremos la ecuación:

$$a \cdot u_{xxx} + 3\,b \cdot u_{xxy} + 3\,c \cdot u_{xyy} + d \cdot u_{yyy} + \\ + f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}) = 0\,; \tag{1}$$

cuasi-lineal, es decir, lineal en las derivadas terceras con los coeficientes a, b, c, d, funciones de x e y solamente.

Dicha ecuación la podremos representar abreviadamente por:

$$L\,[u] + f(x,\ y,\ u,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0 \tag{2}$$

Vamos a dar una clasificación de las ecuaciones fundadas en los diferentes tipos canónicos a que puede llegarse por cambio de variables.

Tratemos ahora de efectuar un cambio de variables que nos reduzca $L\,[u]$ a la forma más sencilla posible [1]. Si son $\varphi(x,\ y)$ y $\Psi(x,\ y)$ dos funciones por determinar, la sustitución

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,\ y) \\ \eta &= \Psi(x,\ y) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

en donde φ y Ψ son continuas y derivables con derivadas primeras asimismo continuas en el entorno de un punto x_0, y_0 en el cual es:

---

[1] El proceso es semejante al empleado en las ecuaciones de 2.º orden. Véase COURANT-HILBERT [1], pág. 138.

$$\left[\frac{\partial(\varphi, \Psi)}{\partial(x, y)}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \neq 0$$

transforma la ecuación (1) en otra del mismo tipo, con las variables independientes ξ, η

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot u_{\xi\xi\xi} + 3 \cdot \beta \cdot u_{\xi\xi\eta} + 3\gamma\, u_{\xi\eta\eta} + \delta \cdot u_{\eta\eta\eta} + \\ &+ F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0 \end{aligned} \qquad [4]$$

De (3) deducimos:

$$u_x = u_\xi \cdot \varphi_x + u_\eta \cdot \Psi_x$$

$$u_y = u_\xi \cdot \varphi_y + u_\eta \cdot \Psi_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x \cdot \Psi_x + u_{\eta\eta} \cdot \Psi_x^2 + u_\xi \cdot \varphi_{xx} + u_\eta \cdot \Psi_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x \cdot \varphi_y + u_{\xi\eta} \cdot (\varphi_x \cdot \Psi_y + \Psi_x \cdot \varphi_y) + u_{\eta\eta} \cdot \Psi_x \cdot \Psi_y + u_\xi \cdot \varphi_{xy} + u_\eta \cdot \Psi_{xy} \quad (5)$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \varphi_y \cdot \Psi_y + u_{\eta\eta} \cdot \Psi_y^2 + u_\xi \cdot \varphi_{yy} + u_\eta \,.\, \Psi_{yy}$$

$$u_{xxx} = u_{\xi\xi\xi} \cdot \varphi_x^3 + 3u_{\xi\xi\eta} \cdot \varphi_x^2 \cdot \Psi_x + 3 \cdot u_{\xi\eta\eta} \cdot \varphi_x \cdot \Psi_x^2 + u_{\eta\eta\eta} \cdot \Psi_x^3 + \ldots$$

$$\begin{aligned} u_{xxy} = {} & u_{\xi\xi\xi}\, \varphi_x^2 \cdot \varphi_y + u_{\xi\xi\eta}[\varphi_x^2 \cdot \Psi_y + 2\varphi_x\varphi_y\Psi_x] + u_{\xi\eta\eta}[\varphi_y \cdot \Psi_x^2 + 2\varphi_x\Psi_x\Psi_y] + \\ & + u_{\eta\eta\eta}\Psi_x^2 \cdot \Psi_y + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xyy} = {} & u_{\xi\xi\xi} \cdot \varphi_y^2 \cdot \varphi_x + u_{\xi\xi\eta} \cdot [\varphi_y^2 \cdot \Psi_x + 2 \cdot \varphi_x \cdot \varphi_y\Psi_y] + u_{\xi\eta\eta}[\varphi_x \cdot \Psi_y^2 + 2\varphi_y\Psi_x\Psi_y] + \\ & + u_{\eta\eta\eta}\Psi_y^2 \cdot \Psi_x + \ldots \end{aligned}$$

$$u_{yyy} = u_{\xi\xi\xi} \cdot \varphi_y^3 + 3 \cdot u_{\xi\xi\eta} \cdot \varphi_y^2 \cdot \Psi_y + 3 \cdot u_{\xi\eta\eta}\, \varphi_y \cdot \Psi_y^2 + u_{\eta\eta\eta}\Psi_y^3 + \ldots$$

en donde los términos no escritos, solamente contienen las derivadas parciales de primero y de segundo orden u_ξ, u_η, $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}$, $u_{\eta\eta}$, pero no las de tercer orden.

Por lo que vemos, las derivadas terceras antiguas son funciones lineales de las derivadas terceras nuevas. El operador $L[u]$ se transformará, pues, en el análogo $\Lambda[u]$. Substituyendo en (1) u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy} u_{yyy} por sus expresiones dadas en (5) e igualando los coeficientes de $u_{\xi\xi\xi}$, $u_{\xi\xi\eta}$, $u_{\xi\eta\eta}$, $u_{\eta\eta\eta}$ en (1) y (4) obtendremos para α, β, γ, δ, las expresiones:

$$
(6)\left\{\begin{aligned}
\alpha(\xi,\ \eta) &= a\cdot\varphi_x^3 + 3b\varphi_x^2\cdot\varphi_y + 3\cdot c\cdot\varphi_y^2\cdot\varphi_x + d\varphi_y^3 \\
\beta(\xi,\ \eta) &= a\cdot\varphi_x^2\cdot\Psi_x + b[\varphi_x^2\cdot\Psi_y + 2\cdot\varphi_x\cdot\varphi_y\cdot\Psi_x] + c\cdot[\varphi_y^2\cdot\Psi_x + \\
&\qquad + 2\,\varphi_x\,\varphi_y\cdot\Psi_y] + d\cdot\varphi_y^2\cdot\Psi_y \\
\gamma(\xi,\ \eta) &= a\cdot\varphi_x\cdot\Psi_x^2 + b\cdot[\varphi_y\cdot\Psi_x^2 + 2\cdot\varphi_x\Psi_x\Psi_y] + c\cdot[\varphi_x\Psi_y^2 + \\
&\qquad + 2\,\varphi_y\Psi_x\Psi_y] + d\cdot\varphi_y\cdot\Psi_y^2 \\
\delta(\xi,\ \eta) &= a\cdot\Psi_x^3 + 3\cdot b\cdot\Psi_x^2\cdot\Psi_y + 3\cdot c\cdot\Psi_y^2\cdot\Psi_x + d\cdot\Psi_y^3
\end{aligned}\right.
$$

2. Formas canónicas. Se trata de elegir φ y Ψ de modo que $\Lambda[u]$ sea lo más sencillo posible.

Consideremos la forma cúbica

$$a\ l^3 + 3b\cdot l^2\cdot m + 3c\cdot l\ m^2 + d\cdot m^3 \tag{7}$$

asociada a $L[u]$ y la : $\alpha\lambda^3 + 3\beta\lambda^2\cdot\mu + 3\gamma\cdot\lambda\mu^2 + \delta\mu^3$ (8)
asociada a $\Lambda[u]$

El paso de a, b, c, d, a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, se consigue mediante una sustitución lineal que es la misma que si en la forma cúbica asociada aplicamos la substitución :

$$\left\{\begin{aligned} l &= \lambda\,\varphi_x + \mu\cdot\Psi_x \\ m &= \lambda\cdot\varphi_y + \mu\cdot\Psi_y \end{aligned}\right. \tag{9}$$

ya que si sustituímos en (8) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, por sus expresiones dadas en (6) y luego identificamos los coeficientes de a, b, c, y d, con los de (7) obtendremos (9).

Se puede conseguir que (8) adopte una de las formas :

1.º — $\varrho\lambda^3 + \varrho'\mu^3$	4.º — $\varrho\lambda^2\mu + \varrho'\lambda^3$
2.º — $\varrho\lambda^2\mu + \varrho'\lambda\mu^2$	5.º — $\varrho\lambda\mu^2 + \varrho'\mu^3$
3.º — $\varrho\lambda^2\mu + \varrho'\mu^3$	6.º — $\varrho\lambda\mu^2 + \varrho'\lambda^3$

El primer caso equivale a imponer $\beta = 0$; $\gamma = 0$, el segundo $\alpha = 0$; $\delta = 0$, ..., etc. Estas dos condiciones son dos ecuaciones en derivadas parciales en la φ y la Ψ. Eligiendo éstas de modo que las satisfagan, tendremos la forma cúbica reducida a su forma canónica.

También podrían considerarse combinaciones de la forma :

$$\alpha = 0,\quad \beta = \gamma\ ;\quad \beta = 0,\quad \alpha = \gamma\ ;\ \text{etc.}$$

Consideremos el caso $\alpha = 0$; $\delta = 0$ que equivale a imponer las condiciones :

$$\left.\begin{array}{l} a\varphi_x^3 + 3b\varphi_x^2 \cdot \varphi_y + 3c \cdot \varphi_y^2 \cdot \varphi_x + d\varphi_y^3 = 0 \\ a\Psi_x^3 + 3b\Psi_x^2 \cdot \Psi_y + 3c \cdot \Psi_y^2 \cdot \Psi_x + d\Psi_y^3 = 0 \end{array}\right\} \tag{10}$$

En realidad son una misma condición, impuesta una vez a φ y otra a Ψ. Hemos de hallar, pues, dos soluciones de la ecuación en derivadas parciales :

$$a\varphi_x^3 + 3b\varphi_x^2 \cdot \varphi_y + 3c \cdot \varphi_y^2 \cdot \varphi_x + d \cdot \varphi_y^3 = 0 \tag{11}$$

No es lineal, pero es homogénea. Podemos dividir por φ_y^3 obteniéndose como ecuación ordinaria asociada :

$$a \cdot y'^3 - 3by'^2 + 3cy' - d = 0 \tag{12}$$

Esta ecuación es de 3.er grados en y', su discriminante será :

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \text{ con } q = \frac{-2b^3 + 3abc - a^2d}{a^3}, \text{ y } p = \frac{3ac - 3b^2}{a^2}$$

es decir :

$$\Delta = \frac{a^4d^2 + 4a^2b^3d - 6a^3bcd + 4a^3c^3 - 3a^2b^2c^2}{4 \cdot a^6}$$

La ecuación (12) admite tres soluciones en cada punto, que serán reales y distintas siempre que sea, $\Delta < 0$. Sean λ_1, λ_2, λ_3 las raíces de la ecuación : $a\lambda^3 - 3b\lambda^2 + 3c\lambda - d = 0$.

La ecuación (11) se desdobla en tres lineales :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_x + \lambda_1 \varphi_y = 0 \\ \Psi_x + \lambda_2 \Psi_y = 0 \\ \chi_x + \lambda_3 \chi_y = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

a las cuales corresponden tres haces de curvas características :

$$\varphi(x, y) = C^{te}; \quad \Psi(x, y) = C^{te}; \quad \chi(x, y) = C^{te}$$

soluciones de los sistemas diferenciales : $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{\lambda j}$ $(j = 1, 2, 3)$

asociados a las mismas, siendo las integrales generales respectivas:

$F_1[\varphi(x, y)]$; $F_2[\Psi(x, y)]$; $F_3[\chi(x, y)]$ con F_1, F_2 F_3 arbitrarias.

La reducción se conseguirá tomando como curvas coordenadas dos cualesquiera de estos tres haces. Este será el caso totalmente *hiperbólico*. Si es $\Delta = 0$ dos de las tres raíces reales λ_1, λ_2, λ_3 son iguales $\lambda_1 = \lambda_2$.

Haciendo $\lambda_1 = \lambda_2$ las tres ecuaciones (13) se reducen a dos, obteniéndose únicamente dos haces de curvas características :

$$\varphi(x, y) = C^{te}; \quad \chi(x, y) = C^{te}$$

Lograremos también reducción, adoptando como curvas coordenadas estos dos haces de curvas, pero en este caso desaparece además, un término en derivadas mixtas (*). Seguiremos de acuerdo con el punto de vista de COURANT, considerando a este caso también como *hiperbólico*. (²)

3. CASO DE EXCEPCIÓN. Si es $\Delta = 0$; $q = 0$; con lo que también $p = 0$. Esto sólo tendrá lugar para un número finito de puntos del plano X o Y ; los comunes a las curvas de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = 0 \\ q = 0\end{array}\right\} \quad \text{o} \quad \left.\begin{array}{l}\Delta = 0 \\ p = 0\end{array}\right\}$$

ya que ambos sistemas son equivalentes y sólo tiene interés cuando son constantes los coeficientes de $L[u]$. En este caso las tres raíces reales λ_1, λ_2, λ_3, se confunden en una sola λ_0 obteniéndose únicamente un haz de curvas características: $\varphi(x, y) = C^{te}$ y también lograremos reducción, ya que si $\varphi(x, y)$ es una integral de la ecuación $\varphi_x + \lambda_0\varphi_y = 0$; y $\Psi(x, y)$ designa otra función cualquiera diferenciable que no satisfaga a esta ecuación en derivadas parciales, tomándolas como funciones de transformación de las variables x, y, en las ξ, η y teniendo presente las relaciones :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3\lambda_0 = \frac{3 \cdot b}{a} ; \lambda_0 = \frac{b}{a} ; \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 3\lambda_0^2 = \frac{3c}{a} ; \lambda_0^2 = \frac{c}{a}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_0^3 = \frac{d}{a}$$

(*) En efecto: $\beta(\xi, \eta) = -\varphi_y^2 \chi_y [a \lambda_1^2\lambda_3 - b(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_3) + c(2\lambda_1 + \lambda_3) - d]$, y en virtud de las relaciones entre coeficientes y raíces: $2\lambda_1 + \lambda_3 = 3\frac{b}{a}$; $\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_3 = 3\frac{c}{a}$; $\lambda_1^2\lambda_3 = \frac{d}{a}$ resulta: $\beta(\xi, \eta) = -\varphi_y \chi_y [d - 3\frac{bc}{a} + 3\frac{bc}{a} - d] \equiv$ $\equiv 0$. *c. q. d.*

(²) COURANT-HILBERT, [1], pág. 140.

de las que se deducen :

$$\lambda_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2}\,;\; b^2 = ac;\; \lambda_0 = \frac{d}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{a};\; \frac{d}{c} = \frac{b}{a};\; ad = b \cdot c$$

resulta :

$$\beta(\xi, \eta) = \varphi_y{}^2 \cdot \Psi_y \left\{ a \cdot \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Psi_x}{\Psi_y}\right) + b \cdot \left[\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2\,\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot \frac{\Psi_x}{\Psi_y} \right] + \right.$$

$$\left. + c \cdot \left[\frac{\Psi_x}{\Psi_y} + 2\,\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right] + d \right\}$$

pero :

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\,\lambda_0$$

luego :

$$\beta(\xi, \eta) = \varphi_y^2 \cdot \Psi_y \cdot \left\{ a \cdot \lambda_0^2 \frac{\Psi_x}{\Psi_y} + b \left[\lambda_0^2 - 2\lambda_0 \frac{\Psi_x}{\Psi_y} \right] + c \left[\frac{\Psi_x}{\Psi_y} - 2\lambda_0 \right] + d \right\} =$$

$$= \varphi_y^2 \cdot \Psi_y \cdot \left[c \cdot \frac{\Psi_x}{\Psi_y} + b \cdot \frac{c}{a} - 2 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{\Psi_x}{\Psi_y} + c\,\frac{\Psi_x}{\Psi_y} - 2\,\frac{bc}{a} + d \right] \equiv 0$$

y análogamente obtendríamos $\gamma(\xi, \eta) \equiv 0$

Mediante el cambio :

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y) \end{aligned}\right\}$$

obtendremos reducción, pero en este caso desaparecerán los términos en derivadas cruzadas y un término en derivadas puras.

Si es $\Delta > 0$ las raíces λ_1, λ_2, λ_3, son una real y dos imaginarias conjugadas. Este caso no será totalmente hiperbólico, ni totalmente elíptico, como era de esperar por ser la ecuación de orden impar. Habrá un haz real de curvas características y otros dos imaginarios. Tomando como funciones de transformación la $\varphi(x, y)$ solución de la ecuación $\varphi_x + \lambda_1 \varphi_y = 0$; ($\lambda_1$ raíz real) y otra función $\Psi(x, y)$ cualquiera (continua y derivable) se logrará que desaparezca el término correspondiente a u_{xxx}. (**)

(**) Mediante el cambio: $\left.\begin{aligned} \xi &= h(x, y) \\ \eta &= k(x, y) \end{aligned}\right\}$ en el que $h(x, y)$ y $k(x, y)$ son las componentes real e imaginaria del primer miembro de $\Psi\,(x, y) = C^{te}$, que define el haz de características de la ecuación $\psi_x + \lambda_2\,\psi_y = 0$, correspondiente a una de las raíces imaginarias, el operador $L\;[u]$ se transforma en el $\Lambda\;[u] =$ $= \left[\varrho_1 \frac{\partial}{\partial\,\xi} + \varrho_2 \frac{\partial}{\partial\,\eta}\right] \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial\,\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] u$ es decir, en el producto de un operador de primer orden por el de LAPLACE.

En resumen, para la ecuación diferencial habrá una curva que dividirá el plano en dos recintos, uno cerrado de puntos hiperbólicos que tiene por frontera precisamente esta curva y otro abierto que no es de puntos hiperbólicos, ni elípticos.

4. Casos de simplificación. Analicemos ahora qué condiciones necesarias y suficientes deben verificar los coeficientes del operador $L[u]$ para que la ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico de que forma parte, admita un cambio de variables $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \Psi(x, y)$ que la reduzca a la forma canónica :

$$\varrho(\xi, \eta) \cdot [u_{\xi\xi\eta} - u_{\xi\eta\eta}] + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0$$

es decir, como veremos en el próximo número, a la misma forma canónica en que se transforma por un cambio de variables, conveniente, toda ecuación de tipo hiperbólico de coeficientes constantes. Para ello observemos que las características de la ecuación transformada (que son las características de las ecuaciones en derivadas parciales de 1.er orden $\Phi_\xi = 0$; $\Phi_\eta = 0$; $\Phi_\xi - \Phi_\eta = 0$ en que se desdobla la ecuación $\Phi_\xi^2 \cdot \Phi_\eta - \Phi_\xi \cdot \Phi_\eta^2 = 0$; asociada a ella) son las tres familias de rectas paralelas a los ejes y a la bisectriz del 2.º y 4.º cuadrante $\xi = C_1$; $\eta = C_2$; $\xi + \eta = C_3$; y que dichas características son las transformadas mediante el cambio $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \Psi(x, y)$ de las características de la ecuación dada.

Como la transformación $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \Psi(x, y)$ se supone biunívoca y bicontinua, y además las tres familias de rectas consideradas pueden mediante una transformación afín convertirse en tres familias de rectas paralelas a los lados de un triángulo equilátero (que constituyen un tritejido regular(3)) las familias de curvas características de la ecuación dada, serán topológicamente equivalentes a un tejido regular y constituirán, por tanto, un tejido hexagonal T_3.

El problema que nos ocupa equivale, pues, a determinar las condiciones necesarias y suficientes de hexagonalidad del tritejido T_3, constituido por las características de la ecuación objeto de estudio, características que vienen dadas, como hemos visto, por los sistemas diferenciales :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

asociados a las ecuaciones en derivadas parciales :

$$\Phi_x + \lambda_j \Phi_y = 0 ; \quad (j = 1, 2, 3)$$

(3) Consúltese Wilhelm Blaschke [2], pág. 9 y sgs. y [3].

Podemos, pues, adoptar como pfaffianos representativos de las tres familias de curvas características que constituyen el tejido T_3, las expresiones diferenciales $\sigma_j = \lambda_j dx - dy$; $(j = 1, 2, 3)$, las cuales supondremos normalizadas siendo los factores de normalización los que satisfacen el sistema

$$\left.\begin{array}{l} g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\lambda_3 = 0 \\ g_1 + g_2 + g_3 = 0 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones vienen dadas, salvo un factor de proporcionalidad, por las siguientes expresiones:

$$g_1 = \lambda_2 - \lambda_3 \,;\; g_2 = \lambda_3 - \lambda_1 \,;\; g_3 = \lambda_1 - \lambda_2$$

y los nuevos pfaffianos normalizados serán:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\sigma}_1 = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot dx - (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot dy = p_1 \cdot dx + q_1 \cdot dy \\ \bar{\sigma}_2 = \lambda_2 \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot dx - (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot dy = p_2 \cdot dx + q_2 \cdot dy \\ \bar{\sigma}_3 = \lambda_3 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot dx - (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot dy = p_3 \cdot dx + q_3 \cdot dy \end{array}\right\}$$

verificando los mismos la relación: $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3 = 0$.

Calculemos el elemento superficial Ω, el cual viene dado por el producto externo:

$$\Omega = [\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2] = (p_1 q_2 - p_2 q_1)\,[dxdy] = (\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot [dxdy]$$

así como las diferenciales externas

$$\left.\begin{array}{l} d\bar{\sigma}_1 = (q_{1x} - p_{1y}) \cdot [dxdy] = \{(\lambda_3 - \lambda_2)_x - [\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)]_y\}\,[dxdy] \\ d\bar{\sigma}_2 = (q_{2x} - p_{2y}) \cdot [dxdy] = \{(\lambda_1 - \lambda_3)_x - [\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)]_y\}\,[dxdy] \\ d\bar{\sigma}_3 = (q_{3x} - p_{3y}) \cdot [dxdy] = \{(\lambda_2 - \lambda_1)_x - [\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)]_y\}\,[dxdy] \end{array}\right\}$$

siendo las expresiones de los escalares $h_j = \dfrac{d\bar{\sigma}_j}{\Omega}$ las siguientes:

$$h_1 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)_x - [\lambda_1 \cdot (\lambda_2 - \lambda_3)]_y}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} \,;\; h_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)_x - [\lambda_2 \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)]_y}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$h_3 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)_x - [\lambda_3 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)]_y}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Mediante los escalares h_j podemos calcular la conexión γ del tejido T_3, que vendrá dada por la expresión :

$$\gamma = h_2 \cdot \bar{\sigma}_1 - h_1 . \bar{\sigma}_2 = A \cdot dx + B \cdot dy ;$$

siendo :

$$A = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \{ (\lambda_1 - \lambda_2)_x + [\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)]_y \} + *}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$B = \frac{\lambda_3 \{ (\lambda_1 - \lambda_2)_x + [\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)]_y \} + *}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

donde los asteriscos* indican otros dos términos obtenidos del 1.º mediante permutación circular de los índices 1, 2, 3.

La condición necesaria y suficiente de hexagonalidad de T_3 es que $\gamma = A . dx + B . dy$ *sea una diferencial exacta, es decir :*

$$\frac{\delta A}{\delta y} = \frac{\delta B}{\delta x}$$

y esta relación diferencial de 2.º orden en las λ_j (y por tanto de 2.º orden en los coeficientes del operador $L[u]$, ya que las λ_j vienen expresadas por funciones elementales de dichos coeficientes) *es, por consiguiente,* como acabamos de probar, *la condición necesaria y suficiente que deben verificar los coeficientes del operador $L[u]$ para que la ecuación en derivadas parciales de que forma parte, admita un cambio de variables $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \Psi(x, y)$ que la reduzca a la forma canónica:*

$$\varrho \cdot (\xi,\eta) \cdot [u_{\xi\xi\eta} - u_{\xi\eta\eta}] + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0$$

5. Caso de coeficientes constantes en los términos en derivadas de 3.er orden. (4). Sea la ecuación :

$$L[u] + f(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{14}$$

en la que los coeficientes del operador $L[u]$ son constantes.

La forma cúbica asociada a $L[u]$:

$$al^3 + 3bl^2m + 3clm^2 + dm^3 = 0 \tag{15}$$

(4) Vidar Thomée demuestra la existencia y unicidad de la solución de una ecuación de 3.er orden lineal e hiperbólica, con condiciones de contorno de tipo mixto en el supuesto que sean constantes los coeficientes de la parte principal del operador por aplicación de los métodos usados por Leray y Garding [4], pág. 115 y sgtes. Véase la nota bibliográfica al final del Capítulo IV.

es asimismo de coeficientes constantes, y representa en el plano de las l, m, tres rectas por el origen, las tres reales y distintas o una recta real doble, y otra simple, o una real y simple y dos imaginarias conjugadas, o una recta real triple. Dichas rectas tienen por coeficientes angulares las raíces λ_1, λ_2, λ_3 de la ecuación cúbica en $\frac{l}{m}$:

$$a \cdot \left(\frac{l}{m}\right)^3 + 3 \cdot b \cdot \left(\frac{l}{m}\right)^2 + 3\,c \cdot \left(\frac{l}{m}\right) + d = 0$$

o bien haciendo $\frac{l}{m} = t$:

$$at^3 + 3bt^2 + 3ct + d = 0 \tag{15'}$$

raíces que son opuestas a las correspondientes a la ecuación (12) ya considerada en y'.

Supongamos que las tres raíces λ_1, λ_2, λ_3, sean reales y distintas.

Según hemos visto antes, el paso de a, b, c, d, coeficientes de la forma cúbica asociada a $L[u]$ a α, β, γ, δ, coeficientes de la forma cúbica asociada a $\Lambda[u]$ se consigue mediante una sustitución lineal que es la misma que si en la forma cúbica asociada aplicamos la sustitución :

$$\left.\begin{aligned} l &= \lambda \cdot \varphi_x + \mu\,\Psi_x \\ m &= \lambda \cdot \varphi_y + \mu\,\Psi_y \end{aligned}\right\}$$

en la cual si φ_x, φ_y, Ψ_x, Ψ_y se suponen constantes, lo que implica que $\varphi(x, y)$ y $\Psi(x, y)$ sean lineales, respecto a x, y, equivale a un cambio del sistema de coordenadas en el haz de rayos de vértice en el origen.

Elijamos como rayos origen, límite y unidad del nuevo sistema de coordenadas, respectivamente, las rectas de coeficientes angulares λ_1, λ_2, λ_3 representadas por la ecuación (15). Las coordenadas homogéneas de éstas serán $(\lambda_1, 1)$, $(\lambda_2, 1)$, $(\lambda_3\ 1)$ en el antiguo sistema, y $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ en el nuevo sistema, por lo que la ecuación (15) se transformará en otra en λ y μ que carecerá de los términos extremos, y tendrá opuestos los coeficientes de los términos centrales, es decir, será de la forma :

$$\varrho(\lambda^2\mu - \lambda\mu^2) = 0$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot l &= a_{11}\,\lambda + a_{12}\,\mu \\ \varrho \cdot m &= a_{21}\,\lambda + a_{22}\mu \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

el sistema de ecuaciones que nos representan tal cambio. Los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21} a_{22} los calcularemos mediante el sistema de ecuaciones homogéneas :

$$\varrho'\lambda_1 = a_{12} \qquad \varrho''\lambda_2 = a_{11} \qquad \varrho'''\lambda_3 = a_{11} + a_{12}$$
$$\varrho' = a_{22} \qquad \varrho'' = a_{21} \qquad \varrho''' = a_{21} + a_{22}$$

que las podemos dividir todas ellas por ϱ''' por ejemplo :

$$\bar{\varrho}'\,\lambda_1 = \overline{a_{12}} \qquad \bar{\varrho}''\,\lambda_2 = \overline{a_{11}} \qquad \lambda_3 = \overline{a_{11}} + \overline{a_{12}}$$
$$\bar{\varrho}' = \overline{a_{22}} \qquad \bar{\varrho}'' = \overline{a_{21}} \qquad 1 = \overline{a_{21}} + \overline{a_{22}}$$

con lo que tenemos :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_3 = \bar{\varrho}''\lambda_2 + \varrho'\lambda_1 \\ 1 = \bar{\varrho}'' \quad + \bar{\varrho}' \end{array}\right\}$$

obteniéndose :

$$\bar{\varrho}'' = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,;\ \bar{\varrho}' = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\overline{a_{11}} = \lambda_2\,\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,; \quad \overline{a_{12}} = \lambda_1\,\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\overline{a_{21}} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\,; \quad \overline{a_{22}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Las funciones $\varphi(x, y)$ y $\Psi(x, y)$ las determinaremos de modo que sea :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \overline{a_{11}}\,;\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \overline{a_{21}}\,;\ \varphi(x, y) = \overline{a_{11}}\cdot x + \overline{a_{21}}\cdot y + C_1 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = \overline{a_{12}}\,;\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = \overline{a_{22}}\,;\ \Psi(x, y) = \overline{a_{12}}\cdot x + \overline{a_{22}}\cdot y + C_2 \end{array}\right\}$$

es decir, en definitiva :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x,\ y) = \lambda_2\cdot\dfrac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\cdot x + \dfrac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\cdot y + C_1 \\ \Psi(x,\ y) = \lambda_1\cdot\dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}\cdot x + \dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}\cdot y + C_2 \end{array}\right\}$$

y la ecuación (14) se reducirá después de efectuar el cambio :

$$\xi = \varphi(x, y) \; ; \quad \eta = \Psi(x, y)$$

a otra cuasi-lineal de la forma :

$$\varrho(\xi,\eta) \cdot [u_{\xi\xi\eta} - u_{\xi\eta\eta}] + F(\xi,\eta, \; u, \; u_\xi, \; u_\eta, \; u_{\xi\xi}, \; u_{\xi\eta}, \; u_{\eta\eta}) = 0$$

6. UNA RAIZ DOBLE. Supongamos ahora que las raices λ_1, λ_2, λ_3 sean las tres reales, pero confundiéndose en una sola λ_1 las dos primeras.

Mediante el cambio :

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot l &= \lambda_3 \cdot \lambda - \lambda_1 \mu \\ \varrho \cdot m &= \lambda - \mu \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

las dos rectas de coeficientes angulares λ_1 y λ_3 pasarán a ser, después del mismo, rectas origen y recta límite, respectivamente, y la forma cúbica que las representa (15) se reducirá a la :

$$\varrho \cdot \lambda^2 \cdot \mu = 0$$

Por tanto, el cambio :

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \lambda_3 \cdot x + y + C^{te} \\ \eta &= -\lambda_1 \cdot x - y + C^{te} \end{aligned}\right\}$$

reduce la ecuación (14) a otra de la forma :

$$\varrho \cdot u_{\xi\xi\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0$$

7. UNA RAIZ TRIPLE. Consideremos el caso en que las tres raices se confundan en una sola λ_0.

Mediante el cambio :

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cdot l &= \lambda_0 \cdot \lambda \\ \varrho \cdot m &= \lambda - \mu \end{aligned}\right\}$$

la recta de coeficiente angular λ_0 pasa a ser después del mismo, recta límite y la forma cúbica (15) que la representa, se reduce a la :

$$\varrho \cdot \mu^3 = 0$$

Luego el cambio :

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \lambda_0 \cdot x + y + C^{te} \\ \eta = \qquad\ - y + C^{te} \end{array}\right\}$$

reducirá la ecuación (14) a otra de la forma :

$$\varrho \cdot u_{\eta\eta\eta} + F(\xi,\ \eta,\ u,\ u_\xi,\ u_\eta,\ u_{\xi\xi},\ u_{\xi\eta},\ u_{\eta\eta}) = 0$$

8. Dos raices imaginarias conjugadas. Si las raíces son una real λ_0 y dos imaginarias conjugadas $\alpha + \beta i$; $\alpha - \beta i$ (caso no hiperbólico) procederemos análogamente al caso de ser las raíces λ_1, λ_2, λ_3 reales y distintas, a determinar una sustitución lineal de la forma :

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho \cdot l = a_{11} \cdot \lambda + a_{12} \cdot \mu \\ \varrho \cdot m = a_{21} \cdot \lambda + a_{22} \cdot \mu \end{array}\right.$$

que nos convierta las rectas de coordenadas homogéneas $(\lambda_0,\ 1)$ $(\alpha + \beta i,\ 1)$; $(\alpha - \beta i,\ 1)$ en las de coordenadas $(1,\ 0)$; $(i,\ 1)$; $(-\ i,\ 1)$, respectivamente, con lo que la ecuación (15) se transformará en la :

$$\varrho \cdot (\lambda^2 \cdot \mu + \mu^3) = 0$$

Los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} de tal sustitución, los calculamos mediante el sistema de ecuaciones homogéneas :

$$\left.\begin{array}{l} \varrho' \cdot \lambda_0 = a_{11} \\ \varrho' = a_{21} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \varrho''(\alpha + \beta i) = a_{11} \cdot i + a_{12} \\ \varrho'' = a_{21} \cdot i + a_{22} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \varrho''' \cdot (\alpha - \beta i) = -\ a_{11} \cdot i + a_{12} \\ \varrho''' = -\ a_{21} \cdot i + a_{22} \end{array}\right\}$$

que las podemos dividir todas ellas por ϱ''', por ejemplo :

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\varrho}' \cdot \lambda_0 = \overline{a_{11}} \\ \bar{\varrho}' = \overline{a_{21}} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \bar{\varrho}''(\alpha + \beta i) = \overline{a_{11}} \cdot i + \overline{a_{12}} \\ \bar{\varrho}'' = \overline{a_{21}} \cdot i + \overline{a_{22}} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha - \beta i = -\ \overline{a_{11}} \cdot i + \overline{a_{12}} \\ 1 = -\ \overline{a_{21}} \cdot i + \overline{a_{22}} \end{array}\right\}$$

deduciéndose :

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\varrho}'' \cdot (\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i) = 2 \cdot \lambda_0 \cdot \bar{\varrho}' \cdot i \\ \bar{\varrho}'' \quad - \ 1 \qquad\qquad\quad = 2 \cdot \varrho' i \end{array}\right\}$$

resultando :

$$\bar{\varrho}' = \frac{-\beta}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}; \quad \bar{\varrho}'' = \frac{(\alpha-\beta i)-\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}$$

$$\overline{a_{11}} = \frac{-\beta\cdot\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}; \quad \overline{a_{12}} = (\alpha+\beta i)\cdot\frac{(\alpha-\beta i)-\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} + \frac{\beta\cdot\lambda_0\cdot i}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}$$

$$\overline{a_{21}} = \frac{-\beta}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}; \quad \overline{a_{22}} = \frac{(\alpha-\beta i)-\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} + \frac{\beta\cdot i}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}$$

o bien por tratarse de coordenadas homogéneas, y simplificando:

$$a_{11} = -\lambda_0\cdot\beta; \; a_{12} = \alpha^2+\beta^2-\lambda_0\cdot\alpha; \; a_{21} = -\beta; \; a_{22} = \alpha-\lambda_0$$

Las funciones $\varphi(x, y)$ y $\Psi(x, y)$ se determinarán de modo que sean:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a_{11}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_{21}; \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = a_{12}; \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = a_{22}$$

y por tanto:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y) &= a_{11}\cdot x + a_{21}\cdot y + C_1 \\ \Psi(x, y) &= a_{12}\cdot x + a_{22}\cdot y + C_2 \end{aligned}\right\}$$

es decir, en definitiva:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\lambda_0\cdot\beta\cdot x - \beta\cdot y + C_1 \\ \Psi(x, y) &= (\alpha^2+\beta^2-\lambda_0)\cdot x + (\alpha-\lambda_0)\cdot y + C_2 \end{aligned}\right\}$$

y la ecuación (14) se reducirá después de efectuar el cambio:

$\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \Psi(x, y)$ a otra cuasi-lineal de la forma:

$$\varrho\cdot(u_{\xi\xi\eta} + u_{\eta\eta\eta}) + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0$$

CAPITULO II

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION HIPERBOLICA : $u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2)$

1. Planteo del problema. Dada la ecuación lineal en derivadas parciales :

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2) \tag{1}$$

con $\Phi(x_1, x_2)$ función continua que admite derivadas parciales asimismo continuas, en un cierto recinto abierto y conexo G, limitado por una curva frontera conexa y $\varrho(x_1, x_2)$ una función continua que no se anula en G, y por lo tanto de signo constante en el mismo (signo que siempre podemos suponer positivo [1]) admitiendo derivadas parciales primeras y segundas continuas. Sea $0(x_1^0, x_2^0)$ un punto interior de G, la recta $x_2 = x_2^0$ determinada en G un intervalo abierto $\alpha_1 < x_1 < \alpha_2$ interior a G, con $\alpha_1 < x_1^0 < \alpha_2$, asimismo la $x_1 = x_1^0$ determina un intervalo abierto $\beta_1 < x_2 < \beta_2$ interior a G con $\beta_1 < x_2^0 < \beta_2$, y sean $\varphi(x_1)$, $\Psi(x_2)$, $\chi(x_2)$ tres funciones que cumplen las siguientes condiciones :

1.ª $\varphi(x_1)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden continuas en el intervalo $\alpha_1 < x_1 < \alpha_2$ anteriormente considerado.

2.ª $\Psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de tercero y segundo orden, respectivamente, continuas en el intervalo $\beta_1 < x_2 < \beta_2$. Dichas funciones verifican además las condiciones : $\varphi(x_1^0) = \Psi(x_2^0)$; $\varphi'(x_1^0) = \chi(x_2^0)$

2. Determinación de las curvas características de la ecuación. Estas vienen dadas, como sabemos, por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales, en que se descompone la expresión diferencial.

---

[1] Bastará en caso contrario efectuar el cambio de variables independientes :

$$\begin{cases} x_1 = -\xi_1 \\ x_2 = \xi_2 \end{cases}$$

$$\varphi_{x_1}{}^2 \cdot \varphi_{x_2} + \varrho \cdot \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_2}^2 = 0 \; ; \quad \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_2} (\varphi_{x_1} + \varrho \cdot \varphi_{x_2}) = 0$$

que son :

$$\varphi_{x_1} = 0 \; ; \quad \varphi_{x_2} = 0 \; ; \quad \varphi_{x_1} + \varrho \cdot \varphi_{x_2} = 0$$

Las dos primeras tienen por características respectivas las familias de rectas paralelas : $x_2 = C_2$; $x_1 = C_1$ y la tercera las curvas integrales $\lambda\,(x_1^0,\ x_1,\ x_2) = C_3$ de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\ x_2)$, que por las hipótesis hechas sobre $\varrho(x_1,\ x_2)$ serán crecientes en G.

En resumen, las familias de curvas características de la ecuación (1) son :

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 = C_1 \\ (\beta) & x_2 = C_2 \\ (\gamma) & \lambda(x_1^0,\ x_1,\ x_2) = C_3 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

3. Determinación del dominio de dependencia de un punto P. Consideremos un punto $P(x_1,\ x_2)$ de G y tracemos las tres características que pasan por él ; supongamos que P es lo suficiente próximo a $0(x_1^0,\ x_2^0)$ para que supuesto el caso de las figuras 1 y 2 (P situado en 2.º ó 4.º cuadrante) el trapecio mixtilíneo $ORPQ$

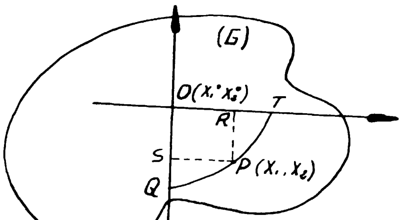


fig: 1

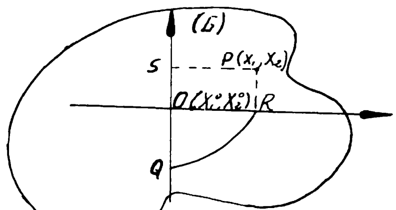


fig: 3

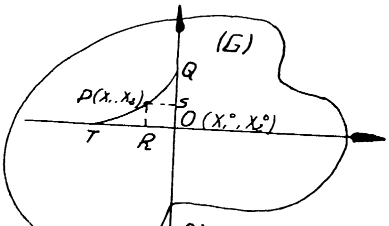


fig: 2

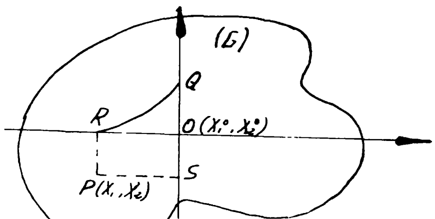


fig: 4

determinado por los ejes, el arco PQ de la característica del haz (γ) y el segmento PR de la del haz (α) sea interior a G, o en el caso de las figuras 3 y 4 (P en el 1.º y 3.er cuadrante) sea interior a G el trapecio mixtilíneo $PRQS$ determinado por el arco QR de la característica del haz (y) que pasa por la proyección R de P, los segmentos PR y PS de las características de los haces (α) y (β) y el eje $x_1 = x_1^0$.

En ambos casos los intervalos OQ y QS constituyen como vamos a demostrar posteriormente los dominios de dependencia de P sobre $x_1 = x_1^0$.

Análogamente sobre $x_2 = x_2^0$ el dominio de dependencia está constituido en todos los casos por el segmento OR determinado por el origen y la proyección R de P sobre $x_2 = x_2^0$

4. Construcción del dominio de prolongación. A cada punto P de G hagámosle corresponder la región plana, que llamaremos *asociada a P*, constituida por el triángulo mixtilíneo OQT (supuesto P situado en el 2.º ó 4.º cuadrante) limitado por los ejes y por la característica del haz (γ) que pasa por él, tal como indican las figuras 1 y 2 o por el trapecio mixtilíneo $PRQS$ (si P está situado en el 1.º o 3.er cuadrante) limitado por el eje $x_1 = x_1^0$ y por las características de los haces (α) y (β) que pasan por él, así como por la característica del haz (γ) que pasa por R, proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ (figs. 3 y 4).

Dadas las funciones $\Psi(x_2)$, $\chi(x_2)$ sobre el segmento QS del eje $x_1 = x_1^0$ y la $\varphi(x_1)$ sobre el segmento UR del eje $x_2 = x_2^0$ llamaremos *dominio de prolongación D* de dichos segmentos, al conjunto de puntos P de G, tales que la correspondiente región asociada sea interior

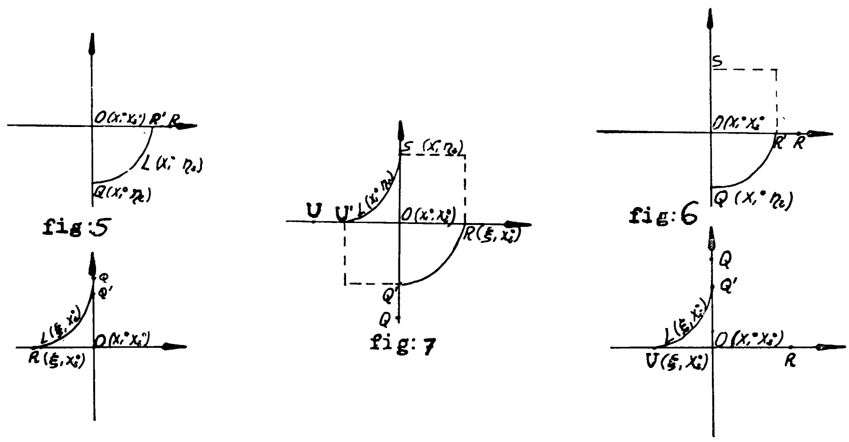


fig:5 fig:7 fig:6

a G en sentido estricto, estando, además, contenidos en QS y UR los correspondientes dominios de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$, y $x_2 = x_2^0$ respectivamente. Dichos dominios de prolongación, tal como los hemos definido, se indican en las figuras 5, 6 y 7 y corresponden a los casos en que los segmentos QS del eje $x_1 = x_1^0$ y UR del eje $x_2 = x_2^0$ que determinan tal dominio D, tengan el punto $O(x_1^0, x_2^0)$ como extremo de los mismos, o como extremo de uno y punto interior del otro, o bien como punto interior a ambos, respectivamente. Estas definiciones serán justificadas más adelante.

5. Teorema de existencia y unicidad. La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo el dominio de prolongación (D) de dos segmentos cualesquiera de los ejes $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$ (que contengan el origen), que satisface a las condiciones iniciales :

a) se convierte en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2^0$, es decir, $u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)$
b) en $\Psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$, o sea, $u(x_1^0, x_2) \equiv \Psi(x_2)$
c) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ se reduce a la función

$\chi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$, es decir, $u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$
Además, esta solución es única.

6. Construcción de la solución al problema de Cauchy para la ecuación (1). Procederemos como es habitual en este tipo de cuestiones desdoblando el problema general (no homogéneo, ni con condiciones iniciales homogéneas) en los dos problemas parcialmente homogéneos a que equivale :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2) \\ u(x_1, x_2^0) \equiv 0 \\ u(x_1^0, x_2) \equiv 0 \\ u_1(x_1^0, x_2) \equiv 0 \end{array}\right\} (3) \qquad \left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\cdot u_{122} = 0 \\ u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1) \\ u(x_1^0, x_2) \equiv \Psi(x_2) \\ u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2) \end{array}\right\} (3')$$

cuyas soluciones u, v, con las condiciones iniciales señaladas para cada uno, superpondremos, obteniendo la solución al problema de Cauchy que buscamos.

El segundo problema (3') se reduce al primero (3) sin más que efectuar el cambio de función : $v = w + v^0$ siendo $v^0(x_1, x_2)$ una función continua, con derivadas parciales, asimismo continuas, hasta las de 3.er orden, que satisfaga las condiciones iniciales de (3') (*), por lo que sólo resolveremos el problema (3).

Para ello escribamos la ecuación (3) en la forma: $s_1 + \varrho(x_1, x_2) \cdot s_2 = \Phi\ (x_1, x_2)$ (4) en la que s designa, de acuerdo con la notación de MONGE, la derivada parcial mixta u_{12} y s_1 y s_2 las derivadas u_{112} y u_{122}, respectivamente. La ecuación (4) es una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden, no homogénea, cuya solución determinaremos con la condición inicial $s(x_1^0, x_2) \equiv 0$ que se deduce de la antes impuesta $u_1(x_1^0, x_2) \equiv 0$ y cuyo sistema diferencial asociado es el siguiente :

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\varrho(x_1, x_2)} = \frac{ds}{\Phi(x_1, x_2)}$$

Una integral primera $\lambda(x_1^0, x_1, x_2)$ del mismo podrá obtenerse de la primera ecuación, siendo $\lambda(x_1^0, x_1, x_2) = k_1$ ó $x_2 = \lambda(x_1, x_1^0, k_1)$ (2) el haz integral de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, (4') (que es la misma que nos definía el haz de características (γ) de (2)). Otra integral primera podrá deducirse de la ecuación diferencial ordinaria que constituyen la primera y tercera razón del sistema asociado, habiendo sustituido en ellas x_2 por $x_2 = \lambda\ (x_1, x_1^0, k_1)$ obteniéndose: $s - \int_{x_1^0}^{x_1} \Phi[\xi_1, \lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)]d\xi_1 = k_2$ suponiendo que una vez efectuada la cuadratura que figura en el primer miembro, se sustituye k_1 por $\lambda(x_1^0, x_1, x_2)$.

Las dos integrales primeras consideradas, pueden ponerse en la forma :

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x_1^0, x_1, x_2) &= k_1 \\ s - \oint_{L\,(x_1,\, x_2)} \Phi\ (\xi_1, \xi_2) d\xi_1 &= k_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

en la que integral curvilínea se supone extendida a lo largo del arco de curva integral $L(x_1, x_2)$ de (4') que pasa por el punto (x_1, x_2) y comprendida entre éste y el punto en que corta al eje $x_1 = x_1^0$ y que

(*) Por ejemplo, podría elegirse la :
$v^0(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2) - \varphi(x_1^0) + (x_1 - x_1^0)\cdot[\chi(x_2) - \varphi'(x_1^0)]$ que verifica las condiciones exigidas.

(2) (Véase [5]. Parte prima, págs. 32, 33.

en lo sucesivo expresaremos dicha integral por $J[\Phi(x_1, x_2)]$ indicando $J[F(x_1, x_2)]$ o abreviadamente $J(F)$ un operador funcional aplicado sobre F definido como sigue:

$J(F) \equiv \oint_{L(x_1, x_2)} F(\xi_1, \xi_2) d\xi$, siendo el camino $L(x_1, x_2)$ de integración, el que hemos ya considerado.

Con estas notaciones, la integral general de (4) será por tanto:

$$s = J[\Phi(x_1, x_2)] + \Psi[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)]$$

con Ψ arbitraria. Para determinar la forma de la función Ψ correspondiente a la solución que verifica las condiciones iniciales señaladas al principio, eliminaremos x_2 entre las dos ecuaciones siguientes, resultantes de haber hecho $x_1 = x_1^0$ en las dos integrales primeras (5) y tener en cuenta que:

$$s(x_1^0, x_2) \equiv 0 \, ; \quad \lambda(x_1^0, x_1^0, x_2) \equiv x_2 \text{ (3)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= k_1 \\ 0 &= k_2 \end{aligned}\right\}$$

siendo, por tanto, la expresión de $s(x_1, x_2)$ con la condición señalada:

$$s(x_1, x_2) = J[\Phi(x_1, x_2)] \tag{5'}$$

Puesto que $u_{12}(x_1, x_2) \equiv s(x_1, x_2)$ la solución de la ecuación (3) tendrá por expresión general (en la que $R\ (P)$ denota el rectángulo formado por los ejes y las características de los haces (α) y (β) que pasan por el punto $P(x_1, x_2)$):

$$u(x_1, x_2) = \iint_{R(P)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 + \varphi(x_1) + \overline{\Psi}(x_2)$$

determinándose $\bar{\varphi}(x_1)$ y $\overline{\Psi}(x_2)$ funciones arbitrarias por las condiciones iniciales: $u(x_1, x_2^0) = u(x_1^0, x_2) \equiv 0$
obteniéndose en definitiva $\bar{\varphi}(x_1) = \overline{\Psi}(x_2) \equiv 0$;

$$u(x_1, x_2) = \iint_{R(P)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{5''}$$

(3) Véase SANSONE [5], págs. 32, 33.

7. Cálculo de las primeras derivadas. Por derivación de $u(x_1, x_2)$ respecto a x_1, x_2, se obtiene inmediatamente :

$$p(x_1, x_2) = u_1 = \int_{x_2^0}^{x_2} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_2 \tag{6}$$

$$q(x_1, x_2) = u_2 = \int_{x_1^0}^{x_1} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_1 \tag{6'}$$

deduciéndose de ellas :

$$\left.\begin{array}{l} p(x_1, x_2^0) \equiv 0 \\ p(x_1^0, x_2) \equiv 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} q(x_1, x_2^0) = \displaystyle\int_{x_1^0}^{x_1} J[\Phi(\xi_1, x_2^0)]\, d\xi_1 \\ q(x_1^0, x_2) \equiv 0 \end{array}\right\} \tag{6''}$$

8. Cálculo de las derivadas segundas. La existencia de las segundas derivadas u_{11}, u_{22} y de u_{112}, u_{122} se verifica fácilmente, mediante las fórmulas (6), (6') y (5') respectivamente, reduciendo la integral curvilínea $J[\Phi(x_1, x_2)] = \oint_{L(x_1, x_2)} \Phi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi$, a definida ordinaria, y teniendo en cuenta que la función subintegral $\Phi[\xi, \lambda(\xi, x_1^0, k_1)]$ que figura en esta última, admite en virtud de las hipótesis hechas al principio, derivada parcial continua respecto a λ y en consecuencia respecto a x_1 y x_2 por ser $\lambda(x_1, x_1^0, k_1)$ y $k_1 = \lambda(x_1^0, x_1, x_2)$ funciones diferenciables cuyas derivadas parciales son continuas ([4]) siendo, por tanto, legítimo derivar bajo el signo integral ; con lo que se prueba lo afirmado al principio. Sentado ésto, el cálculo de las expresiones de $u_{11} = r(x_1, x_2)$ y $u_{22} = t(x_1, x_2)$ se logra fácilmente observando que de la ecuación (1) se deduce mediante dos cuadraturas las siguientes :

$$\left\{\begin{array}{l} p(x_1, x_2) + \displaystyle\int_{x_1^0}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho \cdot u_{122} d\xi_2 = \int_{x_1^0}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 + \bar{\xi}(x_1) + \bar{\eta}(x_2); \\ q(x_1, x_2) + \displaystyle\int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\varrho} \cdot u_{112} d\xi_1 = \int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\varrho} \cdot \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 + \bar{\bar{\xi}}(x_1) + \bar{\bar{\eta}}(x_2); \end{array}\right.$$

en las cuales las funciones arbitrarias que figuran se determinan inmediatamente al hacer sucesivamente $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$ y tener en cuenta (6'') resultando :

([4]) Véase la citada obra de Sansone [5]. Parte prima, págs. 25 a 31.

$$\begin{cases} p(x_1, x_2) + \int_{x_1^0}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho \cdot u_{122} d\xi_2 = \int_{x_1^0}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_2; \\ q(x_1, x_2) + \int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\varrho} \cdot u_{112} d\xi_1 = \int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\varrho} \cdot \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} J[\Phi(\xi_1, x_2^0)] d\xi_1. \end{cases}$$

de las que por derivación respecto a x_1 y x_2 respectivamente, y mediante integraciones por partes convenientes resulta :

$$\begin{cases} r(x_1, x_2) = -[\varrho \cdot s]_{x_2^0}^{x_2} + \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2} \cdot s(x_1, \xi_2) d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi(x_1, \xi_2) d\xi_2; \\ t(x_1, x_2) = -\left[\frac{1}{\varrho} \cdot s\right]_{x_1^0}^{x_1} + \int_{x_1^0}^{x_1} \left(\frac{1}{\varrho}\right)_{x_1} \cdot s(\xi_1, x_2) d\xi_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\varrho} \cdot \Phi(\xi_1, x_2) d\xi_1; \end{cases}$$

y recordando la expresión (5') hallada anteriormente para $s(x_1, x_2)$ se obtienen las de $r(x_1, x_2)$ y $t(x_1, x_2)$ respectivamente :

$$\begin{cases} r(x_1, x_2) = [\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi)]_{x_2}^{x_2^0} + \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi(x_1, \xi_2)] d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi(x_1, \xi_2) d\xi_2; \\ t(x_1, x_2) = -\frac{J[\Phi]}{\varrho(x_1, x_2)} - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J[\Phi(\xi_1, x_2)] d\xi_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\Phi(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)} \cdot d\xi_1 \end{cases}$$

9. Cálculo de las derivadas terceras. A partir de las fórmulas anteriores y de la de $s(x_1, x_2)$ se deducen por derivación respecto a x_1 y x_2 las derivadas de tercer orden, habiendo de calcularse previamente las derivadas parciales de la integral general $\lambda(x_1, x_1^0, k_1)$ considerada como función de las condiciones iniciales x_1^0, k_1 con relación a éstas, pues dicha función interviene en todas las fórmulas, lo cual se obtiene fácilmente a partir de las ecuaciones diferenciales ordinarias y condiciones iniciales a que satisfacen dichas derivadas :

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\right) = \varrho_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial k_1}; \qquad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\right)_{x_1 = x_1^0} = 1; \text{ [5]}$$

resultando :

$$\left[\ln \frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\right]_{x_1^0}^{x_1} = \int_{x_1^0}^{x_1} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1^0, k_1)] dt;$$

$$\frac{\partial [\lambda(x_1, x_1^0, k_1)]}{\partial k_1} = \exp. \left[\int_{x_1^0}^{x_1} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1^0, k_1)] dt\right]$$

(5) Consúltese Sansone : [5]. Parte prima, págs. 25 a 31.

cambiando

$$x_1^0 \text{ en } x_1, \quad k_1, \text{ en } x_2, \quad \text{y} \quad x_1 \text{ en } x_1^0,$$

se deduce:

$$\frac{\partial\,[\lambda\,(x_1^0,\; x_1,\; x_2)]}{\partial\, x_2} = \exp.\left[\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}\,[t,\; \lambda\,(t,\; x_1,\; x_2)]\, dt\right]$$

y como:

$$\varrho\,(x_1,\; x_2) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\,\frac{\dfrac{\partial\,[\lambda\,(x_1^0,\; x_1,\; x_2)]}{\partial\, x_1}}{\dfrac{\partial\,[\lambda\,(x_1^0,\; x_1,\; x_2)]}{\partial\, x_2}}$$

resulta asimismo:

$$\frac{\partial\,[\lambda\,(x_1^0,\; x_1,\; x_2)]}{\partial\, x_1} = -\,\varrho\,(x_1,\; x_2)\cdot\exp.\left[\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}\,[t,\; \lambda\,(t,\; x_1,\; x_2)]\, dt\right]$$

cambiando en esta última $x_1{}^0$ por x_1, x_2 por k_1, x_1 por $x_1{}^0$,

obtendremos la expresión de $\dfrac{\partial\,[\lambda\,(x_1,\; x_1^0,\; k_1)]}{\partial\, x_1^0}$:

$$\frac{\partial\,[\lambda\,(x_1,\; x_1^0,\; k_1)]}{\partial\, x_1^0} = -\,\varrho\,(x_1^0,\; k_1)\cdot\exp.\left\{\int_{x_1^0}^{x_1} \varrho_{x_2}\,[t,\; \lambda\,(t,\; x_1^0,\; k_1)]\, dt\right\}$$

Con esto, podemos calcular las expresiones de las derivadas $J_{x_1}(\Phi)$ y $J_{x_2}(\Phi)$ que son las siguientes:

$$J_{x_1}\,[\Phi\,(x_1, x_2)] = \frac{\partial}{\partial\, x_1}\oint_{L\,(x_1,\, x_2)} \Phi\,(\xi_1,\; \xi_2)\, d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial\, x_1}\int_{x_1^0}^{x_1} \Phi\,[\xi_1,\; \lambda\,(\xi_1,\; x_1^0,\; k_1)]\, d\xi_1 =$$

$$= \Phi\,(x_1,\; x_2) + \int_{x_1^0}^{x_1} \Phi_{x_2}\,[\xi_1,\; \lambda\,(\xi_1,\; x_1^0,\; k_1)]\cdot\frac{\partial\,\lambda}{\partial\, k_1}\cdot\frac{\partial\, k_1}{\partial\, x_1}\cdot d\,\xi_1 =$$

$$= \Phi\,(x_1, x_2) - \varrho\,(x_1, x_2)\cdot\exp.\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}\,[t, \lambda\,(t, x_1, x_2)]\, dt\right\}\cdot J\big[\Phi_{x_2}(x_1, x_2)\cdot\exp.\,\{J\,[\varrho_{x_2}(x_1 x_2)]\}\big] \text{ [6]}$$

---

(6) Hemos designado de acuerdo con la notación usada hasta ahora por $J\,[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]$ las integrales curvilíneas $\int_{x_1^0}^{x_1} \varrho_{x_2}\,[t,\; \lambda\,(t,\; x_1^0,\; k_1)]\, dt = \oint_{L\,(x_1,\, x_2)} \varrho_{x_2}\,(\xi_1,\; \xi_2)\, d\xi_1$ que intervienen en las fórmulas de las derivadas de $\lambda\,(x_1,\; x_1^0,\; k_1)$ respecto a las condiciones iniciales.

$$J_{x_2}[\Phi(x_1, x_2)] = \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \oint_{L(x_1, x_2)} \Phi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_1^0}^{x_1} \Phi[\xi_1, \lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)]\, d\xi_1 =$$

$$= \int_{x_1^0}^{x_1} \Phi_{x_2}[\xi_1, \lambda(\xi_1, x_1^0\, k_1)] \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial k_1} \cdot \frac{\partial k_1}{\partial x_2} \cdot d\xi_1 =$$

$$= J[\Phi_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]\}] \cdot \exp. \left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt \right\}$$

deduciéndose además de ellas, la relación:

$$J_{x_1}[\Phi(x_1, x_2)] + \varrho(x_1, x_2) \cdot J_{x_2}[\Phi(x_1, x_2)] \equiv \Phi(x_1, x_2)$$

Las expresiones de las derivadas terceras buscadas de $u(x_1, x_2)$ son las siguientes:

$$u_{111}(x_1, x_2) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} [\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi)] \right\}_{x_1}^{x_1^0} +$$

$$+ \int_{x^0}^{x_2} \{\varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi(x_1, \xi_2)]\}_{x_1} d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi_{x_1}(x_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$u_{112}(x_1, x_2) = -\varrho(x_1, x_2) \cdot \exp. \left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt \right\} \cdot J[\Phi_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1 x_2)]\}] +$$
$$+ \Phi(x_1, x_2)$$

$$u_{122}(x_1, x_2) = J[\Phi_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]\}] \cdot \exp. \left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt \right\}$$

$$u_{222}(x_1, x_2) = -\left[\frac{J\{\Phi(x_1, x_2)\}}{\varrho(x_1, x_2)} \right]_{x_2} -$$

$$- \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J[\Phi(\xi_1, x_2)] \right\}_{x_2} d\xi_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \frac{\Phi(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)} \right\}_{x_2} \cdot d\xi_1$$

Las fórmulas resolutivas obtenidas demuestran la existencia de solución con las condiciones iniciales señaladas para la ecuación (3), como se comprueba inmediatamente, sumando a la expresión obtenida para $u_{112}(x_1, x_2)$, la de $u_{122}(x_1, x_2)$ multiplicada por $\varrho(x_1, x_2)$

10. Solución al sistema (3'). La solución $v(x_1, x_2)$ de la ecuación (3') se obtendrá sumando $v^0(x_1, x_2)$ (función continua con deri-

vadas parciales hasta las de tercer orden, asimismo continuas que satisface las condiciones iniciales de (3')) a la solución de la ecuación :

$$w_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot w_{122} = \overline{\Phi}(x_1, x_2) \; ; \quad (6''')$$

con las condiciones iniciales :

$$w(x_1, x_2^0) = w(x_1^0, x_2) = w_1(x_1, x_2^0) \equiv 0$$

resultante por transformación de la (3') mediante el cambio de función $v = w + v^0$; ecuación del mismo tipo que la (3), por lo que la solución $v(x_1, x_2)$ de (3') tendrá por expresión la :

$$v(x_1, x_2) = v^0 + \iint_{R(P)} J[\overline{\Phi}(\xi_1, \xi_2)] \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

y adoptando por ejemplo, como función $v^0(x_1, x_2)$ la indicada al pie de la página 112 :

$$v^0(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2) - \varphi(x_1^0) + (x_1 - x_1^0) \cdot [\chi(x_2) - \varphi'(x_1^0)]$$

se tendrá :

$$\overline{\Phi}(x_1, x_2) = -\varrho(x_1, x_2) \cdot \chi''(x_2) \; ;$$

$$J[\overline{\Phi}(x_1, x_2)] = -\oint_{L(x_1 x_2)} \varrho(\xi_1, \xi_2) \cdot \chi''(\xi_2) \, d\xi_1 = -$$

$$-\int_{x_1^0}^{x_1} \varrho[\xi_1, \lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)] \cdot \chi''[\lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)] \, d\xi_1$$

y teniendo en cuenta :

$$\frac{d}{d\xi_1} \lambda(\xi_1, x_1^0, k_1) = \varrho[\xi_1, \lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)]$$

resultará :

$$J[\overline{\Phi}(x_1, x_2)] = -\int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d}{d\xi_1} \chi'[\lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)] \, d\xi_1 = -\Big\{\chi'[\lambda(\xi_1, x_1^0, k_1)]\Big\}_{x_1^0}^{x_1} =$$

$$= \chi'[\lambda(x_1^0, x_1^0, k_1)] - \chi'[\lambda(x_1, x_1^0, k_1)] = \chi'(k_1) - \chi'(x_2) =$$

$$= \chi'[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)] - \chi'(x_2)$$

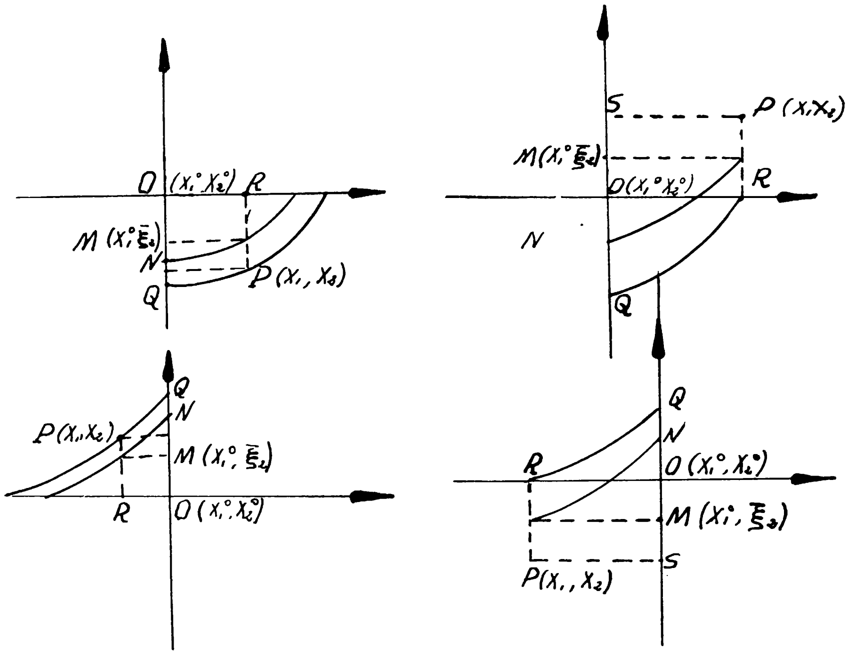
por tanto, se tendrá en definitiva :

$$v(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2) - \varphi(x_1^0) + (x_1 - x_1^0) \cdot [\chi(x_2) - \varphi'(x_1^0)] +$$

$$+ \iint_{R(P)} \{\chi'[\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2) - \chi'(\xi_2)]\} \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

y superponiendo a la misma la solución $u(x_1, x_2)$ obtenida para (3), tendremos para solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales señaladas, la:

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2) - \varphi(x_1^0) + (x_1 - x_1^0) \cdot [\chi(x_2) - \varphi'(x_1^0)] +$$
$$+ \iint_{R(P)} \{\chi'[\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)] - \chi'(\xi_2) + J[\Phi(\xi_1 \xi_2)]\} d\xi_1 d\xi_2 ; \quad (7)$$



Ahora ya podemos justificar lo dicho en el n.º 3 sobre la determinación del dominio de dependencia de un punto P.

En efecto, en la expresión de u obtenida, figura la integral:

$$\iint_{R(P)} \chi'[\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)] d\xi_1 \cdot d\xi_2 = \int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \chi'[\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)] d\xi_1$$

en la que $\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)$ es precisamente el valor de la ordenada en el origen correspondiente a la curva integral $L(\xi_1, \xi_2)$ que pasa por el punto (ξ_1, ξ_2) y que para cada valor de $\bar{\xi}_2$ comprendido entre x_2^0 y x_2 varía de OM a ON; siendo M y N respectivamente las trazas del eje $x_1 = x_1^0$ con la recta $x_2 = \bar{\xi}_2$ y la curva del haz (γ) que pasa por el punto $(x_1, \bar{\xi}_2)$ y por tanto, el intervalo de variación total de $\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)$ al tomar $\bar{\xi}_2$ todos los valores del intervalo de integración correspondiente será OQ ó QS, según P pertenezca al 2.º ó 4.º cuadrante, o bien al 1.º ó 3.º respectivamente; por otra parte en la expresión de u figuran $\varphi(x_1)$ y $\psi(x_2)$ y para determinar $u(x_1, x_2)$ será preciso conocer los valores de $\chi(x_2)$, $\psi(x_2)$ sobre dicho segmento, así como los de $\varphi(x_1)$ sobre OR no influyendo para nada sobre el valor de $u(x_1, x_2)$ en P, los valores de $\chi(x_2)$, $\psi(x_2)$, $\varphi(x_1)$ fuera de los segmentos correspondientes, quedando, pues, demostrada la legitimidad de lo afirmado en el n.º 3.

Por otra parte es lícito definir el dominio de prolongación (D) de los segmentos QS del eje $x_1 = x_1^0$, UR del eje $x_2 = x_2^0$, tal como se hizo en el n.º 4, ya que QS y UR contienen los dominios de dependencia de todos los puntos P de (D) y por tanto, dadas las funciones $\chi(x_2)$, $\psi(x_2)$ sobre el segmento QS y la $\varphi(x_1)$ sobre UR queda unívocamente determinado el valor de la solución $u(x_1, x_2)$ en cada punto P de (D).

Asimismo las fórmulas resolutivas obtenidas ponen de manifiesto que sólo precisa imponer a $\varrho(x_1, x_2)$ la existencia y continuidad de derivada parcial primera respecto a x_2 para asegurar la existencia de derivadas terceras mixtas de la solución $u(x_1, x_2)$ que son las únicas que figuran en la ecuación (1) mientras que para asegurar la existencia de *todas las derivadas terceras*, se requiere que $\varrho(x_1, x_2)$ admita derivadas parciales primeras y segundas continuas en (G).

11. Unicidad de la solución. Falta ahora demostrar la unicidad de la solución y que el problema de Cauchy es adecuado a la ecuación. Para la primera, si $u(x_1, x_2)$ fuese otra solución de (1) cumpliendo las condiciones iniciales:

$$\bar{u}(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)\,; \quad \bar{u}(x_1^0, x_2) \equiv \psi(x_2)\,; \quad \bar{u}_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$$

la función

$$\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \bar{u}(x_1, x_2)$$

satisfará evidentemente a la ecuación homogénea $u_{112} + \varrho \cdot u_{122} = 0$ con las condiciones iniciales: $\bar{\bar{u}}(x_1^0, x_2) = \bar{\bar{u}}(x_1, x_2^0) = \bar{\bar{u}}_1(x_1, x_2^0) \equiv 0$ y su derivada parcial segunda: $\bar{\bar{s}} = \bar{\bar{u}}_{12}(x_1, x_2)$ a la ecuación lineal homogénea de primer orden:

$$s_1 + \varrho(x_1, x_2) \cdot s_2 = 0$$

con la condición inicial $\bar{\bar{s}}(x_1^0, x_2) \equiv 0$ que admite como única solución (por ser homogénea, de condiciones iniciales homogéneas y en virtud del teorema de existencia de las ecuaciones de 1.er orden) la idénticamente nula: $\bar{\bar{s}}(x_1\ x_2) \equiv 0$, lo que implica que $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ sea de la forma:

$$\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) \equiv \alpha(x_1) + \beta(x_2) ;$$

y por tener que anularse idénticamente para $x_1 = x_1^0$, y para $x_2 = x_2^0$ deberá cumplirse $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) \equiv 0$; es decir, $u(x_1, x_2) \equiv \bar{u}(x_1, x_2)$.

Probada la existencia y unicidad de la solución de (1) sólo nos resta demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para asegurar que el problema es apropiado a la ecuación dada. Esto se comprueba inmediatamente mediante la fórmula que da la expresión de $u(x_1, x_2)$ teniendo presente las hipótesis hechas sobre las funciones $\varphi(x_1)$, $\psi(x_2)$, $\chi(x_2)$ y las propiedades de las integrales definidas dependientes de un parámetro.

CAPITULO III

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACIÓN LINEAL DE TIPO HIPERBÓLICO:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \cdot u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k \cdot u_k + c \cdot u = g(x_1, x_2)$$

1. Planteo del problema. Dada la ecuación lineal

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \cdot u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k \cdot u_k + c \cdot u = g(x_1, x_2) ; \qquad (1)$$

cuyos coeficientes a_{ij}, b_k, c, g son funciones continuas que admiten derivadas parciales, asimismo continuas, en un cierto recinto abierto y conexo G con frontera conexa, y $\varrho\ (x_1, x_2)$ una función continua que no se anula en G, es decir, de signo constante en el mismo (signo que siempre se puede suponer positivo 1. — CAP. II) cuyos valores se mantienen inferiores a un cierto número $h < 1$ (1) y que admite derivadas parciales primeras y segundas continuas. Sea $0(x_1^0, x_2^0)$

(1) En caso contrario, bastará efectuar el cambio de variables: $\xi_1 = kx_1$; $\xi_2 = x_2$ siendo k un número positivo cualquiera mayor que el extremo superior E de $\varrho(x_1, x_2)$ en G, es decir, $E < k$.

un punto interior de G, y $\alpha_1 < x_1 < \alpha_2$; $\beta_1 < x_2 < \beta_2$ los intervalos abiertos interiores a G, determinados respectivamente en el mismo, por las rectas $x_2 = x_2^0$; $x_1 = x_1^0$; sean $\varphi(x_1)$, $\Psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ tres funciones que cumplen las siguientes condiciones:

1.ª) $\varphi(x_1)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden continuas en el intervalo $\alpha_1 < x_1 < \alpha_2$ considerado

2.ª) $\Psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de tercero y segundo orden, respectivamente, continuas en el intervalo $\beta_1 < x_2 < \beta_2$. Dichas funciones verifican además las condiciones:

$$\varphi(x_1^0) = \Psi(x_2^0) \; ; \quad \varphi'(x_1^0) = \chi(x_2^0)$$

2. Curvas características. Estas vienen dadas por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales:

$$\begin{cases} \varphi_{x_1} = 0 \\ \varphi_{x_2} = 0 \\ \varphi_{x_1} + \varrho(x_1, x_2) \cdot \varphi_{x_2} = 0 \end{cases}$$

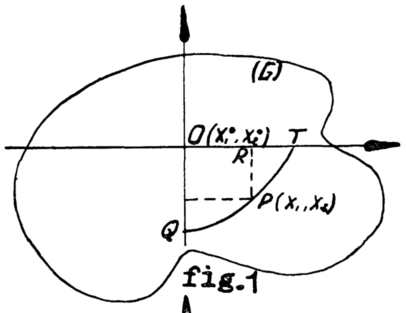
en que se descompone la expresión diferencial:

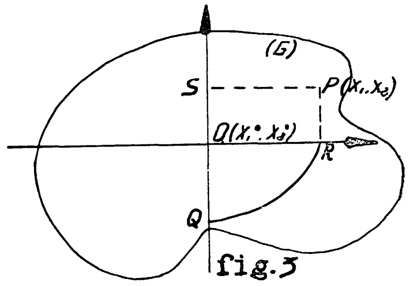
$$\varphi_{x_1}^2 \cdot \varphi_{x_2} + \varrho(x_1, x_2) \cdot \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_2}^2 = 0$$

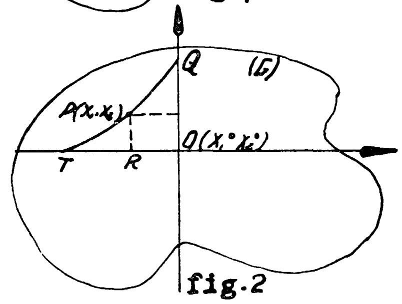
y cuyas características las constituyen las familias de curvas consideradas anteriormente (2. CAP. II):

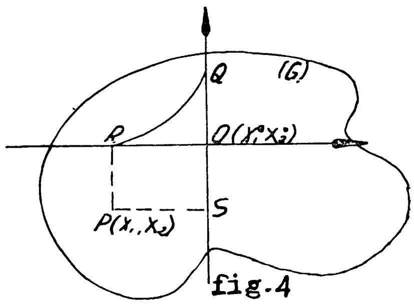
$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 = C_1 \\ (\beta) & x_2 = C_2 \\ (\gamma) & \lambda(x_1^0, x_1, x_2) = C_3 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

3. Dominio de dependencia de un punto P. Definiremos el dominio de dependencia de un punto P (x_1, x_2) de G, del mismo modo que en el capítulo anterior, es decir (supuesto P lo suficientemente próximo del origen para que se verifiquen las condiciones allí exigidas (según que dicho punto pertenezca al 2.º ó 4.º cuadrante, o bien al 1.º ó 3.er cuadrante, el dominio de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$









estará constituido respectivamente por los segmentos OQ (Fgs. 1 y 2) o QS (Figs. 3 y 4) y sobre $x_2 = x_2^0$ por el segmento OR determinado por el origen y por la proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$.

4. Determinación del dominio de prolongación. Análogamente a cómo se hizo en el capítulo anterior, consideremos la correspondencia existente entre cada punto P de G y su *región asociada* constituida por el triángulo mixtilíneo OQT (supuesto P situado en el 2.º ó 4.º cuadrante) limitado por los ejes y por la característica del haz (γ) que pasa por él, como se indica en las figuras 1 y 2, o por el trapecio mixtilíneo $PRQS$ (si P está situado en 1.º ó 3.er cuadrante) limitado por el eje $x_1 = x_1^0$ y por las características de los haces (α) y (β) que pasan por él, así como por la característica del haz (γ) que pasa por R proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ (figs. 3 y 4).

Dadas las funciones $\Psi(x_2)$, $\chi(x_2)$ sobre el segmento QS del eje $x_1 = x_1^0$ y la $\varphi(x_1)$ sobre el segmento UR del eje $x_2 = x_2^0$, llamaremos *dominio de prolongación* D de dichos segmentos, al conjunto de puntos P, de G, tales que la correspondiente región asociada sea interior a G en sentido estricto, estando además contenidos en QS y UR los correspondientes dominios de dependencias sobre $x_1 = x_1^0$ y $x_2 = x_2^0$ respectivamente. Dichos dominios de prolongación, tal como los hemos definido se indican en las figuras 5, 6 y 7 del capítulo anterior y corresponden a los mismos casos allí considerados, por lo que no insistiremos más sobre el particular, justificando más adelante tales definiciones.

Nos proponemos demostrar, por un método de aproximaciones sucesivas el siguiente :

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo el dominio de prolongación D de dos segmentos cualesquiera de los ejes $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$ (que contengan el origen) que satisface a las condiciones iniciales :

a) se convierte en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2^0$, es decir, $u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)$
b) en $\Psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$, o sea, $u(x_1^0, x_2) \equiv \Psi(x_2)$
c) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ se reduce a la función

$$\chi(x_2) \text{ para } x_1 = x_1^0, \text{ es decir, } u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$$

Además, esta solución es única.

5. DEFINICIÓN DE LAS APROXIMACIONES Y CÁLCULO DE LAS MISMAS. Consideremos las ecuaciones en derivadas parciales que siguen :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112}^0 + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122}^0 = g(x_1, x_2) \\ u_{112}^n + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122}^n = -\sum\limits_{i, j = 1, 2} a_{ij} u_{ij}^{n-1} - \sum\limits_{k = 1, 2} b_k u_k^{n-1} - c \cdot u^{n-1} (n=1,2\ldots) \end{array}\right\} (3)$$

cuyas soluciones determinaremos por recurrencia del siguiente modo : la de la primera con las condiciones iniciales :

$$u^0(x_1^0, x_2) \equiv \Psi(x_2) \text{ ; } u^0(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1) \text{ ; } u_1^0(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$$

y las de las restantes ecuaciones con las condiciones :

$$u^n(x_1^0, x_2) = u^n(x_1 \; x_2^0) = u_1^n(x_1^0, x_2) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dichas ecuaciones son del mismo tipo que la estudiada en el Capítulo II, así como las condiciones iniciales impuestas a las mismas, por lo que en virtud de lo allí demostrado, las funciones u^n quedan perfectamente determinadas en todo dominio de prolongación construido de acuerdo con la definición que se acaba de dar en el número anterior.

Las fórmulas resolutivas que allí obtuvimos [(5'') del n.º 6 y (7) del n.º 10 CAP. II] son las mismas que nos expresarán las funciones $u^0(x_1, x_2)$ y $u^n(x_1, x_2)$; $(n = 1, 2, ...)$, es decir :

$$u^0(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \Psi(x_2) - \varphi(x_1^0) + (x_1 - x_1^0) \cdot [\chi(x_2) - \varphi'(x_1^0)] +$$
$$+ \iint_{R(P)} \{\chi'[\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)] - \chi'(\xi_2) + J[g(\xi_1, \xi_2)]\} d\xi_1\, d\xi_2$$

$$u^n(x_1, x_2) = \iint_{R(P)} J[\Phi^{n-1}(\xi_1\ \xi_2)] d\xi_1\, d\xi_2$$

en donde, por brevedad representamos $\Phi^r(x_1, x_2) \equiv - \sum_{i;j=1,2} a_{ij}\, u^r{}_{ij} -$ $- \sum_{k=1,2} b_k\, u_k{}^r - cu^r$

Del mismo modo, las derivadas de las aproximaciones definidas por las ecuaciones (3) vendrán expresadas por fórmulas resolutivas similares a las obtenidas en los números 7, 8 y 9 del capítulo anterior.

Por otra parte como se ha visto en dicho capítulo los dominios de dependencia y prolongación de tales aproximaciones son los definidos en los números 3 y 4.

6. Acotación de las aproximaciones correspondientes a los índices $n = 0$, $n = 1$, y de sus derivadas parciales. Designando por H una cota superior en módulo de los coeficientes a_{ij}, b_k, c de las ecuaciones (3) y de las derivadas primeras de los mismos en (G), por M_0 una cota superior de los módulos de $u^0(x_1, x_2)$ y sus derivadas parciales hasta las de tercer orden, cotas existentes siempre en todo dominio de prolongación por las hipótesis hechas al principio sobre los coeficientes a_{ij}, b_k, c y por la continuidad (que se comprueba inmediatamente mediante las correspondientes fórmulas resolutivas) de $u^0(x_1, x_2)$ y sus derivadas, resultan en primer lugar, las desigualdades válidas en todo el dominio de prolongación D :

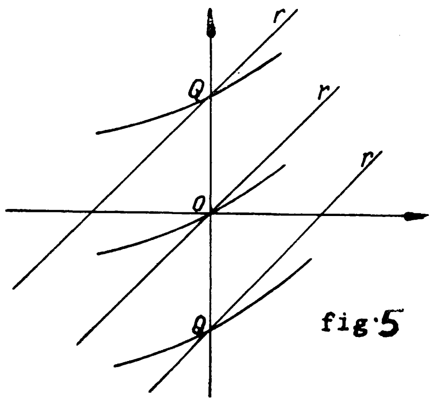
$$|\Phi^0(x_1, x_2)| = \left|\sum a_{ij}\, u_{ij}^0 + \sum b_k u_k^0 + c \cdot u^0\right| \leq 6HM_0$$

$$|\Phi_{x_1}^0(x_1, x_2)| \leq \left|\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij1}^0 + \sum_{k=1,2} b_k\, u_{k1}^0 + cu_1^0\right| + \left|\sum_{i,j=1.2} (a_{ij})_{x_1}\, u_{ij}^0 +\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1,2} (b_k)_{x_1}\, u_k^0 + (c)_{x_1}\, u^0\right| \leq 12\, HM_0$$

y análogamente :

$$| \Phi^0_{x2} | x_1, x_2) | \leq 12 HM_0$$

Antes de seguir adelante, conviene que hagamos una considera-



fig·5

ción previa que nos facilitará la obtención de las cotas que pretendemos determinar. Observemos, que en virtud de las hipótesis efectuadas sobre $\varrho(x_1, x_2)$; $(0 < \varrho(x_1, x_2) < h < 1)$ para todo $P(x_1, x_2)$ de G, la posición de las curvas características $\lambda(x_1^0, x_1, x_2) = C_3$ de la ecuación dada con respecto a la recta $\underline{r}$ de coeficiente angular 1 que pasa por el punto Q de intersección de tales características con el eje $x_1 = x_1^0$ es la que se representa en la figura 5 : es decir, la curva pasa de la izquierda a la derecha de la recta r al pasar por tal punto Q no volviendo a cortar más a dicha recta.

En efecto, la pendiente de la curva en Q, $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ es menor que la de la recta r y la curva no vuelve a cortar a la recta r en otro punto distinto del Q, puesto que en caso contrario, en virtud del teorema de los incrementos finitos habría un punto P de la curva característica, en el cual la tangente a la misma sería paralela a la recta r es decir, de pendiente $\varrho(P) = 1$, (fig. 6) contrariamente a la hipótesis.

De ahí se sigue, que para todo punto $P(x_1, x_2)$, figura 7 de una de tales características, se verifica :

$$| \xi | + | \eta | > | OQ | ; \; (\text{con } \xi = x_1 - x_1^0 ; \; \eta = x_2 - x_2^0)$$

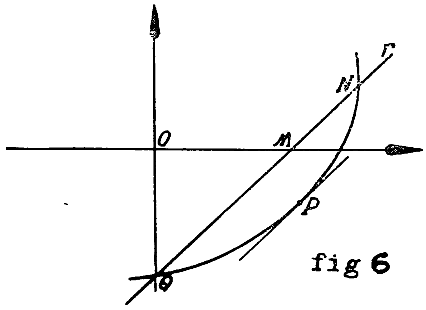


fig 6

Sentado esto, pasemos a calcular las cotas superiores de $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas.

Primeramente acotemos la integral curvilínea $\oint_{L(x_1, x_2)} \Phi^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = J[\Phi^0(x_1, x_2)]$, que figura en las expresiones de las mismas, lo que conseguiremos fácilmente, reduciendo dicha integral curvilínea a integral definida ordinaria expresando las coordenadas de los puntos del camino de integración en función del parámetro $u = |\xi| + |\eta| = \xi' + \eta'$ resultando :

$$du = d\xi' + d\eta' = \left(1 + \frac{d\eta'}{d\xi'}\right) \cdot d\xi'$$

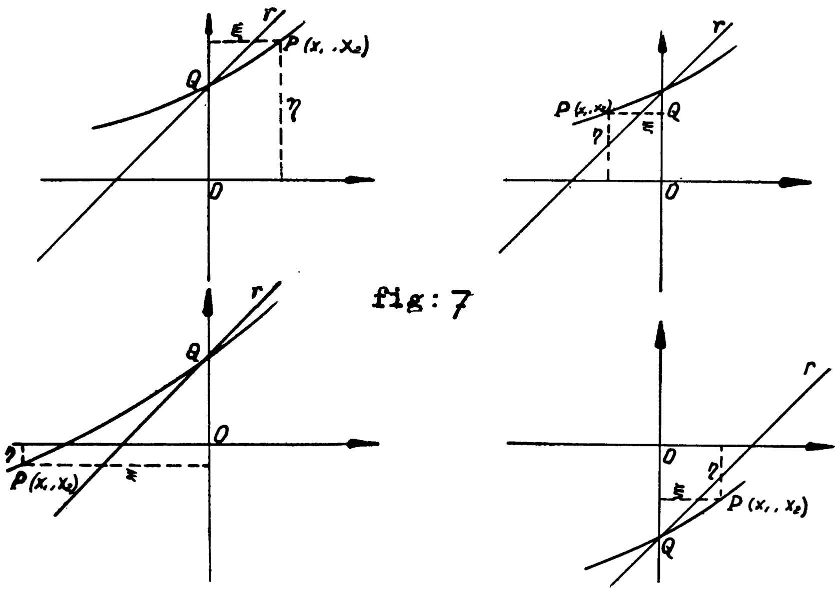


fig: 7

y teniendo en cuenta que en los arcos del camino de integración pertenecientes al 1.º ó 3.er cuadrante se verifica respectivamente:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= x_1^0 + \xi = x_1^0 + \xi' \\ \xi_2 &= x_2^0 + \eta = x_2^0 + \eta'\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\xi_1 &= x_1^0 + \xi = x_1^0 - \xi' \\ \xi_2 &= x_2^0 + \eta = x_2^0 - \eta'\end{aligned}\right\}$$

y en ambos casos:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{d\eta'}{d\xi'} = \varrho(x_1^0 \pm \xi' ;\ x_2^0 \pm \eta')$$

(Los signos superiores para el 1.er cuadrante y los inferiores para el 3.º) mientras que en el 2.º y 4.º cuadrantes es respectivamente:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= x_1^0 + \xi = x_1^0 - \xi' \\ \xi_2 &= x_2^0 + \eta = x_2^0 + \eta'\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\xi_1 &= x_1^0 + \xi = x_1^0 + \xi' \\ \xi_2 &= x_2^0 + \eta = x_2^0 - \eta'\end{aligned}\right\}.$$

y en los dos casos:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = -\frac{d\eta'}{d\xi'} = \varrho(x_1^0 \mp \xi' ;\ x_2^0 \pm \eta')$$

(Los signos superiores para el 2.º cuadrante y los inferiores para el 4.º) se obtiene en definitiva (habiendo designado por $\bar{\varrho}(\xi', \eta')$ la transformada de $\varrho(\xi_1, \xi_2)$ mediante el cambio precedente):

$$d\xi' = \frac{du}{1 \pm \bar{\varrho}(\xi', \eta')}$$

tomando el signo + o el — para $\bar{\varrho}(\xi', \eta')$ según se considere el 1.º ó 3.º cuadrante, o el 2.º ó 4.º cuadrante, respectivamente). Teniéndose en consecuencia (designando por $\bar{\Phi}^0(\xi', \eta')$ la transformada de $\Phi^0(\xi_1, \xi_2)$ por el cambio considerado):

$$|J(\Phi^0)| = \left|\oint_{L(x_1, x_2)} \Phi^0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1\right| = \left|\int_{u_0}^{u} \bar{\Phi}^0(\xi', \eta') \frac{du}{1 \pm \bar{\varrho}(\xi', \eta')}\right| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot \left[\frac{u}{1!}\right]_{u_0}^{u} =$$

$$= \frac{6HM_0}{1-h}\left[\frac{(\xi' + \eta')}{1!} - \frac{|OQ|}{1!}\right] < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')}{1!}$$

puesto que:

$$|\bar{\Phi}^0(\xi', \eta')| < 6HM_0 ; \frac{1}{1 \pm \bar{\varrho}(\xi_1' \eta')} < \frac{1}{1-h} ; \xi' + \eta' > |OQ|$$

según hemos visto anteriormente.

Y análogamente:

$$|J[\Phi^0_{x_2}(x_1, x_2)]| = \left| \int_{L(x_1, x_2)} \Phi^0_{x_2}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right| < \frac{12HM_0}{1-h} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

Vamos ahora a demostrar el siguiente:

TEOREMA I: *La aproximación* $u^1(x_1, x_2)$ *y sus derivadas primeras y segundas admiten como cota superior* $M_0 \cdot K \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$, *mientras que sus derivadas terceras admiten la cota numérica* $\overline{M}_0$ *siendo* K *y* $\overline{M}_0$ *números positivos perfectamente definidos.*

En efecto, teniendo en cuenta la acotación que acabamos de obtener al aplicar el teorema de la media, resulta inmediatamente:

$$|u^1(x_1, x_2)| = \left| \iint_{R(P)} J[\Phi^0(\xi_1, \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \right| < \int_0^{\xi'} d\xi'_1 \int_0^{\eta'} \frac{6HM_0}{1-h} \cdot \frac{(\xi'_1 + \xi'_2)}{1!} d\xi'_2 <$$

$$< \frac{6HM_0}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2 \cdot 3} \frac{\xi' + \eta'}{1!} < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot (\alpha + \beta)^2 \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

siendo α y β los extremos superiores de las distancias de los puntos del contorno de G a los ejes $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$, respectivamente.

Asimismo se obtendrá:

$$|u^1_1(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|u^1_2(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

Las cotas de las derivadas segundas (CAP. II págs. 114 y 115) son las siguientes (en las que L designa una cota superior de los módulos de $\varrho(x_1, x_2)$, $\frac{1}{\varrho(x_1, x_2)}$, y de sus derivadas primeras y segundas en G):

$$|u^1_{11}(x_1, x_2)| < 12L \frac{HM_0}{1-h} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!} + 6L \frac{HM_0}{1-h} (\alpha + \beta) \frac{\xi' + \eta'}{1!} + 6HM_0 \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

ya que :

$$|[\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^0)]_{x_2}^{x_2^0}| \leq |\varrho(x_1, x_2^0)| \cdot |J[\Phi^0(x_1, x_2^0)]| + |\varrho(x_1, x_2)| \cdot |J[\Phi^0(x_1, x_2)]| <$$

$$< 12\, L\, \frac{H\, M_0}{1-h} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^0(x_1, \xi_2)]\, d\xi_2 \right| < \frac{6\, LHM_0}{1-h} \int_0^{\eta'} \frac{\xi'_1 + \xi'_2}{1\,!} d\xi'_2 \leq \frac{6\, LHM_0}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!} <$$

$$< \frac{6\, LHM_0}{1-h} (\alpha + \beta) \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^0(x_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| < 6\, HM_0 \int_0^{\eta'} d\xi'_2 = 6\, HM_0 \frac{\eta'}{1!} \leqq 6\, HM_0 \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

y análogamente :

$$|u_{12}^1(x_1, x_2)| = |J(\Phi^0)| < \frac{6\, HM_0}{1-h} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$|u_{22}^1(x_1, x_2)| < 6\, LHM_0 \left[\frac{\alpha + \beta + 1}{1-h} + 1 \right] \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

El cálculo de las cotas de las derivadas terceras, presenta más complicación, por lo que procederemos a acotar separadamente los diversos términos que las componen.

Para ello teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas $J_{x_1}[\Phi]$ y $J_{x_2}[\Phi]$ (N.º 9 CAP. II), se deduce :

$$|J_{x_1}(\Phi^0)| < 6\, HM_0 \left[1 + \frac{2\, L \cdot \exp.\{2\, L\, \alpha\}}{1-h} (\alpha + \beta) \right]; |J_{x_2}(\Phi^0)| <$$

$$< 12 \exp.\{2\, L\, \alpha\} \frac{HM_0}{1-h} \cdot (\alpha + \beta)$$

(pues :

$$\exp.\left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt \right\} < \exp.\left\{ \left| \int_{x_1}^{x_1^0} L \cdot dt \right| \right\} < \exp.\, \{L \cdot \alpha\}\, ;$$

$$\exp.\{J([\varrho_{x_2}(x_1., x_2)]\} < \exp.\{L\alpha\};$$

$$\text{y } |\, J(\Phi_{x_2}^0)\, | < \frac{12\, HM_0}{1-h} \frac{\xi' + \eta'}{1\,!} < \frac{12\, HM_0}{1-h} (\alpha + \beta),$$

como acabamos de ver)
con lo que se obtienen para los términos componentes de la derivada $u^1_{111}(x_1, x_2)$ (n.º 9 CAP. II) las acotaciones :

$$\left|\left[\varrho_{x_1}(x_1 x_2) \cdot J(\Phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12\, L \frac{H M_0}{1-h} (\alpha + \beta)$$

$$\left|\left[\varrho(x_1, x_2)\, J_{x_1}(\Phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12\, LHM_0 + 24\, L^2 \exp. \{2\, L\alpha\} \frac{H M_0}{1-h} (\alpha + \beta)$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \left\{\varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^0(x_1, \xi_2)]\right\}_{x_1} d\xi_2\right| <$$

$$< 6\, LHM_0 (\alpha + \beta)\left[1 + (\alpha + \beta) \frac{2\, L \exp. \{2\, L\alpha\} + 1}{1-h}\right]$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \overset{0}{\Phi}_{x_1}(x_1, \xi_2)\, d\xi_2\right| < 12\, HM_0 (\alpha + \beta)$$

Análogamente :

$$|\, u^1_{112}(x_1, x_2)\,| < 6\, HM_0 \left[\frac{2\, L(\alpha + \beta) \cdot \exp. \{2\, L\alpha\}}{1-h} + 1\right]$$

$$|\, u^1_{122}(x_1, x_2)\,| < 12 \cdot \exp. \{2\, L\alpha\} \cdot \frac{HM_0}{1-h} \cdot (\alpha + \beta)$$

y finalmente para $u^1_{222}(x_1, x_2)$ procederemos igual que hemos hecho con $u^1_{111}(x_1, x_2)$ a acotar separadamente sus diversos términos :

$$\left|\frac{\varrho_{x_2}(x_1, x_2)}{\varrho^2(x_1, x_2)} \cdot J(\Phi^0)\right| = \left|\left[\frac{1}{\varrho(x_1, x_2)}\right]_{x_2} J[\Phi^0(x_1, x_2)]\right| <$$

$$< 6\, LH \frac{M_0}{1-h} (\xi' + \eta') < 6\, L \frac{HM_0}{1-h} (\alpha + \beta)\ ;$$

$$\left|\frac{1}{\varrho(x_1, x_2)} \cdot J_{x_2}[\Phi^0(x_1, x_2)]\right| < 12\, L \exp. \{2\, L\alpha\} \cdot \frac{HM_0}{1-h} (\alpha + \beta)\ ;$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J[\Phi^0(\xi_1, x_2)]\right]_{x_2} d\xi_1\right| < 6L \frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)^2[1+2L. \exp. \{2L\alpha\}];$$

y análogamente :

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\Phi^0(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)}\right]_{x_2} d\xi_1\right| < 18 \cdot L \cdot HM_0(\alpha + \beta)$$

Si ahora designamos por K el mayor de los factores que multiplican a $M_0 \cdot \dfrac{\xi' + \eta'}{1\,!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, resultará en definitiva como cota superior común de las mismas, la $M_0 K \cdot \dfrac{\xi' + \eta'}{1\,!}$ y si $\overline{M}_0$ expresa el máximo de M_0 y de las cotas numéricas halladas para las derivadas terceras de $u^1(x_1, x_2)$ una cota común de dichas derivadas terceras es $\overline{M}_0$

El teorema resulta así, pues, demostrado.

7. Acotación de la aproximación correspondiente a $n = 2$ y sus derivadas parciales.

Teorema II. *Una cota superior de $u^2(x_1, x_2)$ y sus derivadas primas y segundas es de la forma $M_0 K^2 \cdot \dfrac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$, las derivadas terceras admiten como cota superior $\overline{M}_0\, \overline{K} \cdot \dfrac{\xi' + \eta'}{1\,!}$ siendo $\overline{K}$ un número positivo perfectamente definido.*

En efecto, análogamente al caso $n = 1$, tendremos :

$$|\Phi^1(x_1, x_2)| = \Big|\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u^1_{ij} + \sum_{k=1,2} b^1_k u^1_k + c \cdot u^1\Big| < 6\, HM_0 K\, \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$\left|\Phi^1_{x_1}(x_1, x_2)\right| \le \left|\sum a_{ij}\, u^1_{ij1} + \sum b_k u^1_{k1} + cu^1_1\right| + \Big|\sum (a_{ij})_{x_1} \cdot u^1_{ij} +$$
$$+ \sum (b_k)_{x_1} u^1_k + (c)_{x_1} u^1\Big| < 9\, HM_0 K(\alpha + \beta) + 3\, H\overline{M}_0$$

de la misma manera :

$$|\Phi^1_{x_2}(x_1, x_2)| < 9\, HM_0 K\,(\alpha + \beta) + 3\, H\overline{M}_0$$

y, además :

$$|J(\Phi^1)| = \left|\int_{u_0}^{u} \overline{\Phi}^1(\xi', \eta') \frac{du}{1 \pm \overline{\varrho}(\xi'\eta')}\right| < \frac{6\, HM_0 K}{1 - h}\int_{u_0}^{u} \frac{u}{1!} du < \frac{6 HM_0}{1 - h} \cdot K \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$$

$$|J(\Phi^1_{x_2})| < \frac{9\ HM_0\ K}{1-h}\int_{u_0}^{u}\frac{u}{1!}du + \frac{3\ H\overline{M}^0}{1-h}\int_{u_0}^{u}du < \frac{9\ HM_0\ K}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!} +$$

$$+\frac{3\ H\overline{M}_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

así como :

$$|J_{x_1}(\Phi^1)| < 6\,HM_0\,K\frac{\xi'+\eta'}{1!} + 9\,L(\alpha+\beta)\ \text{exp.}\{2\,L\alpha\}\frac{HM_0K}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!} +$$

$$+\ 3\ L\ \text{exp.}\{2\ L\alpha\}\ \frac{H\overline{M}_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

$$|J_{x_2}(\Phi^1)| < 9(\alpha+\beta)\text{exp.}\{2\,L\alpha\}\frac{HM_0K}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!} + 3\ \text{exp.}\{2\,L\alpha\}\frac{H\overline{M}_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

Las cotas superiores de $u^2(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras son por consiguiente :

$$|u^2(x_1, x_2)| < \frac{6\ HM_0\ K}{1-h}\int_0^{\eta'}d\xi_2'\int_0^{\xi'}\frac{(\xi_1'+\xi_2)^2}{2!}d\xi_1' < \frac{6HM_0K}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{3\cdot 4}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!} <$$

$$< \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$|u_1^2(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0K}{1-h}\int_0^{\eta'}\frac{(\xi'_1+\xi'_2)^2}{2!}d\xi'_2 < \frac{6HM_0K}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{3}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!} <$$

$$< \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$|u_2^2(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0K}{1-h}\int_0^{\xi'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^2}{2!}d\xi_1' < \frac{6HM_0K}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{3}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!} <$$

$$< \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

Para las derivadas segundas, resultan las cotas :

$$|u_{11}^2(x_1, x_2)| < 6HM_0\left[L\cdot\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]\cdot K\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

puesto que:

$$|[\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^1)]_{x_2}^{x_2^0}| < 12 \frac{LHM_0}{1-h} \cdot K \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^1(x_1, \xi_2)] d\xi_2 \right| < \frac{6LHM_0K}{1-h} \int_0^{\eta'} \frac{(\xi_1' + \xi_2')^2}{2\,!} d\xi_2' <$$

$$< \frac{6\,LHM_0}{1-h} K \frac{(\xi' + \eta')^3}{3 \cdot 2!} < \frac{6\,LHM_0}{1-h} (\alpha+\beta) \cdot K \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^1(x_1, \xi_2) d\xi_2 \right| < 6\,HM_0 K \int_0^{\eta'} \frac{(\xi'_1 + \xi_2)}{1\,!} d\xi_2' < 6\,HM_0 K \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$$

y análogamente:

$$|u_{12}^2(x_1, x_2)| = |J(\Phi^1)| < \frac{6\,HM_0}{1-h} K \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$$

$$|u_{22}^2(x_1, x_2)| < 6\,LHM_0 \left[\frac{\alpha + \beta + 1}{1-h} + 1 \right] \cdot K \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$$

Para el cálculo de las cotas de las derivadas terceras, previamente procederemos, igual que hicimos en el caso $n = 1$ a acotar separadamente sus diversos términos componentes.

Así para $u_{111}^2(x_1, x_2)$ tendremos:

$$|[\varrho_{x_1}(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^1)]_{x_2}^{x_2^0}| < \frac{12\,HL(\alpha + \beta)}{1-h} \cdot \overline{M}_0 \cdot K \frac{(\xi' + \eta')}{1\,!}$$

$$|[\varrho(x_1, x_2) \cdot J_{x_1}(\Phi^1)]_{x_2}^{x_2^0}| <$$

$$< 6\,LH\overline{M}_0 \left[2\,K + L \cdot \exp.\{2\,L\,\alpha\} \frac{3\,K(\alpha + \beta) + 1}{1-h} \right] \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \{ \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^1(x_1, \xi_2)] \}_{x_1} d\xi_2 \right| <$$

$$< 3\,LH\overline{M}_0(\alpha+\beta) \cdot \left[\frac{2K(\alpha+\beta) + L \cdot \exp.\{2L\alpha\} \cdot [3\,K(\alpha+\beta)+1]}{1-h} + 2\,K(\alpha+\beta) \right] \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^1_{x_1}(x_1, \xi_2)d\xi_2\right| < 3H\overline{M}_0[3\,K(\alpha+\beta)+1]\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

Análogamente:

$$|u^2_{112}(x_1, x_2)| < 3\,H\overline{M}_0\left[2\,K + L.\ \exp.\{2\,L\alpha\}\,\frac{3\,K(\alpha+\beta)+1}{1-h}\right]\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

$$|u^2_{122}(x_1, x_2)| < 3\,\frac{H\overline{M}_0}{1-h}\exp.\{2\,L\alpha\}\left[3\,K\,(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

y finalmente las cotas de los diversos términos de $u^2_{222}\,(x_1,\ x_2)$ son las siguientes:

$$\left|\frac{\varrho_{x_2}(x_1,\ x_2)}{\varrho^2\,(x_1,\ x_2)}\cdot J(\Phi^1)\right| = \left|\left[\frac{1}{\varrho\,(x_1,\ x_2)}\right]_{x_2}\cdot J\,(\Phi^1)\right| < 6L\,\frac{H\overline{M}_0}{1-h}K(\alpha+\beta)\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

$$\left|\frac{1}{\varrho(x_1, x_2)}\cdot J_{x_2}(\Phi^1)\right| < 3\,L\exp.\{2L\alpha\}\,\frac{H\overline{M}_0}{1-h}\left[3\,K(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2\,(\xi_1,\ x_2)}\cdot J[\Phi^1(\xi_1, x_2)]\right]_{x_2} d\xi_1\right| <$$

$$< 3\,L(\alpha+\beta)\frac{H\overline{M}_0}{1-h}\left[2\,K(\alpha+\beta)+\exp.\{2\,L\alpha\}\cdot[3\,K(\alpha+\beta)+1]\right]\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\Phi^1\,(\xi_1,\ x_2)}{\varrho\,(\xi_1, x_2)}\right]_{x_2} d\xi_1\right| < 3\,LH\overline{M}_0\left[5\,K(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1\,!}$$

(En todas las cotas obtenidas para las derivadas terceras hemos sustituído M_0 por $\overline{M}_0$).

Teniendo en cuenta el significado de $\underline{K}$ resulta como cota superior de $u^2(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la $M_0\cdot K^2\cdot\dfrac{(\xi'+\eta')^2}{2\,!}$ y si $\overline{K}$ designa el máximo de K y de los factores que multiplican a $\overline{M}_0\cdot\dfrac{\xi'+\eta'}{1\,!}$ en las expresiones de las cotas que hemos obtenido para las derivadas terceras de $u^2(x_1,\ x_2)$, una cota superior de estas últimas, será la $\overline{M}_0\cdot\overline{K}\cdot\dfrac{\xi'+\eta'}{1\,!}$ con lo que el teorema resulta así demostrado.

8. ACOTACIÓN DE LAS RESTANTES APROXIMACIONES Y SUS DERIVADAS PARCIALES. Generalicemos los resultados anteriores demostrando: TEOREMA III: *La* $(n + 1)$*-ésima aproximación* $u^n(x_1, x_2)$ *así como sus derivadas parciales primeras y segundas, admiten por cota superior la* $M_0 \cdot K^n \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!}$ y una cota superior de sus derivadas terceras es de la forma $\overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$

Para probarlo procederemos por inducción completa; si suponemos que la hipótesis es cierta para la aproximación $u^{n-1}(x_1, x_2)$ y sus derivadas, tendremos en primer lugar, como consecuencia las desigualdades:

$$|\Phi^{n-1}(x_1, x_2)| = |\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij}^{n-1} + \sum_{k=1,2} b_k\, u_k^{n-1} + c \cdot u^{n-1}| < 6HM_0 \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\begin{aligned} |\Phi_{x_1}^{n-1}(x_1, x_2)| &\leq |\Sigma a_{ij}\, u_{ij_1}^{n-1} + \Sigma b_k\, u_{k_1}^{n-1} + c \cdot u_1^{n-1}| + \\ &+ |\Sigma (a_{ij})_{x_1} \cdot u_{ij}^{n-1} + \Sigma (b_k)_{x_1} \cdot u_{ij}^{n-1} + (c)_{x_1} \cdot u^{n-1}| < \\ &< 3\,H\,[3\,M_0 K^{n-1}(\alpha + \beta) + \overline{M}_0 \overline{K}^{n-2}] \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-2}}{(n-2)\,!} \end{aligned}$$

de la misma manera:

$$|\Phi_{x_2}^{n-1}(x_1, x_2)| < 3\,H \left[3\,M_0 K^{n-1}(\alpha + \beta) + \overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-2} \right] \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-2}}{(n-2)\,!}$$

y asímismo

$$\begin{aligned} |J[\Phi^{n-1}(x_1, x_2)]| &= \left| \int_{u_0}^{u} \overline{\Phi}^{n-1}(\xi', \eta') \cdot \frac{du}{1 \pm \overline{\varrho}(\xi', \eta)'} \right| < \\ &< \frac{6\,HM_0 K^{n-1}}{1-h} \int_{u_0}^{u} \frac{u^{n-1}}{(n-1)\,!}\, du < \frac{6\,HM_0 K^{n-1}}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J(\Phi_{x_2}^{n-1})| &< \frac{9\,HM_0 K^{n-1}}{1-h} \cdot \int_{u_0}^{u} \frac{u^{n-1}}{(n-1\,!)}\, du + \frac{3\,H\overline{M}_0 \overline{K}^{n-2}}{1-h} \int_{u_0}^{u} \frac{u^{n-2}}{(n-2)\,!}\, du < \\ &< \frac{3\,H}{1-h} \left[3\,M_0 K^{n-1}(\alpha + \beta) + \overline{M}_0 \overline{K}^{n-2} \right] \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!} \end{aligned}$$

así como:

$$|J_{x_1}(\Phi^{n-1})| < 3\,H\Bigg[2\,M_0K^{n-1} +$$

$$L\cdot\exp.\,\{2\,L\,\alpha\}\cdot\frac{3\,M_0K^{n-1}\cdot(\alpha+\beta)+\overline{M}_0\overline{K}^{n-2}}{1-h}\cdot\Bigg]\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|J_{x_2}(\Phi^{n-1})|<3H\cdot\frac{\exp.\{2\,L\alpha\}}{1-h}\Big[3\,M_0K^{n-1}\cdot(\alpha+\beta)+\overline{M}_0\overline{K}^{n-2}\Big]\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

con lo que se obtendrán como cotas superiores de $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras las siguientes:

$$|u^n(x_1, x_2)|<\frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\eta'}d\xi'_2\int_0^{\xi'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^n}{n!}d\xi_1'<$$

$$<\frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}<\frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$|u_1^n(x_1, x_2)| < \frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\eta'}\frac{(\xi_1'+\xi_2)}{n!}d\xi_2'<$$

$$<\frac{6\,HM_0K^{n-1}(\xi'+\eta')}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')}{n+1}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}<\frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$|u_2^n(x_1, x_2)| < \frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\xi'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^n}{n!}d\xi_1'<$$

$$<\frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')}{n+1}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}<\frac{6\,HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

y para las derivadas segundas, resultan las cotas:

$$|u_{11}^n(x_1, x_2)| < 6\,HM_0\left[\frac{2+\alpha+\beta}{1-h}\cdot L+1\right]K^{n-1}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

ya que:

$$|[\varrho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})]_{x_2}^{x_0}| < 12\,L\cdot\frac{HM_0K^{n-1}(\xi'+\eta')^n}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)]\, d\xi_2\right| < 6\, L\, \frac{HM_0K^{n-1}}{1-h} \int_0^{\eta'} \frac{(\xi_1' + \xi_2)}{n\,!}\, d\xi_2' <$$

$$< 6\, L\, \frac{HM_0K^{n-1}}{1-h} (\alpha + \beta) \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)\, d\xi_2\right| < 6\, HM_0K^{n-1} \cdot \int_0^{\eta'} \frac{(\xi_1' + \xi_2')^{n-1}}{(n-1)\,!} \cdot d\xi_2' <$$

$$< 6 \cdot H \cdot M_0 \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!}$$

del mismo modo:

$$|u_{12}^n (x_1, x_2)| = |J(\Phi^{n-1})| < \frac{6\, HM_0K^{n-1}}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!}$$

$$|u_{22}^n (x_1, x_2)| < 6\, LH \left[\frac{\alpha + \beta + 1}{1-h} + 1\right] \cdot M_0 \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + n')^n}{n\,!}$$

Para calcular las cotas de las derivadas terceras, acotaremos por separado, cada uno de los términos que las componen.

Así, para $u_{111}^n\ (x_1, x_2)$ obtendríamos:

$$|[\varrho_{x1}(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^{v-1})]_{x_2}^{x_2^0}| < 12 L \frac{H\overline{M}_0}{1-h} \cdot K(\alpha + \beta) \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$|\{\varrho(x_1, x_2) \cdot J_{x_1}(\Phi^{n-1})\}_{x_2}^{x_2^0}| <$$

$$< 6 LH\overline{M}_0 \left[2K + L \cdot \exp.\{2\, L\, \alpha\} \frac{3\, K(\alpha + \beta) + 1}{1-h}\right] \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \{\varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)]\}_{x_1} d\xi_2\right| <$$

$$< 3\, LH\overline{M}_0 \left[\frac{L \cdot \exp.\{2 L\alpha\}[3\, K(\alpha + \beta) + 1] + 2\, K(\alpha + \beta)}{1-h} + \right.$$

$$\left. + 2K(\alpha + \beta)\right] (\alpha + \beta) \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} \Phi_{x_1}^{n-1}(x_1, \xi_2)\, d\xi_2\right| < 3\, H\overline{M}_0 \left[3\, K(\alpha + \beta) + 1\right] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

Análogamente :

$$|u^n_{112}(x_1, x_2)| < 3\, H\overline{M}_0 \left[2\,K + L \cdot \exp.\{2\,L\,\alpha\} \frac{3\,K(\alpha+\beta)+1}{1-h} \right] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$|u^n_{122}(x_1, x_2)| < \frac{3\,H\overline{M}_0}{1-h} \cdot \exp.\{2\,L\,\alpha\} \left[3\,K(\alpha+\beta) + 1 \right] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

y las cotas que obtenemos para los términos que componen $u^n_{222}(x_1, x_2)$ son :

$$\left| \frac{\varrho_{x_2}(x_1, x_2)}{\varrho^2(x_1, x_2)} \cdot J\,(\Phi^{n-1}) \right| < 6\,L \frac{H\overline{M}_0}{1-h} K(\alpha+\beta) \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left| \frac{1}{\varrho(x_1, x_2)} \cdot J_{x_2}(\Phi^{n-1}) \right| < 3L \exp.\{2\,L\,\alpha\} \frac{H\overline{M}_0}{1-h} \left[3\,K(\alpha+\beta) + 1 \right] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(x_1, x_2)} \cdot J[\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)] \right]_{x_2} d\xi_1 \right| <$$

$$< 3L(\alpha+\beta) \frac{H\overline{M}_0}{1-h} \left[2K(\alpha+\beta) + \exp.\{2L\alpha\} \cdot [3K(\alpha+\beta)+1] \right] \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)} \right]_{x_2} \cdot d\xi_1 \right| < 3\,LH\overline{M}_0[5\,K(\alpha+\beta) + 1] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

(En las cotas obtenidas para las derivadas terceras se ha sustituido M_0 por $\overline{M}_0$)

Recordando el significado de K y $\overline{K}$ resulta como cota superior de $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la $M_0\,K^n \dfrac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!}$ y como cota de las derivadas terceras la $\overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-1} \cdot \dfrac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$

Como para $n = 3$, se verifican las hipótesis del teorema III, según el teorema II, queda, pues, demostrado lo que se pretendía.

9. Construcción de la solución al problema de Cauchy. Consideremos ahora las series :

$$\sum_{r=0}^{\infty} u^r\,; \quad \sum_{\substack{r=0 \\ k=1,2}}^{\infty} u^r_k\,; \quad \sum_{\substack{r=0 \\ i,j=1,2}}^{\infty} u^r_{ij}\,; \quad \sum_{\substack{r=0 \\ i,j=1,2}}^{\infty} u^r_{ijk}\,; \quad \sum_{r=0}^{\infty} \Phi^r \qquad (4)$$

De las cuales las seis primeras admiten en todo el dominio de prolongación D, la serie numérica mayorante de términos positivos y convergente:

$$M_0 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K^r(\alpha+\beta)^r}{r!} = M_0 e^{K(\alpha+\beta)}$$

las cuatro siguientes la:

$$M_0 + \overline{M}_0 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \overline{K}^r \frac{(\alpha+\beta)^r}{r!} = M_0 + \overline{M}_0 \cdot e^{\overline{K}(\alpha+\beta)}$$

y la última, la serie numérica convergente de términos positivos:

$$6\, H M_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K^r \cdot (\alpha+\beta)^r}{r!} = 6\, H M_0 e^{K(\alpha+\beta)}$$

por lo que en D la convergencia de las series (4) será absoluta y uniforme.

La primera de dichas series definirá, pues, una función en D, $u(x_1, x_2)$ cuyas derivadas parciales hasta las de tercer orden, vendrán expresadas por las sumas de las restantes series de (4), excluida la última.

En virtud de las fórmulas resolutivas que expresan las funciones $s^0, s^1, s^2, \ldots, s^n, \ldots$, se puede escribir:

$$\sum_{r=0}^{n} s^r = \chi'[\lambda(x_1, x_1, x_2)] + J[g(x_1, x_2)] + \sum_{r=0}^{n-1} J[\Phi^r(x_1, x_2)]$$

De esta igualdad, teniendo en cuenta la linealidad del operador J, y la convergencia uniforme en D de la sucesión de funciones: $V_n(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{n-1} \Phi^r(x_1, x_2)$ y poniendo:

$s = \sum_{r=0}^{\infty} s^r$ se deduce por paso al límite esta otra:

$$s(x_1, x_2) = \chi'[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)] + J[g(x_1, x_2)] + J[\Phi(x_1, x_2)] \qquad (5)$$

En la que se ha designado por $\Phi(x_1, x_2)$ la expresión :

$$- \sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k\, u_k - c \cdot u$$

resultante del paso al límite.

De (5) se obtiene :

$$\left. \begin{aligned} u_{112} = s_1 = & - \varrho(x_1, x_2) \cdot \chi''[\lambda(x_1, x_1, x_2)] \cdot \exp.\left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)] dt \right\} + \\ & + J_{x_1}[g(x_1, x_2)] + J_{x_1}[\Phi(x_1, x_2)] \\ u_{122} = s_2 = & \chi''[\lambda(x_1{}^0, x_1, x_2)] \cdot \exp.\left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)] dt \right\} + \\ & + J_{x_2}[g(x_1, x_2)] + J_{x_2}[\Phi(x_1, x_2)] \end{aligned} \right\}$$

y de estas últimas (habida cuenta que $J_{x_1}(F) + \varrho(x_1, x_2) J_{x_2}(F) \equiv F$)

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$$

es decir, en definitiva :

$$u_{122} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \cdot u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k\, u_k + c \cdot u = g(x_1, x_2)$$

y esta igualdad demuestra que la función $u(x_1, x_2)$ definida mediante la primera de las series (4) satisface idénticamente en todo el dominio de prolongación D definido de acuerdo con el n.º 4, a la ecuación en derivadas parciales propuesta. Cumple, además, como se verifica inmediatamente, las condiciones iniciales de convertirse en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2{}^0$, en $\Psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$ y en reducirse su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ a la función $\chi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$.

La función $u(x_1, x_2)$ así construida es, pues, la solución al problema de Cauchy considerado, y la unicidad de la misma se demuestra en el número siguiente.

10. Unicidad de la solución. Demostremos ahora la unicidad de la solución y que el problema de Cauchy es adecuado a la ecuación dada. Para lo primero si $\bar{u}(x_1, x_2)$ fuese otra solución con-

tinua y admitiendo derivadas parciales hasta las de tercer orden (siendo asimismo continuas las derivadas primeras y segundas), cumpliendo las condiciones iniciales:

$$\bar{u}(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1) \; ; \; \bar{u}(x_1^0, x_2) \equiv \Psi(x_2) \; ; \; \bar{u}_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$$

la función $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \bar{u}(x_1, x_2)$ satisfará evidentemente a la ecuación en derivadas parciales:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \bar{\bar{\Phi}}(x_1, x_2) \qquad (6)$$

$$(\text{con } \bar{\bar{\Phi}}(x_1, x_2) = - \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \cdot \bar{\bar{u}}_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k \, \bar{\bar{u}}_k - c\bar{\bar{u}})$$

verificando las condiciones iniciales:

$$\bar{\bar{u}}\,(x_1^0, x_2) = u(x_1, x_2^0) = \bar{\bar{u}}_1(x_1^0, x_2) \equiv 0$$

Dicha ecuación (6) es del tipo de las estudiadas en el CAP. II por lo que la solución de la misma con las condiciones iniciales exigidas y sus derivadas parciales primeras y segundas vendrán expresadas por las mismas fórmulas resolutivas que allí se obtuvieron ($\mathrm{N^{os}}$ 6, 7 y 8 de dicho Capítulo).

Si $\bar{\bar{M}}_0$ es una cota superior en G de $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y de sus derivadas primeras y segundas, se tendrá como consecuencia de las fórmulas que expresan las mismas y razonando de un modo idéntico, a como lo hicimos en el n.º 6, teorema I, la cota $\bar{\bar{M}}_0 \cdot K \cdot \dfrac{\xi' + \eta'}{1\,!}$ común a $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, teniendo K el mismo significado que allí.

Substituyendo las funciones subintegrales por las cotas respectivas se obtiene de nuevo para $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas parciales hasta las de segundo orden, la cota superior $\bar{\bar{M}}_0 \cdot K^2 \dfrac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$

Y así sucesivamente, obteniéndose en general, como se demostraría fácilmente por inducción y de manera enteramente análoga a como se hizo anteriormente, la cota superior, común a $\bar{\bar{u}}\,(x_1, x_2)$ y sus derivadas, $\bar{\bar{M}}_0 \, K^n \dfrac{(\xi' + n')^n}{n\,!}$; y al ser n cualquiera, y ser por otra parte $\xi' + \eta' < \alpha + \beta$, $\bar{\bar{u}}\,(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, serán menores en valor absoluto que cualquier número positivo prefijado al arbitrio, por lo que en el dominio (D) serán nulas idénticamente, es decir : $\bar{u}(x_1, x_2) \equiv u(x_1, x_2)$.

Probada la existencia y unicidad de la solución de (1) sólo nos resta demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para asegurar que el problema es apropiado a la ecuación dada. Esto se comprueba teniendo presente que la serie que define $u(x_1, x_2)$ es uniformemente convergente en todo el dominio de prolongación $\underline{D}$ respecto a las condiciones iniciales consideradas como variables, por lo que, habida cuenta de la dependencia continua respecto de ellas de las aproximaciones $u^n(x_1, x_2)$ (que constituyen los términos de dicha serie) en todo el dominio D, la solución $u(x_1, x_2)$ definida por esta serie dependerá, por tanto, de un modo continuo respecto de las condiciones iniciales como pretendíamos demostrar.

CAPITULO IV

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION CUASI LINEAL DE TIPO HIPERBÓLICO:

$$u_{112} + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot u_{122} = f\,(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$$

1. Posición del problema :

Dada la ecuación cuasi lineal :

$$u_{112} + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot u_{122} = f\,(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij}) \tag{1}$$

en la que $f\,(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$ es una función continua de sus argumentos, con derivadas parciales primeras respecto de todos ellos, asimismo continuas en un cierto recinto abierto conexo y acotado P_8 con frontera conexa, del espacio E_8 constituido por los puntos de coordenadas $x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}$ y tal que sus derivadas primeras satisfacen a sendas desigualdades de Lipschitz respecto a u, u_k, u_{ij} en P_8 ; y $\varrho\,(x_1, x_2)$ una función continua que no se anula en el dominio G proyección de P_8 en $O\,x_1\,x_2$ es decir, de signo constante en el mismo (signo que siempre se puede suponer positivo 1. — CAP. II) cuyos valores se mantienen inferiores a un cierto número $h < 1$ (1. — CAP. III) y que admite derivadas parciales primeras y segundas continuas.

Sea $O(x_1^0, x_2^0, u^0, u_k^0\, u_{ij}^0)$ un punto interior de P_8 y:

$$x_1^0 - a < x_1 < x_1^0 + a \quad x_2^0 - b < x_2 < x_2^0 + b\,; \quad u^0 - l < u < u^0 + l$$
$$u_k^0 - l_k < u_k < u_k^0 + l_k\,; \quad u_{ij}^0 - l_{ij} < u_{ij} < u_{ij}^0 + l_{ij}$$
$$(k = 1,\ 2) \qquad\qquad (i,\ j = 1,\ 2)$$

los intervalos abiertos (simétricos respecto a 0) interiores a (P_8) determinados en el mismo por los ejes correspondientes; sean $\varphi(x_1)$, $\psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ tres funciones que cumplan las siguientes condiciones:

1.ª) $\varphi(x_1)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden continuas en el intervalo $x_1^0 - a < x_1 < x_1^0 + a$ considerado.

2.ª) $\psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de tercero y segundo orden respectivamente, continuas en el intervalo $x_2^0 - b < x_2 < x_2^0 + b$. Dichas funciones verifican, además, las condiciones:

$$\varphi(x_1^0) = \psi(x_2^0) = u^0\,; \quad \varphi'(x_1^0) = \chi(x_2^0) = u_1^0\,; \quad \psi'(x_2^0) = u_2^0\,; \quad \varphi''(x_1^0) = u_{11}^0$$
$$\chi'(x_2^0) = u_{12}^0\,; \quad \psi''(x_2^0) = u_{22}^0$$

2. Curvas características. Estas vienen dadas por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales:

$$\begin{cases} \Phi_{x_1} = 0 \\ \Phi_{x_2} = 0 \\ \Phi_{x_1} + \varrho(x_1,\ x_2)\cdot\Phi_{x_2} = 0 \end{cases}$$

y cuyas características las constituyen las familias de curvas ya consideradas (2. CAP. II):

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = C_1 & (\alpha) \\ x_2 = C_2 & (\beta) \\ \lambda(x_1^0, x_1, x_2) = C_3 & (\gamma) \end{cases}$$

3. Dominio de dependencia de un punto P. El dominio de dependencia de un punto $P(x_1,\ x_2)$ del recinto G (proyección de P_8 sobre el plano de las variables x_1, x_2), lo definiremos del mismo

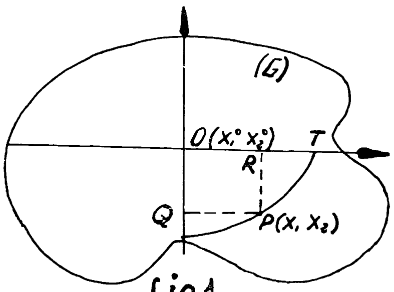


fig 1

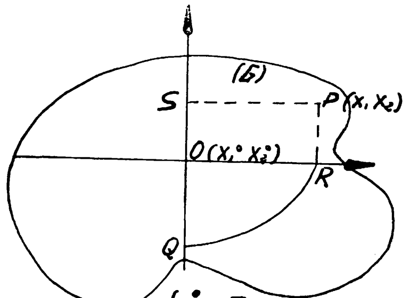


fig 3

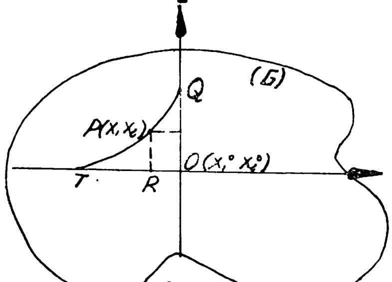


fig 2

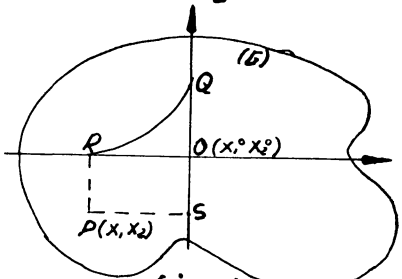


fig 4

modo que en el CAP. II, es decir, (supuesto P lo suficientemente próxima del origen 0, para que se verifiquen las condiciones allí exigidas) según que dicho punto pertenezca al 2.º ó 4.º cuadrante, o bien al 1.º o 3.^{er} cuadrante, el dominio de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$ estará constituido respectivamente, por los segmentos $O\,Q$ (figs. 1 y 2) o $Q\,S$ (figs. 3 y 4) y sobre $x_2 = x_2^0$ por el segmento $O\,R$ determinado por el origen y por la proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ y además en ambos casos, supondremos que P está lo suficientemente cerca del origen 0 para que todos los puntos del triángulo curvilíneo $O\,Q\,T$ o del trapecio mixtilíneo $P\,R\,Q\,S$ sean interiores al intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$ siendo μ y ν números positivos que precisaremos más adelante.

4. Determinación del dominio de prolongación. De manera análoga a como se hizo en el CAP. II, consideremos la correspondencia existente entre cada punto P de G y de su *región asociada*, constituida por el triángulo mixtilíneo $O\,Q\,T$ (supuesto P situado en el 2.º ó 4.º cuadrante) limitado por los ejes y por la característica del haz (γ) que pasa por él, como se indica en las figuras 1, 2 o por el trapecio mixtilíneo $P\,R\,Q\,S$ (si P pertenece al 1.^{er} o 3.^{er} cuadrante)

limitado por el eje $x_1 = x_1^0$ y por las características de los haces (α) y (β) que pasan por él, así como por la característica del haz (γ) que pasa por R proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ (figs. 3 y 4).

Dadas las funciones $\psi(x_2)$, $\chi(x_2)$ sobre el segmento QS del eje $x_1 = x_1^0$ y la $\varphi(x_1)$ sobre el segmento UR del eje $x_2 = x_2^0$ llamaremos *dominio de prolongación* D, de dichos segmentos, al conjunto de puntos P de G, tales que la correspondiente región asociada sea interior a G en sentido estricto, así como también al intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$ estando, además, contenidos en QS y UR los correspondientes dominios de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$ y $x_2 = x_2^0$, respectivamente. Dichos dominios de prolongación tal como los hemos definido, son del mismo tipo que los considerados en el CAP. II y las distintas modalidades que pueden presentar según la posición de O respecto a los segmentos UR y QS están representados en las figuras 5, 6 y 7 de dicho Capítulo.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo el dominio de prolongación D de dos segmentos de los ejes $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$ convenientemente elegidos (que contengan el origen) que satisface a las condiciones iniciales :

a) se convierte en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2^0$, es decir, $u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)$

b) en $\psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$, o sea, $u(x_1^0, x_2) \equiv \psi(x_2)$

c) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ se reduce a la función $\chi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$, es decir, $u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$. Además, esta solución es única.

Para lograr mayor sencillez en la demostración de este teorema supondremos en lo que sigue homogéneas las condiciones iniciales, es decir, $\varphi(x_1) = \psi(x_2) = \chi(x_2) \equiv 0$ y por tanto $u^0 = u_k^0 = u_{ij}^0 = 0$, lo que no resta generalidad a la misma como se vio en el número 6 del CAP. II.

5. DEFINICIÓN DE LAS APROXIMACIONES Y CÁLCULO DE LAS MISMAS. Consideremos las ecuaciones en derivadas parciales que siguen :

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{u}_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot \overset{1}{u}_{122} &= f(x_1, x_2, \underbrace{0, \ldots, 0}^{6}) \\ \overset{n}{u}_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot \overset{n}{u}_{122} &= f(x_1, x_2, \overset{n-1}{u}, \overset{n-1}{u_k}, \overset{n-1}{u_{ij}}) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

que como se ve, se obtienen por ley recurrente que demostraremos tiene sentido, y cuyas soluciones determinaremos adoptando para todas ellas las condiciones iniciales :

$$u^n(x_1, x_2^0) = u^n(x_1^0, x_2) = u_1^n(x_1^0, x_2) \equiv 0 \, ; \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dichas ecuaciones son del mismo tipo que la estudiada en el CAP. II, así como las condiciones iniciales impuestas a las mismas, por lo que en virtud de lo allí demostrado las funciones u^n están completamente determinadas en todo dominio de prolongación construido de acuerdo con la definición que acabamos de dar en el número anterior.

Las fórmulas resolutivas que nos expresan las funciones $u^n(x_1, x_2)$; $(n = 1, 2, \ldots)$ y sus derivadas son, por tanto (n.os 6, 7, 8 y 9 del Capítulo II) :

$$u^n(x_1, x_2) = \iint_{R(P)} J[\Phi^{n-1}(\xi_1, \xi_2)] \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, ; \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

[en donde por brevedad representamos por $\Phi^r(x_1, x_2)$ la expresión $f(x_1, x_2, u^r, u_k^r, u_{ij}^r)$; $(k = 1, 2 \, ; \, i, j = 1, 2)$] :

$$u_1^n(x_1, x_2) = \int_{x_2^0}^{x_2} J[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)] \, d\xi_2$$

$$u_2^n(x_1, x_2) = \int_{x_1^0}^{x_1} J[\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)] \, d\xi_1$$

$$u_{11}^n(x_1, x_2) = \left[\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2^0}^{x_2} +$$

$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)] \, d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^{n-1}(x_1, \xi_2) \, d\xi_2$$

$$u_{12}^n(x_1, x_2) = J[\Phi^{n-1}(x_1, x_2)] \tag{4}$$

$$u_{22}^n(x_1, x_1) = -\frac{J(\Phi^{n-1})}{\varrho(x_1, x_2)} - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J[\Phi(\xi_1, x_2)] \, d\xi_1 +$$

$$+ \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\Phi(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)} \cdot d\xi_1$$

$$u_{111}^n(x_1, x_2) = \left\{\left[\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0}\right\}_{x_1} +$$

$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} \{\varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)]\}_{x_1} \, d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi_{x_1}^{n-1}(x_1, \xi_2) \, d\xi_2$$

$$u_{112}^n(x_1, x_2) = -\varrho(x_1, x_2) \cdot \exp.\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)] \, dt\right\} \cdot J\left[\Phi_{x_2}^{n-1}(x_1, x_2) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]\}\right] +$$

$$+ \Phi^{n-1}(x_1, x_2)$$

$$u^n_{122}(x_1, x_2) = \exp.\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\, dt\right\} \cdot J\left[\Phi^{n-1}_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]\}\right]$$

$$u^n_{222}(x_1, x_2) = -\left[\frac{J(\Phi^{n-1})}{\varrho(x_1, x_2)}\right]_{x_2} - \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{\frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J[\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)]\right\}_{x_2} d\xi_1 +$$

$$+ \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)}\right]_{x_2} d\xi_1$$

Vamos a demostrar en primer lugar, que estas aproximaciones $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas hasta las de segundo orden tienen sentido para todos los puntos $P(x_1, x_2)$ cuya región asociada esté comprendida en el intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$ siendo μ y ν dos números definidos como siguen:

$$\mu = \text{mín.}\left(a; \sqrt[3]{\frac{l}{M}}; \sqrt{\frac{l_1}{M}}; \sqrt{\frac{l_2}{M}}; \sqrt{\frac{l_{11}}{3LM}}; \frac{l_{11}}{6LM}; \frac{l_{12}}{M}; \frac{l_{22}}{6LM}; \sqrt{\frac{l_{22}}{2 \cdot LM}}\right)$$

$$\nu = \text{mín.}\left(b; \sqrt[3]{\frac{l}{M}}; \sqrt{\frac{l_1}{M}}; \sqrt{\frac{l_{11}}{3LM}}; \frac{l_{11}}{3M}\right)$$

designando por M una cota superior de $f(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$ en P_8 y L la cota ya considerada en el n.º 6 del CAP. III.

En efecto, al aplicar el teorema de la media a las integrales que figuran en las fórmulas anteriores resulta:

$$|u^1(x_1, x_2)| < M \cdot \mu^2 \cdot \nu < M \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{l}{M}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{l}{M}} = l$$

$$|u^1_1(x_1, x_2)| < M \cdot \mu \cdot \nu < M \sqrt{\frac{l_1}{M}} \cdot \sqrt{\frac{l_1}{M}} = l_1$$

$$|u^1_2(x_1, x_2)| < M \cdot \mu^2 < M \cdot \frac{l_2}{M} = l_2$$

$$|u^1_{11}(x_1, x_2)| < 2LM\mu + LM\mu\nu + M\nu <$$

$$< 2LM\frac{l_{11}}{6LM} + LM\frac{l_{11}}{3LM} + M\frac{l_{11}}{3M} = l_{11}$$

$$|u^1_{12}(x_1, x_2)| < M \cdot \mu < M\frac{l_{12}}{M} = l_{12}$$

$$|u^1_{22}(x_1, x_2)| < 3LM\mu + LM\mu^2 < 3LM\frac{l_{22}}{6LM} + LM\frac{l_{22}}{2LM} = l_{22}$$

Supuesto ahora cierta la hipótesis para la $(n-1)$ — ésima aproximación y sus derivadas, se tendrá, procediendo análogamente al caso anterior:

$$|u^n(x_1, x_2)| < M \cdot \mu^2 \cdot \nu < M \cdot \frac{l}{M} = l$$

$$|u_1^n(x_1, x_2)| < M \cdot \mu \cdot \nu < M \cdot \frac{l_1}{M} = l_1$$

$$|u_2^n(x_1, x_2)| < M\mu^2 < M \cdot \frac{l_2}{M} = l_2$$

$$|u_{11}^n(x_1, x_2)| < 2LM\mu + LM\mu\nu + M\nu <$$

$$< 2LM\frac{l_{11}}{6LM} + LM\frac{l_{11}}{3LM} + M\frac{l_{11}}{3M} = l_{11}$$

$$|u_{12}^n(x_1, x_2)| < M\mu < M\frac{l_{12}}{M} = l_{12}$$

$$|u_{22}^n(x_1, x_2)| < 3LM\mu + LM\mu^2 < 3LM\frac{l_{22}}{6LM} + LM \cdot \frac{l_{22}}{2LM} = l_{22}$$

Como para $n = 2$ se cumplen las hipótesis de la inducción, el resultado obtenido es completamente general. Además, como vimos en el CAP. II, los dominios de dependencia y prolongación de tales aproximaciones son los definidos por los números 3 y 4.

6. ACOTACIÓN DE $u^2(x_1, x_2) - u^1(x_1, x_2)$ Y SUS DERIVADAS PARCIALES. Designando por H una cota superior de los coeficientes de las desigualdades de LIPSCHITZ que hemos supuesto verificaban $f(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$ y sus derivadas parciales, y por M_0 una cota superior de $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas parciales hasta las de tercer orden, cota existente siempre en todo dominio de prolongación D, por la continuidad (fácilmente comprobable mediante las correspondientes fórmulas resolutivas) de $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas, resultan en primer lugar (1) las desigualdades:

$$|\Phi^1(x_1, x_2) - \Phi^0(x_1, x_2)| = |f(x_1, x_2, u^1, u_k^1, u_{ij}^1) - f(x_1, x_2, \overbrace{0, \ldots, 0}^{6})| <$$
$$< M_0(A + \Sigma A_k + \Sigma A_{ij}) < 6HM_0 ;$$

(1) Véase el n.º 6 del capítulo anterior.

(A, A_k, A_{ij} son los coeficientes que figuran en la desigualdad de LIPSCHITZ que verifica $f(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$)

$$|\Phi^1_{x_1}(x_1, x_2) - \Phi^0_{x_1}(x_1, x_2)| \leq |f^1_{x_1} - f^0_{x_1}| + |f^1_u \cdot u^1_1| + \\ + \sum_{k=1,2} |f^1_k u^1_{k_1}| + \sum_{i,j=1,2} |f^1_{ij} \cdot u^1_{ij_1}| < 6HM_0 + 6RM_0 \ (^2)$$

y análogamente :

$$|\Phi^1_{x_2}(x_1, x_2) - \Phi^0_{x_2}(x_1, x_2)| < 6HM_0 + 6RM_0$$

De estas desigualdades se deduce (Véase el n.º 6, del CAP. anterior) :

$$|J[\Phi^1(x_1, x_2) - \Phi^0(x_1, x_2)]| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')}{1!}$$

$$|J[\Phi^1_{x_2}(x_1, x_2) - \Phi^0_{x_2}(x_1, x_2)]| < 6\frac{H+R}{1-h} \cdot M_0 \cdot \frac{(\xi' + \eta')}{1!}$$

Demostremos ahora el siguiente :

TEOREMA I. *$u^2(x_1, x_2) - u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas admiten como cota superior la $M_0 \cdot K \cdot \frac{(\xi' + \eta')}{1!}$; mientras que sus derivadas terceras admiten la cota numérica $\overline{M}_0$ siendo K, $\overline{M}_0$ números positivos perfectamente definidos.*

En efecto, por razonamiento análogo al empleado en el Capítulo anterior, se obtiene :

$$|u^2(x_1, x_2) - u^1(x_1, x_2)| = \\ = \left| \iint_{R(P)} J[\Phi^1(\xi_1, \xi_2) - \Phi^0(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2 \right| < \frac{6HM_0}{1-h}(\alpha + \beta)^2 \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

siendo α y β igual que allí, los extremos superiores de las distancias de los puntos del contorno de G a los ejes $x_1 = x^0_1$; $x_2 = x^0_2$, respectivamente.

Asimismo obtendríamos :

$$|u^2_1(x_1, x_2) - u^1_1(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|u^2_2(x_1, x_2) - u^1_2(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

---

(2) f^r designa la expresión resultante de sustituir en f las variables u, u_k, u_{ij} por las funciones u^r, u^r_k, u^r_{ij}; y f^r_u, f^r_k, f^r_{ij}, las derivadas parciales de la misma respecto de u, u_k, u_{ij}. $\underline{R}$ es una cota superior común de f y de dichas derivadas.

Las cotas de las derivadas segundas de $u^2(x_1, x_2) - u^1(x_1, x_2)$ son las siguientes:

$$|u_{11}^2(x_1, x_2) - u_{11}^1(x_1, x_2)| < 6HM_0 \cdot \left[L \cdot \frac{\alpha+\beta+2}{1-h} + 1\right] \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|u_{12}^2(x_1, x_2) - u_{12}^1(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')}{1!}$$

$$|u_{22}^2(x_1, x_2) - u_{22}^1(x_1, x_2)| < 6LHM_0 \left|\frac{\alpha+\beta+1}{1-h} + 1\right] \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

Para calcular las cotas de las derivadas terceras de $u^2(x_1, x_2) - u^1(x_1, x_2)$ acotaremos previamente las expresiones $J_{x_k}[\Phi^1(x_1, x_2) - \Phi^0(x_1, x_2)]$ $(k = 1, 2)$, las cuales vienen dadas (N.º 9, CAP. II) por las fórmulas:

$$J_{x_1}(\Phi^1 - \Phi^0) = \Phi^1 - \Phi^0 - \varrho(x_1, x_2) \cdot \exp.\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\,dt\right\} \cdot$$
$$\cdot J\left[(\Phi_{x_2}^1 - \Phi_{x_2}^0) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]\}\right]$$

$$J_{x_2}(\Phi^1 - \Phi^0) = \exp.\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\,dt\right\} \cdot J\left[(\Phi_{x_2}^1 - \Phi_{x_2}^0) \cdot \exp.\{J[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)]\}\right]$$

deduciéndose de las mismas:

$$|J_{x_1}(\Phi^1 - \Phi^0)| < 6M_0\left[H + L \cdot \exp.\{2L\alpha\} \cdot \frac{(H+R)\cdot(\alpha+\beta)}{1-h}\right]$$

$$|J_{x_2}(\Phi^1 - \Phi^0)| < 6M_0 \cdot \exp.\{2L\alpha\} \cdot \frac{(H+R)\cdot(\alpha+\beta)}{1-h}$$

(pues: $\exp.\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\,dt\right\} < \exp.\{L\cdot\alpha\}$; $\exp.\{J(\varrho_{x_2})\} <$ $< \exp.\{L\alpha\}$; y

$$|J(\Phi_{x_2}^1 - \Phi_{x_2}^0)| < 6 \cdot \frac{H+R}{1-h} \cdot M_0 \cdot (\xi' + \eta') < 6 \cdot \frac{H+R}{1-h} \cdot M_0 \cdot (\alpha + \beta)$$

como acabamos de ver), con lo que las cotas de los diversos términos componentes de $u_{111}^2(x_1, x_2) - u_{111}^1(x_1, x_2)$ son las siguientes:

$$\left|\left[\varrho_{x_1} J \cdot (\Phi^1 - \Phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12LH\frac{M_0}{1-h} \cdot (\alpha + \beta)$$

$$\left|\left[\varrho \cdot J_{x_1}(\Phi^1 - \Phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12LM_0 \cdot \left[H + L \cdot \exp.\{2L\alpha\} \cdot \frac{(H+R)\cdot(\alpha+\beta)}{1-h}\right]$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{ \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J [\Phi^1 (x_1, \xi_2) - \Phi^0 (x_1, \xi_2)] \right\}_{x_1} d\xi_2 \right| <$$

$$< 6 L M_0 (\alpha + \beta) \left[(\alpha + \beta) \cdot \frac{H + L \cdot (H + R) \cdot \exp. \{2 L \alpha\}}{1 - h} + H \right]$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} [\Phi^1_{x_1} (x_1, \xi_2) - \Phi^0_{x_1} (x_1, \xi_2)] d\xi_2 \right| < 6 \cdot M_0 \cdot (H + R) \cdot (\alpha + \beta)$$

Análogamente :

$$| u^2_{112}(x_1, x_2) - u^1_{112} (x_1, x_2) | = | J_{x_1} (\Phi^1 - \Phi^0) | <$$

$$< 6 M_0 \left[H + L \cdot \exp. \{2 L \alpha\} \cdot \frac{(H + R) \cdot (\alpha + \beta)}{1 - h} \right]$$

$$|(u^2_{122} (x_1, x_2) - u^1_{122} (x_1, x_2)| = |J_{x_2} (\Phi^1 - \Phi^0)| <$$

$$< 6 M_0 \cdot \exp. \{2 L \alpha\} \cdot \frac{(H + R) \cdot (\alpha + \beta)}{1 - h}$$

y finalmente para $u^2_{222} (x_1, x_2) - u^1_{222} (x_1, x_2)$ igual que hemos hecho con $u^2_{111} (x_1, x_2) - u^1_{111} (x_1, x_2)$ procederemos a acotar separadamente sus diversos términos :

$$\left| \frac{\varrho_{x_2} (x_1, x_2)}{\varrho^2 (x_1, x_2)} \cdot J (\Phi^1 - \Phi^0) \right| < 6 \cdot L \cdot \frac{H \cdot M_0}{1 - h} \cdot (\alpha + \beta)$$

$$\left| \frac{J_{x_2} (\Phi^1 - \Phi^0)}{\varrho (x_1, x_2)} \right| < 6 L M_0 \exp. \{2 L \alpha\} \cdot \frac{(H + R) \cdot (\alpha + \beta)}{1 - h}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \frac{\varrho_{x_1} (\xi_1, x_2)}{\varrho^2 (\xi_1, x_2)} \cdot J (\Phi^1 - \Phi^0) \right\}_{x_2} \cdot d\xi_1 \right| <$$

$$< \frac{6 L M_0 \cdot (\alpha + \beta)^2}{1 - h} \cdot [H + (H + R) \cdot \exp. \{2 L \alpha\}]$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^1 (\xi_1, x_2) - \Phi^0 (\xi_1, x_2)}{\varrho (\xi_1, x_2)} \right]_{x_2} \cdot d\xi_1 \right| < 6 L M_0 (\alpha + \beta) \cdot [2 H + R]$$

Si designamos por K el mayor de los factores que multiplican a $M_0 \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para $u^2 (x_1, x_2) - u^1 (x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, resultará en definitiva como cota superior común de las mismas, la $M_0 \cdot K \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$ y si $\overline{M}_0$ expresa el máximo de M_0 y de las cotas halladas para las derivadas terceras de $u^2(x_1, x_2) - u^1(x_1, x_2)$, una cota común de dichas derivadas terceras es $\overline{M}_0$.

El teorema resulta, pues, así demostrado.

7. ACOTACIÓN DE $u^3(x_1, x_2) - u^2(x_1, x_2)$ Y DE SUS DERIVADAS PARCIALES.

TEOREMA II. *Una cota superior de* $u^3(x_1, x_2) - u^2(x_1, x_2)$ *y sus derivadas primeras y segundas es de la forma* $M_0 \cdot K^2 \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!}$; *las derivadas terceras admiten como cota superior* $\overline{M}_0 \overline{K} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$; siendo $\overline{K}$ *un número positivo perfectamente definido.*

En efecto, análogamente al caso anterior tendremos:

$$|\Phi^2(x_1, x_2) - \Phi^1(x_1, x_2)| = |f^2 - f^1| <$$

$$< M_0 \cdot K (A + \Sigma A_k + \Sigma A_{ij}) \frac{\xi' + \eta'}{1!} < 6 H M_0 K \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|\Phi^2_{x_1} - \Phi^1_{x_1}| < 3 \left[R \overline{M}_0 + M_0 K (2H + R + 12 H T) \cdot \frac{\xi' + n'}{1!} \right]$$

representando R como sabemos una cota superior de las derivadas primeras de f, y T una cota numérica común de los módulos de cualquier aproximación $u^n(x_1, x_2)$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras, en el intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$ cota existente e independiente de n como puede verse en la nota complementaria a este Capítulo.

De la misma manera:

$$|\Phi^2_{x_2} - \Phi^1_{x_2}| < 3 \left[R \overline{M}_0 + M_0 K \; (2H + R + 12 H T) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!} \right]$$

y además:

$$|J(\Phi^2 - \Phi^1)| < \frac{6 H M_0 K}{1 - h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!}$$

(Véase n.º 7 del CAP. III)

$$|J(\Phi^2_{x_2} - \Phi^1_{x_2})| < 3 \overline{M}_0 \left[\frac{(\alpha + \beta)(2HK + RK) + R}{1 - h} + 12 H T K (\alpha + \beta) \right] \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

así como

$$|J_{x_1}(\Phi^2 - \Phi^1)| < 3\overline{M}_0\left[L\cdot\exp.\{2L\alpha\}\cdot\frac{R+(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)\cdot K}{1-h}+\right.$$
$$\left.+\,2HK(\alpha+\beta)\right]\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

$$|J_{x_2}(\Phi^2 - \Phi^1)| < 3\cdot\overline{M}_0\cdot\exp.\{2L\alpha\}\cdot\frac{R+K\cdot(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

Las cotas superiores de $u^3(x_1, x_2) - u^2(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras son por tanto :

$$|u^3(x_1, x_2) - u^2(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$|u^3_1(x_1, x_2) - u^2_1(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0K}{1-h}\cdot(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$|u^3_2(x_1, x_2) - u^2_2(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

Para las derivadas segundas se obtienen las cotas :

$$|u^3_{11}(x_1, x_2) - u^2_{11}(x_1, x_2)| < 6HM_0K\left[L\cdot\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$|u^3_{12}x_1, x_2) - u^2_{12}(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0K}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$|u^3_{22}(x_1\ x_2) - u^2_{22}(x_1, x_2)| < 6LHM_0K\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

Para el cálculo de las cotas de las derivadas terceras, procederemos de igual modo que en el caso anterior a acotar separadamente cada una de los términos que las componen.

Así para $u^3_{111}(x_1, x_2) - u^2_{111}(x_1, x_2)$ se obtiene :

$$|[\varrho_{x_1}\cdot J(\Phi^2 - \Phi^1)]^{x_2^0}_{x_2}| < 12L\frac{H\overline{M}_0}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot K\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

$$|[\varrho\cdot J_{x_1}(\Phi^2 - \Phi^1)]^{x_2^0}_{x_2}| <$$
$$< 6L\overline{M}_0\left[L\cdot\exp.\{2L\alpha\}\frac{R+(\alpha+\beta)\cdot(2H+RK+12HTK)}{1-h}+\right.$$
$$\left.+\,2HK(\alpha+\beta)\right]\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{ \varrho_{x_2} (x_1, \xi_2) J [\Phi^2 (x_1, \xi_2) - \Phi^1 (x_1, \xi_2)] \right\}_{x_1} d\xi_2 \right| <$$

$$< 3 L \overline{M}_0 (\alpha + \beta) \left[\frac{L \cdot \exp. \{2 L \alpha\} [(\alpha + \beta) \cdot (2H + RK) + R + 12HTK] + 2HK (\alpha + \beta)}{1 - h} + \right.$$

$$\left. + 2HK (\alpha + \beta) \right] \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} [\Phi_{x_1}^2 (x_1, \xi_2) - \Phi_{x_1}^1 (x_1, \xi_2)] d\xi_2 \right| <$$

$$< 3 \overline{M}_0 [(\alpha + \beta) K \cdot (2H + R + 12HT) + R] \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

Asimismo :

$$| u_{112}^3 (x_1, x_2) - u_{112}^2 (x_1, x_2) | = | J_{x_1} (\Phi^2 - \Phi^1) | <$$

$$< 3 \overline{M}_0 \left[L \cdot \exp. \{2 L \alpha\} \cdot \frac{R + (\alpha + \beta) \cdot (2H + R + 12HT) K}{1 - h} + 2HK (\alpha + \beta) \right] \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$| u_{122}^3 (x_1, x_2) - u_{122}^2 (x_1, x_2) | = | J_{x_2} (\Phi^2 - \Phi^1) | <$$

$$< 3 \overline{M}_0 \cdot \exp. \{2 L \alpha\} \cdot \frac{R + K (\alpha + \beta) \cdot (2H + R + 12HT)}{1 - h} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

y, finalmente, las cotas de los diversos términos de $u_{222}^3 (x_1, x_2) -$ $- u_{222}^2 (x_1, x_2)$ son las siguientes :

$$\left| \frac{\varrho_{x_2} (x_1, x_2)}{\varrho^2 (x_1, x_2)} \cdot J (\Phi^2 - \Phi^1) \right| < \frac{6 L H \overline{M}_0}{1 - h} K (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \frac{J_{x_2} (\Phi^2 - \Phi^1)}{\varrho (x_1, x_2)} \right| <$$

$$< 3 L^2 \frac{\exp. \{2 L \alpha\}}{1 - h} [K (\alpha + \beta) \cdot (2H + R + 12HT) + R] \cdot \overline{M}_0 \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \frac{\varrho_{x_1} (\xi_1, x_2)}{\varrho^2 (\xi_1, x_2)} \cdot J [\Phi^2 (\xi_1, x_2) - \Phi^1 (\xi_1, x_2)] \right\}_{x_2} d\xi_1 \right| <$$

$$< \frac{3 L (\alpha + \beta)}{1 - h} [L \cdot \exp. \{2 L \alpha\} \cdot [K \cdot (\alpha + \beta) \cdot (2H + R + 12HT) + R] +$$

$$+ 2HK (\alpha + \beta)] \overline{M}_0 \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^2 (\xi_1, x_2) - \Phi^1 (\xi_1, x_2)}{\varrho (x_1, x_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 \right| <$$

$$< 3L \left[(\alpha + \beta) \cdot K \cdot (4H + R + 12HT) + R \right] \cdot \overline{M}_0 \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

(En todas las cotas obtenidas para las derivadas terceras se ha sustituido M_0 por $\overline{M}_0$).

Teniendo en cuenta el significado de K, resulta como cota superior de $u^3(x_1, x_2) - u^2(x_1, x_2)$ y de sus derivadas primeras y segundas la $M_0 \cdot K^2 \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!}$ y si $\overline{K}$ designa el máximo de K y de los factores que multiplican a $\overline{M}_0 \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para las derivadas terceras de $u^3(x_1, x_2) - u^2(x_1, x_2)$ una cota superior de estas últimas, será la $\overline{M}_0 \overline{K} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$, resultando demostrado lo que nos proponíamos.

8. Acotación de las restantes diferencias $u^{n+1}(x_1, x_2) - u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas parciales. Generalicemos los resultados anteriores, demostrando:

Teorema III. $u^{n+1}(x_1, x_2) - u^n(x_1, x_2)$ así como sus derivadas parciales primeras y segundas admiten como cota superior la $M_0 \cdot K^n \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$, y una cota superior de las derivadas terceras de $u^{n+1}(x_1, x_2) - u^n(x_1, x_2)$ es de la forma $\overline{M}_0 \overline{K}^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!}$.

Demostración. Para probarlo procederemos por inducción completa; si suponemos que la hipótesis es cierta para $u^n(x_1, x_2) - u^{n-1}(x_1, x_2)$ y sus derivadas, tendremos primeramente, como consecuencia, las desigualdades:

$$|\Phi^n(x_1, x_2) - \Phi^{n-1}(x_1, x_2)| = |f^n - f^{n-1}| <$$

$$< M_0 \cdot K^{n-1} \cdot (A + \Sigma A_k + \Sigma A_{ij}) \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!} < 6HM_0 K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\underset{(k=1,2)}{|\Phi^n_{x_k} - \Phi^{n-1}_{x_k}|} <$$

$$< 3\overline{M}_0 \left[R + K(\alpha + \beta) \cdot (2H + R + 12HT) \right] \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-2}}{(n-2)!}$$

y además:

$$|J(\Phi^n - \Phi^{n-1})| < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$$

(Véase n.º 8 del Cap. anterior).

$$|J(\Phi^n_{x_2} - \Phi^{n-1}_{x_2})| < 3\overline{M}_0 \left[\frac{(\alpha+\beta)\cdot(2HK + RK) + R}{1-h} + \right.$$

$$\left. + 12HTK(\alpha+\beta)\right] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como:

$$|J_{x_1}(\Phi^n - \Phi^{n-1})| < 3\overline{M}_0 \left[L \cdot \exp.\{2L\alpha\} \cdot \frac{R + (\alpha+\beta)\cdot(2H + R + 12HT)\cdot K}{1-h} + \right.$$

$$\left. + 2HK(\alpha+\beta)\right] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|J_{x_2}(\Phi^n - \Phi^{n-1})| <$$

$$< 3\overline{M}_0 \cdot \exp.\{2L\alpha\} \cdot \frac{R + K\cdot(\alpha+\beta)\cdot(2H + R + 12HT)}{1-h} \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

Las cotas superiores de $u^{n+1}(x_1, x_2) - u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, son, por consiguiente:

$$|u^{n+1}(x_1, x_2) - u^n(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} K^{n-1} \cdot (\alpha+\beta)^2 \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$$

$$|u_1^{n+1}(x_1, x_2) - u_1^n(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} K^{n-1} \cdot (\alpha+\beta) \cdot \frac{(\xi' + n')^n}{n!}$$

$$|u_2^{n+1}(x_1, x_2) - u_2^n(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot K^{n-1}(\alpha+\beta) \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$$

$$|u_{11}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{11}^n(x_1, x_2)| < 6HM_0\left[L \cdot \frac{\alpha+\beta+2}{1-h} + 1\right] \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$$

$$|u_{12}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{12}^n(x_1, x_2)| < \frac{6HM_0}{1-h} \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$$

$$|u_{22}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{22}^n(x_1, x_2)| < 6LHM_0\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h} + 1\right] \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!}$$

Para acotar las derivadas terceras, igual que en los casos anteriores, calcularemos separadamente las cotas de sus diversos términos componentes:

Para $u_{111}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{111}^{n}(x_1, x_2)$ obtendríamos:

$$|[\varrho_{x_1}(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^n - \Phi^{n-1})]_{x_2}^{x_2^0}| <$$
$$< \frac{12\,L\,H}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot K \cdot \overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|[\varrho(x_1, x_2) \cdot J_{x_1}(\Phi^n - \Phi^{n-1})]_{x_2}^{x_2^0}| <$$
$$< 6\,L\,\overline{M}_0\Big[L \cdot \exp.\{2\,L\,\alpha\} \cdot \frac{R+(\alpha+\beta)\cdot(2H+RK+12HTK)}{1-h} +$$
$$+ 2HK(\alpha+\beta)\Big]\overline{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\{\varrho_{x_2}(x_1, \xi_2)\cdot J[\Phi^n(x_1, \xi_2) - \Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)]\}_{x_1} d\,\xi_2\right| <$$
$$< 3\,L\,\overline{M}_0(\alpha+\beta)\Big[2\,H\,K(\alpha+\beta) +$$
$$+ \frac{L\cdot\exp.\{2L\alpha\}\cdot(\alpha+\beta)\cdot(2H+RK)+R+12HTK+2HK(\alpha+\beta)}{1-h}\Big]\overline{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}[\Phi_{x_1}^{n}(x_1, \xi_2) - \Phi_{x_1}^{n-1}(x_1, \xi_2)]d\,\xi_2\right| <$$
$$< 3\,\overline{M}_0[K\cdot(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)+R]\,\overline{K}^{n-2}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

Del mismo modo:

$$|u_{112}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{112}^{n}(x_1, x_2)| = |J_{x_1}(\Phi^n - \Phi^{n-1}| <$$
$$< 3\,\overline{M}_0\Big[L\cdot\exp.\{2\,L\,\alpha\}\cdot\frac{R+K(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)}{1-h} +$$
$$+ 2\,H\,K(\alpha+\beta)\Big]\cdot\overline{K}^{n-2}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|u_{122}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{122}^{n}(x_1, x_2)| = |J_{x_2}(\Phi^n - \Phi^{n-1})| <$$
$$< 3\,\overline{M}_0\cdot\exp.\{2\,L\,\alpha\}\cdot\frac{R+K(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)}{1-h}\cdot\overline{K}^{n-2}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

y, finalmente, las cotas de los términos de $u_{222}^{n+1}(x_1, x_2) - u_{222}^{n}(x_1, x_2)$ son las siguientes:

$$\left| \frac{\varrho_{x_2}(x_1, x_2)}{\varrho^2(x_1, x_2)} \cdot J(\Phi^n - \Phi^{n-1}) \right| < \frac{6\,L\,H\,\overline{M}_0}{1-h} K(\alpha+\beta) \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left| \frac{J_{x_2}(\Phi^n - \Phi^{n-1})}{\varrho(x_1, x_2)} \right| <$$

$$< 3\,L^2 \cdot \frac{\exp.\{2\,L\,\alpha\}}{1-h} [K(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)+R]\,\overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J[\Phi^n(\xi_1, x_2) - \Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)] \right\}_{x_2} \cdot d\,\xi_1 \right| <$$

$$< \frac{3\,L(\alpha+\beta)}{1-h} \Big[2HK(\alpha+\beta) + [K(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+12HT)+R]\,L \cdot$$

$$\cdot \exp.\{2\,L\,\alpha\} \Big] \overline{M}_0 \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^n(\xi_1, x_2) - \Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)} \right]_{x_2} d\,\xi_1 \right| <$$

$$< 3\,L \cdot [K\cdot(\alpha+\beta)\cdot(4H+R+12HT)+R] \cdot \overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

Recordando el significado de K y $\overline{K}$, resulta como cota superior de $u^{n+1}(x_1, x_2) - u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, la $M_0 \cdot K^n \cdot \dfrac{(\xi' + \eta')^n}{n\,!}$ y como cota de las derivadas terceras la $\overline{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-1} \cdot \dfrac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}$.

Como para $n = 3$ se verifican las hipótesis del teorema III, según el teorema II, queda demostrado lo que afirmábamos.

9. Construcción de la solución al problema de Cauchy. Formemos ahora las series:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (u^{r+1} - u^r)\,; \quad \sum_{r=0}^{\infty} (u_k^{r+1} - u_k^r)\,; \quad \sum_{r=0}^{\infty} (u_{ij}^{r+1} - u_{ij}^r); \quad \sum_{r=0}^{\infty} (u_{ijk}^{r+1} - u_{ijk}^r)\,;$$

$$(\text{con } u^0 = u_k^0 = u_{ij}^0 = u_{ijk}^0 = 0)\,; \qquad (5)$$

de las cuales las seis primeras admiten en todo el dominio de prolongación (D) la serie numérica mayorante de términos positivos y convergente:

$$M_0 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K^r \cdot (\alpha+\beta)^r}{r\,!} = M_0 \cdot e^{K\cdot(\alpha+\beta)}$$

y las cuatro últimas la:

$$M_0 + \overline{M}_0 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \overline{K}^r \cdot \frac{(\alpha + \beta)^r}{r!} = M_0 + \overline{M}_0 \cdot e^{\overline{K} \cdot (\alpha + \beta)}$$

por lo que en (D) la convergencia de las series (5) será absoluta y uniforme.

La primera de dichas series definirá, pues, una función en (D) $u(x_1, x_2)$ límite de la sucesión de aproximaciones $u^1, u^2, \ldots, u^r, \ldots$, cuyas derivadas parciales hasta las de tercer orden vendrán expresadas por las sumas de las restantes series de (5), límites a su vez de las respectivas sucesiones de derivadas de $u^1, u^2, \ldots, u^r, \ldots$

De la igualdad $s^r = u_{12}^r = J[\Phi^{r-1}(x_1, x_2)]$ en virtud de la convergencia uniforme de: $\Phi^{r-1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, u^{r-1}, u_k^{r-1}, u_{ij}^{r-1})$ consecuencia de la continuidad uniforme en (P_8) de f respecto de sus argumentos, así como de la convergencia uniforme de $u^{r-1}, u_k^{r-1}, u_{ij}^{r-1}$ en el dominio, (D) se deduce por paso al límite esta otra:

$$s(x_1, x_2) = u_{12}(x_1, x_2) = J[\Phi(x_1, x_2)] \qquad (6)$$

en la que se ha designado por $\Phi(x_1, x_2)$ la expresión $f(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$ resultante del paso al límite. De (6) y teniendo en cuenta que $J_{x_1}(F) + \varrho(x_1, x_2) J_{x_2}(F) \equiv F$ se obtiene:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$$

y esta igualdad demuestra que la función $u(x_1, x_2) = \lim_{r \to \infty} \cdot u^r(x_1, x_2)$ satisface idénticamente en todo el dominio de prolongación (D) a la ecuación en derivadas parciales propuesta. Cumple por otra parte, como se comprueba inmediatamente las condiciones iniciales impuestas:

$$u(x_1^0, x_2) = u(x_1, x_2^0) = u_1(x_1^0, x_2) \equiv 0$$

La función $u(x_1, x_2)$ así construída, es, pues, la solución al problema de Cauchy considerado, y la unicidad de la misma la demostramos en el número siguiente.

10. Unicidad de la solución. La solución al problema de Cauchy considerado es única, es decir, toda otra función $\overline{u}(x_1, x_2)$ continua con derivadas parciales primeras y segundas continuas,

que admita derivadas terceras mixtas, y que sea solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales

$$\bar{u}\,(x_1^0,\ x_2) = \bar{u}\,(x_1,\ x_2^0) = \bar{u}_1\,(x_1^0,\ x_2) \equiv 0$$

coincide idénticamente con $u\,(x_1,\ x_2)$

Para demostrarlo consideremos la función

$$\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2) = u\,(x_1,\ x_2) - \bar{u}\,(x_1,\ x_2)$$

que satisface evidentemente a la ecuación en derivadas parciales:

$$u_{112} + \varrho\,(x_1,\ x_2)\cdot u_{122} = \overline{\Phi}\,(x_1,\ x_2)\ ; \tag{7}$$

siendo:

$$\overline{\Phi}\,(x_1,\ x_2) = f\,(x_1,\ x_2,\ u,\ u_k,\ u_{ij}) - f\,(x_1,\ x_2,\ \bar{\ },\ \bar{u}_k,\ \bar{u}_{ij})$$

verificando las condiciones iniciales:

$$\bar{\bar{u}}\,(x_1^0,\ x_2) = \bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2^0) = \bar{\bar{u}}_1\,(x_1^0,\ x_2) \equiv 0$$

La ecuación (7) es del tipo de las estudiadas en el CAP. II, por lo que la solución de la misma con las condiciones iniciales exigidas, y de sus derivadas primeras y segundas vendrán expresadas por las fórmulas que allí se dedujeron (n.os 6, 7, 8, de dicho capítulo.)

Si $\overline{\overline{M}}_0$ es una cota superior en G de $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$ y de sus derivadas primeras y segundas, resultará en virtud de las fórmulas que expresan las mismas y con razonamientos análogos a los efectuados en el n.º 6 para acotar $u^2\,(x_1,\ x_2) - u^1\,(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas, la cota $\overline{\overline{M}}_0\cdot K\cdot\dfrac{(\xi' + \eta')}{1\,!}$ común a $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas parciales primeras y segundas (teniendo $\underline{K}$ el mismo significado que allí).

Sustituyendo las funciones subintegrales por las cotas correspondientes, se obtiene nuevamente para $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la cota $\overline{\overline{M}}_0\cdot K^2\cdot\dfrac{(\xi' + \eta')^2}{2\,!}$ y así sucesivamente, resultando en general como se demostraría por inducción la cota $\overline{\overline{M}}_0\cdot K^n\cdot\dfrac{(\xi' + \eta')^n}{2\,!}$ común a $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas válida en todo el dominio $\underline{D}$ de prolongación y al ser $\underline{n}$ cualquiera, así como $\xi' + \eta' < \alpha + \beta$, $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas son en valor absoluto inferiores a cualquier número positivo prefijado arbitrariamente, lo que exige que en dicho dominio sean nulas idénticamente, es decir, $\bar{u}(x_1, x_2) \equiv u(x_1, x_2)$.

Una vez probada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación, sólo queda por demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para afirmar que el problema es adecuado a la ecuación dada. Esto es fácilmente comprobable, considerando que la sucesión de aproximaciones que define $u(x_1, x_2)$ converge uniformemente en todo el dominio de prolongación D respecto a las condiciones iniciales consideradas como variables y que los términos $u^n(x_1, x_2)$ de dicha sucesión dependen (Véase Capítulo II) de un modo continuo de dichas condiciones iniciales, por lo que en todo el dominio de prolongación D, la solución $u(x_1, x_2)$ que define tal sucesión, dependerá asimismo de un modo continuo respecto de las condiciones iniciales, habiéndose, pues, demostrado lo que se afirmaba.

NOTA COMPLEMENTARIA AL CAPITULO IV

Acotación de u^n y sus derivadas 1.ªs, 2.ªs y 3.ªs De las expresiones obtenidas, págs. 147 y 148, CAP. IV, para las aproximaciones $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas:

$$u^n = \iint_{R(P)} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1, \xi_2)\right] d\xi_1 \cdot d\xi_2$$

$$u_1^n = \int_{x_2^0}^{x_2} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1, \xi_2)\right] d\xi_2$$

$$u_2^n = \int_{x_1^0}^{x_1} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1, \xi_2)\right] d\xi_1$$

$$u_{11}^n = \left[\varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0} +$$
$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} \varrho_{x_2}(x_1, \xi_2) \cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)\right] d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$u_{12}^n = J\left[\Phi^{n-1}(x_1, x_2)\right]$$

$$u_{22}^n = -\frac{J(\Phi^{n-1})}{\varrho(x_1, x_2)} - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, x_2)}{\varrho^2(\xi_1, x_2)} \cdot J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)\right] d\xi_1 +$$
$$+ \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\Phi^{n-1}(\xi_1, x_2)}{\varrho(\xi_1, x_2)} \cdot d\xi_1$$

$$u^n_{111} = \Big\{ [\varrho\,(x_1, x_2) \cdot J\,(\Phi^{n-1})]_{x_1} \Big\}^{x_2^0}_{x_2} +$$

$$+ \int_{x_2^0}^{x_2} \Big\{ \varrho_{x_2}\,(x_1, \xi_2) \cdot J\,[\Phi^{n-1}(x_1, \xi_2)] \Big\}_{x_1} d\,\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^{n-1}_{x_1}\,(x_1, \xi_2)\,d\,\xi_2$$

$$u^n_{112} = -\,\varrho\,(x_1, x_2) J \cdot \Big[\Phi^{n-1}_{x_2}\,(x_1, x_2) \cdot \exp. \Big\{ J\,[\varrho_{x_2}\,(x_1, x_2)] \Big\} \Big] \cdot$$

$$\cdot \exp. \left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}\,[t, \lambda\,(t, x_1, x_2)]\,dt \right\} + \Phi^{n-1}\,(x_1, x_2)$$

$$u^n_{122} = J\,\Big[\Phi^{n-1}_{x_2}(x_1, x_2) \cdot \exp. \Big\{ J\,[\varrho_{x_2}(x_1, x_2)] \Big\} \Big] \cdot \exp. \left\{ \int_{x_1}^{x_1^0} \varrho_{x_2}\,[t, \lambda\,(t, x_1, x_2)]\,dt \right\}$$

$$u^n_{222} = -\left[\frac{J\,(\Phi^{n-1})}{\varrho\,(x_1, x_2)} \right]_{x_2} - \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}\,(\xi_1, x_2)}{\varrho^2\,(\xi_1, x_2)} \cdot J\,[\Phi^{n-1}\,(\xi_1, x_2)] \right\}_{x_2} d\,\xi_1 +$$

$$+ \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^{n-1}\,(\xi_1, x_2)}{\varrho\,(\xi_1, x_2)} \right]_{x_2} \cdot d\,\xi_1$$

se deduce que tanto u^n como sus derivadas primeras y segundas están igualmente acotadas.

Efectivamente, hemos demostrado que en los puntos $P\,(x_1, x_2)$ cuya región asociada esté comprendida en el intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$, u^n y sus derivadas primeras y segundas pertenecen a intervalos interiores al recinto P_8 en el cual se ha supuesto continua $f\,(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$ y por tanto acotada en el mismo. Se podrá, por tanto, acotar con independencia de n todas las integrales que figuran en las expresiones de u^n y sus derivadas primeras y segundas aplicando el teorema de la media, siendo la cota común pedida la mayor de las seis cotas obtenidas para u^n y sus cinco derivadas primeras y segundas. En cuanto a las derivadas terceras observemos que en las expresiones de

$$\Phi^{n-1}_{x_1}\,(x_1, x_2) = f^{n-1}_{x_1} + f^{n-1}_u \cdot u^{n-1}_1 + \sum_{k=1,2} f^{n-1}_{u_k} \cdot u^{n-1}_{k_1} + \sum_{i \leq j,\,(i,j=1,2)} f^{n-1}_{u_{ij}} \cdot u^{n-1}_{ij_1}$$

$$\Phi^{n-1}_{x_2}\,(x_1, x_2) = f^{n-1}_{x_2} + f^{n-1}_u \cdot u^{n-1}_2 + \sum_{k=1,2} \cdot f^{n-1}_{u_k} \cdot u^{n-1}_{k_2} + \sum_{i \leq j;\,(i,j=1,2)} f^{n-1}_{u_{ij}} \cdot u^{n-1}_{ij_2}$$

figuran términos en los que no intervienen las derivadas terceras de la aproximación u^{n-1}.

Por tanto, en las integrales que afecten a dichas expresiones, así como las que resulten de aplicar a ellas el operador J, se podrán acotar independientemente de n las partes correspondientes a dichos términos.

Resultando :

$$(1)\left\{\begin{aligned}
&|u^n_{111}| < P + 2\,L^2\cdot R\cdot \exp.\,\{2\,L\,\alpha\} \sum_{\substack{i\leq j\\ i,\,j=1,\,2}} |J\,(u^{n-1}_{ij_2})| + \\
&+ L^2\cdot R\cdot \exp.\,\{2\,L\,\alpha\} \sum_{\substack{i\leq j\\ i,\,j=1,\,2}} \left|\int_{x_2^0}^{x_2} J\,(u^{n-1}_{ij_2})\,d\,\xi_2\right| + R \sum_{\substack{i\leq j\\ i;\,j=1,\,2}} \left|\int_{x_2^0}^{x_2} u^{n-1}_{ij_1}\,d\,\xi_2\right| \\
&|u^n_{112}| < P + L\cdot R\cdot \exp.\,\{2\,L\,\alpha\} \sum_{\substack{i\leq j\\ i,\,j=1,\,2}} |J\,(u^{n-1}_{ij_2})| \\
&|u^n_{122}| < P + R\cdot \exp.\,\{2\,L\,\alpha\}\cdot \sum_{\substack{i\leq j\\ i.\,j=1,\,2}} |J\,(u^{n-1}_{ij_2})| \\
&|u^n_{222}| < P + L\cdot R\cdot \exp.\,\{2\,L\,\alpha\} \sum_{\substack{i\leq j\\ i,\,j=1.\,2}} |J\,(u^{n-1}_{ij_2})| + \\
&+ L\cdot R\cdot \exp.\,\{2\,L\,\alpha\} \sum_{\substack{i\leq j\\ i.\,j=1,\,2}} \left|\int_{x_1^0}^{x_1} J\,(u^{n-1}_{ij_2})\,d\,\xi_1\right| + L\cdot R \sum_{\substack{i\leq j\\ i,\,j=1,\,2}} \left|\int_{x_1^0}^{x_1} u^{n-1}_{ij_2}\,d\,\xi_1\right|
\end{aligned}\right.$$

en donde P designa una cota común a las expresiones resultantes de aplicar el operador J a las partes en que no figuran derivadas terceras de u^{n-1} y a las que resulten de someter dichas partes a las cuadraturas indicadas en las fórmulas resolutivas correspondientes. R, es como sabemos (pág. 150, CAP. IV), una cota común de f y de sus derivadas parciales en G, y L con el mismo significado que entonces designa, asimismo una cota superior común en G a $\varrho\,(x_1,\,x_2)$; $\dfrac{1}{\varrho\,(x_1,\,x_2)}$ y sus derivadas parciales primeras y segundas.

Para $n = 1$ por ser (página 146, CAP. IV) $u^0 = u^0_k = u^0_{ij} = 0$, resulta :

$$\underset{\substack{i\leq j\leq l\\ (i;\,j,\,l=1,\,2)}}{|u^1_{ijl}| < P}$$

Para $n = 2$ razonando igual que en CAP. III, pág. 129 y siguientes, se tienen en 1.ᵉʳ lugar las desigualdades siguientes :

$$|J\,(u^1_{ij_2})| < \frac{P}{1-h}\cdot\frac{\xi' + \eta'}{1\,!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1} u^1_{ij_2}\,d\,\xi_1\right| < P\cdot\frac{(\xi' + \eta')}{1\,!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} u_{ij_1}^1 \, d\xi_2\right| < P \cdot \frac{(\xi' + \eta')}{1!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1} J(u_{ij_2}^1) \, d\xi_1\right| < \frac{P}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} < \frac{P}{1-h} \cdot (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} J(u_{ij_2}^1) \, d\xi_2\right| < \frac{P}{1-h} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} < \frac{P}{1-h} (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

y al substituir en (1) resulta :

$$|u_{111}^2| < P + 3R \cdot \left[L^2 \cdot \exp. \{2L\alpha\} \frac{\alpha + \beta + 2}{1-h} + 1\right] \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|u_{112}^2| < P + 3L \cdot \exp. \{2L\alpha\} \frac{R}{1-h} \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|u_{122}^2| < P + 3 \ \exp. \{2L\alpha\} \frac{R}{1-h} \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$|u_{222}^2| < P + 3LR\left[\exp. \{2L\alpha\} \frac{\alpha + \beta + 1}{1-h} + 1\right] \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

Ahora bien, si w representa el máximo del conjunto de números constituído por P, y por los coeficientes de $P \cdot \dfrac{\xi' + \eta'}{1!}$ se obtendrá :

$$|u_{ijl}^2| < w + w^2 \frac{\xi' + \eta'}{1!} = S_2 ;$$

indicando con S_n la expresión :

$$w + w^2 \frac{\xi' + \eta'}{1!} + \ldots + w^n \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como también: $|u_{ijl}^1| < w = S_1$

Generalicemos estos resultados demostrando que las derivadas terceras de la enésima aproximación admiten como cota superior a S_n. En efecto, procediendo por inducción, supuesta cierta la hipótesis para la aproximación u^{n-1} se tendrá como consecuencia las desigualdades siguientes :

$$|J(u_{ij2}^{n-1})| < \frac{1}{1-h} \cdot \frac{1}{w} \cdot (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} u_{ij2}^{n-1}\, d\xi_1 \right| < \frac{1}{w} \cdot (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} u_{ij2}^{n-1}\, d\xi_2 \right| < \frac{1}{w} \cdot (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} J(u_{ij2}^{n-1})\, d\xi_1 \right| < \frac{\alpha + \beta}{1-h} \cdot \frac{1}{w} \cdot (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} J(u_{ij2}^{n-1})\, d\xi_2 \right| < \frac{\alpha + \beta}{1-h} \cdot \frac{1}{w} \cdot (S_n - w)$$

y al tener en cuenta (1) se obtiene :

$$|u_{111}^n| < P + 3R \cdot \left[L^2 \cdot \exp.\{2\, L\alpha\} \cdot \frac{\alpha+\beta+2}{1-h} + 1\right] \cdot \frac{S_n - w}{w} < w + S_n - w = S_n$$

$$|u_{112}^n| < P + 3\, L \exp.\{2\, L\alpha\} \cdot \frac{R}{1-h} \cdot \frac{S_n - w}{w} < S_n$$

$$|u_{122}^n| < P + 3 \cdot \exp.\{2\, L\alpha\} \cdot \frac{R}{1-h} \cdot \frac{S_n - w}{w} < S_n$$

$$|u_{222}^n| < P + 3\, LR \left[\exp.\{2\, L\alpha\} \cdot \frac{\alpha+\beta+1}{1-h} + 1\right] \cdot \frac{S_n - w}{w} < S_n$$

Como para $n = 3$, son ciertas las hipótesis de la inducción el resultado obtenido es completamente general.

Ahora bien :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = w \cdot \lim_{n\to\infty} \cdot \left[1 + w \frac{\xi' + \eta'}{1\,!} + \ldots + w^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^{n-1}}{(n-1)\,!}\right] =$$

$$= w \cdot e^{w(\xi' + \eta')} < w \cdot e^{w(\alpha + \beta)}$$

quedando, pues, demostrado, lo que se afirmaba en la página 65 del CAP. IV sobre la existencia de una cota común a u^n y sus derivadas primeras, segundas y terceras independiente de n.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] COURANT-HILBERT. — « *Methoden der Mathematischen Physik* ». — Zweiten Band. Berlín, 1937. (Verlag von Julius Springer).

[2] BLASCHKE-WILHEM. — « *Conferencias sobre Geometría de los tejidos* », profesadas por el autor en 1954 en el Seminario Matemático de Barcelona.

[3] BLASCHKE-WILHEM. — « *Einführung in die Geometrie der Waben* ». — (1955) Mathematische Einzelwerke. Birkhäuser Verlag.

[4] VIDAR THOMÉE. — « *Estimates of the Friedrichs-Lewy type for a hiperbolic equation with three characteristics* ». — Mathematica Scandinavica. Kobenhavn, 1955.

[5] SANSONE-GIOVANNI. — « *Equazioni differenziali nel campo reale* ». — Parte prima, 2.ª ed., 1948. Bologna. Nicola Zanizelli.