SOBRE LA ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE TRAYECTORIAS MAXIMALES DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 1er ORDEN

por

JOAQUIN M.ª CASCANTE DÁVILA

RESUMEN

En este trabajo se establece que para todo abierto $G = \mathring{G}$ de $\mathbf{R}^2$, existe una correspondencia biyectiva entre las funciones numéricas $\varrho : G \to \mathbf{R}$ definidas sobre G, continuas y localmente lipschitzianas respecto a su segundo argumento sobre G [resp. definidas sobre G, continuas y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], y las por nosotros denominadas «$(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedades de la clase $\mathcal{L}$ y de dimensión 1» [resp. «$(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedades de la clase C^1 y de dimensión 1»].

Para una mejor exposición hemos dividido el trabajo en una INTRODUCCION y dos PARTES. En la INTRODUCCION definimos y estudiamos los atlas de la clase $\mathcal{L}$ y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. los atlas de la clase C^1 y del tipo $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{tr.})$] dados sobre particiones P de G, constituidas cada una de ellas por las trayectorias o grafos de funciones numéricas definidas y continuamente derivables sobre intervalos abiertos de $\mathbf{R}$, particiones de G cuyo conjunto denotamos por $\mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}}$, estableciendo las propiedades más notables relativas a los mismos, las cuales son necesarias para el buen desarrollo de las PARTES que a continuación suceden, e introduciendo seguidamente el concepto de «$(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase $\mathcal{L}$» [resp. «$(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase C^1»], como la clase de $\mathcal{L}$-equivalencia definida por un atlas de la clase $\mathcal{L}$ y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ dado sobre una partición $P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}}$ [resp. como la clase de C^1-equivalencia definida por un atlas de la clase C^1 y del tipo $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{tr.})$ dado sobre una partición $P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}}$].

En la PARTE PRIMERA, y mediante el TEOREMA FUNDAMENTAL (I), se establece que el conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de las trayectorias maximales de una ecuación diferencial ordinaria de 1er orden $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, en donde $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida sobre el abierto G de $\mathbf{R}^2$, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], es una partición perteneciente a $\mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}\,(\text{c. l. a. Fr.})}$ que admite un atlas de la clase $\mathcal{L}$ y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. de la clase C^1 y del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$], y consecuentemente, dicho conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de trayectorias maximales de $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ es susceptible de ser dotado de una estructura de $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase $\mathcal{L}$ [resp. de una estructura de $(G, G^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase C^1].

Finalmente en la PARTE SEGUNDA, y mediante el TEOREMA FUNDAMENTAL (II) que allí figura, se demuestra la propiedad inversa de la establecida por el TEOREMA FUNDAMENTAL (I) en la PARTE PRIMERA, es decir, se prueba que para todo abierto $G = \mathring{G}$ de $\mathbf{R}^2$, el conjunto base [supuesto dicho conjunto base $\in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}\,(\text{c. l. a. Fr.})}$], subyacente de cualquier $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase $\mathcal{L}$ [resp. de cualquier $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase C^1], es el conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de las trayectorias maximales de una única ecuación diferencial ordinaria de 1.er orden $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, en la que $\varrho : G \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida sobre G, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G] unívocamente determinada, concluyéndose dicha PARTE SEGUNDA con un ejemplo de aplicación del TEOREMA FUNDAMENTAL (II) desarrollado en la misma.

Los resultados establecidos en la INTRODUCCION y en las PARTES PRIMERA y SEGUNDA, son susceptibles de fácil generalización obteniéndose teoremas análogos relativos a $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedades de la clase $\mathcal{L}$ y de dimensión $n \geqslant 2$ [resp. $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedades de la clase C^1 y de dimensión n] y a sistemas de n ecuaciones diferenciales ordinarias de 1er orden.

INTRODUCCION

0.1. Particiones de un abierto $G \subset \mathbf{R}^2$ determinadas por familias de trayectorias. — Sea $G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2$ un abierto de $\mathbf{R}^2$. Por definición pondremos:

$$\text{«}c \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^2) \Rightarrow [(c \text{ es una } C^1\text{-trayectoria en } G) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists\, (I, \varphi))\, ((I, \varphi) \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \times C^1(\mathring{I}\,;\ \mathbf{R}) \text{ y y } I = \mathring{I} \neq \phi \text{ es un intervalo abierto de } \mathbf{R} \text{ y } c = \bigcup_{x \in I} \{(x, \varphi(x))\} \subset G)]\text{»}$$

es decir, un subconjunto c de $\mathbf{R}^2$ es una «C^1-trayectoria en G», si sólo si es el grafo Γ_φ. [Para toda aplicación $f : A \to B$ se denotará mediante Γ_f el grafo $\bigcup_{x \in A} \{(x, f(x))\}$ de dicha aplicación], de una cierta función numérica $\varphi : I = \mathring{I} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida y continuamente derivable sobre un intervalo $I = \mathring{I}$ abierto de $\mathbf{R}$, estando además este grafo Γ_φ contenido en el abierto G dado. Al conjunto de todas las C^1-trayectorias en G lo indicaremos por $\mathcal{T}_{ray.}^{(C^1; G)}$.

Si $\mathfrak{I}^{(\mathbf{R})}$ denota al conjunto constituido por todos los intervalos abiertos y no vacíos de $\mathbf{R}$, pondremos, asimismo:

$$\text{«}C_G^1 = \{\varphi \in \bigcup_{I \in \mathfrak{I}^{(\mathbf{R})}} C^1(I\,;\ \mathbf{R}) / \Gamma_\varphi \subset G\}\text{»}$$

Para toda $\varphi \in C_G^1$ denotaremos mediante I_φ al intervalo abierto de $\mathbf{R}$ sobre el cual está definida φ, es decir, I_φ está determinado por la relación:

$$\text{«}(\forall\, (I, \varphi))\, ((I, \varphi) \in \mathfrak{I}^{(\mathbf{R})} \times G_G^1 \Rightarrow [(I = I_\varphi) \Leftrightarrow (\varphi \in C^1(I\,;\ \mathbf{R}))])\text{»}$$

En virtud de lo precedente, se verifica, que:

$$\text{«}(\forall\, c)\, (c \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}^2) \Rightarrow [(c \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1; G)}) \Leftrightarrow (\exists\, \varphi)\, (\varphi \in C_G^1 \text{ y } c = \Gamma_\varphi)])\text{»}$$

así como, se tiene obviamente, que:

$$\text{«}(\varphi, \varphi^*) \in C_G^1 \times C_G^1 \text{ y } \Gamma_\varphi = \Gamma_{\varphi^*} \Rightarrow \varphi = (\Gamma_\varphi, pr_1 \Gamma_\varphi, \mathbf{R}) = = (\Gamma_{\varphi^*}, pr_1 \Gamma_{\varphi^*}, \mathbf{R}) = \varphi^*\text{»}$$

y consecuentemente, es válida la relación:

«$(\forall c)$ $(c \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \Rightarrow (\exists \varphi)$ $(\varphi \in C_G^1$ y $c = \Gamma_\varphi$ y φ es única en estas condiciones))».

Sentado esto, sea: $H = \{(c, \varphi) \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \times C_G^1 / c = \Gamma_\varphi\}$.

Se tiene (habida cuenta la relación anterior), que:

$$\text{«}pr_1 H = \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \text{ y } pr_2 H = C_G^1 \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall c)\ (\forall \varphi)\ (\forall \varphi^*)\ ((c, \varphi) \in H \text{ y } (c, \varphi^*) \in H \Rightarrow \varphi = \varphi^*)\text{»}$$

por lo que la terna $(H, \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)}, C_G^1)$, define una aplicación suprayectiva $h : \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \to C_C^1$ de $\mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)}$ sobre C_G^1, la cual verifica, como consecuencia de su propia definición:

$$\text{«}(\forall c)\ (c \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \Rightarrow c = \Gamma_{h(c)})\text{»}$$

relación que entraña:

$$\text{«}(\forall\ (c, c^*))\ ((c, c^*) \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \times \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \text{ y}$$
$$\text{y } h(c) = h(c^*) \Rightarrow \Gamma_{h(c)} = c = c^* = \Gamma_{h(c^*)})\text{»}$$

o lo que es equivalente:

«h es inyectiva»

Así pues, $h : \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)} \to C_G^1$ es una biyección del conjunto $\mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)}$ de las C^1-trayectorias en G sobre el conjunto C_G^1 constituido por las funciones numéricas definidas y continuamente derivables sobre intervalos abiertos de $\mathbf{R}$ y cuyos grafos están contenidos en G, que asigna a cada $c \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)}$ como imagen $h(c)$ la única función $\varphi \in C_G^1$ cuyo grafo Γ_φ coincide con c.

Por otra parte, si $c = \Gamma_\varphi \in \mathcal{T}_{ray.}^{(C^1;G)}$ es tal que: «sup. $(I_\varphi) < +\infty$ y y Existe φ(sup. $(I_\varphi) - 0$)» [resp. « $-\infty <$ inf. (I_φ) y Existe φ(inf. $(I_\varphi) + 0$)»], diremos que «$c = \Gamma_\varphi$ es una C^1-trayectoria con límite accesible por la derecha» y escribiremos:

$$\text{«(sup. } (I_\varphi),\ \varphi\,(\text{sup. } (I_\varphi) - 0) = \text{l. a. d. } (c)\text{»}$$

[resp. «$c = \Gamma_\varphi$ es una C^1-trayectoria con límite accesible por la izquierda» y «(inf. (I_φ), φ (inf. $(I_\varphi) + 0) =$ l. a. i. (c) »].

Introduzcamos, ahora, la noción de $C^1_{tray.}$-partición de un abierto G de $\mathbf{R}^2$. Por definición pondremos:

$$«P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(G)) \Rightarrow [(P \text{ es una } C^1_{tray.}\text{-partición de } G) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (P \subset \mathcal{T}^{(C^1;G)}_{ray.} \text{ y } P \text{ es una partición de } G)]»$$

es decir, las $C^1_{tray.}$-particiones de G son aquellas particiones de G cuyos elementos son C^1-trayectorias en G.

Asimismo, se definirá el concepto de «$C^1_{tray.}$-partición con límites accesibles en la frontera», (abreviadamente: «$C^1_{tray.}$-partición (c. l. a. Fr.)»), mediante la relación:

$$«P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(G)) \Rightarrow [(P \text{ es una } C^1_{tray.}\text{-partición (c. l. a. Fr.) de } G) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (P \subset \mathcal{T}^{(C^1;G)}_{ray.} \text{ y } P \text{ es una partición de } G \text{ y } (\forall c)\,(c \in P \text{ y } c \text{ es con límite accesible por la derecha (resp. } c \text{ es con límite accesible por la izquierda)} \Rightarrow \text{l. a. d.}\,(c) \in \text{Fr. } G \text{ (resp. l. a. i.}\,(c) \in \text{Fr. } G)))]»$$

Denotaremos mediante $\mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}}$ y mediante $\mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}(\text{c. l. a. Fr.})}$, respectivamente, a los conjuntos:

$$«\{P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(G)) / P \text{ es una } C^1_{tray.}\text{-partición de } G\}»$$

y

$$«\{P \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(G)) / P \text{ es una } C^1_{tray.}\text{-partición (c. l. a. Fr.) de } G\}»$$

verificándose, por tanto, que:

$$«(P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}}) \Leftrightarrow P \in \mathfrak{P}(\mathcal{T}^{(C^1;G)}_{ray.}) \text{ y } (\forall \vec{x})\,(\vec{x} \in G \Rightarrow (\exists c)\,(c \in P \text{ y } \vec{x} \in c \text{ y y } c \text{ es única en estas condiciones}))»$$

así como:

$$«(P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}(\text{c. l. a. Fr.})}) \Leftrightarrow (P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}} \text{ y y } (\forall c)\,(c \in P \text{ y Existe l. a. d.}\,(c) \text{ [resp. } c \in P \text{ y Existe l. a. i.}\,(c)] \Rightarrow \Rightarrow \text{l. a. d.}\,(c) \in \text{Fr. } G \text{ [resp. l. a. i.}\,(c) \in \text{Fr. } G]))»$$

relaciones, las cuales expresan, respectivamente, que la condición necesaria y suficiente para que un conjunto no vacio P de C^1-trayectorias en G sea una $C^1_{tray.}$-partición de G, es que por todo punto de G pase una y sólo una C^1-trayectoria de P, y que para que el conjunto no vacio P de C^1-trayectorias en G sea una $C^1_{tray.}$-partición (c. l. a. Fr.) es que, además de determinar P una $C^1_{tray.}$-partición de G, se verifique que cualquiera sea la C^1-trayectoria $c \in P$, la existencia para c de límite accesible por la derecha [resp. la existencia para c de límite accesible por la izquierda] entraña necesariamente l. a. d. $(c) \in$ Fr. G, [resp. entraña necesariamente l. a. i. $(c) \in$ Fr. G].

A toda $C^1_{tray.}$-partición [y a fortiori a toda $C^1_{tray.}$-partición (c. l. a. Fr.)] P de G, le está asociada una relación de equivalencia $\mathcal{R}_P$ sobre G, definida por:

$$«(\vec{x}, \vec{x}^*) \in G \times G \Rightarrow [(\vec{x} \sim \vec{x}^*_{(\text{mód. } \mathcal{R}_P)}) \Leftrightarrow (\exists c)\ (c \in P \text{ y } (\vec{x}, \vec{x}^*) \in c \times c)]»$$

cuyas clases de equivalencia son precisamente las C^1-trayectorias de P, y consecuentemente el conjunto $G/\mathcal{R}_P$ coincide con P.

Denotaremos mediante ι_P y $\mathcal{T}_P$, respectivamente, a la aplicación canónica de G sobre $G/\mathcal{R}_P = P$ y a la topología $\mathcal{T}_G/\mathcal{R}_P$ cociente de la topología $\mathcal{T}_G$ sobre G, (inducida por la topología sobre $\mathbf{R}^2$ generada por la norma euclídea), por la relación de equivalencia $\mathcal{R}_P$ sobre G asociada a la $C^1_{tray.}$-partición P de G.

0.2. Los atlas de la clase $\mathcal{L}$. — Sea $P \in P_G^{C^1_{tr.}}$ una $C^1_{tray.}$-partición del abierto G de $\mathbf{R}^2$, y sea $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j \in J}$ un atlas numérico de dimensión 1 dado sobre P. Para todo par de cartas $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$, $(U_{j^*}, \chi_{j^*}, \mathbf{R})$ denotaremos mediante

$$\begin{aligned} g_{j^*,j} &= \widetilde{(\chi_{j^*|U_j \cap U_{j^*}})} \circ \overset{-1}{(\chi_j)}_{|\chi_j(U_j \cap U_{j^*})} : \chi_j(U_j \cap U_{j^*}) = \\ &= O_{j,j^*} \to \chi_{j^*}(U_j \cap U_{j^*}) = O_{j^*,j}, \end{aligned}$$

[en donde para toda aplicación $f : A \to B$, se indica por $\widetilde{f} : A \to f(A)$ la aplicación suprayectiva de A sobre $f(A)$ que tiene el mismo grafo y conjunto de definición que f y cuyo conjunto de llegada es $f(A)$], a la función definidora del cambio de estas dos cartas.

Por definición diremos:

$«(\mathcal{A}$ es un atlas de la clase $\mathcal{L}) \Leftrightarrow (\forall_{(j,j^*)})\ (j, j^*) \in J \times J \Rightarrow \chi_j(U_j \cap U_{j^*})$ es un abierto de $\mathbf{R}$ y $g_{j^*,j}$ es localmente lipschitziana sobre el abierto $\chi_j(U_j \cap U_{j^*}))»$

Puesto que la local lipschitzianidad de una aplicación $f: A \to B$ sobre su conjunto de definición A entraña la continuidad de la misma sobre A, se sigue que todo atlas de la clase $\mathcal{L}$ es a fortiori de la clase C^0.

Asimismo, supuesto como hasta ahora, que P es una $C^1_{tray.}$-partición de G, y que $(U, \chi, \mathbf{R})$ es una carta numérica sobre P, diremos que $(U, \chi, \mathbf{R})$ es una carta del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$], si sólo si se verifican estas condiciones:

α) «U es una parte abierta de P para la topología $\mathcal{T}_P$ y la topología inducida por $\mathcal{T}_P$ sobre U coincide con la topología sobre U imagen recíproca mediante la biyección χ de la topología inducida sobre el abierto $\chi(U)$ de $\mathbf{R}$ por la topología de $\mathbf{R}$».

$\beta_{\mathcal{L}}$) «$\chi \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U)} : \overset{-1}{\iota_P}(U) \subset G \to \chi(U)$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre el abierto $\overset{-1}{\iota_P}(U)$ de $\mathbf{R}^2$» [resp. $\beta_{c_2^1}$) «$\chi \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U)} : \overset{-1}{\iota_P}(U) \subset G \to \chi(U)$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota_P}(U)$» (*)].

$\gamma_{\mathcal{L}}$) «$H = \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{\overline{h}(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} \subset \mathbf{R}^2$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ y la función numérica $\mathcal{T} : H \to \mathbf{R}$ definida por: $(x_1, t) \in H = \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{\overline{h}(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} \to$ $\to \mathcal{T}(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))(x_1) \in \mathbf{R}$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre H» [resp. $\gamma_{c_2^1}$) «$H = \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{\overline{h}(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} \subset \mathbf{R}^2$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ y la función numérica $\mathcal{T} : H \to \mathbf{R}$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto H»].

$\delta_{\mathcal{L}}$) «La función numérica $\sigma : H = \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{\overline{h}(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por:

$$(x_1, t) \in H \to \sigma(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))'(x_1) \in \mathbf{R}$$

es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre H» [resp. $\delta_{c_2^1}$) «la función numérica $\sigma : H \to \mathbf{R}$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto H»].

(*) Para toda $f: A = \mathring{A} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, se dirá que «$f$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre A», si solo sí, f es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre A y la derivada parcial correspondiente $D_2 f$ es contínua sobre A. Al conjunto constituido por las funciones $f: A = \mathring{A} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ que son contínuas y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre A, se le denotará por $C^1_2(A; \mathbf{R})$.

Si $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ es un atlas numérico de dimensión 1 dado sobre $P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr}}$, se dirá que «$\mathcal{A}$ es un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$» [resp. «$\mathcal{A}$ es un atlas del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$»], si sólo si, para todo $j \in J$, la carta $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ es del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. la carta $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ es del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$].

Dado que toda función numérica $f : A = \mathring{A} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida sobre un abierto A de $\mathbf{R}^2$ y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre A es, asimismo, localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre el abierto A de definición, se verifica, consecuentemente, que toda carta sobre P del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. todo atlas sobre P del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$] es, a fortiori, una carta sobre P del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$, [resp. un atlas sobre P del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$].

Son válidas las siguientes:

PROPOSICION I. — «Para toda $C^1_{tray.}$-partición de G y toda carta numérica $(\chi, U, \mathbf{R})$ del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$] dada sobre P, se verifica que las funciones numéricas $\mathcal{T} : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $\sigma : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definidas, respectivamente, por: $(x_1, r) \in H \to \mathcal{T}(x_1, r) = (h(\overset{-1}{\chi}(r)))(x_1) \in \mathbf{R}$ y por: $(y_1, t) \in H \to \sigma(y_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))'(y_1) \in \mathbf{R}$, son continuas sobre H» [resp. «las funciones numéricas $\mathcal{T} : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $\sigma : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ son continuas y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto H»].

PROPOSICION II. — «Para toda $C^1_{tray.}$-partición P del abierto G y todo par de cartas $(U, \chi, \mathbf{R})$ y $(U^*, \chi^*, \mathbf{R})$ dadas sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$] y tales que $U \cap U^* \neq \phi$, se verifica que la función $g : \chi(U \cap U^*) \to \chi^*(U \cap U^*)$ definidora del cambio de estas dos cartas (*) es localmente lipschitziana sobre $\chi(U \cap U^*)$ [resp. es continuamente diferenciable sobre $\chi(U \cap U^*)$].»

Para demostrar la PROPOSICION I, sea $(y_1^0, t^0) \in H$ y $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$; puesto que σ es localmente lipschitziana sobre H, existe un $\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ y un $k \in \mathbf{R}^+$, tales que [en donde para abreviar se hace $V =]y_1^0 - \eta, y_1^0 + \eta[\times]t^0 - \eta, t^0 + \eta[$]:

(*) Puesto que (en virtud de las propias definiciones), U y U^* son abiertos para la topología $\mathcal{T}_p$, es por tanto, $U \cap U^*$ un subconjunto abierto de U para la topología inducida por $\mathcal{T}_p$ sobre U, y consecuentemente [dado que $\chi : U \to \chi(U)$ es un hameomorfismo del abierto U (para $\mathcal{T}_p$) sobre el abierto $\chi(U)$ de $\mathbf{R}$], $\chi(U \cap U^*)$ es, asimismo, un abierto de $\mathbf{R}$ contenido en $\chi(U)$.

$$«(\forall\,(y_1,\bar{t},\bar{\bar{t}}))\;((y_1,\bar{t},\bar{\bar{t}})\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\text{ y }(y_1,\bar{t})\in V\cap H\text{ y}$$
$$\text{y }(y_1,\bar{\bar{t}})\in V\cap H \Rightarrow |\sigma(y_1,\bar{t})-\sigma(y_1,\bar{\bar{t}})|\leq k\cdot|\bar{t}-\bar{\bar{t}}|)»\;(^0)$$

Por otro lado $(y_1^0, t^0)\in H=\bigcup\limits_{s\in\chi(U)} I_{\overset{-1}{h}(\chi(s))}\times\{s\}$, entraña:

$$«t^0\in\chi(U)\text{ e }y_1^0\in I_{\overset{-1}{h}(\chi(t^0))}»$$

y además, dado que $I_{\overset{-1}{h}(\chi(t^0))}=\overset{\frown}{I_{\overset{-1}{h}(\chi(t^0))}}^{\circ}$ y que $\overset{-1}{h}(\chi(t^0))$ es continuamente derivable sobre $I_{\overset{-1}{h}(\chi(t^0))}$, existe, por tanto, un $\eta_\varepsilon^*\in\mathbf{R}^+-\{0\}$, tal que:

$$«]y_1^0-\eta_\varepsilon^*,y_1^0+\eta_\varepsilon^*[\,\subset I_{\overset{-1}{h}(\chi(t^0))}\text{ y }(\forall y_1)\,(y_1\in\,]y_1^0-\eta_\varepsilon^*,y_1^0+\eta_\varepsilon^*[\,\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|\sigma(y_1,t^0)-\sigma(y_1^0,t^0)|=|(h\overset{-1}{(\chi}(t^0)))'(y_1)-(h\overset{-1}{(\chi}(t^0)))'(y_1^0)|<\frac{\varepsilon}{2}\Big)»\;(^{0*})$$

Sea $\delta_\varepsilon=\text{mín}\left\{(\eta,\eta_\varepsilon^*,\dfrac{\varepsilon}{2(k+1)}\right\}\in\mathbf{R}^+-\{0\}$, y hagamos $U_\varepsilon=$
$=\,]y_1^0-\delta_\varepsilon,y_1^0+\delta_\varepsilon[\,\times\,]t^0-\delta_\varepsilon,t^0+\delta_\varepsilon[$.

Se verifica, que:

$$«(y_1,t)\in U_\varepsilon\cap H\Rightarrow[(y_1,t)\in V\cap H\text{ y }(y_1,t^0)\in\,]y_1^0-\delta_\varepsilon,y_1^0+\delta_\varepsilon[\,\times$$
$$\times\{t^0\}\subset(]y_1^0-\eta,y_1^0+\eta[\,\times\,]t^0-\eta,t^0+\eta[)\cap$$
$$\cap(]y_1^0-\eta_\varepsilon^*,y_1^0+\eta_\varepsilon^*[\,\times\{t^0\})\subset V\cap(I_{\overset{-1}{h}(\chi(t^0))}\times\{t^0\})\subset V\cap H]»$$

relación de la cual y habida cuenta $(^0)$ y $(^{0*})$, se sigue, que:

$$«(y_1,t)\in U_\varepsilon\cap H\Rightarrow\Big[|\sigma(y_1,t)-\sigma(y_1,t^0|\leq k\cdot|t-t^0|<k\cdot\delta_\varepsilon\leq$$
$$\leq k\cdot\frac{\varepsilon}{2(k+1)}<\frac{\varepsilon}{2}\text{ y }|\sigma(y_1,t^0)-\sigma(y_1^0,t^0)|<\frac{\varepsilon}{2}\Big]»$$

resultando verificarse, que:

$$«(y_1,t)\in U_\varepsilon\cap H\Rightarrow|\sigma(y_1,t)-\sigma(y_1^0,t^0)|\leq|\sigma(y_1,t)-\sigma(y_1,t^0)|+$$
$$+|\sigma(y_1,t^0)-\sigma(y_1^0,t^0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon»$$

Así pues, cualquiera sea $\varepsilon\in\mathbf{R}^+-\{0\}$ existe un abierto $U_\varepsilon=\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ de $\mathbf{R}^2$ al cual pertenece (x_1^0,t^0), tal que:

$$«(\forall (y_1, t)) ((y_1, t) \in U_\varepsilon \cap H \Rightarrow |\sigma(y_1, t) - \sigma(y_1^0, t^0)| < \varepsilon)»$$

lo que prueba la continuidad de $\sigma : H \to \mathbf{R}$ en el punto (x_1^0, t^0), y dada la arbitrariedad de $(x_1^0, t^0) \in H$, se concluye que σ es continua sobre H.

De modo enteramente análogo se demostraría la continuidad sobre H de la aplicación $\mathcal{T} : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

En el caso de ser $(U, \chi, \mathbf{R})$ una carta numérica sobre P del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$, puesto que $(U, \chi, \mathbf{R})$ es a fortiori del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$, son continuas, en virtud de lo acabado de demostrar, las aplicaciones $\mathcal{T} : H \to \mathbf{R}$ y $\sigma : H \to \mathbf{R}$, y en definitiva [habida cuenta, además, $\gamma_{c^1_2})$ y $\delta_{c^1_2})$] dichas aplicaciones son continuas sobre H y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre H, resultando así establecida completamente la PROPOSICION I.

Para verificar la validez de la PROPOSICION II, sean $(U, \chi, \mathbf{R})$ y $(U^*, \chi^*, \mathbf{R})$ dos cartas numéricas dadas sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$, y hagamos, para abreviar, $A = \chi(U \cap U^*)$ y $A^* = \chi^*(U \cap U^*)$; A y A^* son subconjuntos abiertos, respectivamente, de los abiertos $\chi(U)$ y $\chi^*(U^*)$ de $\mathbf{R}$, y sea $t^0 \in A$, así como $x_1^0 \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(t^0))}$ (existente siempre, dado que $I_{h(\overset{-1}{\chi}(t^0))} \neq \phi$) y pongamos $x_2^0 = (h(\overset{-1}{\chi}(t^0))(x_1^0)$.

Se tiene:

$$«(x_1^0, t^0) \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(t^0))} \times \{t^0\} \subset \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{h(\overset{-1}{\chi}(t^0))} \times \{s\} = H = \overset{\circ}{H} \text{ y } x_2^0 = \mathcal{T}(x_1^0, t^0) \text{ y}$$

$$\text{y } \iota_P(x_1^0, x_2^0) = \iota_P(x_1^0, (h(\overset{-1}{\chi}(t^0)))(x_1^0)) = \overset{-1}{\chi}(t^0) \in \overset{-1}{\chi}(A) =$$

$$= \overset{-1}{\chi}(\chi(U \cap U^*)) = U \cap U^* \subset U^*»$$

lo que entraña:

$$«(\exists \eta')(\eta' \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } \{x_1^0\} \times]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\subset]x_1^0 - \eta', x_1^0 + \eta'[\times$$

$$\times]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\subset H) \text{ y } (x_1^0, x_2^0) \in \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y}$$

$$\text{y } \overset{-1}{\chi}(t^0) = \iota_P(x_1^0, x_2^0) \text{ y } (x_1^0, t^0) \in H»$$

y dado que:

$$«\{x_1^0\} \times]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\subset H \Rightarrow (\forall t)(t \in]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\cap A \subset$$

$$\subset]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\Rightarrow x_1^0 \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(t))} \text{ y } \overset{-1}{\chi}(t) =$$

$$= \iota_P(x_1^0, (h(\overset{-1}{\chi}(t)))(x_1^0)) = \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t)))»$$

y consecuentemente, se verifica:

$$«(\forall t)\ (t \in]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\cap A \Rightarrow [\iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t)) = \\ = \overset{-1}{\chi}(t) \in \overset{-1}{\chi}(A) = U \cap U^* \subset U^*])»$$

es decir:

$$«(\forall t)\ (t \in]t^0 - \eta', t^0 + \eta'[\cap A \Rightarrow [(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t)) \in \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y} \\ \text{y } \overset{-1}{\chi}(t) = \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t))])»$$

así como [puesto que la aplicación $\chi^* \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U^*)} : \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \to \chi^*(U)$, es, en virtud de la condición β_L), localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota_P}(U^*)$], existe, además, un $(k^*, \eta^*) \in \in \mathbf{R}^+ \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$, tal que:

$$«((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\ ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y} \\ \text{y } (x_1, \bar{x}_2) \in (]x_1^0 - \eta^*, x_1^0 + \eta^*[\times]x_2^0 - \eta^*, x_2^0 + \eta^*[) \cap \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y} \\ \text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in (]x_1^0 - \eta^*, x_1^0 + \eta^*[\times]x_2^0 - \eta^*, x_2^0 + \eta^*[) \cap \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\chi^*(\overset{-1}{\iota_P}(x_1, \bar{x}_2)) - \chi^*(\overset{-1}{\iota_P}(x_1, \bar{\bar{x}}_2))| \leq k^* \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)»$$

y por otra parte la supuesta local lipschitzianidad de $\mathcal{T} : H \to \mathbf{R}$ respecto a su segundo argumento sobre H junto con la continuidad de $\mathcal{T}$ establecida por PROPOSICION I, permite afirmar que existe un $(k_1^*, \eta_1^*, \eta'') \in \mathbf{R}^+ \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$ para el cual se verifica, que:

$$\left\{ \begin{array}{c} «(\forall\ (x_1, \bar{t}, \bar{\bar{t}}))\ ((x_1, \bar{t}, \bar{\bar{t}}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{t}) \in (]x_1^0 - \eta_1^*, x_1^0 + \eta_1^*[\times \\ \times]t^0 - \eta_1^*, t^0 + \eta_1^*[) \cap H \text{ y } (x_1, \bar{\bar{t}}) \in \\ \in (]x_1^0 - \eta_1^*, x_1^0 + \eta_1^*[\times]t^0 - \eta_1^*, t^0 + \eta_1^*[) \cap H \Rightarrow \\ \Rightarrow |\mathcal{T}(x_1, \bar{t}) - \mathcal{T}(x_1, \bar{\bar{t}})| \leq k_1^* \cdot |\bar{t} - \bar{\bar{t}}|)» \\ \text{y} \\ «(\forall\ (x_1, t))\ ((x_1, t) \in (]x_1^0 - \eta'', x_1^0 + \eta''[\times]t^0 - \eta'', t^0 + \eta''[) \cap H \Rightarrow \\ \Rightarrow |\mathcal{T}(x_1, t) - x_2^0| = |\mathcal{T}(x_1, t) - \mathcal{T}(x_1^0, t^0)| < \eta^*)» \end{array} \right\}$$

se sigue de todo ello, y poniendo además $k = k^*.k_1^* \in \mathbf{R}^+$ y $\eta = \text{mín}\,\{\eta', \eta'', \eta^*, \eta_1^*\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, que es válida la relación:

$$\begin{aligned}
&«(\forall\, (\bar{t}, \bar{\bar{t}}))\; ((\bar{t}, \bar{\bar{t}}) \in (]t^0 - \eta, t^0 + \eta[\, \cap A) \times (]t^0 - \eta, t^0 + \eta[\, \cap A) \Rightarrow \\
&\Rightarrow [(x_1^0, \bar{t}) \in (]x_1^0 - \eta_1^*, x_1^0 + \eta_1^*[\, \times\,]t^0 - \eta_1^*, t^0 + \eta_1^*[) \cap H \text{ y} \\
&\text{y } (x_1^0, \bar{\bar{t}}) \in (]x_1^0 - \eta_1^*, x_1^0 + \eta_1^*[\, \times\,]t^0 - \eta_1^*, t^0 + \eta_1^*[) \cap H \text{ y} \\
&\text{y } (x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, \bar{t})) \in (]x_1^0 - \eta^*, x_1^0 + \eta^*[\, \times\,]x_2^0 - \eta^*, x_2^0 + \eta^*[) \cap \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y} \\
&\text{y } (x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, \bar{\bar{t}})) \in (]x_1^0 - \eta^*, x_1^0 + \eta^*[\, \times\,]x_2^0 - \eta^*, x_2^0 + \eta^*[) \cap \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y} \\
&\text{y } \overset{-1}{\chi}(\bar{t}) = \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, \bar{t})) \text{ y } \overset{-1}{\chi}(\bar{\bar{t}}) = \\
&= \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, \bar{\bar{t}})) \text{ y } |\chi^*(\overset{-1}{\chi}(\bar{t})) - \chi^*(\overset{-1}{\chi}(\bar{\bar{t}}))| = \\
&= |\chi^*(\iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, \bar{t}))) - \chi^*(\iota_p(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, \bar{\bar{t}})))| \leq \\
&\leq k^* \cdot |\mathcal{T}(x_1^0, \bar{t}) - \mathcal{T}(x_1^0, \bar{\bar{t}})| \leq k^*.k_1^* \cdot |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| = k \cdot |\bar{t} - \bar{\bar{t}}|])»
\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$«g = \widetilde{(\chi^*_{|U \cap U^*})} \circ \widetilde{(\overset{-1}{\chi})_{|A}} = \widetilde{(\chi^*_{|U \cap U^*})} \circ \widetilde{(\chi_{|U \cap U^*})}^{-1} : A \to A^*»$$

por lo que se verifica:

$$«(\forall\, t)\; (t \in A \Rightarrow g(t) = \widetilde{(\chi^*_{|U \cup U^*})}\, (\widetilde{(\overset{-1}{\chi})_{|A}}(t)) = \chi^*(\overset{-1}{\chi}(t)))» \quad (0^{**})$$

resultando ser válida la relación:

$$\begin{aligned}
&«(\forall\, (\bar{t}, \bar{\bar{t}}))\; ((\bar{t}, \bar{\bar{t}}) \in (]t^0 - \eta, t^0 + \eta[\, \cap A) \times (]t^0 - \eta, t^0 + \eta[\, \cap A) \Rightarrow \\
&\Rightarrow |g(\bar{t}) - g(\bar{\bar{t}})| = |\chi^*(\overset{-1}{\chi}(\bar{t})) - \chi^*(\overset{-1}{\chi}(\bar{\bar{t}}))| \leq k \cdot |\bar{t} - \bar{\bar{t}}|)» \quad (1)
\end{aligned}$$

Así pues, para todo $t^0 \in A = \chi(U \cap U^*)$ existe un $(k, \eta) \in \mathbf{R}^+ \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$, tal que se verifica la relación (1), lo que prueba que $g : \chi(U \cap U^*) \to \chi^*(U \cap U^*)$ es localmente lipschitziana sobre $\chi(U \cap U^*)$ de acuerdo con lo afirmado.

Suponiendo ahora que $(U, \chi, \mathbf{R})$ y $(U^*, \chi^*, \mathbf{R})$ son dos cartas numéricas dadas sobre la $C^1_{tray.}$-partición P de G, del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$, si $t^0 \in A = \chi(U \cap U^*)$, dado que $I_{\bar{h}^{-1}(\chi(t^0))} \neq \phi$, existe, consecuentemente un $x_1^0 \in I_{\bar{h}^{-1}(\chi(t^0))}$, el cual verifica, por tanto, que,

$$(x_1^0, t^0) \in I_{\bar{h}^{-1}(\chi(t^0))} \times \{t^0\} \subset \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{\bar{h}^{-1}(\chi(s))} \times \{s\} = H = \mathring{H}$$

Hagamos, como antes:

$$«x_2^0 = (h(\overset{-1}{\chi}(t^0)))(x_1^0) = \mathcal{T}(x_1^0, t^0)»$$

Se tiene:

$$«(x_1^0, t^0) \in H = \mathring{H} \text{ y } x_2^0 = \mathcal{T}(x_1^0, t^0) \text{ y } \iota_P(x_1^0, x_2^0) =$$
$$= \overset{-1}{\chi}(t^0) \in \overset{-1}{\chi}(A) = U \cap U^* \subset U^*»$$

lo que entraña [en donde $H\langle x_1^0,\rangle$, denota la traza del abierto H según x_1^0 es decir, el subconjunto de $\mathbf{R}$: $\{t \in \mathbf{R} | (x_1^0, t) \in H\}$], en consecuencia, que:

$$«\widehat{H\langle x_1^0,\rangle}^{\circ} = H\langle x_1^0,\rangle \text{ y } \{x_1^0\} \times H\langle x_1^0,\rangle \subset H \text{ y } (x_1^0, x_2^0) \in \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall t)\, (t \in H\langle x_1^0,\rangle \cap A \Rightarrow [x_1^0 \in I_{\bar{h}^{-1}(\chi(t))} \text{ y } \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t)) =$$
$$= \iota_P(x_1^0, (h(\overset{-1}{\chi}(t)))(x_1^0)) = \overset{-1}{\chi}(t) \in \overset{-1}{\chi}(A) \subset U^*])»$$

es decir, se verifica, que:

$$«H\langle x_1^0,\rangle \cap A = \widehat{H\langle x_1^0,\rangle \cap A}^{\circ} \text{ y } (x_1^0, x_2^0) \in \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall t)\, (t \in H\langle x_1^0,\rangle \cap A \Rightarrow [(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t)) \in \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y}$$
$$\text{y } \overset{-1}{\chi}(t) = \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t))])»$$

resultando ser válida la relación:

$$«\{x_1^0\} \times \mathcal{T}(\{x_1^0\} \times (H\langle x_1^0,\rangle \cap A)) \subset \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall t)\, (t \in H\langle x_1^0,\rangle \cap A \Rightarrow \overset{-1}{\chi}(t) = \iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t)))»$$

y consecuentemente la restricción a $H\langle x_1^0,\rangle \cap A$ de la aplicación parcial $\mathcal{T}_{(x_1^0,)}: H\langle x_1^0,\rangle \to \mathbf{R}$ determinada por $\mathcal{T}$ relativamente al valor x_1^0 de su primer argumento, es componible con la aplicación parcial $(\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)})_{(x_1^0,)} : (\overset{-1}{\iota_P}(U^*)) \langle x_1^0, \rangle \to \chi^*(U^*)$ determinada por $\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)}$ relativamente al valor x_1^0 de su primer argumento, verificándose habida cuenta $(^{0**})$ $[i : g(H\langle x_1^0,\rangle \cap A) \to \chi^*(U^*)$ denota la inyección canónica de $g(H\langle x_1^0,\rangle \cap A)$ en $\chi^*(U^*)]$, además, que:

$$«i \circ g_{|H\langle x_1^0,\rangle \cap A} : H\langle x_1^0,\rangle \cap A \to \chi^*(U^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota(_PU^*)})_{(x_1^0,)} \circ \mathcal{T}_{(x_1^0,)|H\langle x_1^0,\rangle \cap A} : H\langle x_1^0,\rangle \cap A \to \chi^*(U^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall t)\ (t \in H\langle x_1^0,\rangle \cap A \Rightarrow (i \circ g_{|H\langle x_1^0,\rangle \cap A})(t) = g(t) = \chi^*(\overset{-1}{\chi}(t)) =$$
$$= \chi^*(\iota_P(x_1^0, \mathcal{T}(x_1^0, t))) = (\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)})_{(x_1^0,)}(\mathcal{T}_{(x_1^0,)}(t)) =$$
$$= ((\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)})_{(x_1^0,)} \circ \mathcal{T}_{(x_1^0,)|H\langle x_1^0,\rangle \cap A})(t))»$$

es decir, se tiene que:

$$«i \circ g_{|H\langle x_1^0,\rangle \cap A} = (\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)})_{(x_1^0,)} \circ \mathcal{T}_{(x_1^0)|H\langle x_1^0,\rangle \cap A}»$$

y dado que $\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)} : \overset{-1}{\iota_P}(U^*) \to \chi^*(U^*)$ y $\mathcal{T} : H \to \mathbf{R}$ son, en virtud, respectivamente de $\beta_{c_2^1})$ y $\gamma_{c_2^1})$ continuamente derivables parcialmente con relación a los segundos argumentos sobre sus respectivos abiertos de definición $\overset{-1}{\iota_P}(U^*)$ y H, y consecuentemente, las aplicaciones parciales $(\chi^* \circ \iota^{-1}_{P|\iota_P(U^*)})_{(x_1^0,)} : \langle \overset{-1}{\iota_P}(U^*)\rangle \langle x_1^0,\rangle \to \chi^*(U^*)$ y $\mathcal{T}_{(x_1^0,)} : H\langle x_1^0,\rangle \to \mathbf{R}$ son continuamente diferenciables sobre sus respectivos abiertos de definición $\langle \overset{-1}{\iota_P}(U^*)\rangle \langle x_1^0,\rangle$ y $H\langle x_1^0,\rangle$, se sigue habida cuenta, además que $H\langle x_1^0,\rangle \cap A = \overset{\circ}{\widehat{H\langle x_1^0,\rangle \cap A}}$, finalmente, que $i \circ g_{|H\langle x_1^0,\rangle \cap A}$ y por tanto $g_{|H\langle x_1^0,\rangle \cap A}$ es continuamente diferenciable sobre $H\langle x_1^0,\rangle \cap A$.

Como $t^0 \in \omega_{t^0} = \overset{\circ}{\widehat{H\langle x_1^0,\rangle \cap A}} = H\langle x_1^0,\rangle \cap A \subset A$ es arbitrario, se verifica, por tanto, que:

$$«(\forall t^0)\ (t^0 \in A \Rightarrow (\exists\, \omega_{t^0})\ (\omega_{t^0} \in \mathfrak{P}(A) \text{ y } t^0 \in \omega_{t^0} = \overset{\circ}{\omega}_{t^0} \text{ y}$$
$$\text{y } g_{|\omega_{t^0}} \in C^1(\omega_{t^0};\ \chi^*(U \cap U^*)))))»$$

concluyéndose, que es válida, en definitiva, la relación:

$$«g \in C^1(A;\ \chi^*(U \cap U^*))»$$

lo que completa la demostración de la PROPOSICION II.

OBSERVACION I. — En la demostración seguida para establecer la continuidad de las aplicaciones $\mathcal{T} : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $\sigma : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ que afirma la PROPOSICION I, sólo se ha utilizado la local lipschitzianidad respecto a sus segundos argumentos sobre H sin suponer que H sea necesariamente abierto, [resp. la continua derivabilidad parcial respecto a sus segundos argumentos sobre el abierto H] de las aplicaciones $\mathcal{T}$ y σ combinada con la continuidad supuesta para cada $s \in H$ de la función $h(\overset{-1}{\chi}(s))$ y de su derivada $(h(\overset{-1}{\chi}(s)))'$ sobre el intervalo abierto $I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))}$ de definición de la misma, por lo que, [habida cuenta que, por hipótesis, para cada $c \in P$ es $h(c) \in C^1_G$ una función numérica definida y continuamente diferenciable sobre el intervalo abierto $I_{h(c)}$], la continuidad de $\mathcal{T}$ y σ es consecuencia exclusiva, respectivamente, de la verificación por parte de la carta $(U, \chi, \mathbf{R})$ de las condiciones $\gamma_{\mathcal{L}})$ y $\delta_{\mathcal{L}})$ (sin que se precise que H sea necesariamente un abierto de $\mathbf{R}^2$) [resp. de $\gamma_{C^1_2})$ y $\delta_{C^1_2})$].

Es válida, asimismo, la:

PROPOSICION III. — «Para toda $C^1_{tray.}$-partición P del abierto G y para todo atlas numérico $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j \in J}$ de dimensión 1 dado sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$] se verifica que $\mathcal{A}$ es un atlas de la clase $\mathcal{L}$ (y a fortiori de la clase C^0) [resp. $\mathcal{A}$ es un atlas de la clase C^1], y la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ sobre P asociada al atlas $\mathcal{A}$, (1.2, [1]), coincide con la topología $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_G / \mathcal{R}_P$ sobre P cociente de la topología $\mathcal{T}_G$ sobre G por la relación de equivalencia R_F sobre P asociada a la $C^1_{tray.}$-partición dada P de G».

En efecto, la primera parte de la PROPOSICION es consecuencia inmediata de la PROPOSICION II acabada de demostrar, puesto que para todo $(j, j^*) \in J \times J$, las cartas numéricas $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ y $(U_{j^*}, \chi_{j^*}, \mathbf{R})$ son del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$, [resp. son del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$], por lo que, en virtud de la referida PROPOSICION II, la aplicación $g_{j^*, j} : \chi_j(U_j \cap U_{j^*}) \to \chi_{j^*}(U_j \cap U_{j^*})$ del cambio de estas dos cartas es localmente lipschitziana sobre $\chi_j(U_j \cap U_{j^*})$. [resp. es continuamente diferenciable sobre $\chi_j(U_j \cap U_{j^*})$].

Para verificar la segunda parte de la PROPOSICION III, sea $\Omega = \bigcup_{j \in J} \overset{-1}{\chi_j}(\Omega_j)$, [con $\Omega_j = \mathring{\Omega}_j \subset \chi_j(U_j)$, para todo $j \in J$], un abierto de la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ sobre P asociada al atlas dado $\mathcal{A}$. En virtud de la condición α), para todo $j \in J$ es U_j un abierto de la topología $\mathcal{T}_P$ y

$\overset{-1}{\chi_j}(\Omega_j)$ es un abierto para la topología inducida sobre U_j por $\mathcal{T}_P$, y consecuentemente $\overset{-1}{\chi_j}(\Omega_j)$ es un abierto de $\mathcal{T}_P$, lo que entraña que $\Omega = \bigcup_{j\in J} \overset{-1}{\chi_j}(\Omega_j)$, sea, asimismo, un abierto de $\mathcal{T}_P$, y puesto que el abierto Ω de $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ es arbitrario, se sigue que $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})} \leqslant \mathcal{T}_P$.

Inversamente, supuesto que ω es un abierto de $\mathcal{T}_P$, se verifica, entonces, que para todo $j \in J$, es $\omega \cap U_j$ un abierto para la topología inducida sobre U_j por $\mathcal{T}_P$, topología que en virtud de la condición α) coincide con la topología sobre U_j imagen recíproca mediante la biyección χ_j de la topología inducida sobre $\chi_j(U_j)$ por la topología de $\mathbf{R}$, y consecuentemente, existe un abierto ω_j, contenido en $\chi_j(U_j)$ tal que $\omega \cap U_j = \overset{-1}{\chi_j}(\omega_j)$. Puesto que $j \in J$ es arbitrario y dado que además se tiene que $\omega = \omega \cap P = \omega \cap (\bigcup_{j\in J} U_j) = \bigcup_{j\in J} (\omega \cap U_j) = \bigcup_{j\in J} \overset{-1}{\chi}(\omega_j)$, se deduce de todo ello que ω es, asimismo, un abierto de la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ y habida cuenta la arbitrariedad del abierto ω de $\mathcal{T}_P$, se obtiene, finalmente, que $\mathcal{T}_P \leqslant \mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$, y en definitiva $\mathcal{T}_{(P;\mathrm{A})} = \mathcal{T}_P$ lo que completa la demostración de la PROPOSICION.

OBSERVACION II. — De la demostración acabada de efectuar, se sigue que si $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ es un atlas numérico de dimensión 1 dado sobre la $C^1_{tray.}$-partición P de G, que sea de la clase C^0 y tal que cada una de sus cartas verifica la condición α), entonces la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ sobre P asociada al atlas $\mathcal{A}$ coincide con la topología $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_G/\mathcal{R}_P$ sobre P.

Inversamente, si la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ coincide con la topología $\mathcal{T}_P$, se tiene, obviamente, que para todo $j \in J$ el abierto U_j de $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ es asimismo un abierto de $\mathcal{T}_P$ y la topología inducida por $\mathcal{T}_P$ sobre U_j coincide con la topología imagen recíproca mediante la biyección χ_j de la topología inducida sobre $\chi_j(U_j)$ por la topología de $\mathbf{R}$, o lo que es equivalente, la carta $(\chi_j, U_j, \mathbf{R})$ verifica la condición α).

Así pues es válida la relación:

«$\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ es un atlas numérico de dimensión 1 y de la clase C^0 dado sobre la $C^1_{tray.}$-partición P de $G \Rightarrow [(\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}) \Leftrightarrow (\forall j)(j \in J \Rightarrow$ $\Rightarrow$ la carta numérica $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ verifica la condición $\alpha))]$» (')

0.3 LA RELACION DE EQUIVALENCIA $\mathcal{L}$. — Introduzcamos ahora una nueva definición. Sean $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ y $\widehat{\mathcal{A}} = (\widehat{U}_{\hat{j}}, \widehat{\chi}_{\hat{j}}, \mathbf{R})_{\hat{j}\in\hat{J}}$

dos atlas de la clase $\mathcal{L}$ dados sobre la $C^1_{tray.}$-partición P de G. Se dirá que «$\mathcal{A}$ y $\widehat{\mathcal{A}}$ son $\mathcal{L}$-equivalentes si sólo si $\mathcal{A} \cup \widehat{\mathcal{A}}$ es un atlas sobre P de la clase $\mathcal{L}$», es decir, $\mathcal{A}$ y $\widehat{\mathcal{A}}$ son $\mathcal{L}$-equivalentes si sólo si se verifica la relación:

«$(\forall\, (j,\hat{j}))\ ((j,\hat{j}) \in J \times \hat{J} \Rightarrow [\chi_j(U_j \cap \hat{U}_{\hat{j}})$ y $\hat{\chi}_{\hat{j}}(U_j \cap \hat{U}_{\hat{j}})$ son abiertos de $\mathbf{R}$ y la aplicación $g_{\hat{j},j} : \chi_j(U_j \cap \hat{U}_{\hat{j}}) \to \hat{\chi}_{\hat{j}}(U_j \cap \hat{U}_{\hat{j}})$ del cambio de las dos cartas $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ y $(\hat{U}_{\hat{j}}, \hat{\chi}_{\hat{j}}, \mathbf{R})$ es localmente lipschitziana sobre el abierto $\chi_j(U_j \cap \hat{U}_{\hat{j}})])$»

Puesto que todo atlas de la clase $\mathcal{L}$ es a fortiori de la clase C^0, se sigue que dos atlas de la clase $\mathcal{L}$ y además $\mathcal{L}$-equivalentes, son, considerados como de la clase C^0, a fortiori C^0-equivalentes.

Se verifica la siguiente:

PROPOSICION IV. — «La relación $\mathcal{A}$ es $\mathcal{L}$-equivalente a $\widehat{\mathcal{A}}$, es una relación reflexiva, simétrica y transitiva».

En efecto, la reflexividad y la simetría siendo inmediatas, sean $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$, $\mathcal{A}' = (U_{j'}, \chi_{j'}, \mathbf{R})_{j'\in J'}$ y $\mathcal{A}'' = (U_{j''}, \chi_{j''}, \mathbf{R})_{j''\in J''}$, atlas sobre P de la clase $\mathcal{L}$, tales que $\mathcal{A}$ es $\mathcal{L}$-equivalente a $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}'$ es $\mathcal{L}$-equivalente a $\mathcal{A}''$. Puesto que a fortiori $\mathcal{A}$ es C^0-equivalente a $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}'$ es C^0-equivalente a $\mathcal{A}''$, se tiene, como se sabe, (1.3.1, [1]), que las topologías $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$, $\mathcal{T}_{(P';\mathcal{A}')}$ y $\mathcal{T}_{(P'';\mathcal{A}'')}$ sobre P asociadas, respectivamente, a $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}''$ coinciden.

Sea $(j', j'') \in J' \times J''$; para cada $j \in J$ hagamos:

$$«O_{j,j'} = \chi_j(U_j \cap U_{j'})\,;\ O_{j',j} = \chi_{j'}(U_j \cap U_{j'})\,;\ O_{j',j''} = \chi_{j'}(U_{j'} \cap U_{j''})\,;$$
$$;\ O_{j'',j'} = \chi_{j''}(U_{j'} \cap U_{j''})\,;\ O_{j'',j} = \chi_{j''}(U_{j''} \cap U_j)\,;\ O_{j,j''} = \chi_j(U_{j''} \cap U_j)»$$

[Dichos conjuntos son los abiertos de definición de las respectivas aplicaciones del cambio de cartas correspondientes]
así como:

$$«O^{(j'')}_{j,j'} = O^{(j')}_{j,j''} = \chi_j(U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}) = \chi_j(U_j \cap U_{j'}) \cap \chi_j(U_j \cap U_{j''}) =$$
$$= O_{j,j'} \cap O_{j,j''}\,;\quad O^{(j)}_{j',j''} = O^{(j'')}_{j',j} = \chi_{j'}(U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}) =$$
$$= \chi_{j'}(U_{j'} \cap U_{j''}) \cap \chi_{j'}(U_{j'} \cap U_j) = O_{j',j''} \cap O_{j',j}\,;$$
$$;\ O^{(j')}_{j'',j} = O^{(j)}_{j'',j'} = \chi_{j''}(U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}) =$$
$$= \chi_{j''}(U_{j''} \cap U_j) \cap \chi_{j''}(U_{j''} \cap U_{j'}) = O_{j'',j} \cap O_{j'',j'}»$$

Si para todo par de conjuntos H, K, con $H \subset K$, se denota mediante $i_{(K;H)} : H \to K$ a la inyección canónica de H en K, puesto que:

$$«g_{j',j}(O^{(j')}_{j,j''}) = O^{(j)}_{j',j''} = O^{(j'')}_{j',j} \text{ y } g_{j'',j'}(O^{(j)}_{j',j''}) = O^{(j)}_{j'',j'} = O^{(j')}_{j'',j} \text{ y}$$
$$\text{y } g_{j'',j}(O^{(j')}_{j,j''}) = O^{(j')}_{j'',j} = O^{(j)}_{j'',j'}»$$

son válidas, consecuentemente, las relaciones [en donde, como precedentemente para toda aplicación $f : A \to B$ se indica mediante $\widetilde{f} : A \to f(A)$ la aplicación suprayectiva que tiene el mismo grafo y conjunto de definición que f y cuyo conjunto de llegada es $f(A)$]:

$$«g_{j',j|O^{(j')}_{j,j''}} = i_{(O_{j',j''};O^{(j)}_{j',j''})} \circ (\widetilde{g_{j',j|O^{(j')}_{j,j''}}}) \text{ y } g_{j'',j'|O^{(j)}_{j',j''}} = i_{(O_{j'',j'};O^{(j)}_{j'',j'})} \circ (\widetilde{g_{j'',j'|O^{(j)}_{j',j''}}}) \text{ y}$$
$$\text{y } g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}} = i_{(O_{j'',j};O^{(j')}_{j'',j})} \circ (\widetilde{g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}}})»$$

y por otra parte, dado que se tiene:

$$«(\widetilde{g_{j',j|O^{(j')}_{j,j''}}}) = (\widetilde{\chi_{j'|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi_j)}_{|O^{(j')}_{j,j''}} \text{ y } (\widetilde{g_{j'',j'|O^{(j)}_{j',j''}}}) = (\widetilde{\chi_{j''|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi_{j'})}_{|O^{(j)}_{j',j''}} \text{ y}$$
$$y\ (\widetilde{g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}}}) = (\widetilde{\chi_{j''|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi_j)}_{|O^{(j')}_{j,j''}}»$$

lo que entraña:

$$«(\widetilde{g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}}}) = (\widetilde{\chi_{j''|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi_j)}_{|O^{(j')}_{j,j''}} =$$
$$= (\widetilde{\chi_{j''|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\widetilde{\chi_{j'|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}})} \circ (\widetilde{\chi_{j'|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi)}_{|O^{(j')}_{j,j''}} =$$
$$= (\widetilde{\chi_{j''|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ (\widetilde{\overset{-1}{(\chi_{j'})}_{|\chi_{j'}(U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''})}}) \circ (\widetilde{\chi_{j'|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi_j)}_{|O^{(j')}_{j,j''}} =$$
$$= \left((\widetilde{\chi_{j''|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ (\widetilde{\overset{-1}{(\chi_{j'})}_{|O^{(j)}_{j',j''}}})\right) \circ \left((\widetilde{\chi_{j'|U_j \cap U_{j'} \cap U_{j''}}}) \circ \overset{-1}{(\chi_j)}_{|O^{(j')}_{j,j''}}\right) =$$
$$= (\widetilde{g_{j'',j'|O^{(j)}_{j',j''}}}) \circ (\widetilde{g_{j',j|O^{(j')}_{j,j''}}})»$$

se deduce de todo ello que $(\widetilde{g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}}})$, por ser compuesta de aplicaciones localmente lipschitzianas, es asimismo, localmente lipschitziana sobre $O^{(j')}_{j,j''}$ y por tanto $g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}} = i_{(O_{j'',j};O^{(j')}_{j'',j})} \circ (\widetilde{g_{j'',j|O^{(j')}_{j,j''}}})$ es también localmente lipschitziana sobre $O^{(j')}_{j,j''}$.

Como $(O_{j,j''}^{(j')})_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de $O_{j,j''}$ se concluye que $g_{j''j}$, es localmente lipschitziana sobre $O_{j,j''}$.

Así pues, [y dada la arbitrariedad de $(j, j'') \in J \times J''$], se obtiene que para todo $(j, j'') \in J \times J''$, la aplicación $g_{j'',j} : O_{j,j''} = \chi_j(U_j \cap U_{j''}) \to \chi_{j''}(U_j \cap U_{j''}) = O_{j'',j}$ es localmente lipschitziana sobre el abierto $O_{j,j''}$ de definición de la misma, lo que demuestra la $\mathcal{L}$-equivalencia de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}''$.

De la PROPOSICION II de 0.2 establecida precedentemente, se deduce que para toda $C^1_{tray.}$-partición P del abierto G y todo par de atlas numéricos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ de dimensión 1 dados sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$], se verifica que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ son $\mathcal{L}$-equivalentes [resp. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ son C^1-equivalentes].

Inversamente, es válida la:

PROPOSICION V. — «Para toda $C^1_{tray.}$-partición P de G y cualquiera que sea el atlas $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ numérico de dimensión 1 dado sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$], se verifica que todo atlas $\mathcal{A}^* = (U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})_{j^*\in J^*}$ numérico de dimensión 1 dado sobre P y de la clase $\mathcal{L}$ [resp. de la clase C^1] y $\mathcal{L}$-equivalente a $\mathcal{A}$ [resp. C^1-equivalente a $\mathcal{A}$], es asimismo, un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$. [resp. un atlas del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{tr.})$]».

En efecto, suponiendo primeramente que $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ es del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$, y que $\mathcal{A}^* = (U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})_{j^*\in J^*}$ es de la clase $\mathcal{L}$ y además $\mathcal{L}$-equivalente a $\mathcal{A}$, puesto que a fortiori $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ son dos atlas de la clase C^0, que además son C^0-equivalentes, y consecuentemente, (1.3.1, [1]), las topologías $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A}^*)}$ y $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ asociadas a dichos atlas coinciden, se verifica, por tanto, que:

$$«\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A}^*)} = \mathcal{T}_P»$$

lo que, habida cuenta (′) de OBSERVACION II, equivale a:

$$«(\forall j^*)\ (j^* \in J^* \Rightarrow \text{la carta numérica } (U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R}) \text{ verifica la condición } \alpha))»$$

Sea ahora $j^* \in J^*$ y consideremos la función $g_{j^*,j} = (\widehat{\chi^*_{j^*|U_j \cap U^*_{j^*}}}) \circ$ $\circ\, (\overset{-1}{\widehat{\chi_{j|U_j \cap U^*_{j^*}}}}) : \chi_j(U_j \cap U^*_{j^*}) = O_{j,j^*} \to O^*_{j^*,j} = \chi^*_{j^*}(U_j \cap U^*_{j^*})$ del cambio de las dos cartas $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ y $(U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})$, así como la inyección canónica $i_{j,j^*} : \chi^*_{j^*}(U_j \cap U^*_{j^*}) \to \chi^*_{j^*}(U^*_{j^*})$, de $\chi^*_{j^*}(U_j \cap U^*_{j^*})$ en $\chi^*_{j^*}(U^*_{j^*})$, y hagamos: $\widehat{g}_{j^*,j} = i_{j,j^*} \circ g_{j^*,j} : \chi_j(U_j \cap U^*_{j^*}) = O_{j,j^*} \to O^*_{j^*} = \chi^*_{j^*}(U^*_{j^*})$.

Se tiene:

$$«\chi^*_{j^*|U_j \cap U^*_{j^*}} = i_{j,j^*} \circ (\widehat{\chi^*_{j^*|U_j \cap U^*_{j^*}}}) = i_{j,j^*} \circ (g_{j^*,j} \circ (\widehat{\chi_{j|U_j \cap U^*_{j^*}}})) =$$
$$= (i_{j,j^*} \circ g_{j^*,j}) \circ (\widehat{\chi_{j|U_j \cap U^*_{j^*}}}) = \widehat{g}_{j^*,j} \circ \chi_{j|U_j \cap U^*_{j^*}}»$$

y dado que por hipótesis $g_{j^*,j}$ y por tanto $\widehat{g}_{j^*,j}$, es localmente lipschitziana sobre O_{j,j^*}, así como la aplicación $\chi_j \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U_j)} : \overset{-1}{\iota_P}(U_j) \to O_j$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota_P}(U_j)$, se deduce de todo ello que la aplicación compuesta:

$$«(\chi^*_{j^*} \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U^*_{j^*})})_{|\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*})} = (\chi^*_{j^*|U \cap U^*_{j^*}}) \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*})} =$$
$$= (\widehat{g}_{j^*,j} \circ \chi_{j|U_j \cap U^*_{j^*}}) \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*})} = \widehat{g}_{j^*,j} \circ (\chi_{j|U_j \cap U^*_{j^*}} \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*})}) =$$
$$= \widehat{g}_{j^*,j} \circ (\chi_j \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U_j)})_{|\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*})}»$$

es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*})$.

Como $(\overset{-1}{\iota_P}(U_j \cap U^*_{j^*}))_{j \in J}$ es un recubrimiento abierto de $\overset{-1}{\iota_P}(U^*_{j^*})$, se concluye que $\chi^*_{j^*} \circ \iota_{P|\overset{-1}{\iota_P}(U^*_{j^*})}$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota_P}(U^*_{j^*})$ resultado que demuestra la verificación de la condición $\beta_L)$ por la carta $(U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})$ de $\mathcal{A}^*$.

Para probar que $(U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})$ verifica la condición $\gamma_L)$, hagamos para todo $j \in J$:

$$«K^*_{j^*,j} = (\mathbf{R} \times O_{j^*,j}) \cap H^*_{j^*} = (\mathbf{R} \times O^*_{j^*,j}) \cap (\bigcup_{s^* \in O^*_{j^*}} I_{h(\overset{-1}{\chi^*_{j^*}}(s^*))} \times \{s^*\}) =$$
$$= \bigcup_{s^* \in O^*_{j^*,j}} I_{h(\overset{-1}{\chi^*_{j^*}}(s^*))} \times \{s^*\}»$$

y

$$«K_{j,j^*} = (\mathbf{R} \times O_{j,j^*}) \cap H_j = (\mathbf{R} \times O_{j,j^*}) \cap (\bigcup_{s \in O_j} I_{h(\overset{-1}{\chi_j}(s))} \times \{s\}) = \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} I_{h(\overset{-1}{\chi_j}(s))} \times \{s\}»$$

Puesto que, por hipótesis, el atlas $\mathcal{A}$ es del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr})$ y consecuentemente la carta numérica $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ satisface la condición $\gamma_{\mathcal{L}})$, lo que entraña, en particular, que H_j es un abierto de $\mathbf{R}^2$, se sigue que: $K_{j,j^*} = (\mathbf{R} \times O_{j,j^*}) \cap H_j$ es, asimismo, un abierto de $\mathbf{R}^2$ el cual está contenido en H_j.

Pero, [habida cuenta, además, que $O^*_{j^*,j} = g_{j^*,j}(O_{j,j^*})]$ se tiene:

$$«K^*_{j^*,j} = \bigcup_{s^* \in O^*_{j^*,j}} I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(s^*))} \times \{s^*\} = \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(g_{j^*,j}(s)))} \times \{g_{j^*,j}(s)\} =$$

$$= \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} I_{h(\overset{-1}{\chi}_j(s))} \times \{g_{j^*,j}(s)\} = \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} \Big(\bigcup_{(x_1, r) \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}} \{(x_1, g_{j^*,j}(r))\}\Big) =$$

$$= \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} \Big(\bigcup_{(x_1, r) \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}} \{(Id_{\mathbf{R}}(x_1), (g_{j^*,j}(r))\}\Big) = \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} \Big(\bigcup_{(x_1, r) \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}} \{(Id_{\mathbf{R}} \times g_{j^*,j})(x_1, r)\}\Big) =$$

$$= \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} (Id_{\mathbf{R}} \times g_{j^*,j}) \Big(\bigcup_{(x_1, r) \in I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}} \{(x_1, r)\}\Big) = \bigcup_{s \in O_{j,j^*}} (Id_{\mathbf{R}} \times g_{j^*,j}) (I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}) =$$

$$= (Id_{\mathbf{R}} \times g_{j^*,j}) \Big(\bigcup_{s \in O_{j,j^*}} [I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}]\Big) = (Id_{\mathbf{R}} \times g_{j^*,j})(K_{j,j^*})»$$

y dado que las aplicaciones:

$$Id_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \text{y} \quad g_{j^*,j} : O_{j,j^*} \to O^*_{j^*,j}$$

son abiertas, y consecuentemente, lo es también (n.º 3, § 5, Chap. I de [2]) el producto de las mismas $Id_{\mathbf{R}} \times g_{j^*,j} : \mathbf{R} \times O_{j,j^*} \to \mathbf{R} \times O^*_{j^*,j}$, y además, según se ha visto precedentemente es $K_{j,j^*} \subset \mathbf{R} \times O_{j,j^*}$ un abierto de $\mathbf{R} \times O_{j,j^*}$, se sigue de todo ello que $K^*_{j^*,j}$ es un abierto de $\mathbf{R} \times O^*_{j^*,j}$, y por tanto, un abierto de $\mathbf{R}^2$ contenido en $H^*_{j^*}$.

Como todo atlas $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j \in J}$ dado sobre P del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$ es a fortiori un atlas sobre P del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$, y todo atlas $\mathcal{A}^* = (U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})_{j^* \in J^*}$ de la clase C^1 y C^1-equivalente al $\mathcal{A}$ es a fortiori un atlas de la clase $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-equivalente al atlas $\mathcal{A}$, se deduce, aplicando el resultado acabado de establecer, que para todo atlas $\mathcal{A}^* = (U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})_{j^* \in J^*}$ de la clase C^1 y C^1-equivalente al atlas $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j \in J}$ del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$, se verifica que cualquiera sea $(j, j^*) \in J \times J^*$ es $K^*_{j^*,j} = \bigcup_{s^* \in O^*_{j^*,j}} I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(s))} \times \{s^*\}$ un abierto de $\mathbf{R}^2$ contenido en $H^*_{j^*}$.

Por otro lado para todo $z \in K^*_{j^*,j} = \bigcup_{s^* \in O^*_{j^*,j}} I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(s^*))} \times \{s^*\}$ dado que se tiene:

$$«pr_2\, z \in O^*_{j^*,j} \quad \text{y} \quad pr_1\, z \in I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(pr_2\, z))}»$$

así como se verifica, que:

$$«pr_2\, z \in O^*_{j^*,j} \quad \text{y} \quad pr_1\, z \in I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(pr_2\, z))} \Rightarrow \widehat{g}_{j,j^*}(pr_2\, z) = g_{j,j^*}(pr_2\, z) \in O_j \quad \text{y}$$

$$\text{y} \quad pr_1\, z \in I_{h(\overset{-1}{\chi}_j(\chi_j(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(pr_2\, z))))} = I_{h(\overset{-1}{\chi}_j(g_{j,j^*}(pr_2\, z)))} = I_{h(\overset{-1}{\chi}_j(\hat{g}_{j,j^*}(pr_2\, z)))}»$$

relación que entraña:

$$«\bigcup_{z \in K^*_{j^*,j}} \{(pr_1\, z,\, g_{j,j^*}(pr_2\, z))\} \subset \bigcup_{s \in O_j} I_{h(\overset{-1}{\chi}_j(s))} \times \{s\} = H_j»$$

y consecuentemente, [en donde $\mathcal{T}^*_{j,j^*} : K^*_{j^*,j} \to \mathbf{R} \times O_j$ denota la aplicación continua sobre $K^*_{j^*,j}$ definida por: $(x^*_1, t^*) \in K^*_{j^*,j} = \bigcup_{s \in O^*_{j^*,j}} I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(s^*))} \times \{s^*\} \to \mathcal{T}^*_{j,j^*}(x^*_1, t^*) = (x^*_1, g_{j,j^*}(t^*)) \in \mathbf{R} \times O_j$], tiene sentido la composición $\mathcal{T}_j \circ \mathcal{T}^*_{j,j^*} : K^*_{j^*,j} \to \mathbf{R}$, verificándose, además, que:

$$«(\forall\, (x^*_1, t^*))\, ((x^*_1, t^*) \in K^*_{j^*,j} \Rightarrow (\mathcal{T}_j \circ \mathcal{T}^*_{j,j^*})\,(x^*_1, t^*) = \mathcal{T}_j(x^*_1, g_{j,j^*}(t^*)) =$$

$$= (h(\overset{-1}{\chi}_j(g_{j,j^*}(t^*))))\,(x^*_1) = (h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(t^*)))\,(x^*_1) = \mathcal{T}^*_{j^*}(x^*_1, t^*))»$$

por lo que es válida la relación:

$$«\mathcal{T}^*_{j^*|K_{j^*,j}} = \mathcal{T}_j \circ \mathcal{T}^*_{j,j^*}» \; (1^*)$$

Ahora bien, suponiendo que $\mathcal{A}$ es del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$ y que $\mathcal{A}^*$ es de la clase $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-equivalente a $\mathcal{A}$, las aplicaciones $\mathcal{T}_j : H_j \to \mathbf{R}$ y y $g_{j,j^*} : O^*_{j^*,j} \to O_{j,j^*}$ son, la primera localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre H_j y la segunda localmente lipschitziana sobre $O^*_{j^*,j}$, por lo que para todo $(x^{*0}_1, t^{*0}) \in K^*_{j^*,j} = \bigcup_{s^* \in O^*_{j^*,j}} I_{h(\overset{-1}{\chi}{}^*_{j^*}(s^*))} \times \{s^*\}$ existirá un $(k, \widehat{k}^*) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ y entornos U, V^* de $\mathcal{T}^*_{j,j^*}(x^{*0}_1, t^{*0}) \in H_j$ y de t^{*0}, respectivamente, tales que:

$$«(\forall\, (x_1, \overline{t}, \overline{\overline{t}}))\, ((x_1, \overline{t}, \overline{\overline{t}}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \;\; \text{y} \;\; (x_1, \overline{t}) \in U \cap H_j \;\; \text{y}$$

$$\text{y} \;\; (x_1, \overline{\overline{t}}) \in U \cap H_j \Rightarrow |\mathcal{T}_j(x_1, \overline{t}) - \mathcal{T}_j(x_1, \overline{\overline{t}})| \leq k \cdot |\overline{t} - \overline{\overline{t}}|)»$$

y

$$«(\forall\, (\overline{t^*}, \overline{\overline{t^*}}))\, ((\overline{t^*}, \overline{\overline{t^*}}) \in (V^* \cap O^*_{j^*,j}) \times (V^* \cap O^*_{j^*,j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g_{j,j^*}(\overline{t^*}) - g_{j,j^*}(\overline{\overline{t^*}})| \leq \widehat{k}^* \cdot |\overline{t^*} - \overline{\overline{t^*}}|)»$$

y en virtud de la continuidad de $\mathcal{T}^*_{j,j^*} : K^*_{j^*,j} \to \mathbf{R} \times O_j$ sobre $K^*_{j^*,j}$, se puede determinar un entorno U^* del punto (x_1^{*0}, t^{*0}) tal que:

$$«U^* \subset \mathbf{R} \times V^* \quad \text{y} \quad \mathcal{T}^*_{j,j^*}(U^* \cap K_{j^*,j}) \subset U»$$

resultando ser válidas, sucesivamente, las relaciones:

$$«(\forall\,(x_1^*, t^*))\,((x_1^*, t^*) \in U^* \cap K_{j^*,j} \Rightarrow [t^* \in V^* \cap O^*_{j^*,j} \quad \text{y}$$
$$\text{y} \quad (x_1^*, g_{j,j^*}(t^*)) = \mathcal{T}^*_{j,j^*}(x_1^*, t^*) \in U \cap H_j])»$$

y

$$«(\forall\,(x_1^*, \bar{t}^*, \bar{\bar{t}}^*))\,((x_1^*, \bar{t}^*, \bar{\bar{t}}^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \text{y} \quad (x_1^*, \bar{t}^*) \in U^* \cap K^*_{j^*,j} \quad \text{y}$$
$$\text{y} \quad (x_1^*, \bar{\bar{t}}^*) \in U^* \cap \overset{*}{K}_{j^*,j} \Rightarrow |\mathcal{T}^*_{j^*}(x_1^*, \bar{t}^*) - \mathcal{T}^*_{j^*}(x_1^*, \bar{\bar{t}}^*)| =$$
$$= |\mathcal{T}_j(\mathcal{T}^*_{j,j^*}(x_1^*, \bar{t}^*)) - \mathcal{T}_j(\mathcal{T}^*_{j,j^*}(x_1^*, \bar{\bar{t}}^*))| = |\mathcal{T}_j(x_1^*, g_{j,j^*}(\bar{t}^*)) - \mathcal{T}_j(x_1^*, g_{j,j^*}(\bar{\bar{t}}^*))| \leq$$
$$\leq k \cdot |g_{j,j^*}(\bar{t}^*) - g_{j,j^*}(\bar{\bar{t}}^*)| \leq k \cdot \hat{k}^* \cdot |\bar{t}^* - \bar{\bar{t}}^*| = k^* \cdot |\bar{t}^* - \bar{\bar{t}}^*|)»$$

es decir, para todo $(x_1^{*0}, t^{*0}) \in K^*_{j^*,j}$ existe un $k^* \in \mathbf{R}^+$ y un entorno U^* de (x_1^{*0}, t^{*0}), que verifican:

$$«(\forall\,(x_1^*, \bar{t}^*, \bar{\bar{t}}^*))\,((x_1^*, \bar{t}^*, \bar{\bar{t}}^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \quad \text{y} \quad (x_1^*, \bar{t}^*) \in U^* \cap K^*_{j^*,j} \quad \text{y}$$
$$\text{y} \quad (x_1^*, \bar{\bar{t}}^*) \in U^* \cap K^*_{j^*,j} \Rightarrow |\mathcal{T}^*_{j^*}(x_1^*, \bar{t}^*) - \mathcal{T}^*_{j^*}(x_1^*, \bar{\bar{t}}^*)| \leq k^* \cdot |\bar{t}^* - \bar{\bar{t}}^*|)»$$

y consecuentemente:

$$«\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}} \text{ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre } K^*_{j^*,j}» \quad (1^{**})$$

En el supuesto de ser $\mathcal{A}$ del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$ y que $\mathcal{A}^*$ es de la clase C^1 y C^1-equivalente a $\mathcal{A}$, entonces las aplicaciones $\mathcal{T}_j : H_j \to \mathbf{R}$ y y $g_{j,j^*} : O^*_{j^*,j} \to O_{j,j^*}$ son, la primera continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre H_j, y la segunda es continuamente diferenciable sobre $O^*_{j^*,j}$, por lo que la aplicación $(x_1^*, t^*) \in K^*_{j^*,j} \to \mathcal{T}^*_{j,j^*}(x_1^*, t^*) = (x_1^*, g_{j,j^*}(t^*)) \in \mathbf{R} \times O_j$ es, asimismo, continuamente diferenciable sobre $\overset{*}{K}_{j^*,j}$, y por otra parte, ya que para todo $(x_1^{*0}, t^{*0}) \in K^*_{j^*,j}$ es válida la relación:

$$«\{x^{*0}_{1}\} \times g_{j,j^*}(K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle) = \mathcal{T}^*_{j,j^*}(\{x^{*0}_1\} \times K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle) \subset$$
$$\subset \mathcal{T}^*_{j,j^*}(K^*_{j^*,j}) \subset H_j»$$

la cual entraña:

$$«g_{j,j^*}(K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle) \subset H_j\langle x^{*0}_{1'}\rangle»$$

siendo, por tanto, componibles las aplicaciones:

$$«g_{j,j^*|K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle} : K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle \subset O^*_{j^*,j} \to O_{j,j^*} \text{ y } (\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_1)} : H_j\langle x^{*0}_{1'}\rangle \to \mathbf{R}»$$

así como [habida cuenta (1*)], se verifica la validez de la relación:

$$«(\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}})_{(x^{*0}_1)} : K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle \to \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_{1'})} \circ g_{j,j^*|K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle} : K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle, \to \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall t^*)\ (t^* \in K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle \Rightarrow (\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}})_{(x^{*0}_{1'})}(t^*) = \mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}}(x^{*0}_1, t^*) =$$
$$= (\mathcal{T}_j \circ \mathcal{T}^*_{j,j^*})(x^{*0}_1, t^*) = \mathcal{T}_j(\mathcal{T}^*_{j,j^*}(x^{*0}_1, t^*)) = \mathcal{T}_j(x^{*0}_1, g_{j,j^*}(t^*)) =$$
$$= (\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_{1'})}(g_{j,j^*}(t^*)) = ((\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_{1'})} \circ g_{j,j^*|K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle})(t^*))»$$

equivalente a la:

$$«(\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}})_{(x^{*0}_{1'})} = (\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_{1'})} \circ g_{j,j^*|K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle}»$$

y puesto que además se tiene:

$$«g_{j,j^*|K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle} \text{ es derivable en } t^{*0} \in K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle = \overset{\circ}{\overbrace{K^*_{j^*,j}\langle x^{*0}_{1'}\rangle}} \text{ y}$$
$$\text{y } (\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_{1'})} \text{ es derivable en } g_{j,j^*}(t^{*0}) \in \overset{\circ}{\overbrace{H_j\langle x^{*0}_{1'}\rangle}} = H_j\langle x^{*0}_{1'}\rangle»$$

se deduce de todo ello que es válida la relación:

$$«(\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}})_{(x^{*0}_{1'})} \text{ es derivable en } t^{*0} \text{ y } ((\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}})_{(x^{*0}_{1'})})'(t^{*0}) =$$
$$= ((\mathcal{T}_j)_{(x^{*0}_{1'})})'(g_{j,j^*}(t^{*0})) \cdot (g_{j,j^*})'(t^{*0})»$$

la cual equivale a la:

«$\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}}$ es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento

$$\text{en } (x_1^{*0}, t^{*0}) \text{ y } (D_2(\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}}))(x_1^{*0}, t^{*0}) = (D_2\mathcal{T}_j)(x_1^{*0}, g_{j,j^*}(t^{*0}))\cdot$$

$$\cdot(g_{j,j^*})'(t^{*0}) = (D_2\mathcal{T}_j)(\mathcal{T}^*_{j,j^*}(x_1^{*0}, t^{*0}))\cdot(g_{j,j^*})'(pr_{2|K^*_{j^*,j}}(x_1^{*0}, t_1^{*0})) =$$

$$= (((D_2\mathcal{T}_j)\circ\mathcal{T}^*_{j^*,j})\cdot((g_{j,j^*})'\circ pr_{2|K^*_{j^*,j}}))(x_1^{*0}, t^*)\text{»}$$

y dada la arbitrariedad de $(x_1^{*0}, t^{*0}) \in K^*_{j^*,j}$ así como la continuidad de $D_2\mathcal{T}_j$, $\mathcal{T}^*_{j,j^*}$ y g_{j,j^*}, se verifica, por tanto, que:

«$\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}}$ es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento

$$\text{sobre } K^*_{j^*,j} \text{ y } D_2(\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}}) = ((D_2\mathcal{T}_j)\circ\mathcal{T}^*_{j^*,j})\cdot$$

$$\cdot((g_{j,j^*})'\circ pr_{2|K^*_{j^*,j}}) \in C^0(K^*_{j^*,j};\ \mathbf{R})\text{»}$$

es decir:

«$\mathcal{T}^*_{j^*|K^*_{j^*,j}}$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $K^*_{j^*,j}$» (1^{***})

Como según se ha establecido precedentemente, para todo $j \in J$ es $K^*_{j^*,j}$ un abierto de $\mathbf{R}^2$ y además se verifica que $\bigcup_{j\in J} K^*_{j^*,j} = H^*_{j^*}$, se concluye [teniendo en cuenta, además, (1^{**}) y (1^{***}), así como que $j^* \in J^*$ es completamente arbitrario], que en el supuesto de ser $\mathcal{A}$ un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}_1\mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$ sobre la $C^1_{\text{tray.}}$-partición P de G [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$], y $\mathcal{A}^* = (U^*_{j^*}, \chi^*_{j^*}, \mathbf{R})_{j^*\in J^*}$ un atlas sobre P de la clase $\mathcal{L}$ y que es $\mathcal{L}$-equivalente a $\mathcal{A}$, [resp. de la clase C^1 y que es C^1-equivalente a $\mathcal{A}$], se verifica que para todo $j^* \in J^*$ el conjunto $H^*_{j^*} = \bigcup_{s^*\in O^*_{j^*}} I_{h(\chi^{-1}_{j^*})} \times \{s^*\}$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ y la aplicación $\mathcal{T}^*_{j^*}: H^*_{j^*} \to \mathbf{R}$ definida por $(x_1^*, t^*) \in H^*_{j^*} \to \mathcal{T}^*_{j^*}(x_1^*, t^*) = (h(\overset{-1}{\chi^*_{j^*}}(t^*)))(x_1^*) \in \mathbf{R}$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $H^*_{j^*}$ [resp. $\mathcal{T}^*_{j^*}: H^*_{j^*} \to \mathbf{R}$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $H^*_{j^*}$].

Así pues, $\mathcal{A}^*$ verifica la condición γ) [resp. $\mathcal{A}^*$ verifica la condición $\gamma_{C^1_2}$)].

Procediendo de forma enteramente análoga se establecería que $\mathcal{A}^*$ verifica la condición δ) [resp. $\mathcal{A}^*$ verifica la condición $\delta_{C^1_2}$)], resultando así demostrado que $\mathcal{A}^*$ es un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$ [resp. $\mathcal{A}^*$ es un atlas del tipo $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$] de acuerdo con lo afirmado por la PROPOSICION.

0.4. LAS $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-VARIEDADES Y LAS $(G, G_2^1\ \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-VARIEDADES. Si denotamos mediante $\mathcal{G}_{(\mathcal{L})}(P)$ [resp. mediante $\mathcal{G}_{(C_2^1)}(P)$] al conjunto (*) de todos los atlas numéricos de dimensión 1 y de la clase $\mathcal{L}$ [resp. de la clase C^1] dados sobre una $C^1_{\text{tray.}}$-partición P de G, en virtud de lo establecido en PROPOSICION IV de 0.3, la relación «$\mathcal{A}$ es $\mathcal{L}$-equivalente a $\widehat{\mathcal{A}}$» [resp. «$\mathcal{A}$ es C^1-equivalente a $\widehat{\mathcal{A}}$»] es una relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(P)$ sobre el conjunto $\mathcal{G}_{(\mathcal{L})}(P)$ [resp. es una relación de equivalencia $\mathcal{R}_{C^1}(P)$ sobre el conjunto $\mathcal{G}_{(C^1)}(P)$]. A la clase de equivalencia (mód. $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(P)$) definida por un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_C^{\text{tr.}})$ [resp. a la clase de equivalencia (mód. $\mathcal{R}_{C^1}(P)$), definida por un atlas del tipo $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$], la denominaremos «$(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-variedad de la clase $\mathcal{L}$» [resp. «$(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-variedad de la clase C^1»].

De la PROPOSICION II de 0.2, así como del resultado establecido en PROPOSICION V de 0.3, se deduce la validez de la:

(*) Suponemos que los atlas dados sobre P tienen todos el mismo conjunto de índices. Para todo atlas numérico $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ de dimensión 1 y de la clase $\mathcal{L}$ [resp. de la clase C^1] dado sobre P, existe un atlas numérico de dimensión 1 de la clase $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-equivalente a $(U_j\ \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ [resp. de la clase C^1 y C^1-equivalente a $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$], cuyo conjunto de índices es P. En efecto, para todo $c \in P$, sea: $J_c = \{j \in J / c \in U_j\}$. Puesto que $(U_j)_{j\in J}$ recubre a P, es, pues, $J_c \neq \phi$, cualquiera sea $c \in P$, y asimismo, se tiene, que: $\mathfrak{U}_c = \bigcup_{j\in J_c}\{U_j\} \neq \phi$ $(\forall\, c \in P)$, por lo que: $\prod_{c\in P}\mathfrak{U}_c \neq \phi$, y consecuentemente, existe un $(U_{j_c})_{c\in P} \in \prod_{c\in P}\mathfrak{U}_c$, el cual, por tanto, verifica: «$(\forall\, c)\ (c \in P \Rightarrow c \in U_{j_c})$». La familia $(U_{j_c}, \chi_{j_c}, \mathbf{R})_{c\in P}$ es, como se comprueba inmediatamente, un atlas numérico de dimensión 1 de la clase $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-equivalente a $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$ [resp. de la clase C^1 y C^1-equivalente a $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j\in J}$], cuyo conjunto de índices, es precisamente, P.
Denotando por $O_{\mathbf{R}}$ a la familia de abiertos de $\mathbf{R}$ la relación:

«$\mathcal{A} \in \Big(\bigcup_{(U,0)\in\mathfrak{P}(P)\times O_{\mathbf{R}}}[\{U\} \times \mathcal{F}(U; 0) \times \{\mathbf{R}\}]\Big)^P$ y $\mathcal{A}$ es un atlas de la clase $\mathcal{L}$ [resp. de la clase C^1] sobre P»

es colectivizante en $\mathcal{A}$ [Véase C 51, n.º 6, § 1, chap. II, «THÉORIE DES ENSEMBLES», de N. BOURBAKI; Hermann & Cie, Editeurs, (París 1954)], y define, por consiguiente, el conjunto $\mathcal{G}_{(\mathcal{L})}$ [resp. $\mathcal{G}_{(C_2^1)}$], arriba considerado.

PROPOSICION VI. — «Para todo $C^1_{\text{tray.}}$-partición P del abierto G existe, a lo sumo, una única $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$-variedad de la clase $\mathcal{L}$ y una única $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$-variedad de la clase C^1, que son, respectivamente, la clase de equivalencia (mód. $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(P)$) constituida por todos los atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$, y la clase de equivalencia (mód. $\mathcal{R}_{C^1}(P)$) constituida por todos los atlas del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$».

PARTE PRIMERA

LA $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-VARIEDAD [resp. $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-VARIEDAD] DEFINIDA POR UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, CON $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ CONTINUA Y LOCALMENTE LIPSCHITZIANA RESPECTO A SU SEGUNDO ARGUMENTO SOBRE EL ABIERTO G [resp. CONTINUA Y CONTINUAMENTE DERIVABLE PARCIALMENTE RESPECTO A SU SEGUNDO ARGUMENTO SOBRE G].

I.1. SOLUCIONES GLOBALES Y SOLUCIONES LOCALES DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE 1.^{er} ORDEN. — Sea la ecuación diferencial ordinaria de 1.^{er} órden: $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ (1), en la que $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida y continua sobre el abierto G de $\mathbf{R}^2$ y que además es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, (es decir, para todo punto de G existe un entorno de dicho punto contenido en G sobre el cual ϱ verifica una desigualdad de Lipschitz relativamente a su segundo argumento), [resp. y que además es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G (es decir, ϱ es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G y la derivada parcial $D_2 \varrho$ es continua sobre G)].

Para todo punto $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in G$ existe, como se sabe, una función numérica $\Psi_{(\vec{x}^0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida y continuamente derivable sobre un intervalo abierto (n.º 3 de INTRODUCCION, R. P. C. [3]), bien determinado $]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$ de $\mathbf{R}$, que verifica:

a) «$\vec{x}^0 \in \bigcup \{(x_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1))\} = \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}} \subset G$»

b) «$(\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow \Psi'_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \varrho(x_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)))$»

c) «$(\forall I)\ (I \in \mathfrak{P}(\mathbf{R})$ y I es un intervalo de $\mathbf{R}$ y $\mathring{I} \neq \phi \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall \varphi)\ (\varphi \in C^1(I; \mathbf{R})$ y $\vec{x}^0 \in \Gamma_\varphi \subset G$ y $(\forall x_1)\ (x_1 \in I \Rightarrow \varphi'(x_1) =$
$= \varrho(x_1, \varphi(x_1))) \Rightarrow I \subset]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$ y $\varphi = \Psi_{(\vec{x}^0)|I}))$»

es decir, por todo punto $\vec{x}^0 \in G$ pasa una solución $\Psi_{(\vec{x}^0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de la ecuación diferencial ordinaria (1), definida sobre un intervalo $]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$ abierto de $\mathbf{R}$ bien determinado, cuyo grafo $\Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}}$ está contenido en G y tal que su intervalo de definición $]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$ contiene al intervalo no degenerado I de definición de cualquier solución local $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en G de la ecuación diferencial (1) pasando por $\vec{x}^0$, coincidiendo dicha solución local φ con la restricción de $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ a I. A toda función numérica $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con $\mathring{I} \neq \phi$ (I intervalo de $\mathbf{R}$) tal que $\Gamma_\varphi \subset G$ y φ continuamente derivable sobre I y que verifique la relación: $(\forall x_1)\ (x_1 \in I \Rightarrow \varphi'(x_1) = \varrho(x_1, \varphi(x_1)))$, la denominaremos «solución local en G de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$». Si además es $\vec{x}^0 \in \Gamma_\varphi$ diremos, entonces, que «φ es una solución local en G de (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$ de G»]. A $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ la denominábamos (*n.*º 3 de INTRODUCCION, R. P. C. [3]), «solución global en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$ de G».

En lo sucesivo denotaremos mediante $\mathscr{S}_{(G;\varrho)} = \bigcup_{\vec{x}^0 \in G} \{\Psi_{(\vec{x}^0)}\}$ y mediante $\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ respectivamente, al conjunto de las soluciones globales en G de la ecuación diferencial (1), y al conjunto de las soluciones locales en G de la referida ecuación diferencial. Al conjunto $\{H \in \mathfrak{P}(G) / (\exists\, \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \text{ y } H = \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}})\}$ constituido por los grafos o trayectorias de las soluciones globales en G de (1), lo indicaremos por $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$.

Son válidas, obviamente, las inclusiones:

$$«\ \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \subset \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \quad \text{y} \quad \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \subset \mathcal{T}^{(C^1;G)}_{\text{tray.}}\ »$$

verificándose además, que:

$$«h(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}) = \mathscr{S}_{(G;\varrho)}»$$

y consecuentemente, [0.1 de la INTRODUCCION a esta Memoria], la aplicación $h_{(G;\varrho)} = \left(\overline{h_{|\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}}\right) : \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \to \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ que tiene el mismo grafo y conjunto de definición que $h_{|\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ y cuyo conjunto de llegada es $h(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}) = \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$, es una biyección del conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ constituido por las trayectorias correspondientes a las soluciones globales en G de la ecuación diferencial (1) sobre el conjunto $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ de dichas soluciones globales en G de (1). Observemos que en virtud de las propias definiciones se tiene: $(\forall\ \varphi)\ (\varphi \in \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \Gamma_\varphi = \bigcup_{x_1 \in I_\varphi} \{(x_1, \varphi(x_1))\} \neq \phi)$.

1.2. ORDENACION DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES LOCALES $\mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ DE LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$. — La relación de orden sobre $\mathfrak{P}\,(G)$ determinada por la relación de inclusión, induce sobre $\overset{-1}{h}\,(\mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)})$ una relación de orden parcial cuya imagen, recíproca mediante la biyección $\overline{\left((h)_{\mid \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}}\right)}^{-1} : \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \to \overset{-1}{h}\,(\mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)})$ es la relación de orden parcial sobre $\mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ que indicaremos por $\leq$, la cual está, por tanto, definida así:

$$«(\varphi, \varphi^*) \in \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \times \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \Rightarrow [(\varphi \leqslant \varphi^*) \Leftrightarrow (\Gamma_\varphi \subset \Gamma_{\varphi^*})]»$$

Se verifica la relación:

$$«(\forall\ (\varphi^*, \varphi^{**}))\ ((\varphi^*, \varphi^{**}) \in \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \times \mathcal{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(\varphi^* \leqslant \varphi^{**}) \Leftrightarrow (\Gamma_\varphi \cap \Gamma_{\varphi^{**}} \neq \phi \ \text{ y } \ I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}})])»$$

En efecto, supuesto $\varphi^* \leqslant \varphi^{**}$, se tiene, como consecuencia de la propia definición de $\leqslant$, que es válida la relación:

$$«\phi \neq \Gamma_{\varphi^*} = \Gamma_{\varphi^*} \cap \Gamma_{\varphi^{**}} \ \text{ y } \ I_{\varphi^*} = pr_1\, \Gamma_{\varphi^*} \subset pr_1\, \Gamma_{\varphi^{**}} = I_{\varphi^{**}}»$$

es decir, se verifica:

$$«(\varphi^* \leqslant \varphi^{**}) \Rightarrow (\Gamma_{\varphi^*} \cap \Gamma_{\varphi^{**}} \neq \phi \ \text{ y } \ I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}})»$$

Inversamente, supuesto sea cierta la relación:

$$«\Gamma_{\varphi^*} \cap \Gamma_{\varphi^{**}} \neq \phi \ \text{ y } \ I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}}»$$

se sigue de la misma que es válida a su vez la relación:

$$«(\exists\ \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in \Gamma_{\varphi^*} \cap \Gamma_{\varphi^{**}} \ \text{ y } \ I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}})»$$

la cual entraña:

«$\varphi^* : I_{\varphi^*} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$ y y $\varphi^{**} : I_{\varphi^{**}} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una solución local en G de (1) pasando por

$$\vec{x}^0 \ \text{ y } \ I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}}»$$

relación de la que habida cuenta la unicidad de soluciones locales en G de la ecuación diferencial (1), se deduce:

$$«I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}} \text{ y } \varphi^* = \varphi^{**}_{|I_{\varphi^*}}»$$

resultando:

$$«\Gamma_{\varphi^*} = \bigcup_{x_1 \in I_{\varphi^*}} \{(x_1, \varphi^*(x_1))\} = \bigcup_{x_1 \in I_{\varphi^*}} \{(x_1, \varphi^{**}(x_1))\} \subset (\bigcup_{x_1 \in I_{\varphi^*}} \{(x_1, \varphi^{**}(x_1))\}) \cup$$
$$\cup (\bigcup_{y_1 \in I_{\varphi^{**}} - I_{\varphi^*}} \{(y_1, \varphi^{**}(y_1))\}) = \bigcup_{z_1 \in I_{\varphi^{**}}} \{(z_1, \varphi^{**}(z_1))\} = \Gamma_{\varphi^{**}}»$$

es decir, se verifica:

$$«\varphi^* \leqslant \varphi^{**}»$$

y en definitiva es válida la relación:

$$«(\Gamma_{\varphi^*} \cap \Gamma_{\varphi^{**}} \neq \phi \text{ y } I_{\varphi^*} \subset I_{\varphi^{**}}) \Rightarrow (\varphi^* \leqslant \varphi^{**})»$$

lo que completa la demostración de lo afirmado.

Sentado esto, consideremos para todo $\vec{x}^0 \in G$ la solución global $\Psi_{(\vec{x}^0)} : I_{\Psi(\vec{x}^0)} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en G de la ecuación diferencial ordinaria (1), pasando por el referido punto $\vec{x}^0 \in G$ y sea $\varphi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ una solución local en G de (1), tal que $\Psi_{(\vec{x}^0)} \leqslant \varphi$.

Se tiene primeramente [dado que $\vec{x}^0 \in \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)} \subset \Gamma_\varphi$ entraña que $\varphi : I_\varphi \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sea una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$], como consecuencia de ser φ una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$ y $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ la solución global en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, que es válida la relación:

$$«I_\varphi \subset]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[= I_{\Psi(\vec{x}^0)}»$$

y por otro lado la relación supuesta $\Psi_{(\vec{x}^0)} \leqslant \varphi$ entraña, en virtud de lo establecido precedentemente, que:

$$«I_{\Psi(\vec{x}^0)} \subset I_\varphi»$$

deduciéndose:

$$«I_\varphi = I_{\Psi(\vec{x}^0)} \text{ y } \Gamma_\varphi = \bigcup_{x_1 \in I_\varphi} \{(x_1, \varphi(x_1))\} = \bigcup_{y_1 \in I_{\Psi(\vec{x}^0)}} \{(y_1, \Psi_{(\vec{x}^0)}(y_1))\} = \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)}»$$

y en definitiva se verifica:

$$«\varphi = (\Gamma_\varphi, I_\varphi, \mathbf{R}) = (\Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)}, I_{\Psi(\vec{x}^0)}, \mathbf{R}) = \Psi_{(\vec{x}^0)}»$$

Así pues [teniendo en cuenta, además, que $\mathscr{S}_{(G;\varrho)} \subset \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$, así como que $\varphi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ es completamente arbitrario], es válida, por tanto, la relación:

$$«\Psi_{(\vec{x}^0)} \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\forall\, \varphi)\, (\varphi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \text{ y } \Psi_{(\vec{x}^0)} \leqslant \varphi \Rightarrow \varphi = \Psi_{(\vec{x}^0)})»$$

equivalente a la:

$$«\Psi_{(\vec{x}^0)} \text{ es elemento maximal de } (\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\,;\ \leqslant)»$$

y dada la arbitrariedad de $\vec{x}^0 \in G$, se verifica, asimismo, la relación:

$$«(\forall\, \Psi)\, (\Psi \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \Psi \text{ es elemento maximal de } (\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\,;\ \leqslant))» \quad (1^*)$$

Inversamente, sea $\Psi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ una solución local en G de la ecuación diferencial ordinaria (1), que sea elemento maximal de $(\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\,;\ \leqslant)$, y sea $\dot{x}^0 \in \Gamma_\varphi$ [existente siempre, dado que como se ha observado en I.1, para toda $\varphi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ se tiene necesariamente $\Gamma_\varphi \neq \phi$], así como, sea $\Psi_{(\vec{x}^0)} \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ la solución global en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$.

Puesto que se verifica:

$$«\vec{x}^0 \in \Gamma_\Psi \cap \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)} \text{ y } I_\Psi \subset\,]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[\, = I_{\Psi(\vec{x}^0)}»$$

y consecuentemente se tiene la validez de la relación:

$$«\Psi \leqslant \Psi_{(\vec{x}_0)}»$$

lo que, habida cuenta el supuesto «Ψ es elemento maximal de $(\mathscr{S}^{\text{loc}}_{(G;\varrho)}\,;\ \leqslant)$» de que se ha partido, entraña, por tanto, que:

$$«\Psi = \Psi_{(\vec{x}^0)} \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}»$$

y dada la arbitrariedad de $\Psi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}$ con la condición «Ψ es elemento maximal de $(\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\,;\ \leqslant)$» se concluye que es válida, finalmente, la relación:

$$«(\forall\, \Psi)\, (\Psi \in \mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)} \text{ y } \Psi \text{ es elemento maximal de } (\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\,;\ \leqslant) \Rightarrow \Psi \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)})» \quad (1^{**})$$

(1^*) y (1^{**}) establecen que:

$$«(\forall\ \Psi)\ (\Psi \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \Leftrightarrow \Psi \text{ es elemento maximal de } (\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\ ;\ \leqslant))»$$

Así pues el conjunto $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ de soluciones globales en G de la ecuación diferencial (1) pasando por los diversos puntos de G coincide con el conjunto de los elementos maximales de $(\mathscr{S}^{\text{loc.}}_{(G;\varrho)}\ ;\ \leqslant)$.

Para toda $\Psi \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ se dirá que «Ψ es una solución maximal en G de la ecuación diferencial ordinaria (1)» así como que «$c = \overset{-1}{h}_{(G;\varrho)}(\Psi) \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ es una trayectoria maximal en G de (1)».

Observemos que de la demostración utilizada para establecer la validez de (1^{**}), se sigue que se verifica:

$$«(\forall\ \Psi)\ (\Psi \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\forall\ \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in \Gamma_\Psi \Rightarrow \Psi = \Psi_{(\vec{x}^0)}))»$$

relación de la cual, y supuesto que $(\Psi, \Psi^*) \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \times \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ son tales que $\Gamma_\Psi \cap \Gamma_{\Psi^*} \neq \phi$, o lo que es equivalente: $(\exists\ \vec{x}^0)$ $(\vec{x}^0 \in \Gamma_\Psi$ y y $\vec{x}^0 \in \Gamma_{\Psi^*})$, se deduce:

$$«\Psi = \Psi_{(\vec{x}^0)} = \Psi^*»$$

resultando, por tanto, ser válida la relación:

$$«(\forall_{(\Psi,\Psi^*)})\ (\Psi, \Psi^*) \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \times \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \text{ y } \Gamma_\Psi \cap \Gamma_{\Psi^*} \neq \phi \Rightarrow \Psi = \Psi^*)»$$

equivalente a la:

$$«(\forall_{(\Psi,\Psi^*)})\ ((\Psi, \Psi^*) \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \times \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \text{ y } \Psi \neq \Psi^* \Rightarrow \Gamma_\Psi \cap \Gamma_{\Psi^*} = \phi)»$$

Resulta así que el conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de trayectorias maximales en G de (1) es un conjunto no vacio de C^1-trayectorias en G, tal que por todo punto de G pasa una y sólo una trayectoria de $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$, por lo que $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ es una $C^1_{\text{tray.}}$-partición de G.

Pero además, en virtud de conocidas propiedades de las soluciones maximales de una ecuación diferencial ordinaria (Chap. IV, 5. 6. de [4]) si $\Psi \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ es una solución maximal en G de (1) tal que «sup. $I_\Psi < +\infty$ y Existe Ψ (sup. $(I_\Psi) - 0$)» [resp. «$-\infty <$ inf (I_Ψ) y y Existe Ψ (inf. $(I_\Psi) + 0$)»], se verifica, entonces, que:

$$«(\text{sup. } (I_\Psi),\ \Psi\ (\text{sup. } (I_\Psi) - 0)) \in \text{Fr. } G»$$

$$[\text{resp. } «(\text{inf. } (I_\Psi),\ \Psi\ (\text{inf. } (I_\Psi) + 0)) \in \text{Fr. } G»]$$

es decir, es válida la relación:

«$(\forall c)$ ($c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ y c es con límite accesible por la derecha [resp. c es con límite accesible por la izquierda] $\Rightarrow$ l. a. d. $(c) \in$ Fr. G [resp. l. a. i. $(c) \in$ Fr. G])»

o lo que es equivalente [véase 0.1 de INTRODUCCION a esta MEMORIA]:

$$«\mathscr{C}_{(G;\varrho)} \in \mathcal{P}_G^{C^1_{\text{tr.}}\,(\text{c. l. a. Fr.})}» \quad (1^{***})$$

1.3 Las topologias $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ y $\mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}}$. — Supondremos dotada la $C^1_{\text{tray.}}$-partición (c. l. a. Fr.) $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de G [constituida por las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial (1)], de la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}} = \mathcal{T}'_G/\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ cociente de la topología $\mathcal{T}_G$ sobre G por la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ asociada a la $C^1_{\text{tray.}}$-partición (c. l. a. Fr.) $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de G, topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ cuyos abiertos son, por tanto, las imágenes mediante la aplicación canónica $\iota : G \to G/\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}} = \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^2$ contenidos en G y saturados por la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$.

Nos proponemos demostrar la siguiente:

PROPOSICION I. — «La relación de equivalencia $\mathcal{R}_{(G;\varrho)}$ es abierta (Chap. I, § 5, n.º 2 de [2])».

En efecto, sea $A = \overset{\circ}{A} \subset G$ una parte abierta de G y consideremos el saturado $\overset{-1}{\iota}(\iota(A))$ de A por $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$.

La relación:

$$«\vec{x}^* \in \overset{-1}{\iota}(\iota(A))»$$

es equivalente a la:

$$«(\exists\, \vec{x}^{**})\ (\vec{x}^{**} \in A \ \text{ y } \ \vec{x}^* \in \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x}^{**})) = \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^{**})}})»$$

y esta última relación equivale a su vez a la:

$$(\exists\, \vec{x}^{**})\ (\vec{x}^{**} \in A \subset G \ \text{ y } \ x_1^* \in]x_1^{izq}(\vec{x}^{**}), x_1^{der}(\vec{x}^{**})[\ \text{ y } \ x_2^* = \Psi_{(\vec{x}^{**})}(x_1^*))»$$

o lo que es lo mismo (n.os 4 y 5 de la INTRODUCCION de R. P. C. [3]):

$$«(\exists\, \vec{x}^{**})\ (\vec{x}^{**} \in A \ \text{ y } \ (x_1^*, x_1^{**}, x_2^{**}) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \ x_1^* = \lambda\,(x_1^*, x_1^{**}, x_2^{**}))»$$

Pero (OBSERVACION 1.ª del n.º 5 de la INTRODUCCION de R. P. C. [3]), se verifica:

$$«(x_1^*, x_1^{**}, x_2^{**}) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \ x_2^* = \lambda\,(x_1^*, x_1^{**}, x_2^{**}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1^{**}, x_1^*, x_2^*) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \ x_2^{**} = \lambda\,(x_1^{**}, x_1^*, x_2^*)»$$

y consecuentemente es válida la relación:

$$«(\exists \vec{x}^{**})\ (\vec{x}^{**} \in A \ \text{ y } \ (x_1^{**}, x_1^*, x_2^*) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y }$$

$$\text{y } \ x_2^{**} = \lambda\,(x_1^{**}, x_1^*, x_2^*))» \quad (2)$$

Ahora bien (n.º 4 de la INTRODUCCION de R. P. C. [3]), el conjunto $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$, así como es un abierto de $\mathbf{R}^2$, por hipótesis, A, por lo que se verifica [en donde, para todo $(\vec{x}^0, \eta) \in \mathbf{R}^2 \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$ se denota mediante $B_\eta(\vec{x}^0)$ a la bola abierta $\{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 / \|\vec{x} - \vec{x}^0\| < \eta\}$ de $\mathbf{R}^2$ centrada en $\vec{x}^0$ y de radio η]:

$$«(\exists_{(\eta_1,\eta_2)})\ ((\eta_1, \eta_2) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \ \text{ y }$$

$$\text{y } \ ]x_1^{**} - \eta_1, x_1^{**} + \eta_1[\, \times B_{\eta_1}(\vec{x}^*) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \ B_{\eta_2}(\vec{x}^{**}) \subset A)»$$

y en particular es válida la relación:

$$«\{x_1^{**}\} \times\,]x_2^{**} - \eta_2, x_2^{**} + \eta_2[\, \subset B_{\eta_2}(\vec{x}^{**}) \subset A \ \text{ y }$$

$$\text{y } \ \{x_1^{**}\} \times B_{\eta_1}(\vec{x}^*) \subset\,]x_1^{**} - \eta_1, x_1^{**} + \eta_1[\, \times B_{\eta_1}(\vec{x}^*) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}» \quad (2^*)$$

y por tanto $B_{\eta_1}(\vec{x}^*)$ está contenido en el abierto $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_1^{**},\rangle$ de $\mathbf{R}^2$ traza del abierto $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ de $\mathbf{R}^3$ según x_1^{**}, traza sobre la cual está definida la aplicación parcial $\lambda_{(x_1^{**})}$ determinada por λ relativamente al valor x_1^{**} del primer argumento.

En virtud de la continuidad de $\lambda_{(x_1^{**})}$ en $\vec{x}^*$ y dado que según (2), es $x_2^{**} = \lambda\,(x_1^{**}, x_1^*, x_2^*) = \lambda_{(x_1^{**})}(x_1^*, x_2^*)$, existe, consecuentemente, un $\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que:

$$«B_\eta(\vec{x}^*) \subset B_{\eta_1}(\vec{x}^*) \text{ y } (\forall \vec{x})\,(\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1^{**}, x_1, x_2) \in \{x_1^{**}\} \times B_\eta(\vec{x}^*) \subset \{x_1^{**}\} \times B_{\eta_1}(\vec{x}^*) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$
$$\text{y } \lambda(x_1^{**}, x_1, x_2) = \lambda_{(x_1^{**})}(x_1, x_2) \in]x_2^{**} - \eta_2, x_2^{**} + \eta_2[])»$$

Si para todo $\vec{x} = (x_1, x_2) \in B_\eta(\vec{x}^*)$ hacemos $y_1 = x_1^{**}$ e $y_2 = = \lambda(x_1^{**}, x_1, x_2)$, se sigue de la relación precedente y de (2^*), que es válida a su vez la relación:

$$«\vec{y} = (y_1, y_2) = (x_1^{**}, \lambda(x_1^{**}, x_1, x_2)) \in \{x_1^{**}\} \times]x_2^{**} - \eta_2, x_2^{**} + \eta_2[\subset A \text{ y}$$
$$\text{y } (y_1, x_1, x_2) = (x_1^{**}, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } y_2 = \lambda(y_1, x_1, x_2)»$$

la cual entraña:

$$«\vec{y} = (y_1, y_2) \in A \text{ y } (x_1, y_1, y_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2 = \lambda(x_1, y_1, y_2)»$$

Así pues y teniendo en cuenta que se ha partido del supuesto $\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*)$, así como la arbitrariedad de $\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*)$, es válida, por tanto, la relación:

$$«(\exists \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall \vec{x})\,(\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists \vec{y})\,(\vec{y} = (y_1, y_2) \in A \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, y_1, y_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } x_2 = \lambda(x_1, y_1, y_2) = \lambda_{(\cdot, y_1, y_2)}(x_1) = \Psi_{(\vec{y})}(x_1))))»$$

la cual equivale sucesivamente a las relaciones:

$$«(\exists \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall \vec{x})\,(\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists \vec{y})\,(\vec{y} \in A \text{ y } \vec{x} \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{y})}})))»$$

y

$$«(\exists \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall \vec{x})\,(\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*) \Rightarrow (\exists \vec{y})\,(\vec{y} \in A \text{ y } \vec{x} \in \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{y}))))))»$$

y

$$«(\exists \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall \vec{x})\,(\vec{x} \in B_\eta(\vec{x}^*) \Rightarrow \vec{x} \in \overset{-1}{\iota}(\iota(A)))))»$$

y

$$«(\exists \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } B_\eta(\vec{x}^*) \subset \overset{-1}{\iota}(\iota(A)))»$$

y

$$«\vec{x}^* \in \overset{\circ}{\widehat{\overset{-1}{\iota}(\iota(A))}}»$$

Puesto que $\vec{x} \in \overset{-1}{\iota}(\iota(A))$ es arbitrario, se verifica pues:

$$«\overset{-1}{\iota}(\iota(A)) = \overset{\circ}{\widehat{\overset{-1}{\iota}(\iota(A))}}»$$

y dada la arbitrariedad de $A \in \mathfrak{P}(G)$ con la condición «$A = \mathring{A}$», se concluye que es válida la relación:

$$«(\forall A)\ (A \in \mathfrak{P}(G) \text{ y } A = \mathring{A} \Rightarrow \overset{-1}{\iota}(\iota(A)) = \overset{\circ}{\widehat{\overset{-1}{\iota}(\iota(A))}})»$$

equivalente a la:

$$«\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}} \text{ es abierta}»$$

de acuerdo con lo afirmado en la PROPOSICION.

Sentado esto, consideremos la aplicación $f : G \to \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ definida por: $\vec{x} \in G \to f(\vec{x}) = \Psi_{(\vec{x})} \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$, es decir, f asigna a cada $\vec{x} \in G$ como imagen $f(\vec{x})$ la solución maximal $\Psi_{(\vec{x})} \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ en G de la ecuación diferencial ([1]) pasando por $\vec{x}$, aplicación que, [en virtud de la existencia y unicidad de soluciones maximales en G de ([1]) pasando por un punto dado de G], es suprayectiva, así como la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}}$ sobre $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ imagen directa de la topología $\mathcal{T}_G$ sobre G mediante la aplicación dada f (Chap. I, § 2, n.º 4 de [2]), topología $\mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}}$ para la cual $\Omega \subset \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ es un abierto de la misma si sólo si $\overset{-1}{f}(\Omega)$ es un abierto de $\mathcal{T}_G$, y denotemos mediante $\mathcal{R}_f \subset G \times G$ a la relación de equivalencia sobre G asociada a la aplicación f, es decir, a la relación de equivalencia sobre G definida por:

$$«(\vec{x}, \vec{x}^*) \in G \times G \Rightarrow [(\vec{x} \sim \vec{x}^*_{(\text{mód. } \mathcal{R}_f)}) \Leftrightarrow (f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*))]»$$

Puesto que se verifica:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in G \Rightarrow \overset{-1}{h}_{(G;\varrho)}(f(\vec{x})) = \overset{-1}{h}_{(G;\varrho)}(\Psi_{(\vec{x})}) = \Gamma_{\Psi_{(\vec{x})}} = \iota(\vec{x}))»$$

es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\forall (\vec{x}, \vec{x}^*))\ ((\vec{x}, \vec{x}^*) \in G \times G \Rightarrow [(f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*)) \Leftrightarrow (\iota(\vec{x}) = \iota(\vec{x}^*))])»$$

la cual equivale a:

$$«(\forall\,(\vec{x}, \vec{x}^*))\ ((\vec{x}, \vec{x}^*) \in G \times G \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(\vec{x} \sim \vec{x}^*_{(\text{mód. } \mathcal{R}_f)}) \Leftrightarrow (\vec{x} \sim \vec{x}^*_{(\text{mód. } \mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})})])»$$

y esta última relación es a su vez equivalente a la:

$$«\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}» \quad (2^{**})$$

Por otra parte [teniendo en cuenta, además (2**)], se verifica sucesivamente las relaciones:

$$«\vec{x} \in G \Rightarrow [(\vec{x}^* \in \overset{-1}{f}(f(\vec{x}))) \Leftrightarrow (f(\vec{x}^*) = f(\vec{x}))]»$$

y

$$«f(\vec{x}^*) = f(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{x}^* \sim \vec{x}_{(\text{mód. } \mathcal{R}_f)}»$$

y

$$«\vec{x}^* \sim \vec{x}_{(\text{mód. } \mathcal{R}_f)} \Leftrightarrow \vec{x}^* \sim \vec{x}_{(\text{mód. } \mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})}»$$

y

$$«\vec{x}^* \sim \vec{x}_{(\text{mód. } \mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})} \Leftrightarrow \iota(\vec{x}^*) = \iota(\vec{x})»$$

y

$$«\iota(\vec{x}^*) = \iota(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{x}^* \in \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x}))»$$

deduciéndose, en el supuesto $\vec{x} \in G$, que es válida la relación:

$$«\vec{x}^* \in \overset{-1}{f}(f(\vec{x})) \Leftrightarrow \vec{x}^* \in \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x}))»$$

la cual, dada la arbitrariedad de $\vec{x}^* \in \overset{-1}{f}(f(\vec{x}))$ establece, a su vez, la validez de la relación:

$$«\overset{-1}{f}(f(\vec{x})) = \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x}))»$$

Así pues, y habida cuenta el supuesto $\vec{x} \in G$ de que se ha partido, así como la arbitrariedad de $\vec{x} \in G$, es válida, por tanto, la relación:

$$«(\forall\,\vec{x})\ (\vec{x} \in G \Rightarrow [\overset{-1}{f}(f(\vec{x})) = \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x}))])» \quad (3)$$

Se verifica, además, la:

PROPOSICION II. — «La aplicación $f: G \to \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ que asigna a cada $\vec{x} \in G$ como imagen $f(\vec{x})$ la solución maximal en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por $\vec{x}$, es, supuesto dotados G y $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ de las respectivas topologías $\mathcal{T}_G$ y $\mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}}$ una aplicación abierta (Chap. I, § 5, n.º 1 de [2]) de G sobre $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$».

En efecto, para todo abierto A de $\mathcal{T}_G$, teniendo en cuenta (3) y el resultado establecido por la PROPOSICION I, es válida la relación:

$$«\overset{-1}{f}(f(A)) = \overset{-1}{f}(\bigcup_{\vec{x} \in A} \{f(\vec{x})\}) = \bigcup_{\vec{x} \in A} \overset{-1}{f}(f(\vec{x})) = \bigcup_{\vec{x} \in A} \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x})) =$$

$$= \overset{-1}{\iota}(\bigcup_{\vec{x} \in A} \{\iota(\vec{x})\}) = \overset{-1}{\iota}(\iota(A)) \text{ es un abierto de } (G, \mathcal{T}_G)»$$

es decir, y dada la arbitrariedad de $A \in \mathfrak{P}(G)$ con la condición $A = \mathring{A}$, se verifica, por tanto que:

$$«(\forall A)\ (A \in \mathfrak{P}(G) \text{ y } A = \mathring{A} \Rightarrow \overset{-1}{f}(f(A)) = \overbrace{\overset{-1}{f}(f(A))}^{\circ})»$$

o lo que es equivalente:

$$«(\forall A)\ (A \in \mathfrak{P}(G) \text{ y } A \text{ es un abierto de } (G, \mathcal{T}_G) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(A) \text{ es un abierto de } (\mathscr{S}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}}))»$$

relación que a su vez equivale a la:

«f es una aplicación abierta de G sobre $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$»

cuya validez demuestra la PROPOSICION.

Es válida, asimismo, la:

PROPOSICION III. — «El conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial (1) dotado de la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ es homeomorfo del conjunto $\mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ de las soluciones maximales en G de (1) dotado de la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}}$ mediante la biyección $h_{(G;\varrho)}: \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \to \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$».

En efecto, teniendo en cuenta (2**) es $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ y consecuentemente $G/_{\mathcal{R}_f} = G/_{\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}} = \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$, así como $f(G) = \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$, por lo que si: $G \xrightarrow{p} G/_{\mathcal{R}_f} \xrightarrow{k} f(G) \xrightarrow{i} \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ es la descomposición canónica de f, se verifica, por tanto, que:

$$«p = \iota \ \text{ y } \ i = Id_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}} \ \text{ y } \ k = h_{(G;\varrho)}»$$

resultando:

$$«f = h_{(G;\varrho)} \circ \iota»$$

En virtud de la PROPOSICION II acabada de establecer es $f: G \to \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ una aplicación abierta, y consecuentemente (Chap. I, § 5, n.º 2, PROPOSICION 3, c) de [2]), la biyección canónica $k = h_{(G;\varrho)} : \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \to \mathscr{S}_{(G;\varrho)}$ asociada a f es un homeomorfismo de $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$ sobre $(\mathscr{S}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{S}_{(G;\varrho)}})$, lo que demuestra la PROPOSICION.

Para todo $x_1^{*0} \in \mathbf{R}$ y cualquiera sea el abierto $\omega = \mathring{\omega} \subset \mathbf{R}$ de $\mathbf{R}$, pongamos:

$$«\Omega_{(x_1^{*0};\omega)} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 / (x_1^{*0}, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ \lambda(x_1^{*0}, x_1, x_2) \in \omega\}»$$

Se tiene obviamente:

$$«\Omega_{(x_1^{*0};\omega)} \subset G»$$

y puesto que son válidas sucesivamente las equivalencias:

$$«(x_1^{*0}, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \ \lambda(x_1^{*0}, x_1, x_2) \in \omega \iff (\exists\, x_2^0)\ (x_2^0 \in \omega \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ (x_1, x_1^{*0}, x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y } \ x_2 = \lambda(x_1, x_1^{*0}, x_2^0))»$$

y

$$«(\exists\, x_2^0)\ (x_2^0 \in \omega \ \text{ y } \ (x_1, x_1^{*0}, x_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ x_2 = \lambda(x_1, x_1^{*0}, x_2^0)) \iff (\exists\, \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\ \text{ y } \ x_2 = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1))»$$

y

y

$$«(\exists\, \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G \ \text{ y } \ x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\ x_1^{der}(\vec{x}^0)[\ \text{ y }$$
$$\text{y } \ x_2 = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1)) \Leftrightarrow (\exists\, \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ \vec{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}})»$$

y

$$«(\exists\, \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G \ \text{ y } \ \vec{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}}) \Leftrightarrow \vec{x} \in \bigcup_{\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G} \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}}»$$

se verifica, por tanto, que:

$$«\vec{x} \in \Omega_{(x_1^{*0};\, \omega)} \Leftrightarrow \vec{x} \in \bigcup_{\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G} \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}}»$$

relación equivalente a la:

$$«\Omega_{(x_1^{*0};\, \omega)} = \bigcup_{\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G} \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}}» \quad (3^*)$$

es decir, $\Omega_{(x_1^{*0};\omega)}$ es la reunión de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) que pasan por los diversos puntos de $(\{x_1^{*0}\} \times \omega) \cap G$.

Se verifica la:

PROPOSICION IV. — «Para todo $x_1^0 \in \mathbf{R}$ y cualquiera sea el abierto ω de $\mathbf{R}$, el subconjunto $\Omega_{(x_1^0;\, \omega)}$ de G es un abierto de $\mathbf{R}^2$ saturado para la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ sobre G, y consecuentemente, $\iota(\Omega_{(x_1^0;\, \omega)})$ es un abierto del espacio topológico $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)};\ \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$».

En efecto, dado que:

$$«(\forall\, \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^0)}} = \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x}^0)))»$$

se tiene, habida cuenta (3*), que es válida la relación:

$$«\Omega_{(x_1^0;\, \omega)} = \bigcup_{\vec{y}^0 \in (\{x_1^0\} \times \omega) \cap G} \Gamma_{\Psi_{(\vec{y}^0)}} = \bigcup_{\vec{y}^0 \in (\{x_1^0\} \times \omega) \cap G} \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{y}^0)) = \overset{-1}{\iota}\Big(\bigcup_{\vec{y}^0 \in (\{x_1^0\} \times \omega) \cap G} \{\iota(\vec{y}^0)\}\Big) =$$
$$= \overset{-1}{\iota}(\iota((\{x_1^0\} \times \omega) \cap G))»$$

por lo que $\Omega_{(x\ ;\, \omega)}$ es un subconjunto de G saturado para la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$.

Por otro lado, puesto que en virtud de la propia definición de $\Omega_{(x_1^0;\omega)}$ se verifica que:

$$«(x_1, x_2) \in \Omega_{(x_1^0;\omega)} \Leftrightarrow (x_1^0, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } \lambda(x_1^0, x_1, x_2) \in \omega»$$

así como se tiene sucesivamente:

$$«(x_1^0, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } \lambda(x_1^0, x_1, x_2) \in \omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle x_1^0,\rangle \text{ y } \lambda_{(x_1^0,)}(x_1, x_2) \in \omega»$$

y

$$«(x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle x_1^0,\rangle \text{ y } \lambda_{(x_1^0,)}(x_1, x_2) \in \omega \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \overset{-1}{\widehat{(\lambda_{(x_1^0,)})}}(\omega)»$$

se sigue de todo ello que es válida la relación:

$$«(x_1, x_2) \in \Omega_{(x_1^0;\omega)} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \overset{-1}{\widehat{(\lambda_{(x_1^0,)})}}(\omega)»$$

equivalente a la:

$$«\Omega_{(x_1^0;\omega)} = \overset{-1}{\widehat{(\lambda_{(x_1^0,)})}}(\omega)»$$

relación de la cual [habida cuenta, además, que la traza $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle x_1^0,\rangle$ del abierto $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ de $\mathbf{R}^3$ según x_1^0 es un abierto de $\mathbf{R}^2$ sobre el cual está definida y es continua la aplicación parcial $\lambda_{(x_1^0,)}$ determinada por λ relativamente al valor x_1^0 de su primer argumento], se deduce:

$$«\Omega_{(x_1^0;\omega)} \text{ es un abierto de } \mathbf{R}^2 \text{ contenido en } G»$$

lo que concluye la demostración de la PROPOSICION.

Observemos que en el caso particular $\omega = G\langle x_1^{*0},\rangle$, $(x_1^{*0} \in \mathbf{R})$, se tiene, entonces, que:

$$«\Omega_{(x_1^{*0};\omega)} = \Omega_{(x_1^{*0};G\langle x_1^{*0},\rangle)} = \bigcup_{\vec{x}^0 \in (\{x_1^{*0}\} \times G\langle x_1^{*0},\rangle) \cap G} \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)} = \bigcup_{\vec{x}^0 \in \{x_1^{*0}\} \times G\langle x_1^{*0},\rangle} \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)} = \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle x_1^{*0},\rangle» \quad (3^{**})$$

Notemos, además, que para todo $x_1^{*0} \in \mathbf{R}$ y cualquiera sea el abierto ω de $\mathbf{R}$, la relación $«\vec{x} \in \Omega_{(x_1^{*0};\omega)}»$ es equivalente a la relación $«\iota(\vec{x}) \in \iota(\Omega_{(x_1^{*0};\omega)})»$, ya que obviamente $«\vec{x} \in \Omega_{(x_1^{*0};\omega)}»$ entraña $«\iota(\vec{x}) \in \iota(\Omega_{(x_1^{*0};\omega)})»$ e inversamente, puesto que $\Omega_{(x_1^{*0};\omega)}$ según establece la

PROPOSICION acabada de demostrar, es saturado para $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$, de la validez de la relación «$\iota(\vec{x}) \in \iota(\Omega_{(x_1^{*0};\omega)})$» se deduce la de esta otra: «$\vec{x} \in \overset{-1}{\iota}(\iota(\vec{x})) \subset \overset{-1}{\iota}(\iota(\Omega_{(x_1^{*0};\omega)})) = \Omega_{(x_1^{*0};\omega)}$». Así pues, para todo $x_1^{*0} \in \mathbf{R}$ y cualquiera sea el abierto ω de $\mathbf{R}$, es válida la relación:

$$«\vec{x} \in \Omega_{(x_1^{*0};\omega)} \Longleftrightarrow \iota(\vec{x}) \in \iota(\Omega_{(x_1^{*0};\omega)})» \quad (3^{***})$$

Se verifica, asimismo, la:

PROPOSICION V. — «La topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ sobre $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ es cuasi-separada, es decir, cualquiera que sean las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) distintas entre sí c y c^*, existe un entorno V de c y un entorno V^* de c^*, tales que $c^* \notin V$ y $c \notin V^*$. [De acuerdo con la nomenclatura de algunos autores el espacio topógico $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$ es, pues, un espacio T_1; siguiendo la nomenclatura de N. Bourbaki el espacio topológico $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$ es accesible (Chap. I, § 8, Exercices, [2])]».

Para demostrar la PROPOSICION, sean $(c, c^*) \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \times \times \mathscr{C}_{(G;\varrho)} - \Delta_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$. Pongamos:

$$\varphi = h_{(G;\varrho)}(c) \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)} \text{ y } \varphi^* = h_{(G;\varrho)}(c^*) \in \mathscr{S}_{(G;\varrho)}.$$

Se verifica:

$$«\Gamma_\varphi = \overset{-1}{\iota}(c) \text{ y } \Gamma_{\varphi^*} = \overset{-1}{\iota}(c^*) \text{ y } \Gamma_\varphi \cap \Gamma_{\varphi^*} = \phi»$$

y consideremos los dos casos mutuamente excluyentes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & I_\varphi \cap I_{\varphi^*} = \phi \\ \text{b)} & I_\varphi \cap I_{\varphi^*} \neq \phi \end{array}\right\}$$

En el caso a) sea $x_1^0 \in I_\varphi$ y $\vec{x}^{*0} \in \Gamma_{\varphi^*}$ [existentes siempre, ya que se tiene $I_\varphi \neq \phi$ y $\Gamma_{\varphi^*} \neq \phi$]. Puesto que $(x_1^0, x_1^0, \varphi(x_1^0)) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, y consecuentemente, $(x_1^0, \varphi(x_1^0)) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_{0'}^1\rangle$, el conjunto $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_{1'}^0\rangle$ es no vacio y además en virtud de la PROPOSICION IV así como de (3^{**}), es $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_{1'}^0\rangle = \Omega_{(x_1^0;G\langle x_{1'}^0\rangle)}$ un subconjunto abierto de G saturado para la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$, por lo que la imagen canónica $\iota\,(\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_1^0,\rangle)$ de $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_1^0,\rangle$ es un abierto del espacio topológica $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)};\ \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$ al cual pertenece $c = \iota\,(x_1^0,\ \varphi\,(x_1^0))$, es decir, $V = \iota\,(\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_1^0,\rangle)$ es un entorno abierto de c en $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)};\ \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$.

Ahora bien $I_\varphi \cap I_{\varphi^*} = \phi$ y la relación dada $x_1^0 \in I_\varphi$ entrañan que $x_1^0 \notin I_{\varphi^*}$, y consecuentemente, se verifica, que:

$$«(\forall\, x_2)\ (x_2 \in G\,\langle x_1^0,\rangle \Rightarrow (x_1^0,\ x_2) \notin \Gamma_{\varphi^*} = \overset{-1}{\iota}(c^*))»$$

por lo que, es válida la relación:

$$«(\forall\, x_2)\ (x_2 \in G\,\langle x_1^0,\rangle \Rightarrow \Gamma_{\varphi^*} \cap \Gamma_{\Psi(x_1^0,\,x_2)} = \phi)»$$

de la cual se deduce en particular [dado que $\vec{x}^{*0} \in \Gamma_{\varphi^*}$], la validez de la relación:

$$«(\forall\, \vec{x})\ (\vec{x} \in \{x_1^0\} \times G\,\langle x_1^0,\rangle \Rightarrow \vec{x}^{*0} \notin \Gamma_{\Psi(\vec{x})})»$$

o lo que es equivalente:

$$«\vec{x}^{*0} \notin \bigcup_{\vec{x} \in \{x_1^0\} \times G\,\langle x_1^0,\rangle} \Gamma_{\Psi(\vec{x})} = \Omega_{(x_1^0;\,G\,\langle x_1^0,\rangle)} = \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\,\langle x_1^0,\rangle»$$

y esta última relación [habida cuenta (3***)], equivale a su vez a la relación:

$$«c^* = \iota\,(\vec{x}^{*0}) \notin \iota\,(\Omega_{(x_1^0;\,G\,\langle x_1^0,\rangle)}) = \iota\,(\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\,\langle x_1^0,\rangle) = V»$$

Así pues se verifica que existe un entorno V de c al cual no pertenece c^*, y procediendo de forma similar se demostraría la existencia de un entorno V^* de c^* tal que $c \notin V^*$ resultando así demostrada la PROPOSICION en el caso a).

En el caso b), sea $x_1^0 \in I_\varphi \cap I_{\varphi^*}$, y pongamos $x_2^0 = \varphi\,(x_1^0)$, $x_2^{*0} = \varphi^*\,(x_1^0)$. Es válida [dado que $(x_1^0,\ x_2^0) \in \Gamma_\varphi = \overset{-1}{\iota}(c)$ y $(x_1^0,\ x_2^{*0}) \in \Gamma_{\varphi^*} = \overset{-1}{\iota}(c^*)$ y $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_{\varphi^*} = \phi$], la relación:

$$«x_2^0 \neq x_2^{*0}»$$

y consecuentemente, existen dos abiertos $\omega = \mathring{\omega}$ y $\omega^* = \mathring{\omega}^*$ de $\mathbf{R}$, tales que:

$$«x_2^0 \in \omega \ \text{ y } \ x_2^{*0} \in \omega^* \ \text{ y } \ \omega \cap \omega^* = \phi»$$

Puesto que se verifica:

$$«(x_1^0,\ x_2^0) \in (\{x_1^0\} \times \omega) \cap G \text{ y } (x_1^0,\ x_2^{*0}) \in (\{x_1^0\} \times \omega^*) \cap G»$$

resulta, por tanto, que:

$$\begin{aligned} «c = \iota\,(x_1^0,\ x_2^0) \in \iota\,((\{x_1^0\} \times \omega) \cap G) &= \\ = \iota\,(\overset{-1}{\iota}\,(\iota\,((\{x_1^0\} \times \omega) \cap G))) &= \iota\,(\Omega_{(x_1^0;\,\omega)}) \text{ y} \\ \text{y } c^* = \iota\,(x_1^0,\ x_1^{*0}) \in \iota\,((\{x_1^0\} \times \omega^*) \cap G) &= \\ = \iota\,(\overset{-1}{\iota}\,(\iota\,((\{x_1^0\} \times \omega^*) \cap G))) &= \iota\,(\Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)})» \quad (4) \end{aligned}$$

y además, dado que se tiene:

$$\begin{gathered} «\vec{x} \in \Omega_{(x_1^0;\,\omega)} \cap \Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)} \Leftrightarrow (\exists_{(\vec{\tilde{x}}^0,\ \vec{\tilde{x}}^{*0})})\ ((\vec{\tilde{x}}^0,\ \vec{\tilde{x}}^{*0}) \in ((\{x_1^0\} \times \omega) \times \\ \times (\{x_1^0\} \times \omega^*)) \cap (G \times G) \text{ y } \vec{x} \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}} \text{ y } \vec{x} \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^{*0})}})» \end{gathered}$$

así como se verifica, que:

$$\begin{gathered} «(\vec{\tilde{x}}^0,\ \vec{\tilde{x}}^{*0}) \in ((\{x_1^0\} \times \omega) \times (\{x_1^0\} \times \omega^*)) \cap (G \times G) \text{ y} \\ \text{y } \vec{x} \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}} \text{ y } \vec{x} \in \Gamma_{\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^{*0})}} \Rightarrow [(\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)} = \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^{*0})}) \text{ y} \\ \text{y } (\vec{\tilde{x}}^0 = (x_1^0,\ \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}\,(x_1^0)) = (x_1^0,\ \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^{*0})}\,(x_1^0)) = \\ = \vec{\tilde{x}}^{*0} \in (\{x_1^0\} \times \omega) \cap (\{x_1^0\} \times \omega^*) = \{x_1^0\} \times (\omega \cap \omega^*))]» \end{gathered}$$

lo que entraña:

$$«\omega \cap \omega^* \neq \phi»$$

se deduce que es válida la relación:

$$«\omega \cap \omega^* = \phi \Rightarrow (\forall\, \vec{x})\ (\vec{x} \in \Omega_{(x_1^0;\,\omega)} \Rightarrow \vec{x} \notin \Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)})»$$

la cual y en virtud de (3^{***}) es equivalente a la relación:

$$«\omega \cap \omega^* = \phi \Rightarrow (\forall\, \vec{x})\ (\vec{x} \in \Omega_{(x_1^0;\,\omega)} \Rightarrow \iota\,(\vec{x}) \notin \iota\,(\Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)}))»$$

y esta última relación equivale a su vez a la:

$$«\omega \cap \omega^* = \phi \Rightarrow \iota\,(\Omega_{(x_1^0;\,\omega)}) \cap \iota\,(\Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)}) = \phi»$$

Como por construcción se tiene $\omega \cap \omega^* = \phi$, se sigue finalmente, [habida cuenta, además (4)], que es válida la relación:

$$«c \in \iota(\Omega_{(x_1^0;\,\omega)}) \text{ y } c^* \in \iota(\Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)}) \text{ y } \iota(\Omega_{(x_1^0;\,\omega)}) \cap \iota(\Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)}) = \phi»$$

Haciendo $V = \iota(\Omega_{(x_1^0;\,\omega)})$ y $V^* = \iota(\Omega_{(x_1^0;\,\omega^*)})$, y aplicando la PROPOSICION IV, se obtienen dos abiertos V y V^* de $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$, tales que $c \in V$ y $c^* \in V^*$ y $V \cap V^* = \phi$, y en particular, se ha establecido la existencia de un entorno V de c y un entorno V^* de c^*, tales que $c^* \notin V$ y $c \notin V^*$, lo que demuestra la PROPOSICION en el caso b).

OBSERVACION. — Puesto que en virtud de la PROPOSICION I, la relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ sobre G es una relación abierta, se puede afirmar que la condición necesaria y suficiente para que el espacio cociente $(G/\mathcal{R}_{(G,\varrho)}; \mathcal{T}_G/\mathcal{R}_{(G;\varrho)}) = (\mathscr{C}_{(G;\varrho)}, \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$ sea separado, es que el grafo de $\mathcal{R}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ sea cerrado en $G \times G$ (Chap. I, § 8, n.º 3 de [2]), es decir, para cualesquiera que sean los puntos $\vec{x} \in G$ y $\vec{x}^* \in G$, no pertenecientes a una misma trayectoria maximal en G de la ecuación diferencial (1), existen un entorno V de $\vec{x}$ en $\mathcal{T}_G$ y un entorno V^* de $\vec{x}^*$ en $\mathcal{T}_G$, tales que cualquier punto $\vec{y}$ de V no pertenece a ninguna trayectoria maximal en G de (1) pasando por algún punto $\vec{y}^*$ de V^*.

Ahora bien, mediante adecuada elección del abierto G y de la función $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, se puede proporcionar un ejemplo de existencia de pares de puntos $(\vec{x}, \vec{x}^*) \in G \times G$ no pertenecientes a la misma trayectoria maximal en G de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, y tales que cualquiera que sean los entornos V y V^*, respectivamente, de $\vec{x}$ y de $\vec{x}^*$, existen puntos $\vec{y} \in V$ e $\vec{y}^* \in V^*$ pertenecientes a la misma trayectoria maximal en G de la referida ecuación diferencial, con lo que la condición necesaria y suficiente de separación de $(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}; \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}})$ deja de verificarse, y consecuentemente la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ no es separada, aunque sí es cuasi-separada como afirma la PROPOSICION V acabada de demostrar.

Si $G \subset \mathbf{R}_2$ es un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$, tal que $\overline{G} \subset G'$ esté contenido en un abierto G' de $\mathbf{R}^2$ sobre el cual está definida, es continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento la función numérica $\varrho : G' \to \mathbf{R}$, y tal que G sea regularmente convexo (n.º 8 INTRODUCCION y ANEXO de R.P.C., [3]), relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, entonces se verifica [véase referencia citada], que para todo $\vec{x}^0 \in G$ las extremidades $x_1^{izq}(\vec{x}^0)$, $x_1^{der}(\vec{x}^0)$ del intervalo de definición de la solución maximal $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ en G de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$, pasando por $\vec{x}^0$, pertenecen al intervalo $]x_1'^{izq}(\vec{x}^0), x_1'^{der}(\vec{x}^0)[$ de definición de la solución maximal en G' de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ pasando asimismo por $\vec{x}^0 \in G \subset G'$, por lo que si $\mathfrak{A}'_{(G;\varrho)}$ es el abierto de definición de la integral general global $\mu : \mathfrak{A}'_{(G;\varrho)} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ en G' de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, se tiene, consecuentemente, $(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0\ x_2^0) \in \mathfrak{A}'_{(G;\varrho)}$ y $(x_1^{der}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}'_{(G;\varrho)}$, dado que [misma referencia citada], la aplicación $x_1^{izq} : G \to \mathbf{R}$ [que a todo $\vec{x}^0 \in G$ asigna como imagen la extremidad izquierda $x_1^{izq}(\vec{x}^0)$ del intervalo de definición de la solución maximal $\Psi_{(\vec{x}^0)}$ en G de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$] es continuamente diferenciable sobre G y a fortiori es continua sobre G, se sigue de todo ello que la aplicación compuesta: $\vec{x}^0 \in G \to \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0\ x_2^0) \in \mathbf{R}$, es continua sobre G, así como lo es, asimismo, la aplicación vectorial $\vec{x}^0 \in G \to \vec{g}(\vec{x}^0) = (x_1^{izq}(\vec{x}^0), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0\ x_2^0)) \in \mathbf{R}^2$, y por tanto, si $\vec{x}^0 \in G$ y $\vec{x}^{*0} \in G$, son tales que no pertenecen a una misma trayectoria maximal en G de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}(x_1\ x_2)$ $(^+)$, puesto que entonces $\vec{x}^0$ y $\vec{x}^{*0}$ no pertenecen, tampoco a una misma trayectoria maximal en G' de la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1\text{-}\ x_2)$ $(^{++})$ [ya que si, $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ y $\vec{x}^{*0} = (x_1^{*0}, x_2^{*0})$ perteneciesen a una misma trayectoria maximal en G' de $(^{++})$, se tendría, como consecuencia la validez de la relación: «$\vec{x}^0 \in G$ y $(x_1^{*0}, x_1^0, x_2^0) \in \mathfrak{A}'_{(G;\varrho)}$ y $x_2^{*0} = \mu(x_1^{*0}, x_1^0, x_2^0)$ y $(x_1^{*0}, x_2^{*0}) \in G$», de la cual (OBSERVACION 3.ª, n.º 8, INTRODUCCION de R.P.C. [3]), se deduce: «$x_1^{*0} \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$ y y $x_2^{*0} = \mu_{(,\vec{x}^0)}(x_1^{*0}) = \mu_{(,\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[}(x_1^{*0}) = \lambda_{(,\vec{x}^0)}(x_1^{*0}) = \Psi_{(\vec{x}^0)}(x_1^{*0})$», y consecuentemente, $\vec{x}^0$ y $\vec{x}^{*0}$ pertenecerían a una misma trayectoria maximal en G de $(^+)$, lo que es contradictorio con la hipótesis efectuada sobre $\vec{x}^0$ y $\vec{x}^{*0}$] lo que entraña: «$\vec{y}^0 = \vec{g}(\vec{x}^0) = (x_1^{izq}(\vec{x}^0), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0, x_2^0)) \neq (x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^{*0}), x_1^{*0}, x_2^{*0})) = \vec{g}(\vec{x}^{*0}) = \vec{y}^{*0}$», por lo que existen un entorno V y un entorno V^* de $\vec{y}^0$ y de $\vec{y}^{*0}$, respectivamente tales que $V \cap V^* = \phi$, y en virtud de la continuidad de $\vec{g} : G \to \mathbf{R}$ sobre G, $W = \overset{-1}{\vec{g}}(V)$ y $W^* = \overset{-1}{\vec{g}}(V^*)$ son entornos, respectivamente, de $\vec{x}^0$ y de $\vec{x}^{*0}$, verificándose [habida cuenta que $V \cap V^* = \phi$ y $\vec{g}(W) \subset V$ y $\vec{g}(W^*) \subset V^*$], la relación:

$$«(\forall (\vec{x}, \vec{x}^*)) ((\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^* \Rightarrow \vec{g}(x) = (x_1^{izq}(\vec{x}), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}), x_1, x_2)) \neq$$
$$\neq (x_1^{izq}(\vec{x}^*), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^*, x_2^*)) = \vec{g}(\vec{x}^*))»$$

la cual implica que para todo $(\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^*$, [dado que, (en donde $\mathfrak{A}_{(G;\varrho_{|G})}$ designa el abierto de definición de la integral general $\lambda : \mathfrak{A}_{(G;\varrho_{|G})} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ global en G de $(^+)$; se verifica como se sabe, (n.º 8, INTRODUCCION de R. P. C., [3]), que: $\mathfrak{A}_{(G;\varrho_{|G})} \subset \mathfrak{A}'_{(G';\varrho)}$ y y $\lambda = \mu_{\mathfrak{A}_{(G;\varrho_{|G})}}$), se tiene:

$$«(\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^* \text{ y } \Psi_{(\vec{x})} = \Psi_{(\vec{x}^*)} \Rightarrow (x_1^*, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho_{|G})} \subset \mathfrak{A}'_{(G';\varrho)} \text{ y}$$
$$\text{y } x_2^* = \lambda(x_1^*, x_1, x_2) = \mu(x_1^*, x_1, x_2) \text{ y } x_1^{izq}(\vec{x}) = x_1^{izq}(\vec{x}^*)»$$

así como:

$$«(x_1^*, x_1, x_2) \in \mathfrak{A}'_{(G';\varrho)} \text{ y } x_2^* = \mu(x_1^*, x_1, x_2) \text{ y}$$
$$\text{y } x_1^{izq}(\vec{x}) = x_1^{izq}(\vec{x}^*) \Rightarrow \mu_{(,x_1,x_2)} = \mu_{(,x_1^*,x_2^*)} \text{ y } \vec{g}(\vec{x}) =$$
$$= (x_1^{izq}(\vec{x}), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}), x_1, x_2)) = (x_1^{izq}(\vec{x}), \mu_{(,x_1,x_2)}(x_1^{izq}(\vec{x}))) =$$
$$= (x_1^{izq}(\vec{x}^*), \mu_{(,x_1^*,x_2^*)}(x_1^{izq}(\vec{x}^*))) = (x_1^{izq}(\vec{x}^*), \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^*), x_1^*. \vec{x}_2^*)) = \vec{g}(\vec{x}^*)»$$

por lo que es válida la relación: «$(\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^*$ y $\Psi_{(\vec{x})} = \Psi_{(\vec{x}^*)} \Rightarrow \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}^*)$», equivalente (habida cuenta que según se ha establecido precedentemente, es: $\vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{g}(\vec{x}^*)$), sucesivamente, a las relaciones:

$$«(\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^* \text{ y } \vec{g}(\vec{x}) \neq \vec{g}(\vec{x}^*) \Rightarrow \Psi_{(\vec{x})} \neq \Psi_{(\vec{x}^*)}»; \; «(\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Psi_{(\vec{x})} \neq \Psi_{(\vec{x}^*)}»; \; «(\vec{x}, \vec{x}^*) \in W \times W^* \Rightarrow \Gamma_{\Psi_{(\vec{x})}} \neq \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^*)}}»],$$

las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial $(^{+})$ que pasan respectivamente por $\vec{x}$ y $\vec{x}^*$ sean distintas, o lo que es equivalente, cualquier punto $\vec{x} \in W$ no pertenece a ninguna trayectoria maximal en G de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G'}(x_1, x_2)$ pasando por algún punto $\vec{x}^*$ de W^*.

Así pues, en el caso de que G sea un abierto acotado de $\mathbf{R}^2$ cuya adherencia $\bar{G}$ esté contenida en un abierto G' de $\mathbf{R}^2$ y que además G sea regularmente convexo relativamente a la ecuación diferencial $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ (con $\varrho : G' \to \mathbf{R}$ continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G'), se verifica que la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho_{|G})}}$ de $\mathscr{C}_{(G;\varrho_{|G})}$ es separada.

NOTA. — Las PROPOSICIONES I, II, III, IV y V se han demostrado suponiendo únicamente que $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, y por tanto, dichas PROPOSICIONES son válidas, a fortiori, en el supuesto de que $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sea continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G.

I.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL GENERAL GLOBAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$. — Sea $\varrho : \mathring{G} = G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una función numérica definida y continua sobre el abierto G de $\mathbf{R}^2$ y que además es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G]. Vamos a establecer ciertas propiedades relativas a la integral general global de la ecuación ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, las cuales serán útiles para el estudio de la estructura del conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de las trayectorias maximales de la referida ecuación diferencial.

Concretamente, suponiendo en primer lugar que $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, nos proponemos demostrar la validez de la siguiente relación:

$$\text{«}(\forall\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))\,((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) = (\tilde{x}_1, \vec{\tilde{x}}^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists\,(r, k))\,((r, k) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \text{ y}$$

$$\text{y }]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times]\tilde{x}_1^0 - r, \tilde{x}_1^0 + r[\times]\tilde{x}_2^0 - r, \tilde{x}_2^0 + r[=$$

$$=]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall\,(x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\,((x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y}$$

$$\text{y } (x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y } (x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in$$

$$\in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \Rightarrow \Big[\frac{1}{k}\,|\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| \leq$$

$$\leq |\lambda(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) - \lambda(x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leq k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|\Big]))))\text{»} \quad (4^*)$$

En efecto, si $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) = (\tilde{x}_1, \vec{\tilde{x}}^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)}$ dado que siempre se verifica $(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)}$ y que $\mathcal{A}_{(G,\varrho)} = \mathring{\mathcal{A}}_{(G;\varrho)}$, existirá un $(r', r'') \in \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}]$, tal que:

$$\text{«}[\tilde{x}_1 - r', \tilde{x}_1 + r'] \times \bar{Q}_{r'}(\vec{\tilde{x}}^0) = (\tilde{x}_1 - r', \tilde{x}_1 + r'] \times$$

$$\times [\tilde{x}_1^0 - r', \tilde{x}_1^0, + r'] \times [\tilde{x}_2^0 - r', \tilde{x}_2^0 + r'] \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$

$$\text{y } [\tilde{x}_1^0 - r'', \tilde{x}_1^0 + r''] \times Q_{r''}(\tilde{x}^0) = [\tilde{x}_1^0 - r'', \tilde{x}_1^0 + r''] \times$$

$$\times [\tilde{x}_1^0 - r'', \tilde{x}_1^0 + r''] \times [\tilde{x}_2^0 - r'', \tilde{x}_2^0 + r''] \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\text{»}$$

Hagamos $r = \text{mín}\,\{r', r''\}$. Se verifica:

$$\text{«}r \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } [\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r] \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$

$$\text{y } [\tilde{x}_1^0 - r, \tilde{x}_1^0 + r] \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\text{»}$$

Ahora bien, se tiene, que:

$$\text{«}\{\tilde{x}_1 - r\} \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } \{\tilde{x}_1^0 - r\} \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$

$$\text{y } \{\tilde{x}_1 + r\} \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } \{\tilde{x}_1^0 + r\} \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\text{»}$$

lo que entraña:

$$«\{\text{mín } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r\} \times \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$
$$\text{y } \{\text{máx } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r\} \times \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}»$$

y consecuentemente (Véase n.º 4, INTRODUCCION de [3]), es válida la relación:

$$«(\forall \vec{x}'^0)\ (\vec{x}'^0 \in \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \Rightarrow [\text{mín } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r \in I_{\Psi(\vec{x}'^0)} \text{ y}$$
$$\text{y } \text{máx } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r \in I_{\Psi(\vec{x}'^0)}))»$$

de la cual se deduce:

$$«(\forall \vec{x}'^0)\ (\vec{x}'^0 \in \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \Rightarrow [\text{mín } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r,\ \text{máx } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r] \subset I_{\Psi(\vec{x}'^0)})»$$

o lo que es equivalente:

$$«(\forall \vec{x}'^0)\ (\vec{x}'^0 \in \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \Rightarrow [\text{mín } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r,\ \text{máx } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r] \times$$
$$\times \{\vec{x}'^0\} \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)})»$$

y esta última relación equivale, a su vez, a la:

$$«[\text{mín } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r,\ \text{máx } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r] \times \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}»$$

Puesto que $H = \text{mín } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r,\ \text{máx } \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r] \times \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0)$ es un compacto de $\mathbf{R}^3$ contenido en $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, el conjunto:

$$K = \bigcup_{(t, \vec{x}'^0) \in H} \{(t, \Psi_{(\vec{x}'^0)}(t))\} = \bigcup_{(t, \vec{x}'^0) \in H} \{(t, \lambda(t, x_1'^0, x_2'^0))\}$$

imagen de H mediante la aplicación continua $(pr_{1|\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}}, \lambda) : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \to \mathbf{R}^2$ es asimismo un compacto de $\mathbf{R}^2$, el cual está contenido en G y consecuentemente [dado que por hipótesis, $\varrho : G \to \mathbf{R}$ es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G], la restricción $\varrho_{|K}$ de ϱ a K es globalmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre K, y por tanto, existe un $\widetilde{k} \in \mathbf{R}^+$ tal que:

$$«(\forall (y_1, \bar{y}_2, \bar{\bar{y}}_2))\ ((y_1, \bar{y}_2, \bar{\bar{y}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (y_1, \bar{y}_2) \in K \text{ y}$$
$$\text{y } (y_1, \bar{\bar{y}}_2) \in K \Rightarrow |\varrho(y_1, \bar{y}_2) - \varrho(y_1, \bar{\bar{y}})| \leqslant \widetilde{k} \cdot |\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2|)» \quad (4^{**})$$

Sentado esto, sea $(x_1', x_1'^0, x_2'^0) = (x_1', \vec{x}'^0) \in]\widetilde{x}_1 - r, \widetilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\widetilde{x}}^0) \subset [\text{mín}\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r, \text{máx}\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r] \times \bar{Q}_r(\vec{\widetilde{x}}^0) = H \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$; se verifica, en primer lugar, que:

$$«[\text{mín}\{x_1', x_1'^0\}, \text{máx}\{x_1', x_1'^0\}] \subset [\text{mín}\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} - r, \text{máx}\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0\} + r] \subset I_{\Psi_{(\vec{x}'^0)}}» \quad (4^{***})$$

y además se tiene que:

$$«\bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1', x_1'^0\}, \text{máx}\{x_1', x_1'^0\}]} \{(t, \Psi_{(\vec{x}'^0)}(t))\} = \bigcup_{t \in [\text{mín}\{x_1', x_1'^0\}, \text{máx}\{x_1', x_1'^0\}]} \{(t, \lambda(t, x_1'^0, x_2'^0))\} =$$
$$= (pr_1|_{\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}}, \lambda)([\text{mín}\{x_1', x_1'^0\}, \text{máx}\{x_1', x_1'^0\}] \times \{\vec{x}'^0\}) \subset$$
$$\subset (pr_1|_{\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}}, \lambda)(H) = K» \quad (4^{****})$$

por lo que para todo $(x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, con la condición $«(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\widetilde{x}_1 - r, \widetilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\widetilde{x}}^0)$ y $(x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in [\widetilde{x}_1 - r, \widetilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\widetilde{x}}^0)»$ [teniendo en cuenta, además, (4^{**}), (4^{***}) y (4^{****})], es válida la relación:

$$«J = [\text{mín}\{x_1^*, x_1\}, \text{máx}\{x_1^*, x_1\}] \subset I_{\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}} \cap I_{\Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}} = I \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall t)(t \in [\text{mín}\{x_1^*, x_1\}, \text{máx}\{x_1^*, x_1\}] \Rightarrow [((t, \Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(t)), (t, \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t))) \in K \times K \text{ y } |\Psi'_{(x_1,\bar{x}_2)}(t) - \Psi'_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t)| = |\varrho(t, \Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(t)) - \varrho(t, \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t))| \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{k} \cdot |\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(t) - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t)|])» \quad (5)$$

Si se supone, además, que $\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(x_1) = \bar{x}_2 \neq \bar{\bar{x}}_2 = \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(x_1)$, dado que entonces se tiene $\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)} \neq \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}$, lo que entraña:

$$«\Gamma_{(x_1,\bar{x}_2)} \neq \Gamma_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}»$$

se verifica, consecuentemente, que es válida la relación:

$$«(\forall t)(t \in I \Rightarrow \Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(t) - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t) = (\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)/I} - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)/I})(t) \neq 0)»$$

de la cual, habida cuenta que I por ser intervalo es conexo, así como la continuidad de la función $p = \Psi_{(x_1,\bar{x}_2)/I} - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)/I}$ y que $x_1 \in I$ se deduce, a su vez, la validez de la relación:

$$«(\forall t)(t \in I \Rightarrow p(x_1) \cdot p(t) > 0)»$$

En el caso de ser $\bar{x}_2 > \bar{\bar{x}}_2$, puesto que $p(x_1) = \Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(x_1) - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(x_1) = \bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2 > 0$ se verifica, por tanto, que:

$$«(\forall t)\ (t \in I \Rightarrow p(t) > 0)»$$

y dado que $\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2 = 0$ entraña $\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)} = \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}$, y consecuentemente, se tiene que:

$$«(\forall t)\ (t \in I \Rightarrow p(t) = \Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(t) - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t) = 0)»$$

se sigue que en el supuesto $\bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2$, es válida la relación:

$$«(\forall t)\ (t \in I \Rightarrow p(t) \geqslant 0)»$$

de la cual y teniendo en cuenta ([5]), se deduce, que:

$$«(\forall t)\ (t \in J = [\text{mín}\ \{x_1^*, x_1\},\ \text{máx}\ \{x_1^*, x_1\}] \subset I \Rightarrow |p'(t)| =$$
$$= |\Psi'_{(x_1,\bar{x}_2)}(t) - \Psi'_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t)| \leqslant \tilde{k} \cdot |\Psi_{(x_1,\bar{x}_2)}(t) - \Psi_{(x_1,\bar{\bar{x}}_2)}(t)| =$$
$$= \tilde{k} \cdot |p(t)| = \tilde{k} \cdot p(t))»$$

es decir, se verifica, que:

$$«\bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2 \Rightarrow (\forall t)\ (t \in J \Rightarrow -\tilde{k} \cdot p(t) \leqslant p'(t) \leqslant \tilde{k} \cdot p(t))»$$

lo que entraña, a su vez, la validez de la relación:

$$«\bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2 \Rightarrow (\forall t)\ (t \in J \Rightarrow e^{-\tilde{k} \cdot t} \cdot [p'(t) - \tilde{k} \cdot p(t)] \leqslant$$
$$\leqslant 0 \leqslant e^{\tilde{k} \cdot t} \cdot [p'(t) + \tilde{k} \cdot p(t)])»$$

de la cual (supuesto como hasta ahora $\bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2$), se deduce:

$$«x_1 \leqslant x_1^* \Rightarrow (\forall y_1)\ (y_1 \in J = [x_1, x_1^*] \Rightarrow e^{-\tilde{k} \cdot y_1} \cdot p(y_1) - e^{-\tilde{k} \cdot x_1} \cdot p(x_1) =$$
$$= \left[e^{-\tilde{k} \cdot t} \cdot p(t)\right]_{x_1}^{y_1} = \int_{x_1}^{y_1} e^{-\tilde{k}t} [p'(t) - \tilde{k} \cdot p(t)]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 0 \leqslant \int_{x_1}^{y_1} e^{\tilde{k} \cdot t} [p'(t) + \tilde{k} \cdot p(t)]\, dt = \left[e^{\tilde{k} \cdot t} \cdot p(t)\right]_{x_1}^{y_1} =$$
$$= e^{\tilde{k} \cdot y_1} \cdot p(y_1) - e^{\tilde{k} \cdot x_1} \cdot p(x_1))»$$

y

y

$$«x_1 > x_1^* \Rightarrow (\forall y_1)\,(y_1 \in J = [x_1^*, x_1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\tilde{k}\cdot x_1}\cdot p\,(x_1) - e^{-\tilde{k}\cdot y_1}\cdot p\,(y_1) = \Big[e^{-\tilde{k}\cdot t}\cdot p\,(t)\Big]_{y_1}^{x_1} =$$

$$= \int_{y_1}^{x_1} e^{-\tilde{k}\cdot t}\cdot [p'\,(t) - \tilde{k}\cdot p\,(t)]\,dt \leqslant 0 \leqslant \int_{y_1}^{x_1} e^{\tilde{k}\cdot t}\,[p'\,(t) + \tilde{k}\cdot p\,(t)]\,dt =$$

$$= \Big[e^{\tilde{k}\cdot t}\cdot p\,(t)\Big]_{y_1}^{x_1} = e^{\tilde{k}\cdot x_1}\cdot p\,(x_1) - e^{\tilde{k}\cdot y_1}\cdot p\,(y_1))»$$

es decir, se tiene, que:

$$«x_1 \leqslant x_1^* \Rightarrow (\forall y_1)\,(y_1 \in J \Rightarrow [p\,(x_1) \leqslant e^{\tilde{k}(y_1 - x_1)}\cdot p\,(y_1) \text{ y}$$

$$\text{y } p\,(y_1) \leqslant e^{\tilde{k}\cdot(y_1 - x_1)}\cdot p\,(x_1)]])»$$

y

$$«x_1 > x_1^* \Rightarrow (\forall y_1)\,(y_1 \in J \Rightarrow [p\,(x_1) \leqslant e^{\tilde{k}\cdot(x_1 - y_1)}\cdot p\,(y_1) \text{ y}$$

$$\text{y } p\,(y_1) \leqslant e^{\tilde{k}\cdot(x_1 - y_1)}\cdot p\,(x_1)]])»$$

resultando ser válida, (en el supuesto $\bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2$), la relación:

$$«(\forall y_1)\,(y_1 \in J \Rightarrow [\text{mín}\,\{x_1^*, x_1\},\ \text{máx}\,\{x_1^*, x_1\}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [p\,(x_1) \leqslant e^{\tilde{k}\cdot|x_1 - y_1|}\cdot p\,(y_1) \text{ y } p\,(y_1) \leqslant e^{\tilde{k}\cdot|x_1 - y_1|}\cdot p\,(x_1)]])»$$

y en particular haciendo $y_1 = x_1^*$, [habida cuenta, además, que $(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0)$ y $(x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0)$, entraña: «$|x_1 - x_1^*| \leqslant |x_1 - \tilde{x}_1^0| + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0| + |x_1^* - \tilde{x}_1| \leqslant 2r + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0|$»], se verifica, que:

$$«\ 0 \leqslant \bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2 = p\,(x_1) \leqslant e^{\tilde{k}(2r + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0|)}\cdot p\,(x_1^*) \text{ y}$$

$$\text{y } p\,(x_1^*) \leqslant e^{\tilde{k}\cdot(2r + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0|)}\cdot p\,(x_1) = e^{\tilde{k}\cdot(2r + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0|)}\cdot(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2)»$$

es decir, dado que se ha partido del supuesto inicial «$(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0)$ y $(x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}})$», así como que se ha adjuntado a este supuesto la hipótesis adicional «$\bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2$» y haciendo para abreviar: $k = e^{\tilde{k}(2r + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1^0|)} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, es válida, por tanto, la relación:

$$«(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y } (x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in$$
$$\in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y } \bar{x}_2 \geqslant \bar{\bar{x}}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [0 \leqslant \bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2 \leqslant k \cdot (\Psi_{(x_1, \bar{x}_2)}(x_1^*) - \Psi_{(x_1, \bar{\bar{x}}_2)}(x_1^*)) \text{ y}$$
$$\text{y } \Psi_{(x_1, \bar{x}_2)}(x_1^*) - \Psi_{(x_1, \bar{\bar{x}}_2)}(x_1^*) \leqslant k \cdot (\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2)]» \quad (5^*)$$

De (5^*) cambiando $\bar{x}_2$ por $\bar{\bar{x}}_2$, se sigue que es válida, asimismo, la relación:

$$«(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y } \bar{x}_2 \leqslant \bar{\bar{x}}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [0 \leqslant \bar{\bar{x}}_2 - \bar{x}_2 \leqslant k \cdot (\Psi_{(x_1, \bar{\bar{x}}_2)}(x_1^*) - \Psi_{(x_1, \bar{x}_2)}(x_1^*)) \text{ y}$$
$$\text{y } \Psi_{(x_1, \bar{\bar{x}}_2)}(x_1^*) - \Psi_{(x_1, \bar{x}_2)}(x_1^*) \leqslant k \cdot (\bar{\bar{x}}_2 - \bar{x}_2)]»$$

que combinada con (5^*) y habida cuenta además que $(x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ con la condición «$(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times \times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0)$ y $(x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_2)[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0)$» es completamente arbitrario, establece a su vez, la validez de la relación:

$$«(\forall (x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2)) \Big((x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\frac{1}{k} \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| \leqslant |\Psi_{(x_1, \bar{x}_2)}(x_1^*) - \Psi_{(x_1, \bar{\bar{x}}_2)}(x_1^*)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)\right]\Big)»$$

y puesto que se ha partido del supuesto totalmente arbitrario $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, se concluye que se verifica:

$$«(\forall (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)) ((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) = (\tilde{x}_1, \vec{\tilde{x}}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists (r, k)) ((r, k) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \text{ y}$$
$$\text{y }]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall (x_1^*, x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2)) ((x_1^*, x_1 \; \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^*, x_1, \bar{x}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y}$$

$$\text{y } (x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{k} |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| \leqslant |\lambda(x_1^*, x_1, \bar{x}_2) - \lambda(x_1^*, x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|\right]))\text{»}$$

resultado que demuestra (4*).

De (4*) se obtiene, en particular, $(x_1^* = \tilde{x}_1)$, que:

$$\text{«}(\forall\, (\tilde{x}_1, \vec{\tilde{x}}^0))\; ((\tilde{x}_1, \vec{\tilde{x}}^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\exists\, (r, k))\; ((r, k) \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times$$
$$\times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \text{ y } \{\tilde{x}_1\} \times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall\, (x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\; ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_r(\vec{\tilde{x}}_0) \Rightarrow |\lambda(\tilde{x}_1, x_1, \bar{x}_2) - \lambda(\tilde{x}_1, x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)))\text{»} \quad (5^{**})$$

y asimismo [habida cuenta que «$(x_1, x_2) \in Q_r(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) =]\tilde{x}_1 - r,$ $, \tilde{x}_1 + r[\times]\tilde{x}_2^0 - r, \tilde{x}_2^0 + r[\Rightarrow (x_1, \tilde{x}_1^0, x_2) \in]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times \{\tilde{x}_1^0\} \times$ $\times]\tilde{x}_2^0 - r, \tilde{x}_2^0 + r[\subset]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0)$»], se verifica, como consecuencia de (4*), la relación:

$$\text{«}(\forall\, (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))\; ((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\exists\, (r, k))\; ((r, k) \in$$
$$\in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times \mathbf{R}^+ \text{ y }]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times \{\tilde{x}_1^0\} \times]\tilde{x}_2^0 - r, \tilde{x}_2^0 + r[\subset$$
$$\subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\forall\, (x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\; ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{x}_2) \in Q_r(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \text{ y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_r(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\lambda(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{x}_2) - \lambda(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)))\text{»} \quad (5^{***})$$

Además, dado que:

$$\text{«}]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times \{\tilde{x}_1^0\} \times]\tilde{x}_2^0 - r, \tilde{x}_2^0 + r[\subset]\tilde{x}_1 - r, \tilde{x}_1 + r[\times$$
$$\times Q_r(\vec{\tilde{x}}^0) \subset [\text{mín}\, \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0\} - r, \text{ máx}\, \{\tilde{x}_1, \vec{\tilde{x}}\} + r] \times \bar{Q}_r(\vec{\tilde{x}}^0) = H\text{»}$$

lo que entraña:

$$\text{«}(\forall\, (x_1, x_2))\; ((x_1, x_2) \in Q_r(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1, \lambda(x_1, \tilde{x}_1^0, x_2)) \in (pr_1|_{\mathcal{A}_{(G;\varrho)}}, \lambda)(H) = K)\text{»}$$

es válida como consecuencia de (4**) y (5***), la relación:

$$«(\forall\,(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\,((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in$$
$$\in Q_r\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \text{ y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_r\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |(D_1\,\lambda)\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{x}_2) - (D_1\,\lambda)\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{\bar{x}}_2)| =$$
$$= |\varrho\,(x_1, \lambda\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{x}_2)) - \varrho\,(x_1, \lambda\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{\bar{x}}_2))| \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{k} \cdot |\lambda\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{x}_2) - \lambda\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant \tilde{k} \cdot \bar{\bar{k}} \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| = k' \cdot |\bar{x}_2 - x_2|)»$$

resultando así verificarse, que:

$$«(\forall\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))\,((\tilde{x}, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\exists\,(r', k'))\,((r', k') \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times \mathbf{R}^+ \text{ y}$$
$$\text{y }]\tilde{x}_1 - r', \tilde{x}_1 + r'[\times \{\tilde{x}_1^0\} \times]\tilde{x}_2^0 - r', \tilde{x}_2^0 + r'[\subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall\,(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}))\,((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in Q_{r'}\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_{r'}\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \Rightarrow |(D_1\,\lambda)\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{x}_2) - (D_1\,\lambda)\,(x_1, \tilde{x}_1^0, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant$$
$$\leqslant k' \cdot |\bar{x}_2, - \bar{\bar{x}}_2|)))» \quad (5^{****})$$

Denotando para todo $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ mediante $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle \tilde{x}_{1,,} \rangle$ y y $\lambda_{(\tilde{x}_{1,,})} : \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle \tilde{x}_{1,,} \rangle \to \mathbf{R}$, respectivamente, la traza de $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}$ según el valor $\tilde{x}_1$ del primer argumento y la aplicación parcial determinada por λ relativamente a dicho valor $\tilde{x}_1$ de su primer argumento, y mediante $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle , \tilde{x}_1^0, \rangle$ y $\lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle , \tilde{x}_1^0, \rangle \to \mathbf{R}$, respectivamente, a la traza de $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}$ según el valor $\tilde{x}_1^0$ del segundo argumento y la aplicación parcial determinada por λ relativamente a dicho valor $\tilde{x}_1^0$ del segundo argumento, (5^{**}), (5^{***}) y (5^{****}) entrañan, respectivamente, las relaciones:

$$«(\forall\,\tilde{x}_1)\,(\tilde{x}_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow (\forall\,\vec{\tilde{x}}^0)\,(\vec{\tilde{x}}^0 \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle \tilde{x}_{1,,} \rangle \Rightarrow (\exists\,(r, k))\,((r, k) \in$$
$$\in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times \mathbf{R}^+ \text{ y } Q_r\,(\vec{\tilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle \tilde{x}_{1,,} \rangle \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall\,(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\,((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in Q_r\,(\vec{\tilde{x}}^0) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_r\,(\vec{\tilde{x}}^0) \Rightarrow |\lambda_{(\tilde{x}_{1,,})}\,(x_1, \bar{x}_2) - \lambda_{(\tilde{x}_{1,,})}\,(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)))»$$

y

$$«(\forall\,\tilde{x}_1^0)\,(\tilde{x}_1^0 \in \mathbf{R} \Rightarrow (\forall\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle , \tilde{x}_1^0, \rangle \Rightarrow (\exists\,(r, k))\,((r, k) \in$$
$$\in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times \mathbf{R}^+ \text{ y } Q_r\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}\,\langle , \tilde{x}_1^0, \rangle \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall\,(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\,((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{x}_2) \in Q_r\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \text{ y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_r\,(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)}\,(x_1, \bar{x}_2) - \lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)}\,(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)))»$$

y

y

$$«(\forall \widetilde{x}_1^0)\ (\widetilde{x}_1^0 \in \mathbf{R} \Rightarrow (\forall\ (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2^0))\ ((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists\ (r', k'))\ ((r', k') \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times \mathbf{R}^+ \text{ y } Q_{r'}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle \text{ y}$$
$$\text{y } (\forall\ (x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\ ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in Q_{r'}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2^0) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in Q_{r'}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2^0) \Rightarrow (D_1\ \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)}(x_1, \bar{x}_2) - (D_1\ \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)}(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant$$
$$\leqslant k' \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)))»$$

las cuales son, respectivamente, equivalentes a las relaciones:

«$(\forall \widetilde{x}_1)$ $(\widetilde{x}_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow$ la aplicación parcial $\lambda_{(\tilde{x}_1,,)} : \mathfrak{A}_{(G;\partial)} \langle \widetilde{x}_1,,\rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ determinada por λ relativamente al valor $\widetilde{x}_1$ del primer argumento es localmente lipschitziana sobre su abierto de definición $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1,,\rangle$ respecto a su segundo argumento)» (6)

y

«$(\forall \widetilde{x}_1^0)$ $(\widetilde{x}_1^0 \in \mathbf{R} \Rightarrow$ la aplicación parcial $\lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ determinada por λ relativamente al valor $\widetilde{x}_1^0$ del segundo argumento es localmente lipschitziana sobre su abierto de definición $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle$ respecto a su segundo argumento)» (6*)

y

«$(\forall \widetilde{x}_1^0)$ $(\widetilde{x}_1^0 \in \mathbf{R} \Rightarrow$ la aplicación parcial $(D_1\ \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ determinada por $D_1\ \lambda$ relativamente al valor $\widetilde{x}_1^0$ de segundo argumento es localmente lipschitziana sobre su abierto de definición $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle$ respecto a su segundo argumento)» (6**)

En el supuesto de que $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sea continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G, la integral general global $\lambda : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y su derivada parcial $D_1\ \lambda = \varrho_0\ (pr_{1|\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}}, \lambda) : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, son, como se sabe, (n.º 6 INTRODUCCION de R.P.C., [3]), la primera continuamente diferenciable sobre el abierto de definición $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, y consecuentemente, para todo $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0) \in \mathbf{R}^2$, las aplicaciones parciales $\lambda_{(\tilde{x}_1,,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1,,\rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $\lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ son continuamente derivables parcialmente sobre sus respectivos abiertos de definición $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1,,\rangle$ y $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle, \widetilde{x}_1^0,\rangle$, con relación a sus segundos argumentos, y la segunda dado que para todo $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se verifica:

$$«((D_1\ \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)})_{(\tilde{x}_1,)} = (D_1\ \lambda)_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1^0,)} = \varrho_{(\tilde{x}_1,)} \circ \lambda_{(\tilde{x}_1\ \tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0,\rangle \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}»$$

y en consecuencia la aplicación $((D_1 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)})_{(\tilde{x}_1,)} = (D_1 \lambda)_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1^0,)}$ es continuamente diferenciable sobre su abierto de definición $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \rangle$ se sigue de ello que para todo $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ y cualquiera sea $\tilde{x}_2^0 \in \mathbf{R}$, verificando la condición $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0, \rangle$ la aplicación parcial $(D_1 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0, \rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ determinada por $D_1 \lambda$ relativamente al valor $\tilde{x}_1^0$ del segundo argumento es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento en $\tilde{x}_2^0$, verificándose, además que:

$$«(D_2 ((D_1 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)})) (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) = (D_{12} \lambda) (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) =$$

$$= (\varrho_{(\tilde{x}_1,)} \circ (\lambda_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1^0,)}))' (\tilde{x}_2^0) = \varrho'_{(\tilde{x}_1,)} (\lambda_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1^0,)} (\tilde{x}_2^0)) \cdot (\lambda_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_1^0,)})' (\tilde{x}_2^0) =$$

$$= (D_2 \varrho) (\tilde{x}_1, \lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0)) \cdot (D_2 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) =$$

$$= (((D_2 \varrho) \circ (pr_1|_{\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0, \rangle}, \lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)})) \cdot (D_2 \lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)})) (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0)»$$

y puesto que para cada $\tilde{x}_1^0 \in \mathbf{R}$ es $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0 , \rangle$ completamente arbitrario, es válida, por tanto, la relación:

«$(\forall \tilde{x}_1^0)$ $(\tilde{x}_1^0 \in \mathbf{R} \Rightarrow (D_1 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0 \rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0, \rangle$ y

y $D_2 ((D_1 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)}) = ((D_2 \varrho) \circ (pr_1|_{\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0, \rangle}, \lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)})) \cdot (D_2 \lambda_{(,\tilde{x}_1^0,)}))$»

la cual entraña, finalmente, que:

«$(\forall \tilde{x}_1^0)$ $(\tilde{x}_1^0 \in \mathbf{R} \Rightarrow (D_1 \lambda)_{(,\tilde{x}_1^0,)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , \tilde{x}_1^0, \rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^0, \rangle)$»

Estos últimos resultados combinados con los expresados por las relaciones (6), (6*) y (6**), permiten enunciar la siguiente:

PROPOSICION VI. — «Para todo abierto G de $\mathbf{R}^2$ y toda función numérica $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida y continua sobre G, que además es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. que además es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], si $\lambda : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ denota la integral general global en G (n.º 5 INTRODUCCION de R. P. C., [3]) de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho (x_1, x_2)$, se verifica, que cualquiera sea el par ordenado $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1^0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, las aplicaciones parciales $\lambda_{(\widetilde{x}_1,,)} : \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1,, \rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$; $\lambda_{(,\widetilde{x}_1^0,)} : \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle , \widetilde{x}_1^0, \rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $(D_1 \lambda)_{(,\widetilde{x}_1^0,)} : \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle , \widetilde{x}_1^0, \rangle \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ determinadas la primera y la segunda por λ relativamente al valor $\widetilde{x}_1$ del primer argumento y al valor $\widetilde{x}_1^0$ del segundo argumento, respectivamente, y la tercera determinada por $D_1 \lambda$ relativamente al valor $\widetilde{x}_1^0$ del segundo argumento, son localmente lipschitzianas sobre sus respectivos abiertos de definición $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1,, \rangle$, $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle , \widetilde{x}_1^0, \rangle$ y $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle , \widetilde{x}_1^0, \rangle$, con relación a sus segundos argumentos [resp. son continuamente derivables parcialmente sobre sus respectivos abiertos de definición $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle \widetilde{x}_1,, \rangle$, $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle , \widetilde{x}_1^0, \rangle$ y $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \langle , \widetilde{x}_1^0, \rangle$ con relación a sus segundos argumentos]».

I.5 La $(G. \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase $\mathcal{L}$ [resp. la $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{tr.})$-variedad de la clase C^1], asociada a la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, con $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. con $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G]. — Para toda trayectoria maximal $c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ en G de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, denotaremos mediante $\Psi^{(c)} = h_{(G;\varrho)}(c)$ a la única solución maximal en G de $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ cuyo grafo $\Gamma_{\Psi^{(c)}}$ coincide con $\overset{-1}{\iota}(c)$.

Obviamente se tiene:

$$«(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in \overset{-1}{\iota}(c) \Rightarrow \Psi^{(c)} = \Psi_{(\vec{x}^0)})»$$

y además, puesto que:

$$«(\forall c)\ (c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \overset{-1}{\iota}(c) \neq \neq \phi)»$$

y consecuentemente:

$$«\bigsqcap_{c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}} \overset{-1}{\iota}(c) \neq \phi»$$

es válida, por tanto, la relación:

$$«(\exists\, (\vec{x}^{\gamma})_{\gamma \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}})\, ((\vec{x}^{\gamma})_{\gamma \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}} \in \prod_{c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}} \overset{-1}{\iota}(c))»$$

la cual entraña, sucesivamente:

$$«(\forall c)\, (c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \vec{x}^{c} = (x_1^c, x_2^c) \in \overset{-1}{\iota}(c))»$$

y

$$«(\forall c)\, (c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \Rightarrow \overset{-1}{\iota}(c) = \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^c)}} = \Gamma_{\Psi(c)})»$$

Sentado esto, sea $c^* \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$; en virtud de lo precedente, se tiene:

$$«\overset{-1}{\iota}(c^*) = \Gamma_{\Psi_{(\vec{x}^{c^*})}} = \Gamma_{\Psi(c^*)}»$$

Hagamos:

$$«G\langle x_1^{c^*},\rangle = O_{c^*} \text{ y } U_{c^*} = \iota\,(\Omega_{(x_1^{c^*};\, G\langle x_1^{c^*},\rangle)}) = \iota\,(\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\langle x_1^{c^*},,\rangle) =$$
$$= \{c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)} / x_1^{c^*} \in I_{\Psi(c)}\}»$$

En virtud de la PROPOSICION IV de I.3, y puesto que G es un abierto de $\mathbf{R}^2$, es válida la relación:

$$«U_{c^*} \text{ es un abierto de } (\mathscr{C}_{(G;\varrho)}\,;\, \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}) \text{ y } O_{c^*} \text{ es un abierto de } \mathbf{R}» \quad (7)$$

verificándose, además, que:

$$«(\forall c)\, (c \in U_{c^*} \Rightarrow x_1^{c^*} \in I_{\Psi(c)})»$$

así como:

$$«c \in U_{c^*} \Leftrightarrow (\exists\, x_2^0)\, (x_2^0 \in G\langle x_1^{c^*},\rangle \text{ y } c = \iota\,(x_1^{c^*}, x_2^0))» \quad (7^*)$$

relación última, que en particular [dado que $«\vec{x}^{c^*} = (x_1^{c^*}, x_2^{c^*}) \in G$ y y $c^* = \iota\,(\vec{x}^{c^*})»$ y consecuentemente: $«x_2^{c^*} \in G\langle x_1^{c^*},\rangle$ y $c^* = \iota\,(x_1^{c^*}, x_2^{c^*})]»$. entraña:

$$«c^* \in U_{c^*}» \quad (7^{**})$$

Por otro lado se tiene, asimismo, que:

$$«\bigcup_{c \in U_{c^*}} \{\Psi^{(c)}(x_1^{c^*})\} = \bigcup_{x_2^0 \in G\langle x_1^{c^*},\rangle} \{\Psi^{(\iota(x_1^{c^*}, x_2^0))}(x_1^{c^*})\} = \bigcup_{x_2^0 \in G\langle x_1^{c^*},\rangle} \{\Psi_{(x_1^{c^*}, x_2^0)}(x_1^{c^*})\} =$$

$$= \bigcup_{x_2^0 \in G\langle x_1^{c^*},\rangle} \{x_2^0\} = G\langle x_1^{c^*},\rangle» \quad (7^{***})$$

Definamos la aplicación $q_{c^*} : U_{c^*} \to O_{c^*}$, del modo que sigue:

$$«c \in U_{c^*} \to q_{c^*}(c) = \Psi^{(c)}(x_1^{c^*}) \in G\langle x_1^{c^*},\rangle = O_{c^*}»$$

Puesto que:

$$«c \in U_{c^*} \text{ y } q_{c^*}(c) = \Psi^{(c)}(x_1^{c^*}) \Rightarrow [(\Psi^{(c)} = \Psi_{(x_1^{c^*}, q_{c^*}(c))}) \text{ y}$$

$$\text{y } ((x_1^{c^*}, q_{c^*}(c)) \in \overset{-1}{\iota}(c))]»$$

es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\forall c)\ (c \in U_{c^*} \Rightarrow c = \iota(x_1^{c^*}, q_{c^*}(c)))»$$

deduciéndose:

$$«(c, \tilde{c}) \in U_{c^*} \times U_{c^*} \text{ y } q_{c^*}(c) = q_{c^*}(\tilde{c}) \Rightarrow c = \iota(x_1^{c^*}, q_{c^*}(c)) =$$

$$= \iota(x_1^{c^*}, q_{c^*}(\tilde{c})) = \tilde{c}»$$

resultando, por tanto, verificarse:

$$«q_{c^*} \text{ es inyectiva}»$$

Además de (7^{***}) se obtiene la relación válida:

$$«q_{c^*}(U_{c^*}) = \bigcup_{c \in U_{c^*}} \{q_{c^*}(c)\} = \bigcup_{c \in U_{c^*}} \{\Psi^{(c)}(x_1^{c^*})\} = G\langle x_1^{c^*},\rangle = O_{c^*}»$$

la cual implica:

$$«q_{c^*} \text{ es suprayectiva}»$$

por lo que se verifica:

$$«q_{c^*} : U_{c^*} \to O_{c^*} \text{ es una biyección de } U_{c^*} \text{ sobre } O_{c^*}» \quad (8)$$

Por otra parte, si $\omega = \overset{\circ}{\omega} \subset O_{c^*}$ es un abierto de **R** contenido en $O_{c^*} = G\langle x_1^{c^*},\rangle$, dado que se tiene sucesivamente:

$$«c \in \overset{-1}{q_{c^*}}(\omega) \Leftrightarrow q_{c^*}(c) = \Psi^{(c)}(x_1^{c^*}) \in \omega»$$

y

$$«\Psi^{(c)}(x_1^{c^*}) \in \omega \Rightarrow x_2^0 = \Psi^{(c)}(x_1^{c^*}) \in \omega \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^{c^*}, x_2^0) \in \{x_1^{c^*}\} \times \omega \subset \{x_1^{c^*}\} \times G\langle x_1^{c^*},\rangle \subset G \text{ y } \Psi^{(c)} = \Psi_{(x_1^{c^*}, x_2^0)}»$$

y consecuentemente es válida la relación:

$$«c \in \overset{-1}{q_{c^*}}(\omega) \Rightarrow (\exists \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in \{x_1^{c^*}\} \times \omega = (\{x_1^{c^*}\} \times \omega) \cap G \text{ y}$$
$$\text{y } \overset{-1}{\iota}(c) = \Gamma_{\Psi^{(c)}} = \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)})»$$

así como se verifica, además, que:

$$«(\exists \vec{x}^0)\,(\vec{x}^0 \in (\{x_1^{c^*}\} \times \omega) \cap G \text{ y } \overset{-1}{\iota}(c) = \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overset{-1}{\iota}(c) \subset \bigcup_{\vec{x}^0 \in (\{x_1^{c^*}\} \times \omega) \cap G} \Gamma_{\Psi(\vec{x}^0)} = \Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)}»$$

se deduce de todo ello, [habida cuenta que se ha partido del supuesto $c \in \overset{-1}{q_{c^*}}(\omega)$ y que $c \in \overset{-1}{q_{c^*}}(\omega)$ es completamente arbitrario], la validez de la relación:

$$«(\forall c)\,(c \in \overset{-1}{q_{c^*}}(\omega) \Rightarrow \{c\} = \iota(\overset{-1}{\iota}(c)) \subset \iota(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)}))»$$

la cual entraña:

$$«\overset{-1}{q_{c^*}}(\omega) \subset \iota(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)}))» \quad (8^*)$$

Inversamente, supuesto:

$$«c \in \iota(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)}) = \iota((\{x_1^{c^*}\} \times \omega) \cap G) = \iota(\{x_1^{c^*}\} \times \omega)»$$

se verifica, como consecuencia, que:

$$«(\exists\, x_2^0)\ (x_2^0 \in \omega \subset G\, \langle x_1^{c^*}, \rangle\ \text{ y }\ c = \iota\,(x_1^{c^*},\, x_2^0))»$$

resultando, habida cuenta (7*), ser válida la relación:

$$«c \in U_{c^*}\ \text{ y }\ q_{c^*}(c) = \Psi^{(c)}\,(x_1^{c^*}) = \Psi_{(x_1^{c^*},\, x_2^0)}\,(x_1^{c^*}) = x_2^0 \in \omega»$$

la cual entraña:

$$«c \in \overset{-1}{q_{c^*}}\,(\omega)»$$

Así pues y dado que se ha partido del supuesto $c \in \iota\,(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)})$, y que además $c \in \iota\,(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)})$ es completamente arbitrario, se verifica, por tanto, que:

$$«\iota\,(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)}) \subset \overset{-1}{q_{c^*}}\,(\omega)»$$

relación que combinada con (8*) establece:

$$«\overset{-1}{q_{c^*}}\,(\omega) = \iota\,(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)})»$$

y como en virtud de PROPOSICION IV de I.3, es $\iota\,(\Omega_{(x_1^{c^*};\, \omega)})$ un abierto de $(\mathscr{C}_{(G;\,\varrho)}\,;\ \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\,\varrho)}})$, se concluye que es válida la relación:

$$«(\forall\, \omega)\ (\omega \in \mathfrak{P}\,(O_{c^*})\ \text{ y }\ \omega = \mathring{\omega} \Rightarrow \overset{-1}{q_{c^*}}\,(\omega) = \overset{\circ}{\overbrace{\overset{-1}{q_{c^*}}\,(\omega)}})»$$

es decir, se verifica, que:

$$«q_{c^*} : U_{c^*} \to O_{c^*}\ \text{ es continua sobre }\ U_{c^*}» \quad (8^{**})$$

Además, si $A = \mathring{A} \subset U_{c^*}$ es un abierto del espacio topológico $(\mathscr{C}_{(G;\,\varrho)}\,;\ \mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\,\varrho)}})$ contenido en $U_{c^*} = \mathring{U}_{c^*}$, dado que para todo $x_2'^0 \in q_{c^*}(A)$ se verifica (en virtud de la propia definición de la aplicación q_{c^*}), la relación:

$$«(\exists\, c)\ (c \in A\ \text{ y }\ \Psi^{(c)}\,(x_1^{c^*}) = x_2'^0)»$$

la cual entraña, sucesivamente:

$$«\iota\,(x_1^{c^*},\, x_2'^0) \in A»$$

y

$$«(x_1^{c^*},\, x_2'^0) \in \overset{-1}{\iota}\,(\iota\,(x_1^{c^*},\, x_2'^0)) \subset \overset{-1}{\iota}\,(A) = \Omega \subset G \text{ y } \Omega = \overset{\bullet}{\Omega}»$$

y puesto que:

$$«(x_1^{c^*},\, x_2'^0) \in \Omega \subset G \text{ y } \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \Rightarrow x_2'^0 \in \Omega\,\langle x_1^{c^*},\rangle = \overset{\circ}{\overbrace{\Omega\,\langle x_1^{c^*},\rangle}} \subset G\,\langle x_1^{c^*},\rangle»$$

así como:

$$«\Omega\,\langle x_1^{c^*},\rangle = \bigcup_{x_2^0 \in \Omega\langle x_1^{c^*},\rangle} \{x_2^0\} = \bigcup_{x_2^0 \in \Omega\langle x_1^{c^*},\rangle} \{\Psi_{(x_1^{c^*}, x_2^0)}\,(x_1^{c^*})\} = \bigcup_{x_2^0 \in \Omega\langle x_1^{c^*},\rangle} \{\Psi^{(\iota(x_1^{c^*}, x_2^0))}\,(x_1^{c^*})\} =$$

$$= \bigcup_{x_2^0 \in \Omega\langle x_1^{c^*},\rangle} \{q_{c^*}\,(\iota\,(x_1^{c^*},\, x_2^0))\} = q_{c^*}\,(\bigcup_{x_2^0 \in \Omega\langle x_1^{c^*},\rangle} \{\iota\,(x_1^{c^*},\, x_2^0)\}) = q_{c^*}\,(\iota\,(\bigcup_{x_2^0 \in \Omega\langle x_1^{c^*},\rangle} \{(x_1^{c^*},\, x_2^0)\})) =$$

$$= q_{c^*}\,(\iota\,(\{x_1^{c^*}\} \times \Omega\,\langle x_1^{c^*},\rangle)) \subset q_{c^*}\,(\iota\,(\Omega)) = q_{c^*}\,(\iota\,(\overset{-1}{\iota}\,(A))) = q_{c^*}\,(A)»$$

se deduce de todo ello, que es válida la relación:

$$«x_2'^0 \in q_{c^*}\,(A) \Rightarrow x_2'^0 \in \Omega\,\langle x_1^{c^*},\rangle = \overset{\circ}{\overbrace{\Omega\langle x_1^{c^*},\rangle}} \subset q_{c^*}\,(A)»$$

la cual implica:

$$«x_2'^0 \in q_{c^*}\,(A) \Rightarrow x_2'^0 \in \overset{\bullet}{\overbrace{q_{c^*}\,(A)}}»$$

y dada la arbitrariedad de $x_2'^0 \in q_{c^*}(A)$ se verifica, por tanto, que:

$$«\overset{\circ}{\overbrace{q_{c^*}\,(A)}} = q_{c^*}\,(A) \subset q_{c^*}\,(U_{c^*}) = O_{c^*} = \overset{\circ}{O}_{c^*}»$$

Como $A = \overset{\circ}{A} \subset U_{c^*} = \overset{\circ}{U}_{c^*}$ es arbitrario, se concluye que es válida la relación:

$«q_{c^*} : U_{c^*} \to O_{c^*}$ es una aplicación abierta de U_{c^*} sobre $O_{c^*}»$ (8***)

(7), (7**), (8), (8**) y (8***), establecen finalmente, que:

«$q_{c^*} : U_{c^*} \to O_{c^*}$ es un homeomorfismo del entorno abierto U_{c^*} de c^* [dotado U_{c^*} de la topología inducida por la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$], sobre el abierto O_{c^*} de $\mathbf{R}$ [dotado de la topología inducida por la topología usual de $\mathbf{R}$]»

y dada la arbitrariedad de $c^* \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\forall\, c^*)\ (c^* \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\exists_{(U_{c^*}, q_{c^*}, O_{c^*})})\ ((U_{c^*}, q_{c^*}, O_{c^*}) \in$$

$$\in \mathfrak{P}(\mathscr{C}_{(G;\varrho)}) \times \mathcal{F}(U_{c^*}; O_{c^*}) \times \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \text{ y } c^* \in U_{c^*} = \widehat{\overset{\circ}{U}}_{c^*} \text{ y}$$

$$\text{y } O_{c^*} = \widehat{\overset{\circ}{O}}_{c^*} \text{ y } q_{c^*} \text{ es un homeomorfismo de } U_{c^*} \text{ sobre } O_{c^*}))»$$

resultando verificarse, por tanto, que:

«$\mathcal{A} = (U_{c^*}, q_{c^*}, \mathbf{R})_{c^*} \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ es un atlas numérico de la clase C^0 y de dimensión 1 sobre $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ y la topología asociada a $(U_{c^*}, q_{c^*}, \mathbf{R})_{c^* \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ es la $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$» (9)

Además, supuesto $c^* \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ se tiene, según acaba de establecerse, que U_{c^*} es una parte abierta de $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ para la topología $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$, y puesto que $q_{c^*} : U_{c^*} \to q_{c^*}(U_{c^*}) = O_{c^*}$ es un homeomorfismo de U_{c^*} [dotado de la topología inducida por $\mathcal{T}_{\mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$] sobre $q_{c^*}(U_{c^*})$ [dotado de la topología inducida por la topología usual de $\mathbf{R}$], se sigue que la carta $(U_{c^*}, q_{c^*}, \mathbf{R})$ verifica la condición α) de 0.2, y por otra parte, dado que se tiene:

$$«(\forall\, (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))\ ((\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \overset{-1}{\iota}(U_{c^*}) \Rightarrow [\iota(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in U_{c^*} \text{ y}$$

$$\text{y } x_1^{c^*} \in I_{\Psi(\iota(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))} = I_{\Psi(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)}])»$$

lo que entraña:

$$«(\forall\, (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))\ ((\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \overset{-1}{\iota}(U_{c^*}) \Rightarrow (x_1^{c^*}, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)})»$$

así como se verifica, que:

$$«q_{c^*} \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_{c^*})} : \overset{-1}{\iota}(U_{c^*}) \to q_{c^*}(U_{c^*}) \text{ y } (\lambda_{(x_1^{c^*},,)|\overset{-1}{\iota}(U_{c^*})}) : \overset{-1}{\iota}(U_{c^*}) \to q_{c^*}(U_{c^*}) \text{ y}$$

$$y\ (\forall\,(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))\,((\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in \overset{-1}{\iota}(U_{c*}) \Rightarrow (q_{c*} \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_{c*})})\,(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) =$$

$$= q_{c*}(\iota(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)) = \Psi^{(\iota(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))}(x_1^{c*}) = \Psi_{(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)}(x_1^{c*}) =$$

$$= \lambda\,(x_1^{c*}, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) = \lambda_{(x_1^{c*},\,)|\iota^{-1}U_{c*})}(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) = (\widetilde{\lambda_{(x_1^{c*},\,)|\iota^{-1}(U_{c*})}})\,(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0))»$$

y consecuentemente:

$$«q_{c*} \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_{c*})} = (\widetilde{\lambda_{(x_1^{c*},\,)|\iota^{-1}(U_{c*})}})»$$

la aplicación de la PROPOSICION VI de I.4, permite afirmar, que:

$\beta_L)$ $«q_{c*} \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_{c*})} : \overset{-1}{\iota}(U_{c*}) \to q_{c*}(U_{c*})$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U_{c*})»$ [resp. $\beta_{c_2^1})$ $«q_{c*} \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_{c*})} : \overset{-1}{\iota}(U_{c*}) \to$ $\to q_{c*}(U_{c*})$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U_{c*})»]$

Por otro lado, sea $H_{c*} = \bigcup_{s \in q_{c*}(U_{c*})} I_{h(\overset{-1}{q_{c*}}(s))} \times \{s\} = \bigcup_{s \in O_{c*}} I_{\psi(\overset{-1}{q_{c*}}(s))} \times \{s\}$ y sean $\mathcal{T}_{c*} : H_{c*} \to \mathbf{R}$ y $\sigma_{c*} : H_{c*} \to \mathbf{R}$, las aplicaciones numéricas definidas, respectivamente, por:

$$\left\{\begin{array}{c} «(x_1, t) \in H_{c*} \to \mathcal{T}_{c*}(x_1, t) = (h(\overset{-1}{q_{c*}}(t)))\,(x_1) = \Psi^{(\overset{-1}{q_{c*}}(t))}(x_1) \in \mathbf{R}» \\ \text{y} \\ «(x_1, t) \in H_{c*} \to \sigma_{c*}(x_1, t) = (h(\overset{-1}{q_{c*}}(t)))'\,(x_1) = (\Psi^{(\overset{-1}{q_{c*}}(t))})'\,(x_1) \in \mathbf{R}» \end{array}\right\}$$

Es válida la relación:

$\gamma_L)$ y $\delta_L)$ $«H_{c*}$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ y las aplicaciones $\mathcal{T}_{c*}$ y σ_{c*} son localmente lipschitzianas respecto a sus segundos argumentos sobre $H_{c*}»$ [resp. $\gamma_{c_2^1})$ y $\delta_{c_2^1})$ $«H_{c*}$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ y $\mathcal{T}_{c*}$ y σ_{c*} son continuamente derivables parcialmente respecto a sus segundos argumentos sobre $H_{c*}»]$

En efecto, supuesto $(x_1^0, t^0) \in H_{c*} = \bigcup_{s \in O_{c*}} I_{\psi(\overset{-1}{q_{c*}}(s))} \times \{s\}$ se tiene, que:

$$«\Psi^{(\overset{-1}{q_{c*}}(t_0))}(x_1^{c*}) = q_{c*}(\overset{-1}{q_{c*}}(t^0)) = t^0 \in O_{c*} \text{ y } x_1^0 \in I_{\psi(\overset{-1}{q_{c*}}(t^0))}»$$

lo que entraña:

$$«(x_1^{c^*}, t^0) \in G \text{ y } x_1^0 \in I_{\Psi(\overset{-1}{q_{c^*}}(t^0))} = I_{\Psi_{(x_1^{c^*}, t^0)}}»$$

resultando:

$$«(x_1^0, x_1^{c^*}, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}»$$

o lo que es equivalente:

$$«(x_1^0, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle»$$

Así pues, se verifica:

$$«(x_1^0, t^0) \in H_{c^*} \Rightarrow (x_1^0, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle»$$

y como $(x_1^0, t^0) \in H_{c^*}$ es completamente arbitrario, se obtiene que es válida la relación:

$$«H_{c^*} \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*} \rangle» \quad (9^*)$$

Inversamente, sea $(x_1^0, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle$. Se tiene sucesivamente:

$$«(x_1^0, x_1^{c^*}, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}»$$

y

$$«(x_1^{c^*}, t^0) \in G \text{ y } x_1^0 \in I_{\Psi_{(x_1^{c^*}, t^0))}} = I_{\Psi(\iota(x_1^{c^*}, t^0))} \text{ y } t^0 = \Psi_{(x_1^{c^*}, t^0)}(x_1^{c^*}) =$$

$$= \Psi^{(\iota(x_1^{c^*}, t^0))}(x_1^{c^*}) = q_{c^*}(\iota(x_1^{c^*}, t^0))»$$

y

$$«t^0 \in G\langle x_1^{c^*}, \rangle = O_{c^*} \text{ y } \iota(x_1^{c^*}, t^0) = \overset{-1}{q_{c^*}}(t^0) \text{ y } x_1^0 \in I_{\Psi(\overset{-1}{q_{c^*}}(t^0))}»$$

resultando:

$$«(x_1^0, t^0) \in \bigcup_{s \in O_{c^*}} I_{\Psi(\overset{-1}{q_{c^*}}(s))} \times \{s\} = H_{c^*}»$$

es decir, es válida la relación:

$$«(x_1^0, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \Rightarrow (x_1^0, t^0) \in H_{c^*}»$$

y dada la arbitrariedad de $(x_1^0, t^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle$, se verifica, por tanto, que:

$$«\mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \subset H_{c^*}»$$

relación que combinada con (9*) establece:

$$«H_{c^*} = \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \text{ es un abierto de } \mathbf{R}^2»$$

Además se tiene que:

$$«\mathcal{T}_{c^*} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \to \mathbf{R} \text{ y } \lambda_{(, x_1^{c^*},)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \to \mathbf{R} \text{ y}$$

$$\text{y } \sigma_{c^*} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \to \mathbf{R} \text{ y } (D_1 \lambda)_{(, x_1^{c^*},)} : \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \to \mathbf{R} \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall (x_1, t)) \left((x_1, t) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \langle , x_1^{c^*}, \rangle \Rightarrow \left[\left(\mathcal{T}_{c^*}(x_1, t) = \Psi^{(\overset{-1}{q_{c^*}}(t))}(x_1) = \right.\right.\right.$$

$$= \Psi^{(\iota(x_1^{c^*}, q_{c^*}(\overset{-1}{q_{c^*}}(t))))}(x_1) = \Psi^{(\iota(x_1^{c^*}, t))}(x_1) = \Psi_{(x_1^{c^*}, t)}(x_1) = \lambda(x_1, x_1^{c^*}, t) =$$

$$= \lambda_{(, x_1^{c^*},)}(x_1, t)\Big) \text{ y } \Big(\sigma_{c^*}(x_1, t) = \big(\Psi^{(\overset{-1}{q_{c^*}}(t))}\big)'(x_1) = \big(\Psi^{(\iota(x_1^{c^*}, t))}\big)'(x_1) =$$

$$\left.\left.\left. = \Psi'_{(x_1^{c^*}, t)}(x_1) = (D_1 \lambda)(x_1, x_1^{c^*}, t) = (D_1 \lambda)_{(, x_1^{c^*},)}(x_1, t)\right)\right]\right)»$$

lo que entraña:

$$«\mathcal{T}_{c^*} = \lambda_{(, x_1^{c^*},)} \quad \text{y} \quad \sigma_{c^*} = (D_1 \lambda)_{(, x_1^{c^*},)}»$$

relación que, habida cuenta la PROPOSICION VI de I.4, concluye la demostración de lo afirmado más arriba.

Combinado (9) con los resultados acabados de establecer válidos para todo $c^* \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ [teniendo en cuenta además (1***) de 1.2], se puede afirmar que:

«$\mathcal{A} = (U_c, q_c, \mathbf{R})_{c \in \mathscr{C}_{(G;\varrho)}}$ es un atlas sobre la $C^1_{\text{tray.}}$-partición (c.l.a. Fr.) $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$ [resp. del tipo $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$]»

Así pues se verifica la relación:

«$G = \overset{\circ}{G} \subset \mathbf{R}^2$ y $\varrho \in C_0(G; \mathbf{R})$ y ϱ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G (resp. ϱ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G) $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\mathscr{C}_{(G:\varrho)} \in \mathcal{P}_G^{C^1_{\text{tr.}}\,(\text{c. l. a. Fr.})}$ y $(\exists\, \mathcal{A})\,(\mathcal{A} \in \mathcal{G}_{(\mathcal{L})}\,(\mathscr{C}_{(G:\varrho)})$ y $\mathcal{A}$ es un atlas numérico de dimensión 1 y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$ (resp. $\mathcal{A} \in \mathcal{G}_{(C^1_2)}\,(\mathscr{C}_{(G:\varrho)})$ y y $\mathcal{A}$ es un atlas numérico de dimensión 1 y del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})))]$»

lo que permite enunciar el:

TEOREMA FUNDAMENTAL (1). — «Para toda función numérica $\varrho : G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida y continua sobre G, que además es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, [resp. continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], se verifica que el conjunto $\mathscr{C}_{(G:\varrho)}$ de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$ es una partición de G en la que el límite accesible por la izquierda y el límite accesible por la derecha (caso de que existan) de cada trayectoria maximal en G de la referida ecuación diferencial, pertenecen a la frontera de G, estando asimismo dotada $\mathscr{C}_{(G:\varrho)}$ de una estructura de $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-variedad de la clase $\mathcal{L}$ y de dimensión 1, [resp. de una estructura de $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})$-variedad de la clase C^1 y de dimensión 1]».

PARTE SEGUNDA

LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMER ORDEN ASOCIADA A TODA $C^1_{tray.}$-PARTICION (c. l. a. Fr.) DEL ABIERTO G DE $\mathbf{R}^2$ DOTADA DE UNA ESTRUCTURA DE $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-VARIEDAD [resp. $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-VARIEDAD].

II.1 ATLAS DEL TIPO $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$ [resp. DEL TIPO $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$] DADOS SOBRE $C^1_{tray.}$-PARTICIONES DE UN ABIERTO G DE $\mathbf{R}^2$. — Sea $G = \overset{\circ}{G} \subset \mathbf{R}^2$ un abierto de $\mathbf{R}^2$ y sea $P \in \mathcal{P}^{C^1_{tr.}}_G$ una $C^1_{tray.}$-partición de G; denotamos, como hasta ahora, mediante $\iota : G \to G/\mathcal{R}_P = P$, y mediante $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_G/\mathcal{R}_P$, respectivamente, la aplicación canónica de G sobre el cociente de G por la relación de equivalencia $\mathcal{R}_P$ asociada a la partición P, y la topología cociente de la topología $\mathcal{T}_G$ de G [inducida por la topología de $\mathbf{R}^2$ generada por la norma euclídea], por la relación de equivalencia $\mathcal{R}_P$, y consideremos una carta numérica $(U, \chi, \mathbf{R})$ sobre P. Por definición diremos que «$(U, \chi, \mathbf{R})$ es una carta numérica del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$» [resp. «$(U, \chi, \mathbf{R})$ es una carta numérica del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$»], si sólo si se verifican estas condiciones:

α^*) «U es una parte abierta de P para la topología $\mathcal{T}_P$ y la topología inducida por $\mathcal{T}_P$ sobre $U \subset P$ es más fina que la topología sobre U imagen recíproca mediante la biyección χ de la topología inducida sobre el abierto $\chi(U)$ de $\mathbf{R}$ por la topología usual de $\mathbf{R}$».

$\beta_{\mathcal{L}}$) «$\chi \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U)} : \overset{-1}{\iota}(U) \subset G \to \chi(U)$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre el abierto $\overset{-1}{\iota}(U) \subset G$ de $\mathbf{R}^2$ [resp. $\beta_{C^1_2}$) $\chi \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U)} : \overset{-1}{\iota}(U) \subset G \to \chi(U)$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U)$]».

$\delta^*_{\mathcal{L}}$) «La aplicación numérica $\sigma : H = \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por: $(x_1, t) \in H \to \sigma(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))'(x_1) \in \mathbf{R}$, es localmente lipschitziana sobre H [resp. $\delta_{c^1_2}$), el conjunto $H = \bigcup_{s \in \chi(U)} I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\}$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$ y la aplicación $\sigma : H = \overset{\circ}{H} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $(x_1, t) \in H \to \sigma(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))'(x_1) \in \mathbf{R}$, es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre H]».

Obviamente toda carta numérica $(U, \chi, \mathbf{R})$ sobre P del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, P^{\text{tr.}}_G)$] es a fortiori del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$].

En virtud de OBSERVACION I de 0.2, para toda carta numérica $(U, \chi, \mathbf{R})$ sobre P del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$], la correspondiente aplicación numérica $\sigma : H \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre H [resp. $\sigma : H = \overset{\circ}{H} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto H].

Si $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j \in J}$ es un atlas numérico de dimensión 1 sobre P, se dirá que «$\mathcal{A}$ es un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$]» si sólo si para todo $j \in J$, la carta $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ es del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ [resp. la carta $(U_j, \chi_j, \mathbf{R})$ es del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$].

Es inmediato verificar que para todo atlas numérico $\mathcal{A}$ de dimensión 1 sobre la $C^{\text{tray.}}_1$-partición P de G del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ y además de la clase C° [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ y además de la clase C°], la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ asociada al atlas $\mathcal{A}$ es menos fina que la topología $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_G / \mathcal{R}_P$, y consecuentemente, la aplicación canónica $\iota : G \to G/\mathcal{R}_P = P$ es continua sobre G, supuesto dotado G de la topología $\mathcal{T}_G$ y P de la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ asociada al atlas $\mathcal{A}$ dado.

Por otro lado, obviamente, todo atlas numérico de dimensión 1 sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$, [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)$], es, a fortiori, un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ que además es de la clase $\mathcal{L}$ (PROPOSICION II de 0.2), [resp. es un atlas del tipo $(G, C^1_2, P^{\text{tr.}}_G)^*$ que además es de la clase C^1 (PROPOSICION II de 0.2)].

II.2 Ecuación diferencial ordinaria de primer orden definida por un atlas numérico de dimensión 1 de la clase C° y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{\text{tr.}}_G)^*$ [resp. de la clase C° y del tipo $(G, C^1_2, P^{\text{tr.}}_G)^*$]

DADO SOBRE UNA $C^1_{\text{tray.}}$-PARTICIÓN (c.l.a. Fr.) DE UN ABIERTO G DE $\mathbf{R}^2$. — Sean $G = \overset{\circ}{G}$ un abierto de $\mathbf{R}^2$, $P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{\text{tr.}}(\text{c.l.a.Fr.})}$ una $C^1_{\text{tray.}}$-partición (c.l.a. Fr.) de G y $\mathcal{A} = (U_j, \chi_j, \mathbf{R})_{j \in J}$ un atlas numérico de la clase C°, de dimensión 1 y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})^*$ [resp. de la clase C°, de dimensión 1 y del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})^*$], dado sobre P. Para todo $j \in J$, consideremos la función numérica $\varrho_j : \overset{-1}{\iota}(U_j) \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ restricción a $\overset{-1}{\iota}(U_j)$ de la función $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definida por:

$$«(x_1, x_2) \in G \to \varrho(x_1, x_2) = (h(\iota(x_1, x_2)))'(x_1) \in \mathbf{R}»$$

Puesto que, [en donde $i : \chi_j(U_j) \to \mathbf{R}$ denota la inyección canónica de $\chi_j(U_j) \subset \mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, y habida cuenta, además que para todo $(x_1, x_2) \in G$ se tiene: $x_1 \in I_{h(\iota(x_1, x_2))}$], se verifica:

$$«Im\,(pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)}) = \bigcup_{(x_1, x_2) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)} \{(x_1, \chi_j(\iota(x_1, x_2)))\} \subset \bigcup_{(x_1, x_2) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)} I_{h(\iota(x_1, x_2))} \times$$

$$\times \{\chi_j(\iota(x_1, x_2))\} = \bigcup_{c \in U_j} I_{h(c)} \times \{\chi_j(c)\} = \bigcup_{s \in \chi(U_j)} I_{h(\overset{-1}{\chi_j}(s))} \times \{s\} = H_j»$$

la aplicación $(pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)}) : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R}^2$ es, por tanto, componible con la aplicación $\sigma_j : H_j \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, [denotando $\sigma_j : H_j \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ (como en el n.º II.1) la función numérica definida por:

$$(x_1, t) \in H_j = \bigcup_{s \in \chi_j(U_j)} I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} \to \sigma_j(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi_j}(t)))'(x_1) \in \mathbf{R}],$$

resultando ser válida, además, la relación:

$$«\sigma_j \circ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)}) : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R} \text{ y } \varrho_j : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R} \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall (x_1, x_2))\,((x_1, x_2) \in \overset{-1}{\iota}(U_j) \Rightarrow (\sigma_j \circ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)}))\,(x_1, x_2) =$$

$$= \sigma_j(x_1, \chi_j(\iota(x_1, x_2))) = (h(\overset{-1}{\chi_j}(\chi_j(\iota(x_1, x_2)))))'(x_1) =$$

$$= (h(\iota(x_1, x_2)))'(x_1) = \varrho_j(x_1, x_2))»$$

la cual entraña:

$$«\varrho_j = \sigma_j \circ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})»$$

deduciéndose de esta última relación [habida cuenta (n.º II.1), que $\sigma_j : H_j \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es continua sobre H_j así como la continuidad de $i : \chi_j(U_j) \to \mathbf{R}$, de $\chi_j : U_j \to \chi_j(U_j)$ y de $\iota : G \to P$ sobre $\chi_j(U_j)$, U_j y G, respectivamente], que $\varrho_j : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R}$ es continua sobre $\overset{-1}{\iota}(U_j)$.

Por otro lado, supuesto que el atlas $\mathcal{A}$ dado sea de la clase C° y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\mathrm{tr.}})^*$, para todo $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$, y en virtud de $\beta_{\mathcal{L}})$ y $\delta_{\mathcal{L}}^*)$, existen, en primer lugar, un $(\tilde{k}, k^*) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, y dos entornos $\tilde{V}$ y V^* en $\mathbf{R}^2$, respectivamente de $\vec{x}^0 \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$ y de $(x_1^0\ \chi_j(\iota(\vec{x}^0))) \in H_j$, tales que:

$$«(\forall\, (x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\ ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ \text{ y } \ (x_1, \bar{x}_2) \in \tilde{V} \cap \overset{-1}{\iota}(U_j) \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in \tilde{V} \cap \overset{-1}{\iota}(U_j) \Rightarrow |\chi_j(\iota(x_1, \bar{x}_2)) - \chi_j(\iota(x_1, \bar{\bar{x}}_2))| =$$
$$= |(\chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})(x_1, \bar{x}_2) - (\chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant \tilde{k} \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)» \quad (^1)$$

y

$$«(\forall\, (y_1, \bar{t}, \bar{\bar{t}}))\ ((y_1, \bar{t}, \bar{\bar{t}}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ \text{ y } \ (y_1, \bar{t}) \in V^* \cap H_j \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ (y_1, \bar{\bar{t}}) \in V^* \cap H_j \Rightarrow |\sigma_j(y_1, \bar{t}) - \sigma_j(y_1, \bar{\bar{t}})| \leqslant k^* \cdot |\bar{t} - \bar{\bar{t}}|) \quad (^{1*})$$

así como, y en virtud de la continuidad de la aplicación $(pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)}) : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R}^2$ sobre $\overset{-1}{\iota}(U_j)$ [y dado que además es $(pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})(\vec{x}^0) = (x_0^1, \chi_j(\iota(\vec{x}^0))) \in V^*$], existe un entorno $\tilde{\tilde{V}}$ del punto $\vec{x}^0 \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$, tal que:

$$«(pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})(\tilde{\tilde{V}} \cap \overset{-1}{\iota}(U_j)) \subset V^* \cap H_j» \quad (^{1**})$$

Haciendo $V = \tilde{V} \cap \tilde{\tilde{V}}$ y $k = \tilde{k} \cdot k^* \in \mathbf{R}^+$, se deducen de $(^1)$, $(^{1*})$ y $(^{1**})$, sucesivamente, las relaciones:

$$«(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ \text{ y } \ (x_1, \bar{x}_2) \in V \cap \overset{-1}{\iota}(U_j) \ \text{ y } \ (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in V \cap \overset{-1}{\iota}(U_j) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\,|\chi_j(\iota(x_1, \bar{x}_2)) - \chi_j(\iota(x_1, \bar{\bar{x}}_2))| \leqslant \tilde{k} \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| \ \text{ y } \ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)},$$
$$, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})(x_1, \bar{x}_2) = (x_1, \chi_j(\iota(x_1, \bar{x}_2))) \in V^* \cap H_j \ \text{ y }$$
$$\text{y } \ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota_{|\overset{-1}{\iota}(U_j)})(x_1, \bar{\bar{x}}_2) = (x_1, \chi_j(\iota(x_1, \bar{\bar{x}}_2))) \in V^* \cap H_j \ \text{ y }$$

$$y\ |\sigma_j(x_1, \chi_j(\iota(x_1, \bar{x}_2))) - \sigma_j(x_1, \chi_j(\iota(x_1, \bar{\bar{x}}_2)))| \leqslant k^* \cdot |\chi_j(\iota(x_1, \bar{x}_2)) -$$
$$- \chi_j(\iota(x_1, \bar{\bar{x}}_2))| \leqslant k^* \cdot \tilde{k} \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| = k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|]»$$

y

$$«|\varrho_j(x_1, \bar{x}_2) - \varrho_j(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| = |\sigma_j \circ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})(x_1, \bar{x}_2) -$$
$$- \sigma_j \circ (pr_{1|\overset{-1}{\iota}(U_j)}, i \circ \chi \circ_j \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| = |\sigma_j(x_1, \chi_j(\iota(x_1, \bar{x}_2))) -$$
$$- \sigma_j(x_1, \iota(\chi_j(\iota(x_1, \bar{\bar{x}}_2)))| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|»$$

por lo que para todo $\vec{x}^0 \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$ existe un $k \in \mathbf{R}^+$ y un entorno V de $\vec{x}^0$, tales que:

$$«(\forall (x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}\ \text{ y }\ (x_1, \bar{x}_2) \in V \cap \overset{-1}{\iota}(U_j)\ \text{ y}$$
$$\text{y }\ (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in V \cap \overset{-1}{\iota}(U_j) \Rightarrow |\varrho_j(x_1, \bar{x}_2) - \varrho_j(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)»$$

resultado que demuestra la local lipschitzianidad respecto a su segundo argumento de la función numérica $\varrho_j : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R}$.

En el supuesto ahora, de que el atlas $\mathcal{A}$ dado sea de la clase C° y del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr}_G)^*$, se tiene, en virtud de $\beta_{C^1_2})$ y $\delta_{C^1_2})$ que las aplicaciones $\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)} : \overset{-1}{\iota}(U_j) \subset \mathbf{R}^2 \to \chi_j(U_j)$ y $\sigma_j : H_j = \overset{\circ}{H}_j \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ son continuamente derivables parcialmente respecto a sus segundos argumentos sobre sus respectivos abiertos de definición $\overset{-1}{\iota}(U_j)$ y H_j, lo que entraña que para todo $(x^0_1, x^0_2) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$ y todo $(y^0_1, t^0) \in H_j$, las aplicaciones parciales $(\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x^0_1,)} : (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x^0_1, \rangle \subset \mathbf{R} \to \chi_j(U_j)$ y y $(\sigma_j)_{(y^0_1,)} : H_j \langle y^0_1, \rangle \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ determinadas, respectivamente, por $\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)}$ y σ_j relativamente la primera al valor x^0_1 de su primer argumento y la segunda al valor y^0_1 de su primer argumento, son derivables en $x^0_2 \in (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x^0_1, \rangle = \overset{\circ}{\widehat{(\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x^0_1, \rangle}}$ y en $t^0 \in H_j \langle y^0_1, \rangle = \overset{\circ}{\widehat{H_j \langle y^0_1, \rangle}}$, respectivamente, verificándose, asimismo, que: $((\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x^0_1,)})'(x^0_2) = (D_2(\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)}))(x^0_1, x^0_2)$ y $((\sigma_j)_{(y^0_1,)})'(t^0) = (D_2\sigma_j)(y^0_1, t^0)$, así como que $D_2(\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)}) \in C^\circ(\overset{-1}{\iota}(U_j); \mathbf{R})$ y $D_2\sigma_j \in C^\circ(H_j; \mathbf{R})$, y puesto que, por otra parte, cualquiera sea $(x^0_1, x^0_2) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$, son válidas sucesivamente, las relaciones:

$$«\{x_1^0\} \times ((\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)} ((\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle) = \{x_1^0\} \times \chi_j (\iota (\{x_1^0\} \times$$

$$\times ((\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle)) \subset \bigcup_{(z_1, z_2) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)} \{(z_1, \chi_j (\iota (z_1, z_2)))\} = Im\, (pr_1{}_{|\iota(U_j)}^{-1},$$

$$, i \circ \chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)}) \subset H_j»$$

y

$$«(\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0)} ((\iota (U_j)) \langle x_1^0, \rangle) \subset H_j \langle x_1^0, \rangle$$

y consecuentemente son componibles las aplicaciones parciales:

$$\left\{ \begin{array}{c} (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)} : (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle \to \chi_j (U_j) \\ \text{y} \\ (\sigma_j)_{(x_1^0,)} : H_j \langle x_1^0, \rangle \to \mathbf{R} \end{array} \right\}$$

y además se verifica, que:

$$«(\sigma_j)_{(x_1^0,)} \circ (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)} : (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle \to \mathbf{R} \text{ y } (\varrho_j)_{(x_1^0,)} : (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle \to \mathbf{R} \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall x_2)\, (x_2 \in (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle \Rightarrow ((\sigma_j)_{(x_1^0,)} \circ (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)})\, (x_2) =$$

$$= \sigma_j (x_1^0, (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})\, (x_1^0, x_2)) = (\sigma_j \circ (pr_1{}_{|\iota(U_j)}^{-1},$$

$$, i \circ \chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)}))\, (x_1^0, x_2) = \varrho_j (x_1^0, x_2) = (\varrho_j)_{(x_1^0,)} (x_2))»$$

obteniéndose:

$$«x_2^0 \in \overbrace{(\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle}^{\circ} \text{ y } (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)} (x_1^0) \in \overbrace{H_j \langle x_1^0, \rangle}^{\circ} \text{ y}$$

$$\text{y } (\sigma_j)_{(x_1^0,)} \circ (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)} = (\varrho_j)_{(x_1^0,)} »$$

se deduce de todo ello la validez de la relación:

$$«(\varrho_j)_{(x_1^0,)} \text{ es derivable en } x_2^0 \in (\overset{-1}{\iota}(U_j)) \langle x_1^0, \rangle \text{ y } ((\varrho_j)_{(x_1^0,)})'\, (x_2^0) =$$

$$= ((\sigma_j)_{(x_1^0,)})'\, ((\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)} (x_2^0)) \cdot ((\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})_{(x_1^0,)})'\, (x_2^0)»$$

equivalente a la:

«ϱ_j es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento en

$$(x_1^0, x_2^0) \text{ y } (D_2 \varrho_j)(x_1^0, x_2^0) = (D_2 \sigma_j)((\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})(x_1^0, x_2^0)) \cdot$$
$$\cdot (D_2 (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)}))(x_1^0, x_2^0) = (((D_2 \sigma_j) \circ (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})) \cdot$$
$$\cdot (D_2 (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})))(x_1^0, x_2^0)»$$

y dada la arbitrariedad de $(x_1^0, x_2^0) \in \overset{-1}{\iota}(U_j)$, se puede poner:

«ϱ_j es derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U_j)$ y $D_2 \varrho_j = ((D_2 \sigma_j) \circ (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})) \cdot (D_2 (\chi_j \circ \iota^{-1}_{|\iota(U_j)})) \in C^0(\overset{-1}{\iota}(U_j)\,;\,\mathbf{R})$»

relación que demuestra, finalmente, que en el supuesto de ser el atlas $\mathcal{A}$ de la clase C° y del tipo $(G, C_2^1, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})^*$, la función numérica $\varrho_j : \overset{-1}{\iota}(U_j) \to \mathbf{R}$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U_j)$.

Combinando este resultado con el anterior [correspondiente al supuesto «el atlas $\mathcal{A}$ es de la clase C° y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}_G^{\text{tr.}})^*$»], y habida cuenta además la arbitrariedad de $j \in J$, se obtiene la validez de la relación:

«$(\forall j)\,(j \in J \Rightarrow [\varrho_j : \overset{-1}{\iota}(U) \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U_j)$ (resp. ϱ_j es continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre $\overset{-1}{\iota}(U_j))])$» (1^{***})

Teniendo en cuenta (1^{***}) así como que $(\overset{-1}{\iota}(U_j))_{j\in J}$ es un recubrimiento abierto de G, y que para todo $j \in J$ es ϱ_j la restricción de ϱ a $\overset{-1}{\iota}(U_j)$ se concluye que es válida la relación:

«la función numérica $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por: $(x_1, x_2) \in G \to \to \varrho(x_1, x_2) = (h(\iota(x_1, x_2)))'(x_1) \in \mathbf{R}$, es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. es continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G]»

Por otra parte, para todo $\pi \in P$ si $\varphi_\pi = h(\pi) \in C_G^1$ es la función numérica definida y continuamente derivable sobre el intervalo abierto I_{φ_π} de $\mathbf{R}$ cuyo grafo Γ_{φ_π} coincide con $\overset{-1}{\iota}(\pi)$, se verifica, en virtud de la propia definición de $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, [habida cuenta, además que para todo $x_1 \in I_{\varphi_\pi}$ se tiene: «$(x_1, \varphi_\pi(x_1)) \in G$ y $\pi = \iota(x_1, \varphi_\pi(x_1))$»], que:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in I_{\varphi_\pi} \Rightarrow \varphi'_\pi(x_1) = (h(\pi))'(x_1) =$$
$$= (h(\iota(x_1, \varphi_\pi(x_1))))'(x_1) = \varrho(x_1, \varphi_\pi(x_1)))»$$

por lo que para toda trayectoria $\pi \in P$ la correspondiente función numérica $h(\pi) = \varphi : I_\varphi = \mathring{I}_\varphi \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria de 1.^{er} orden: $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ (2)

y si $\vec{x}^0 \in \Gamma_\varphi \neq \phi$, e indicamos como habitualmente, mediante $\Psi_{(\vec{x}^0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\to \mathbf{R}$ a la solución maximal en G de (2) pasando por, $\vec{x}^0$ se, verifica, por tanto, que:

$$«I_\varphi \subset]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\ \text{ y } \ \varphi = \Psi_{(\vec{x}^0)|I_\varphi}$$

o lo que es equivalente:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}^0) \leqslant \inf(I_\varphi) < \sup(I_\varphi) \leqslant x_1^{der}(\vec{x}^0) \ \text{ y } \ \varphi = \Psi_{(\vec{x}^0)|I_\varphi}»$$

Suponiendo sea cierta la relación:

$$«\sup(I_\varphi) \neq x_1^{der}(\vec{x}^0)»$$

se tendrá como consecuencia de la relación precedente, que:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}^0) < \sup(I_\varphi) < x_1^{der}(\vec{x}^0) \ \text{ y } \ \varphi = \Psi_{(\vec{x}^0)|I_\varphi}»$$

es decir:

$$«\sup(I_\varphi) \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\ \text{ y } \ \varphi = \Psi_{(\vec{x}^0)|I_\varphi}»$$

lo que entraña:

«$\varphi = \Psi_{(\vec{x}0)|I_\varphi}$ y $(\sup (I_\varphi), \Psi_{(\vec{x}0)} (\sup (I_\varphi))) \in G$ y $\sup (I_\varphi) < +\infty$ y Existe $\Psi_{(\vec{x}0)|I_\varphi} (\sup (I_\varphi) - 0)$ y $\Psi_{(\vec{x}0)|I_\varphi} (\sup (I_\varphi) - 0) = \Psi_{(\vec{x}0)} (\sup (I_\varphi))$»

resultando, pues, ser válida la relación:

$$«(\sup (I_\varphi), \Psi_{(\vec{x}0)} (\sup (I_\varphi))) \in G \text{ y } \sup (I_\varphi) < +\infty \text{ y}$$
$$\text{Existe } \varphi (\sup (I_\varphi) - 0) \text{ y } \varphi (\sup (I_\varphi) - 0) = \Psi_{(\vec{x}0)} (\sup (I_\varphi))»$$

de la cual se deduce:

$$«\sup (I_\varphi) < +\infty \text{ y Existe } \varphi (\sup (I_\varphi) - 0) \text{ y}$$
$$\text{y } (\sup (I_\varphi), \varphi (\sup (I_\varphi) - 0)) \in G»$$

y esta última relación, como consecuencia de la hipótesis «$P \in \mathcal{P}_G^{C^1_{tr.}}$ es una C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) de G» entraña, que:

$$«(\sup (I_\varphi), \varphi (\sup (I_\varphi) - 0)) \in \text{Fr. } G \text{ y}$$
$$\text{y } (\sup (I_\varphi), \varphi (\sup (I_\varphi) - 0)) \in G»$$

resultado manifiestamente absurdo.

Puesto que la contradicción obtenida proviene de haber supuesto «$\sup (I_\varphi) \neq x_1^{der} (\vec{x}0)$», debe por tanto, verificarse:

$$«\sup (I_\varphi) = x_1^{der} (\vec{x}0)»$$

De modo enteramente análogo se establecería la validez de la relación:

$$«\inf (I_\varphi) = x_1^{izq} (\vec{x}0)»$$

deduciéndose de todo ello, que:

$$«I_\varphi =]x_1^{izq} (\vec{x}0), x_1^{der} (\vec{x}0)[= I_{\Psi_{(\vec{x}0)}} \text{ y } \varphi = \Psi_{(\vec{x}0)|I_\varphi} = \Psi_{(\vec{x}0)}»$$

y dada la arbitrariedad de $\varphi \in h(P)$, así como de $\vec{x}0 \in \Gamma_\varphi$, se puede poner:

$$«(\forall \varphi) (\varphi \in h(P) \Rightarrow (\forall \vec{x}0) (\vec{x}0 \in \Gamma_\varphi \Rightarrow \varphi = \Psi_{(\vec{x}0)}))»$$

o lo que es equivalente:

$$«(\forall\, \pi)\, (\pi \in P \Rightarrow (\forall\, \vec{x}^0)\, (\vec{x}^0 \in \overset{-1}{\iota}(\pi) \Rightarrow h(\pi) = \Psi_{(\vec{x}^0)}))» \quad (2^*)$$

Así pues para todo $\pi \in P$, la correspondiente función numérica $h(\pi)$ es solución maximal en G de la ecuación diferencial ordinaria (2).

Inversamente, dada una solución Ψ maximal en G de (2), elegido un $\vec{x}^0 \in \Gamma_\Psi \neq \phi$, poniendo $\pi = \iota(\vec{x}^0) \in P$, se verifica, como consecuencia de (2^*), que $\Psi = h(\pi)$.

Combinando ambos resultados, se concluye que es válida la relación:

$$«h(P) = \mathscr{S}_{(G:\varrho)}»$$

equivalente a la:

$$«P = \mathscr{C}_{(G:\varrho)} = \overset{-1}{h}(\mathscr{S}_{(G:\varrho)})»$$

es decir, a toda $C^1_{tray.}$-partición (c.l.a. Fr.) P de G y a todo atlas numérico de dimensión 1 de la clase $C°$ y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$ [resp. de la clase $C°$ y del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$] dado sobre P, está asociada una función numérica $\varrho : G \to \mathbf{R}$ definida y continua sobre G que además es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], tal que P coincide con el conjunto $\mathscr{C}_{(G:\varrho)}$ de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$.

Si $\varrho^* : G \to \mathbf{R}$ es otra función numérica definida y continua sobre G y que además es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, y se supone que $P = \mathscr{C}_{(G:\varrho^*)}$, puesto que entonces se verificaría:

$$«\mathscr{S}_{(G:\varrho)} = h(P) = \mathscr{S}_{(G:\varrho^*)}»$$

y consecuentemente, para todo $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G$, la solución maximal $\Psi_{(\vec{y})}$ en G de la ecuación diferencial $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, pasando por $\vec{y}$, es asimismo solución maximal en G de la ecuación diferencial

$\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho^* (x_1, x_2)$, pasando por $\vec{y}$, y dado que se tiene $y_1 \in I_{\Psi_{(\vec{y})}}$, así como que $y_2 = \Psi_{(\vec{y})} (y_1)$, todo lo cual entraña:

$$«\varrho (y_1, y_2) = \varrho (y_1, \Psi_{(\vec{y})} (y_1)) = \Psi_{(\vec{y})}' (y_1) =$$
$$= \varrho^* (y_1, \Psi_{(\vec{y})} (y_1)) = \varrho^* (y_1, y_2)»$$

se sigue de todo ello [habida cuenta, además, la arbitrariedad de $y \in G$], que es válida la relación:

$$«\varrho : G \to \mathbf{R} \ \text{ y } \ \varrho^* : G \to \mathbf{R} \ \text{ y } \ (\forall \vec{y}) \ (\vec{y} \in G \Rightarrow \varrho (\vec{y}) = \varrho^* (\vec{y}))»$$

equivalente a:

$$«\varrho = \varrho^*»$$

Teniendo en cuenta los resultados acabados de establecer se puede enunciar la:

PROPOSICIÓN I. — «A todo abierto G de $\mathbf{R}^2$ y a toda C^1_{tray}-partición (c.l.a.Fr.) P de G, y cualquiera que sea el atlas numérico de dimensión 1 de la clase C° y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$ [resp. del tipo $(G, C_{12}, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$], dado sobre P, está asociada una única función numérica $\varrho : G \to \mathbf{R}$ definida, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, [resp. definida, continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], tal que P coincide con el conjunto $\mathscr{C}_{(G:\varrho)}$ de trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria y de 1.er orden: $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho (x_1, x_2)$».

Puesto que todo atlas numérico de dimensión 1 y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$ [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$] es, a fortiori, un atlas numérico de dimensión 1 de la clase C° y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$ [resp. de la clase C° y del tipo $(G, C^1_0, \mathcal{P}^{tr.}_G)^*$], se verifica, en particular, el:

TEOREMA FUNDAMENTAL (II). — «Para todo abierto G de $\mathbf{R}^2$, y toda $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad, [resp. $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad] dada sobre una C^1_{tray}-partición (c.l.a.Fr.) P de G, existe una única ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho (x_1, x_2)$ con $\varrho : G \to \mathbf{R}$, [definida por: $(x_1, x_2) \in$

$\in G \to \varrho(x_1, x_2) = (h(\iota(x_1, x_2)))'(x_1) \in \mathbf{R}]$, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], cuyo conjunto $\mathscr{C}_{(G:\varrho)}$ de trayectorias maximales en G coincide con P».

El TEOREMA acabado de establecer combinado con el TEOREMA FUNDAMENTAL (I) de la PARTE PRIMERA permiten afirmar la validez de la:

PROPOSICIÓN II. — «Cualquiera que sea el abierto G de $\mathbf{R}^2$ y la C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) P de G, la condición necesaria y suficiente para que P sea el conjunto $\mathscr{C}_{(G:\varrho)}$ de trayectorias maximales en G de una ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, en la que $\varrho : G \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, [resp. definida, continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], es que exista una estructura de $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad [resp. una estructura de $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad], sobre la dada C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) P de G».

Por otra parte, de la PROPOSICION V de I.3 y del referido TEOREMA FUNDAMENTAL (II), se deduce, asimismo, la:

PROPOSICIÓN III. — «Para toda C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) P de un abierto G de $\mathbf{R}^2$, y todo atlas $\mathcal{A}$ numérico de dimensión 1 dado sobre P y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$, [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$], se verifica que la topología $\mathcal{T}_{(P;\mathcal{A})}$ sobre P asociada al atlas $\mathcal{A}$ es cuasi-separada».

Para todo abierto $G = \overset{\circ}{G} \subset \mathbf{R}^2$ denotemos mediante $\mathcal{M}_{(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)}$ [resp. mediante $\mathcal{M}_{(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)}$], al conjunto:

$\{M/(\exists P)\ (\exists \mathcal{A})$ (P es una C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) de G y $\mathcal{A}$ es un atlas de dimensión 1 y del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$ sobre P y M es la $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad (cuyo conjunto base subyacente es P), definida por el atlas $\mathcal{A}$)$\}$

[resp. al conjunto: $\{M/(\exists\ P)\ (\exists \mathcal{A})$ (P es una C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) de G y $\mathcal{A}$ es un atlas de dimensión 1 y del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$ sobre P y M es la $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad (cuyo conjunto base subyacente es P), definida por el atlas $\mathcal{A}$)$\}$], así como indiquemos mediante

$C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G\,;\,\mathbf{R})$ [resp. mediante $C^1_2(G\,;\,\mathbf{R})$], al conjunto de las funciones numéricas $\varrho : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definidas, continuas y localmente lipschitzianas respecto a su segundo argumento sobre G [resp. definidas, continuas y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G]; se verifica obviamente, que:

$$«\mathcal{M}_{(G,\,C^1_2,\,\mathcal{P}^{tr.}_G)} \subset \mathcal{M}_{(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)} \quad \text{y} \quad C^1_2(G\,;\,\mathbf{R}) \subset C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G\,;\,\mathbf{R})»$$

Consideremos las aplicaciones:

$$\mathfrak{K} : \mathcal{M}_{(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)} \to C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G\,;\,\mathbf{R})$$

$$\text{y}$$

$$\mathfrak{H} : C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G\,;\,\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)}$$

definidas, respectivamente, así:

«a toda $(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad $M \in \mathcal{M}_{(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)}$ cuyo conjunto base subyacente sea la C^1_{tray}-partición (c.l.a.Fr.) P de G, se le atribuye como imagen $\mathfrak{K}(M)$ mediante la aplicación $\mathfrak{K}$ la única función numérica $\varrho \in C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G\,;\,\mathbf{R})$, definida, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G para la que el conjunto $\mathscr{C}_{(G;\,\varrho)}$ de trayectorias maximales en G de la correspondiente ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\,x_2)$ coincide con la C^1_{tray}-partición (c.l.a.Fr.) P subyacente de M»

«a toda $\varrho \in C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G;\,\mathbf{R})$ se le asigna como imagen $\mathfrak{H}(\varrho)$ mediante la aplicación $\mathfrak{H}$ la única $(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad $M \in \mathcal{M}_{(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)}$ [existente siempre, en virtud del TEOREMA FUNDAMENTAL (I)], cuya C^1_{tray}-partición (c.l.a.Fr.) subyacente coincide con el conjunto $\mathscr{C}_{(G;\,\varrho)}$ de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1,\,x_2)$»

Puesto que, según se estableció en la INTRODUCCION [PROPOSICION II del n.º 0.3], dos atlas del tipo $(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)$ dados sobre una misma C^1_{tray}-partición de G son $\mathcal{L}$-equivalentes, y consecuentemente definen la misma $(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad, se sigue que para todo $M \in \mathcal{M}_{(G,\,\mathcal{L},\,\mathcal{P}^{tr.}_G)}$, se verifica que $\mathfrak{H}(\mathfrak{K}(M)) = M$, y asimismo, [dado que, como se acaba de demostrar precedentemente, es válida la relación: «$(\varrho, \varrho^*) \in C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R}) \times C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R})$ y $\mathscr{C}_{(G;\varrho)} = \mathscr{C}_{(G;\varrho^*)} \Rightarrow \varrho = \varrho^*$»], para todo $\varrho \in C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R})$ se tiene que $\mathfrak{K}(\mathfrak{H}(\varrho)) = \varrho$, lo que prueba, por tanto, que las aplicaciones $\mathfrak{H} : C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{(G,\mathcal{L},\mathcal{P}^{tr.}_G)}$ y $\mathfrak{K} : \mathcal{M}_{(G,\mathcal{L},\mathcal{P}^{tr.}_G)} \to$ $\to C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R})$ son ambas biyectivas y cada una es la biyección recíproca de la otra, verificándose, además, que $\mathfrak{H}(C^1_2(G; \mathbf{R})) = \mathcal{M}_{(G,C^1_2,\mathcal{P}^{tr.}_G)}$ y y $\mathfrak{K}(\mathcal{M}_{(G,C^1_2,\mathcal{P}^{tr.}_G)}) = C^1_2(G; \mathbf{R})$.

En definitiva es válido el:

Teorema fundamental. — «Para todo abierto G de $\mathbf{R}^2$ existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\mathcal{M}_{(G,\mathcal{L},\mathcal{P}^{tr.}_G)}$ constituido por las $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedades cuyos respectivos conjuntos base subyacentes son C^1_{tray}-particiones (c.l.a. Fr.), [resp. entre el conjunto $\mathcal{M}_{(G,C^1_2,\mathcal{P}^{tr.}_G)}$ constituido por las $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedades cuyos respectivos conjuntos base subyacentes son C^1_{tray}-particiones (c.l.a.Fr.)], y el conjunto $C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R})$ de las funciones numéricas definidas, continuas y localmente lipschitzianas respecto a su segundo argumento sobre G, [resp. el conjunto $C^1_2(G; \mathbf{R})$ de las funciones numéricas definidas, continuas y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G], correspondencia que asigna a cada $\varrho \in C^{\mathcal{L}}_{loc.}(G; \mathbf{R})$ [resp. a cada $\varrho \in C^1_2(G; \mathbf{R}]$, la única $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad [resp. la única $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad], cuya partición subyacente es, precisamente, el conjunto de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$».

II.3 Ejemplo de aplicación del teorema fundamental (ii). — Sea $f : A = \mathring{A} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, con $f \in C^1(A; \mathbf{R})$, y $D_1 f$ localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre A [resp. $D_1 f$ continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre A], verificándose, además, las condiciones:

$$«(\forall (x_1, s))\ ((x_1, s) \in A \Rightarrow (D_2 f)(x_1, s) \neq 0)» \quad (^a)$$

y

$$«(\forall s)\ (s \in pr_2 A \Rightarrow I_s = \overset{-1}{A}\langle s, \rangle = \{x_1 \in \mathbf{R} / (x_1, s) \in A\}$$
$$\text{es un intervalo abierto de } \mathbf{R})» \quad (^b)$$

[o lo que es equivalente, (dado que para todo $s \in pr_2 A$, la traza $\overset{-1}{A} \langle s, \rangle$ del abierto $\overset{-1}{A}$ de $\mathbf{R}^2$ según s es, asimismo, un abierto de $\mathbf{R}$, y que en $\mathbf{R}$ las únicas partes conexas son los intervalos):

$$«(\forall s)\ (s \in pr_2 A \Rightarrow I_s = \overset{-1}{A} \langle s, \rangle \text{ es una parte conexa de } \mathbf{R})»]$$

y

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in pr_1 A \Rightarrow [\text{la aplicación parcial } f_{(x_1,)} : A \langle x_1, \rangle \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ determinada por } f \text{ relativamente al valor } x_1 \text{ de su primer argumento es inyectiva}])» \quad (^c)$$

[Observemos que, supuesto verificada (^{a}), la condición (^{c}) se cumple a fortiori, suponiendo además que:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in pr_1 A \Rightarrow [A \langle x_1, \rangle = \{s \in \mathbf{R}/(x_1, s) \in A\} \text{ es una parte conexa de } \mathbf{R}])»]$$

La hipótesis $f \in C^1 (A ; \mathbf{R})$ y la condición (^{b}) entraña que para todo $s \in pr_2 A$, la aplicación parcial $f_{(,s)}$ determinada por f relativamente al valor s de su segundo argumento, está definida y es continuamente derivable sobre el intervalo abierto I_s de $\mathbf{R}$, es decir, se verifica que:

$$«(\forall s)\ (s \in pr_2 A \Rightarrow [I_s \text{ es un intervalo abierto de } \mathbf{R} \text{ y } f_{(,s)} \in C^1 (I_s ; \mathbf{R})])» \quad (^{b*})$$

Si para todos $s \in pr_2 A$ denotamos mediante $\Gamma_{f(,s)}$ al grafo $\bigcup\limits_{x_1 \in I_s} \{(x_1 f_{(,s)} (x_1))\}$ de $f_{(,s)}$, se tiene, obviamente, que es válida la relación:

$$«(\forall s)\ (s \in pr_2 A \Rightarrow [((x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \Leftrightarrow ((x_1, s) \in A \text{ y } x_2 = f(x_1, s))])»$$

Consideremos, ahora, la aplicación:

$$\vec{g} = (pr_{1|A}, f) : A \to \mathbf{R}^2$$

la cual está, por tanto, definida por:

$$«(x_1, s) \in A \to \vec{g}\,(x_1, s) = (x_1, f(x_1, s)) \in \mathbf{R}^2»$$

Se verifica, evidentemente, que $\vec{g} \in C^1(A\,;\,\mathbf{R}^2)$, así como [habida cuenta ([c])], es válida, por otra parte, la relación:

$$«(\forall\,((x_1, s), (x_1^*, s^*)))\,(((x_1, s), (x_1^*, s^*)) \in A \times A \text{ y } \\ \text{y } \vec{g}(x_1, s) = (x_1, f(x_1, s)) = (x_1^*, f(x_1^*, s^*)) = \vec{g}(x_1^*, s^*) \Rightarrow \\ \Rightarrow [x_1 = x_1^* \text{ y } f_{(x_1,)}(s) = f(x_1, s) = f(x_1^*, s^*) = f_{(x_1^*,)}(s^*)])»$$

la cual entraña:

$$«\vec{g} \text{ es inyectiva}»$$

y dado que además, y en virtud de ([a]), se tiene, que:

$$«(\forall\,(x_1, s))\,((x_1, s) \in A \Rightarrow \text{det. } (J_{\vec{g}}(x_1, s)) = (D_2 f)(x_1, s) \neq 0)»$$

se deduce de todo ello que $G = \vec{g}(A)$ es un abierto de $\mathbf{R}^2$, y $\vec{g}$ es un difeomorfismo de A sobre $\vec{g}(A) = G$, y consecuentemente, la aplicación inversa $\vec{g}^{-1} : G \to \mathbf{R}^2$ es continuamente diferenciable y abierta sobre G.

Pongamos:

$$«\theta = pr_2 \circ \vec{g}^{-1} = pr_{2|A} \circ \vec{g}^{-1} : G \to \mathbf{R}$$

Se tiene que $\theta \in C^1(G\,;\,\mathbf{R})$ y θ es abierta (como compuesta de aplicaciones abiertas), y $Im(\theta) = pr_2(\vec{g}^{-1}(G)) = pr_2 A$.

Además, dado que:

$$«(x_1, x_2) \in G \Rightarrow [(pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)),\ \theta(x_1, x_2)) = \\ = (pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), pr_2(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2))) = \vec{g}^{-1}(x_1, x_2) \in A \text{ y } (x_1, x_2) = \\ = \vec{g}(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)) = (pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), f(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2))) = \\ = (pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), f(pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), pr_2(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)))) = \\ = (pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), f(pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), \theta(x_1, x_2)))]»$$

así como:

$$«(pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)),\ \theta(x_1, x_2)) \in A \text{ y } (x_1, x_2) = \\ = (pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), f(pr_1(\vec{g}^{-1}(x_1, x_2)), \theta(x_1, x_2))) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_1, \theta(x_1, x_2)) \in A \text{ y } x_2 = f(x_1, \theta(x_1, x_2))»$$

se sigue de todo ello [habida cuenta la arbitrariedad de $(x_1, x_2) \in G$], que es válida la relación:

$$«(\forall\,(x_1, x_2))\,((x_1, x_2) \in G \Rightarrow [(x_1, \theta(x_1, x_2)) \in A \text{ y } x_2 = = f(x_1, \theta(x_1, x_2))])» \quad (^d)$$

y puesto que para todo $(x_1, s) \in A$ se verifica: $(x_1, f(x_1, s)) = \vec{g}(x_1, s) \in \in G$, se deduce, [habida cuenta, además:

$$«(x_1, f(x_1, s)) = \vec{g}(x_1, s) \Rightarrow s = pr_2(x_1, s) = pr_2(\vec{g}^{-1}(x_1, f(x_1, s))) = = \theta(x_1, f(x_1, s))»],$$

por otra parte, que:

$$«(\forall\,(x_1, s))\,((x_1, s) \in A \Rightarrow [(x_1, f(x_1, s)) \in G \text{ y } s = \theta(x_1, f(x_1, s))])» \quad (^{d*})$$

De $(^d)$ se sigue, asimismo, que se verifica:

$$«(\forall\,(x_1, x_2))\,((x_1, x_2) \in G \Rightarrow (\exists\, s)\,(s \in pr_2 A \text{ y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)}))»$$

y puesto que se tiene, además, que:

$$«(x_1, x_2) \in G \Rightarrow (\forall\,(s, s^*))\,((s, s^*) \in (pr_2 A) \times (pr_2 A) \text{ y } (x_1, x_2) \in \in \Gamma_{f(,s)} \cap \Gamma_{f(,s^*)} \Rightarrow [(s, s^*) \in (pr_2 A) \times (pr_2 A) \text{ y } f_{(x_1,)}(s) = x_2 = f_{(x_1,)}(s^*)])»$$

relación que junto con la $(^c)$ entraña:

$$«(x_1, x_2) \in G \Rightarrow (\forall\,(s, s^*))\,((s, s^*) \in (pr_2 A) \times (pr_2 A) \text{ y } \text{ y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \cap \Gamma_{f(,s^*)} \Rightarrow s = s^*)»$$

y consecuentemente, se verifica, que:

$$«(\forall\,(s, s^*))\,((s, s^*) \in (pr_2 A) \times (pr_2 A) \text{ y } s \neq s^* \Rightarrow \Gamma_{f(,s)} \cap \Gamma_{f(,s^*)} = \phi)»$$

se obtiene de todo ello, [habida cuenta, además, $(^{b*})$], la validez, a su vez, de la relación:

$$«P = (\Gamma_{f(,s)})_{s \in pr_2 A} \text{ es una } C^1_{tray.}\text{-partición de } G» \quad (^{d**})$$

Suponiendo, ahora, que para un $s \in pr_2 A$, sea cierta la relación:

$$«\bar{x}_1 = \sup\,(I_s) = \sup\,(I_{f(,s)}) < +\infty \text{ y Existe } f_{(,s)}(\bar{x}_1 - 0) \text{ y } \text{ y } f_{(,s)}(\bar{x}_1 - 0) = \bar{x}_2»$$

dado que $\bar{x}_1 \in \bar{I}_s$, y consecuentemente, existe una sucesión $(x_1^{(i)})_{i \in N}$ de elementos de I_s [la cual, por tanto, verifica: $(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow \Rightarrow x_1^{(i)} < \bar{x}_1$ y $(x_1^{(i)}, s) \in A)$], tal que $(x_1^{(i)})_{i \in N}$ converge en $\mathbf{R}$ hacia $\bar{x}_1$, lo que entraña que la sucesión $(\vec{g}\,(x_1^{(i)}, s))_{i \in N} = (x_1^{(i)}, f\,(x_1^{(i)}, s))_{i \in N} = (x_1^{(i)}, f_{(,s)}\,(x_1^{(i)}))_{i \in N}$ de elementos de G converja en $\mathbf{R}^2$ hacia $(\bar{x}_1, f_{(,s)}\,(\bar{x}_1 - 0)) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$; se tiene, en primer lugar, que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{G}$, y si se supone que además se verifica $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G$, puesto que en virtud de (^{d*}), se tiene:

$$\text{«}(\forall\, i)\ (i \in N \Rightarrow [(x_1^{(i)}, f\,(x_1^{(i)}, s)) \in G \text{ y } s = \theta\,(x_1^{(i)}, f\,(x_1^{(i)}, s))]) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^{(i)}, f\,(x_1^{(i)}, s))_{i \in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G\text{»}$$

es válida, consecuentemente, la relación:

$$\text{«}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G \quad \text{y} \quad s = \theta\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\text{»}$$

la cual, habida cuenta (^{d}), entraña:

$$\text{«}(\bar{x}_1, \theta\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2)) = (\bar{x}_1, s) \in A\text{»}$$

es decir:

$$\text{«}\sup\,(I_s) = \bar{x}_1 \in A \langle s, \rangle = I_s = \mathring{\bar{I}}_s\text{»}$$

resultado manifiestamente absurdo.

La contradicción proviene de haber supuesto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in G$. Debe pues verificarse:

$$\text{«}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{G} \quad \text{y} \quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \notin G\text{»}$$

o lo que es equivalente:

$$\text{«}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \text{Fr. } G\text{»}$$

Así pues, es válida la relación:

$$\text{«}(\forall\, s)\ (s \in pr_2 A \text{ y } \sup\,(I_{f(,s)}) < +\infty \text{ y Existe } f_{(,s)}\,(\sup\,(I_{f(,s)}) - 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sup\,(I_{f(,s)}), f_{(,s)}\,(\sup\,(I_{f(,s)}) - 0)) \in \text{Fr. } G)\text{»}$$

y análogamente, se probaría, que:

$$\text{«}(\forall\, s)\ (s \in pr_2 A \text{ y } -\infty < \inf\,(I_{f(,s)}) \text{ y Existe } f_{(,s)}\,(\inf\,(I_{f(,s)}) + 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\inf\,(I_{f(,s)}), f_{(,s)}\,(\inf\,(I_{f(,s)}) + 0)) \in \text{Fr. } G)\text{»}$$

relaciones que junto con la (^{d**}), establecen que es válida, a su vez, la relación:

$$«P = (\Gamma_{f(,s)})_{s \in pr_2 A} \text{ es una } C^1_{tray}\text{-partición (c.l.a.Fr) de } G» \quad (^{d***})$$

Por otro lado, se verifica, como consecuencia de (^{d}):

$$«((x_1, x_2), (x_1^*, x_2^*)) \in G \times G \text{ y } \theta(x_1, x_2) = \theta(x_1^*, x_2^*) = s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1, s) \in A \text{ y } (x_1^*, s) \in A \text{ y } x_2 = f(x_1, s) \text{ y } x_2^* = f(x_1^*, s)]»$$

así como:

$$«(x_1, s) \in A \text{ y } (x_1^*, s) \in A \text{ y } x_2 = f(x_1, s) \text{ y } x_2^* = f(x_1^*, s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists s)(s \in pr_2 A \text{ y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \text{ y } (x_1^*, x_2^*) \in \Gamma_{f(,s)})»$$

resultando, por tanto, ser válida la relación:

$$«((x_1, x_2), (x_1^*, x_2^*)) \in G \times G \Rightarrow [(\theta(x_1, x_2) = \theta(x_1^*, x_2^*)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists s)(s \in pr_2 A \text{ y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \text{ y } (x_1^*, x_2^*) \in \Gamma_{f(,s)})]» \quad (^e)$$

e inversamente, supuesto se verifique la relación:

$$«((x_1, x_2), (x_1^*, x_2^*)) \in G \times G \text{ y } (\exists s)(s \in pr_2 A \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \text{ y } (x_1^*, x_2^*) \in \Gamma_{f(,s)})»$$

se tendría como consecuencia de la misma y de (^{d}):

$$«(x_1 \in pr_1 A \text{ y } (s, \theta(x_1, x_2)) \in A\langle x_1,\rangle \times A\langle x_1,\rangle \text{ y } f_{(x_1,)}(s) =$$
$$= f(x_1, s) = x_2 = f(x_1, \theta(x_1, x_2)) = f_{(x_1,)}(\theta(x_1, x_2))) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^* \in pr_1 A \text{ y } (s, \theta(x_1^*, x_2^*)) \in A\langle x_1^*,\rangle \times A\langle x_1^*,\rangle \text{ y } f_{(x_1^*,)}(s) =$$
$$f(x_1^*, s) = x_2^* = f(x_1^*, \theta(x_1^*, x_2^*)) = f_{(x_1^*,)}(\theta(x_1^*, x_2^*)))»$$

relación que en virtud de la hipótesis (^{c}), entraña:

$$«\theta(x_1, x_2) = s = \theta(x_1^*, x_2^*)»$$

resultando, por tanto, ser válida la relación:

$$«((x_1, x_2), (x_1^*, x_2^*)) \in G \times G \Rightarrow [(\exists s)(s \in pr_2 A \text{ y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1^*, x_2^*) \in \Gamma_{f(,s)}) \Rightarrow (\theta(x_1, x_2) = \theta(x_1^*, x_2^*))]»$$

la cual combinada con la (^{e}) establece, a su vez, la validez de la relación:

$$«((x_1, x_2), (x_1^*, x_2^*)) \in G \times G \Rightarrow [(\theta(x_1, x_2) = \theta(x_1^*, x_2^*)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists s)\ (s \in pr_2 A \text{ y } (x_1, x_2) \in \Gamma_{f(,s)} \text{ y } (x_1^*, x_2^*) \in \Gamma_{f(,s)})]»$$

El resultado obtenido demuestra que la relación de equivalencia $\mathcal{R}_\theta$ asociada a la aplicación $\theta : G \to \mathbf{R}$, coincide con la relación de equivalencia $\mathcal{R}_P$ asociada a la partición $P = (\Gamma_{f(,s)})_{s \in pr_2 A}$ de G.

Sea $\iota : G \to G/\mathcal{R}_\theta = G/\mathcal{R}_P = P$, la suprayeción canónica de G sobre P. Puesto que, según se ha demostrado precedentemente, $\theta : G \to \mathbf{R}$ es una aplicación continua y abierta, si

$$G \xrightarrow{\iota} G/\mathcal{R}_\theta \xrightarrow{\chi} \theta(G) \xrightarrow{i} \mathbf{R}$$

es la descomposición canónica de θ, $[i \circ \chi \circ \iota = \theta]$, se deduce de ello (Prop. 3, n.º 2 § 5, Chap. I de [2]), que $\mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_P$ es una relación de equivalencia abierta sobre G, y $\chi : P \to \chi(P) = \theta(G) = pr_2 A$ es un homeomorfismo de P sobre $\chi(P) \subset \mathbf{R}$.

Por otro lado, dado que $\chi \circ \iota = \widetilde{\theta}$ [en donde $\widetilde{\theta}$ denota la aplicación suprayectiva que tiene el mismo grafo y conjunto de definición que θ y cuyo conjunto de llegada es $\theta(G)$], y $\theta \in C^1(G; \mathbf{R})$, lo que en particular entraña que θ y por tanto $\widetilde{\theta} = \chi \circ \iota : G \to \chi(P)$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G (y a fortiori $\widetilde{\theta} = \chi \circ \iota : G \to \chi(P)$, es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G).

Además, puesto que:

$$«H = \bigcup_{s \in \chi(P)} I_{h(\overset{-1}{\chi}(s))} \times \{s\} = \bigcup_{s \in pr_2 A} I_{f(,s)} \times \{s\} = \bigcup_{s \in pr_2 A} \overset{-1}{A}\langle s, \rangle \times \{s\} = A = \overset{\circ}{A}»$$

[Pues para todo $s \in \chi(P)$, si $x_1 \in I_{f(,s)}$, se tiene habida cuenta (^{d*}), que:

$$«\iota(x_1, f_{(,s)}(x_1)) = \iota(x_1, f(x_1, s)) = \Gamma_{f(,s)} \in P \text{ y } \chi(\Gamma_{f(,s)}) = \chi(\iota(x_1, f(x_1, s))) =$$
$$= \theta(x_1, f(x_1, s)) = s», \text{ y consecuentemente: } «\overset{-1}{\chi}(s) = \Gamma_{f(,s)} \text{ y } h(\overset{-1}{\chi}(s)) = f_{(,s)}»]$$

así como:

$$«(\forall (x_1, t))\ ((x_1, t) \in H = A \Rightarrow [(\mathcal{T}(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))(x_1) =$$

$$= f_{(\cdot,t)}(x_1) = f(x_1, t)) \text{ y } (\sigma(x_1, t) = (h(\overset{-1}{\chi}(t)))'(x_1) =$$
$$= (f_{(\cdot,t)})'(x_1) = (D_1 f)(x_1, t))]])\text{»} \ (*)$$

lo que entraña:

$$\text{«}\mathcal{T} = f \in C^1(A\,;\,\mathbf{R}) \text{ y } \sigma = D_1 f \in C^{\mathcal{L}}_{loc}(A\,;\,\mathbf{R})$$
$$[\text{resp. } \sigma = D_1 f \in C^1_2(A\,;\,\mathbf{R})]\text{»}$$

se sigue de todo ello que la carta numérica $(P, \chi, \mathbf{R})$ sobre la C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) P verifica las condiciones α), $\beta_{\mathcal{L}}$), $\gamma_{\mathcal{L}}$), $\delta_{\mathcal{L}}$), [resp. verifica las condiciones α), $\beta_{C^1_2}$), $\gamma_{C^1_2}$), $\delta_{C^1_2}$)] de 0.2.

En definitiva se ha establecido que el conjunto $P = (\Gamma_{f(\cdot,s)})_{s \in pr_2 A}$ de las C^1-trayectorias correspondientes a la familia $(f_{(\cdot,s)})_{s \in pr_2 A}$ de aplicaciones parciales determinadas para cada $s \in pr_2 A$, por la aplicación dada $f : A = \mathring{A} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ relativamente al valor s de su segundo argumento, constituye una C^1_{tray}-partición (c.l.a. Fr.) del abierto $G = (pr_{1|A}, f)(A) \subset \mathbf{R}^2$ de $\mathbf{R}^2$, sobre la que hay dado un atlas del tipo $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$, [resp. del tipo $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$], y consecuentemente, el conjunto P está dotado de una estructura de $(G, \mathcal{L}, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad [resp. P está dotado de una estructura de $(G, C^1_2, \mathcal{P}^{tr.}_G)$-variedad].

En virtud del TEOREMA FUNDAMENTAL (II) de esta PARTE SEGUNDA, la aplicación $\varrho : G \to \mathbf{R}$, definida por:

$$\text{«}(x_1, x_2) \in G \to \varrho(x_1, x_2) = (h(\iota(x_1, x_2)))'(x_1) \in \mathbf{R}\text{»}$$

es continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G [resp. es continua y continuamente derivable parcial-

(*) De (^{a*}), y dado que $(x_1, t) \in A$, se deduce, en primer lugar:

$$\text{«}(x_1, f(x_1, t)) \in G \text{ y } t = \theta(x_1, f(x_1, t)) \in pr_2 A = \chi(P)\text{»}$$

lo que entraña:

$$\text{«}\overset{-1}{\chi}(t) = \overset{-1}{\chi}(\theta(x_1, f(x_1, t))) = \overset{-1}{\chi}(\widetilde{\theta}(x_1, f(x_1, t))) = (\overset{-1}{\chi} \circ \widetilde{\theta})(x_1, f(x_1\, t)) =$$
$$= \iota(x_1, f(x_1, t)) = \iota(x_1, f_{(\cdot,t)}(x_1)) = \Gamma_{f(\cdot,t)}\text{»}$$

y consecuentemente:

$$\text{«}(h(\overset{-1}{\chi}(t)))(x_1) = (h(\Gamma_{f(\cdot,t)}))(x_1) = f_{(\cdot,t)}(x_1) = f(x_1, t)\text{»}$$

mente respecto a su segundo argumento sobre G], y el conjunto $\mathscr{C}_{(G;\varrho)}$ de las trayectorias maximales en G de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ coincide con $P = (\Gamma_{f(,s)})_{s \in pr_2 A}$.

Pero, dado que se tiene:

$$«(\forall (x_1, x_2, s)) ((x_1, x_2, s) \in G \times pr_2 A \text{ y } h(\iota(x_1, x_2)) = f_{(,s)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [(x_1, x_2) \in G \text{ y } (x_1, s) \in A \text{ y } x_2 = f(x_1, s) \text{ y } h(\iota(x_1, x_2)) = f_{(,s)}])»$$

así como, [teniendo en cuenta, además, (^{d}*)], se verifica, que:

$$«(x_1, x_2) \in G \text{ y } (x_1, s) \in A \text{ y } x_2 = f(x_1, s) \text{ y}$$
$$\text{y } h(\iota(x_1, x_2)) = f_{(,s)} \Rightarrow [(x_1, x_2) \in G \text{ y } s = \theta(x_1, f(x_1, s)) =$$
$$= \theta(x_1, x_2) \text{ y } h(\iota(x_1, x_2)) = f_{(,\theta(x_1, x_2))}]»$$

se sigue que es válida, en consecuencia, la relación:

$$«(\forall (x_1, x_2)) ((x_1, x_2) \in G \Rightarrow h(\iota(x_1, x_2)) = f_{(,\theta(x_1, x_2))})»$$

la cual entraña:

$$«(\forall (x_1, x_2)) ((x_1, x_2) \in G \Rightarrow \varrho(x_1, x_2) = (h(\iota(x_1, x_2)))'(x_1) =$$
$$= (f_{(,\theta(x_1, x_2))})'(x_1) = (D_1 f)(x_1, \theta(x_1, x_2)) =$$
$$= (D_1 f)(pr_{1|G}(x_1, x_2), \theta(x_1, x_2)) = (D_1 f)((pr_{1|G}, \theta)(x_1, x_2)) =$$
$$= ((D_1 f) \circ (pr_{1|G}, \theta))(x_1, x_2))»$$

resultando:

$$«\varrho = (D_1 f) \circ (pr_{1|G}), \theta)»$$

[NOTA. — Observemos que en el supuesto de ser $D_1 f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre A, puesto que para todo $(x_1^0, x_2^0) \in G$ se verifica, en virtud de (^{d}), que $(x_1^0, \theta(x_1^0, x_2^0)) \in A$, existe, por tanto, un entorno abierto $V \subset A$ de $(x_1^0, \theta(x_1^0, x_2^0))$ y un $k_1 \in \mathbf{R}^+$, tales que:

$$«(\forall (y_1, \bar{y}_2, \bar{\bar{y}}_2)) ((y_1, \bar{y}_2, \bar{\bar{y}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (y_1, \bar{y}_2) \in V \text{ y}$$
$$\text{y } (y_1, \bar{\bar{y}}_2) \in V \Rightarrow |(D_1 f)(y_1, \bar{y}_2) - (D_1 f)(y_1, \bar{\bar{y}}_2)| \leqslant k_1 \cdot |\bar{y}_2 - \bar{\bar{y}}_2|)» \quad (')$$

Por otro lado $\theta : G \to \mathbf{R}$ es continuamente diferenciable sobre G y consecuentemente, es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, lo que entraña que exista, asimismo, un entorno abierto $U^* \subset G$ de (x_1^0, x_2^0) y un $k_2 \in \mathbf{R}^+$, verificando:

$$«(\forall\,(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\ ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in U^* \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in U^* \Rightarrow |\theta(x_1, \bar{x}_2) - \theta(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k_2 \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|)» \quad ('')$$

Hagamos $U = U^* \cap (pr_{1|G}, \theta)^{-1}(V)$. En virtud de la continuidad de $(pr_{1|G}, \theta) : G \to \mathbf{R}^2$, es U un entorno abierto de (x_1^0, x_2^0), siendo válida, además, la relación:

$$«(\forall\,(x_1, x_2))\ ((x_1, x_2) \in U \Rightarrow [(x_1, x_2) \in U^* \text{ y } (x_1, \theta(x_1, x_2)) \in V])»$$

por lo que, habida cuenta $(')$ y $('')$, se sigue que se verifica:

$$«(\forall\,(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2))\ ((x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ y } (x_1, \bar{x}_2) \in U \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in U \Rightarrow [(x_1, \bar{x}_2) \in U^* \text{ y } (x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in U^* \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1, \theta(x_1, \bar{x}_2)) \in V \text{ y } (x_1, \theta(x_1, \bar{\bar{x}}_2)) \in V \text{ y } |\varrho(x_1, \bar{x}_2) - \varrho(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| =$$
$$= |(D_1 f)(x_1, \theta(x_1, \bar{x}_2)) - (D_1 f)(x_1, \theta(x_1, \bar{\bar{x}}_2))| \leqslant$$
$$\Rightarrow k_1 \cdot |\theta(x_1, \bar{x}_2) - \theta(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k_1 \cdot k_2 \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| = k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|])»$$

es decir, para cada $(x_1^0, x_2^0) \in G$ existe un entorno abierto $U \subset G$ de (x_1^0, x_2^0) y un $k \in \mathbf{R}^+$, tales que cualquiera sea $(x_1, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, con la condición $(x_1, \bar{x}_2) \in U$ y $(x_1, \bar{\bar{x}}_2) \in U$, es válida la relación:

$$«|\varrho(x_1, \bar{x}_2) - \varrho(x_1, \bar{\bar{x}}_2)| \leqslant k \cdot |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2|»$$

lo que prueba que ϱ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G.

Si se supone, ahora, que $D_1 f : \mathring{A} = A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre A, dado que para todo $(x_1^0, x_2^0) \in G$, se tiene, [habida cuenta $(^d)$], que:

$$«\{x_1^0\} \times \theta_{(x_1^0,)}(G\langle x_1^0, \rangle) = \{x_1^0\} \times \theta(\{x_1^0\} \times G\langle x_1^0, \rangle) \subset A»$$

lo que entraña:

$$«\theta_{(x_1^0,)}(G\langle x_1^0, \rangle) \subset A\langle x_1^0, \rangle»$$

y consecuentemente $\theta_{(x_1^0,)}$ es componible con $(D_1 f)_{(x_1^0,)}$, así como se verifica que:

$$«\varrho_{(x_1^0,)} = (D_1 f)_{(x_1^0,)} \circ \theta_{(x_1^0,)} : G\langle x_1^0,\rangle \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}»$$

y además (como consecuencia de la continua diferenciabilidad de θ sobre G) es $\theta_{(x_1^0,)}$ derivable sobre $G\langle x_1^0,\rangle$ y, por hipótesis, $(D_1 f)_{(x_1^0,)}$ es derivable sobre $A\langle x_1^0,\rangle$, se sigue de todo ello, que $\varrho_{(x_1^0,)} = (D_1 f)_{(x_1^0,)} \circ \theta_{(x_1^0,)}$ es derivable sobre $G\langle x_1^0,\rangle$, verificándose:

$$«(\forall x_2)\ (x_2 \in G\langle x_1^0,\rangle \Rightarrow (D_2\varrho)\ (x_1^0, x_2) = (\varrho_{(x_1^0,)})'\ (x_2) =$$

$$= ((D_1 f)_{(x_1^0,)})'\ (\theta_{(x_1^0,)}\ (x_2)) \cdot (\theta_{(x_1^0,)})'\ (x_2) = (D_{12} f)\ (x_1^0, \theta\ (x_1^0, x_2)) \cdot$$

$$\cdot (D_2\theta)\ (x_1^0, x_2) = ((D_{12} f) \circ (pr_{1|G}, \theta))\ (x_1^0, x_2) \cdot (D_2\theta)\ (x_1^0, x_2) =$$

$$= (((D_{12} f) \circ (pr_{1|G}, \theta)) \cdot (D_2\theta))\ (x_1^0, x_2))»$$

y en particular se tiene, que:

$$«(D_2\varrho)\ (x_1^0, x_2^0) = (((D_{12} f) \circ (pr_{1|G}, \theta)) \cdot (D_2\theta))\ (x_1^0, x_2^0)»$$

y dada la arbitrariedad de $(x_1^0, x_2^0) \in G$, se concluye que es válida la relación:

$$«D_2\varrho = ((D_{12} f) \circ (pr_{1|G}, \theta)) \cdot (D_2\theta)»$$

relación que junto con lo precedente prueba que ϱ es derivable parcialmente sobre G respecto a su segundo argumento, siendo, además $D_2\varrho$ continua sobre G, y consecuentemente, ϱ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G.

En definitiva, si $D_1 f$ es localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, (resp. $D_1 f$ es continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G), es, entonces, $\varrho = (D_1 f) \circ (pr_{1|G}, \theta) : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G (resp. continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G), lo que confirma el resultado obtenido más arriba por aplicación del TEOREMA FUNDAMENTAL (II)].

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] P. MALLIAVIN. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Edit. Hermann. Paris (1972).

[2] N. BOURBAKI. *Topologie générale*. Chaps. I et II, Hermann & Cie. Éditeurs. Paris (1961)

[2'] N. BOURBAKI. *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats*, Hermann & Cie. Éditeurs. Paris (1967).

[3] J. M.ª CASCANTE. *Resolución del problema de Cauchy relativo a una cierta clase de ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden cuasi-lineales y de tipo hiperbólico*. [Collectanea Mathematica, Vol. XXII, Fascs. 1.º, 2.º y 3.º (Año 1971)].

[4] N. ROUCHÉ et J. MAWHIN. *Équations différentielles ordinaires*. Tome 1, Masson et Cie. Éditeurs. Paris (1973).