CAPÍTULO III

«RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO A UNA CLASE DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.er ORDEN, CUASI-LINEALES Y DE TIPO HIPERBÓLICO»*

por

J. M. CASCANTE DÁVILA

RESUMEN

Este trabajo complementa otros tres anteriores nuestros ([1], [2] y [3]), y en él se plantea y resuelve localmente el Problema de CAUCHY relativo a la ecuación en derivadas parciales de 3.er orden, cuasi-lineal y de tipo hiperbólico, de la forma:

$$\sum_{(i,j,k=1,2;i\leq j\leq k)} a_{ijk}\,(x_1,\ x_2)\ (D_{ijk}\, u) = \underset{(l=1,2;h=1,2;s,t=1,2;s\leq t)}{F\,(x_l,\ u,\ D_h\, u,\ D_{st}\, u)}$$

ecuación, que mediante un cambio conveniente de variables independientes (CAP. I, n.os 1 y 2 de A.S. [1]), puede reducirse a la forma canónica:

$$D_{112}\, u + \varrho\,(x_1,\ x_2)\ (D_{122}\, u) = \underset{(l=1,2;i=1,2;j,k=1,2;j\leq k)}{f\,(x_l,\ u,\ D_i\, u,\ D_{jk}\, u)}$$

forma canónica, a la cual siempre supondremos, en lo sucesivo, reducida la ecuación anterior, determinando la solución de la misma que satisface las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u\,(M) &= \varphi\,(M)\\ (D_1\, u)\,(M) &= \psi\,(M)\\ (D_{12}\, u)\,(M) &= \chi\,(M)\end{aligned}\right\}\ M \in C$$

(*) Este trabajo se ha realizado en el Seminario Matemático adscrito a la Cátedra de Análisis Matemático 2.º y 3.º de la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Laguna, la cual es beneficiaria de una Ayuda para el Fomento de la Investigación Universitaria.

en las que, φ, ψ, χ son ciertas funciones suficientemente regulares definidas sobre un intervalo $[r^A, r^B]$ de $\mathbf{R}$, y C [definido por: $r \in [r^A, r^B] \to \vec{x}(r) = (x_1(r), x_2(r)) \in \mathbf{R}^2$], es un «arco perteneciente a la clase (Γ) contenido en el abierto sobre el cual está definida ϱ y relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$». (n.º 7 de la INTRODUCCIÓN de esta Memoria).

Para una mejor exposición del trabajo, se ha subdividido éste en una INTRODUCCIÓN y dos PARTES.

En la INTRODUCCIÓN se hace primeramente (n.os 1 a 6), una recapitulación de las propiedades de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, asociada a la ecuación en derivadas parciales: $D_{112}\,u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122}\,u) = f(x_1, x_2, u, \underset{(i=1,2;j,k=1,2;j\leq k)}{D_i\,u, D_{jk}\,u})$, estudiadas desde un punto de vista global, introduciendo el abierto $\mathfrak{A}_{(G,\varrho)}$ sobre el cual se define «la integral general global en G de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$» ($G$ abierto de $\mathbf{R}^2$ sobre el cual está definida y verifica sobre él ciertas condiciones de regularidad la función ϱ); dicha recapitulación es necesaria (aún a costa de un excesivo alargamiento de la INTRODUCCIÓN), para la definición y estudio de los «arcos de la clase (Γ) contenidos en G relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$», así como para el establecimiento de importantes propiedades que luego se desarrollan en los números que siguen hasta el n.º 10 de la INTRODUCCIÓN, tales como el carácter de abierto (resp. de cerrado) de los conjuntos $\mathcal{E}_b{}^a$ y $D_c{}^a$ (resp. $\mathcal{E}_c$ y D_c), relaciones mutuas existentes entre ellos, $[\overline{\mathcal{E}}_c{}^a = \mathcal{E}_c;\ \overline{D}_c{}^a = D_c;\ \mathring{D}_c = D_c{}^a]$, propiedades que se precisan para el estudio y resolución del Problema de CAUCHY relativo a la ecuación en derivadas parciales de tercer orden y de tipo hiperbólico: $D_{112}\,u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122}\,u) = \Phi(x_1, x_2)$, ecuación que juega un papel esencial en la definición, cálculo y propiedades de las aproximaciones, mediante las cuales se construye en la PARTE PRIMERA que a continuación sigue, la solución al Problema de CAUCHY, objeto de estudio principal de este trabajo.

Finalmente, en la PARTE SEGUNDA, se establece la unicidad de la solución al Problema de CAUCHY que se está considerando, así como la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales dadas sobre C; a dicha PARTE SEGUNDA sigue un apéndice en el que se define y estudia el operador J asociado a una ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, [$\varrho \in C_2^1(G; \mathbf{R})$; $G = \mathring{G} \subset \mathbf{R}^2$; ($C_2^1(G; \mathbf{R})$ denota el espacio vectorial constituido por las funciones numéricas definidas, continuas y continuamente derivables parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G, es decir, definidas y continuas sobre G, admitiendo derivadas parciales respecto a su segundo argumento, asimismo continuas sobre G)], y a un arco C de la clase (Γ) contenido en G, relativamente a $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, operador que interviene asimismo decisivamente en el estudio y resolución del problema que nos ocupa.

INTRODUCCIÓN

1. Soluciones locales de una ecuación diferencial ordinaria de 1.er orden. — Sea $G \subset \mathbf{R}^2$ un abierto de $\mathbf{R}^2$, y $\varrho : G \to \mathbf{R}$ una función numérica definida sobre G, continua y localmente lipschitziana sobre G respecto a su segundo argumento (es decir, para todo punto de G existe un entorno de dicho punto contenido en G sobre el cual ϱ verifica una desigualdad de Lipschitz relativamente a su segundo argumento), y consideremos la ecuación diferencial ordinaria de 1.er orden: $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ (1).

Si $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in G$ es un punto de G, y $Q = [x_1^0 - a, x_1^0 + a] \times [x_2^0 - b, x_2^0 + b] \subset G$, es un intervalo cerrado de $\mathbf{R}^2$ (no degenerado), centrado en $\vec{x}^0$ y contenido en G, y $M_Q = \sup_{(x_1,x_2)\in Q} |\varrho(x_1, x_2)|$ denota el extremo superior de $|\varrho|$ sobre Q, poniendo $h_Q = \text{mín.}\left\{a, \frac{b}{M_Q}\right\}$, conviniendo en tomar $h_Q = a$, si $M_Q = 0$, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de 1.er orden (CAP. I, § 3, n.os 1, 2, 3 de [4], Parte Prima), establece que existe una función numérica $\varphi : [x_1^0 - h_Q, x_1^0 + h_Q] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida y continuamente derivable sobre el intervalo cerrado $[x_1^0 - h_Q, x_1^0 + h_Q]$, es decir, $\varphi \in C^1([x_1^0 - h_Q, x_1^0 + h_Q]; \mathbf{R})$, y tal que:

$$\left.\begin{array}{c} «\vec{x}^0 \in \bigcup_{x_1\in[x_1^0-h_Q, x_1^0+h_Q]} \{(x_1\, \varphi(x_1))\} \subset G» \\ \text{y} \\ «(\forall\, x_1)\ (x_1 \in [x_1^0 - h_Q, x_1^0 + h_Q] \Rightarrow \varphi'(x_1) = \varrho(x_1\, \varphi(x_1)))» \end{array}\right\}$$

Además, si $\varphi_1 : I_1 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $\varphi_2 : I_2 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son funciones definidas y continuamente derivables sobre los intervalos (abiertos, cerrados o semiabiertos) I_1 y I_2, respectivamente, y tales que:

$$\left.\begin{array}{c} «\vec{x}^0 \in \bigcup_{x_1 \in I_i} \{(x_1, \varphi_i(x_1))\} \subset G» \\ \text{y} \\ «(\forall x_1)\ (x_1 \in I_i \Rightarrow \varphi_i'(x_1) = \varrho(x_1, \varphi_i(x_1)))» \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

se verifica en estas condiciones, que:

$$«\varphi_{1|I_1 \cap I_2} = \varphi_{2|I_1 \cap I_2}»$$

A toda función numérica $\psi \in C^1(I; \mathbf{R})$, definida y continuamente derivable sobre un intervalo I de $\mathbf{R}$ (abierto, cerrado o semiabierto), y tal que:

$$\left.\begin{array}{c} «\vec{x}^0 \in \bigcup_{x_1 \in I} \{(x_1, \psi(x_1))\} \subset G» \\ \text{y} \\ «(\forall x_1)\ (x_1 \in I \Rightarrow \psi'(x_1) = \varrho(x_1, \psi(x_1)))» \end{array}\right\}$$

la denominaremos «solución local en G(*) de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, pasando por el punto $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ de G». En el caso particular de ser $x_1^0 = \inf. \mathrm{I}$ (resp. $x_1^0 = \sup. \mathrm{I}$) y verificarse: $\psi \in C^1(I; \mathbf{R})$ y $\vec{x}^0 \in \bigcup_{x_1 \in I} \{(x_1, \psi(x_1))\} \subset G$ y $(\forall x_1)\ (x_1 \in I \Rightarrow \psi'(x_1) = \varrho(x_1, \psi(x_1)))$, denominaremos a ψ, «solución local en G por la derecha (resp. por la izquierda) de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, pasando por el punto $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$».

Con esta terminología, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (1), se formula como sigue: «Para todo punto $\vec{x}^0 \in G$ existe una solución local en G de la ecuación diferencial ordinaria (1), pasando por $\vec{x}^0$, y si $\varphi_1 : I_1 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $\varphi_2 : I_2 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son dos soluciones locales en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, se verifica que $\varphi_{1|I_1 \cap I_2} = \varphi_{2|I_1 \cap I_2}$».

Sea ahora, $\vec{x} = (x_1, x_2) \in G$ un punto de G, y denotemos por $Q_{\vec{x}}$ a la familia de intervalos cerrados (no degenerados) de $\mathbf{R}^2$, cen-

(*) Mediante la expresión «en G», queremos indicar que el grafo $\bigcup_{x_1 \in I} \{(x_1, \psi(x_1))\}$ de ψ está contenido en G.

trados en $\vec{x}^0$ y contenidos en G, y por $D_{\vec{x}}$ al subconjunto de $\mathbf{R}^+ - \{0\}$:

$$D_{\vec{x}} = \{\xi \in \mathbf{R}/(\exists\, Q)\ (Q \in Q_{\vec{x}} \text{ y } \xi = h_Q)\}$$

Se tiene así la familia no vacía de subconjuntos no vacíos de $\mathbf{R}$, $(D_{\vec{x}})_{\vec{x} \in G}$. Pongamos :

$$«D = \prod_{\vec{x} \in G} D_{\vec{x}}»$$

Puesto que:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in G \Rightarrow D_{\vec{x}} \neq \phi)»$$

se tiene que:

$$«D = \prod_{\vec{x} \in G} D_{\vec{x}} \neq \phi»$$

y a cada elemento $\Delta \in D$, le está asociado unívocamente una función $\delta = (\Delta, G, \mathbf{R})$ cuyo grafo, conjunto de definición y conjunto de llegada son, respectivamente, Δ, G y $\mathbf{R}$, tal que:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in G \Rightarrow \delta\,(\vec{x}) \in D_{\vec{x}})».$$

A una tal función δ la denominaremos una «D-función sobre G», y al conjunto de todas ellas lo representaremos por $\mathcal{F}_D\,(G;\ \mathbf{R})$.

El resultado precedente se formula en términos de D-funciones como sigue:

$$«(\forall\ (\delta, \vec{x}^*))\ ((\delta, \vec{x}^*) \in \mathcal{F}_D\,(G, \mathbf{R}) \times G \Rightarrow (\exists\ \varphi_{(\delta,\vec{x}^*)})\ (\varphi_{(\delta,\vec{x}^*)} \in C^1\ ([x_1^* - \delta(\vec{x}^*),$$

$$x_1^* + \delta\,(\vec{x}^*)];\ \mathbf{R}) \text{ y } \vec{x}^* \in \bigcup_{x_1 \in [x_1^* - \delta(\vec{x}^*), x_1^* + \delta(\vec{x}^*)]} \{(x_1,\ \varphi_{(\delta,\vec{x}^*)}\ (x_1))\} \subset G \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall x_1)\ (x_1 \in [x_1^* - \delta\,(\vec{x}^*),\ x_1^* + \delta\,(\vec{x}^*)] \Rightarrow \varphi'_{(\delta,\vec{x}^*)}\ (x_1) = \varrho\,(x_1, \varphi_{(\delta,\vec{x}^*)}\ (x_1))) \text{ y}$$

$$\text{y } \varphi_{(\delta,\vec{x}^*)} \text{ es única en estas condiciones}))»$$

2. Integrales generales locales de una ecuación diferencial ordinaria de 1.er orden. — Consideremos, como antes, un abierto $G \subset \mathbf{R}^2$ de $\mathbf{R}^2$ y una función numérica $\varrho : G \to \mathbf{R}$ definida sobre G, continua y localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G, y sea $\tilde{\vec{x}}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in G$, un punto de G, y $\tilde{Q} = [\tilde{x}_1^0 - \tilde{a},\ \tilde{x}_1^0 + \tilde{a}] \times [\tilde{x}_2^0 - \tilde{b},\ \tilde{x}_2^0 + \tilde{b}] \subset G$ un intervalo cerrado

de $\mathbf{R}^2$ (no degenerado), centrado en $\widetilde{\vec{x}}^0$ y contenido en G; denotemos por $M_{\widetilde{Q}}$ a $\sup\limits_{\vec{x} \in \widetilde{Q}} |\varrho(\vec{x})|$. Poniendo: $k_{\widetilde{Q}} = \text{mín.} \left\{ \widetilde{a}, \dfrac{\widetilde{b}}{4. M_{\widetilde{Q}}} \right\}$, si $M_{\widetilde{Q}} > 0$ y $k_{\widetilde{Q}} = \widetilde{a}$, si $M_{\widetilde{Q}} = 0$, se verifica, como se sabe (CAP. I, § 3; n.os 1, 2 y 3, de [4], Parte Prima), que para todo $\vec{x}^0 \in [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times [\widetilde{x}_2^0 - \frac{\widetilde{b}}{2}, \widetilde{x}_2^0 + \frac{\widetilde{b}}{2}]$, existe una función numérica $\varphi_{(\widetilde{\vec{x}^0}, \vec{x}^0, \widetilde{Q})}$: $[\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \to \mathbf{R}$, definida y continuamente derivable sobre el intervalo cerrado $[\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}]$, y tal que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{x}^0 \in \bigcup\limits_{x_1 \in [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}]} \{(x_1, \varphi_{(\widetilde{\vec{x}^0}, \vec{x}^0, \widetilde{Q})}(x_1))\} \subset G \\ \text{y} \\ (\forall x_1)(x_1 \in [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \Rightarrow \varphi'_{(\widetilde{\vec{x}^0}, \vec{x}^0, \widetilde{Q})}(x_1) = \varrho(x_1, \varphi_{(\widetilde{\vec{x}^0}, \vec{x}^0, \widetilde{Q})}(x_1))) \end{array} \right\}$$

Sea:

$$\chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})} : I = [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times$$

$$\times [\widetilde{x}_2^0 - \frac{\widetilde{b}}{2}, x_2^0 + \frac{\widetilde{b}}{2}] \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \text{ la aplicación así definida:}$$

$$\text{«}(x_1, x_1^0, x_2^0) \in I \to \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})}_{(x_1, x_1^0, x_2^0)} = \varphi_{(\widetilde{\vec{x}^0}, \vec{x}^0, \widetilde{Q})}(x_1) \in \mathbf{R}\text{»}$$

dicha función $\chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})}$ es (CAP. I, § 5, n.º 1 de [4], Parte Prima), continua sobre I, y continuamente derivable parcialmente respecto a su primer argumento sobre I, verificándose:

$$\left. \begin{array}{c} (\widetilde{x}_1^0, \widetilde{x}_2^0) \in pr_2 I \times pr_3 I \subset G \\ \text{y} \\ (\forall (x'^0_1, x'^0_2))((x'^0_1, x'^0_2) \in pr_2 I \times pr_3 I \Rightarrow (x'^0_1, x'^0_1, x'^0_2, x'^0_2) \in \\ \in \bigcup\limits_{(x_1, x_1^0, x_2^0) \in I} \{(x_1, x_1^0, x_2^0, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})}_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\}) \\ \text{y} \\ \bigcup\limits_{(x_1, x_1^0, x_2^0) \in I} \{(x_1, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})}_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})\} \subset G \\ \text{y} \\ (\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})((x_1, x_1^0, x_2^0) \in I \Rightarrow (D_1 \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})})(x_1, x_1^0, x_2^0) = \varrho(x_1, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0}, \widetilde{Q})}_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})) \end{array} \right\}$$

Si además de ser ϱ continua sobre G, es ϱ continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G, [en cuyo caso ϱ será, consecuentemente, localmente lipschitziana respecto a su segundo argumento sobre G], se sabe que en estas condiciones (CAP. I, § 5, n.os 2, 3, 4, 5 y 6 de [4], Parte Prima) la función $\chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})}$ considerada es continuamente diferenciable sobre $\mathring{I}$, con derivadas parciales prolongables con continuidad a I, verificándose:

$$«(\forall_{(x_1,x_1^0,x_2^0)})\ ((x_1, x_1^0, x_2^0) \in I \Rightarrow (D_1\, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})})(x_1, x_1^0, x_2^0) =$$

$$= \varrho\, (x_1, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})}\, (x_1, x_1^0, x_2^0))\ \text{y}\ (D_2\, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})})\, (x_1, x_1^0, x_2^0) =$$

$$= -\,\varrho\, (x_1^0, x_2^0) \cdot e^{\int_{x_1^0}^{x_1} (D_2\, \varrho)\, (t,\, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})}\, (t, x_1^0, x_2^0))\, dt}\ \text{y}$$

$$\text{y}\ \ (D_3\, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})})\, (x_1, x_1^0, x_2^0) = e^{\int_{x_1^0}^{x_1} (D_2\, \varrho)\, (t,\, \chi^{(\widetilde{\vec{x}^0},\widetilde{Q})})\, (t, x_1^0, x_2^0))\, dt)}\, »$$

A toda función numérica:

$$(x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in I \subset \mathbf{R}^3 \to \chi\ (x_1,\ x_1^0,\ x_2^0) \in \mathbf{R}$$

definida y continua sobre un intervalo I (no necesariamente abierto o cerrado) de $\mathbf{R}^3$ cuyo interior $\mathring{I}$ es no vacío, y verificando:

$$\left\{\begin{array}{c}
(\widetilde{x}_1^0,\ \widetilde{x}_2^0) \in pr_2\, I \times pr_3\, I \subset G \\
\text{y} \\
(\forall_{(x_1'^0,x_2'^0)})\ ((x_1'^0,\, x_2'^0) \in pr_2\, I \times pr_3\, I \Rightarrow (x'^0_1,\, x'^0_1,\, x'^0_2,\, x'^0_2) \in \\
\in \bigcup_{(x_1,x_1^0,x_2^0)\in I} \{(x_1,\, x_1^0,\, x_2^0,\, \chi\, (x_1,\, x_1^0,\, x_2^0))\}) \\
\text{y} \\
\bigcup_{(x_1,x_1^0,x_2^0)\in I} \{(x_1,\, \chi\, (x_1,\, x_1^0,\, x_2^0))\} \subset G \\
\text{y} \\
(\forall_{(x_1^0,x_2^0)})\ ((x_1^0,\, x_2^0) \in pr_2\, I \times pr_3\, I \Rightarrow \chi_{(x_1^0,x_2^0)} \in C^1\ (pr_1\, I;\, \mathbf{R})\ y\ (\forall x_1) \\
(x_1 \in pr_1\, I \Rightarrow \chi'_{(x_1^0,x_2^0)}\, (x_1) = (D_1\, \chi)\, (x_1,\, x_1^0,\, x_2^0) = \\
= \varrho\, (x_1, \chi\, (x_1,\, x_1^0,\, x_2^0)) = \varrho\, (x_1,\, \chi_{(x_1^0,x_2^0)}\, (x_1)))) \ (*)
\end{array}\right.$$

(*) $\chi_{(x_1^0,x_2^0)} : pr_1\ I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la «aplicación parcial determinada por χ, relativamente a los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercer argumentos», es decir, $\chi_{(x_1^0,x_2^0)} : pr_1\ I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, está definida por: $x_1 \in pr_1 I \to \chi_{(x_1^0,x_2^0)}\, (x_1) = \chi(x_1,x_1^0,x_2^0) \in \mathbf{R}$

la denominaremos «integral general local en G de la ecuación diferencial ordinaria, $\dfrac{d x_2}{d x_1} = \varrho(x_1, x_2)$, relativamente al punto $\tilde{\tilde{x}}^0 \in G$». Observemos que si $\chi^1 : I^1 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\chi^2 : I^2 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ son dos integrales generales locales en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) relativamente al punto $\tilde{\tilde{x}}^0 \in G$, se tiene, en virtud de la misma definición, que:

$$
\begin{gathered}
«(\forall_{(x_1^0, x_2^0)}) \, ((x_1^0, x_2^0) \in (pr_2 I^1 \times pr_3 I^1) \cap (pr_2 I^2 \times pr_3 I^2) = \\
= (pr_2 I^1 \cap pr_2 I^2) \times (pr_3 I^1 \cap pr_3 I^2) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\chi^1_{(x_1^0, x_2^0)}, \chi^2_{(x_1^0, x_2^0)}) \in C^1 (pr_1 I^1 ; \mathbf{R}) \times \\
\times C^1 (pr_1 I^2 ; \mathbf{R}) \, y \, (x_1^0, x_2^0) \in \bigcup_{x_1 \in pr_1 I^1} \{(x_1, \chi^1_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1))\} \subset G \text{ y} \\
\text{y } (x_1^0, x_2^0) \in \bigcup_{x_1 \in pr_1 I^2} \{(x_1, \chi^2_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1))\} \subset G \, y \, (\forall x_1) \, ([x_1 \in pr_1 I^1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \chi^{1'}_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1) = \varrho \, (x_1, \chi^1_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1))] \, y \, [x_1 \in pr_1 I^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow \chi^{2'}_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1) = \varrho \, (x_1, \chi^2_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1))]))»
\end{gathered}
$$

y consecuentemente se verifica:

$$
\begin{gathered}
«(\forall_{(x_1^0, x_2^0)}) \, ((x_1^0, x_2^0) \in (pr_2 I^1 \cap pr_2 I^2) \times (pr_3 I^1 \cap pr_3 I^2) \Rightarrow \\
\Rightarrow [(\chi^1_{(x_2^0, x_2^0)} : pr_1 I^1 \to \mathbf{R} \text{ es una solución local en } G \text{ de (1) pasando por} \\
(x_1^0, x_2^0)) \text{ y } (\chi^2_{(x_1^0, x_2^0)} : pr_1 I^2 \to \mathbf{R} \text{ es una solución local en } G \text{ de (1)} \\
\text{pasando por } (x_1^0, x_2^0))])»
\end{gathered}
$$

lo que entraña, en virtud de lo establecido en el n.º 1, que:

$$
\begin{gathered}
«(\forall_{(x_1^0, x_2^0)}) \, ((x_1^0, x_2^0) \in (pr_2 I^1 \cap pr_2 I^2) \times (pr_3 I^1 \cap pr_3 I^2) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\forall x_1) \, (x_1 \in pr_1 I^1 \cap pr_1 I^2 \Rightarrow \chi^1 (x_1, x_1^0, x_2^0) = \\
= \chi^1_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1) = \chi^2_{(x_1^0, x_2^0)} (x_1) = \chi^2 (x_1, x_1^0, x_2^0)))»
\end{gathered}
$$

es decir:

$$
\begin{gathered}
«(\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)}) \, ((x_1, x_1^0, x_2^0) \in (pr_1 I^1 \cap pr_1 I^2) \times (pr_2 I^1 \cap pr_2 I^2) \times \\
\times (pr_3 I^1 \cap pr_3 I^2) = I^1 \cap I^2 \Rightarrow \chi^1 (x_1, x_1^0, x_2^0) = \chi^2 (x_1, x_1^0, x_2^0))»
\end{gathered}
$$

o lo que es equivalente:

$$
«\chi^1_{|I^1 \cap I^2} = \chi^2_{|I^1 \cap I^2}»
$$

Combinando este resultado con el considerado al principio de este número, se puede enunciar:

«Para todo punto $\vec{\tilde{x}}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in G$ existe una integral general local en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) relativamente al punto $\vec{\tilde{x}}^0$, y si $\chi^1 : I^1 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $\chi^2 : I^2 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ son dos integrales generales locales en G de (1) relativamente al punto $\vec{\tilde{x}}^0$, se verifica $\chi^1_{|I^1 \cap I^2} = \chi^2_{|I^1 \cap I^2}$».

3. Soluciones globales de una ecuación diferencial ordinaria de 1.^{er} orden. — Introduzcamos una definición. Sean $\delta \in \mathcal{F}_D(G\,;\, \mathbf{R})$ y $(\vec{x}_0{}^i)_{\leq i \leq n}$, respectivamente, una D -función sobre G (Véase n.º 1) y una secuencia de puntos de G.

Se dirá que la secuencia $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n}$ es una δ^+-cadena, sí sólo sí:

$$«(\forall i)\ (i \in \{1,\ 2\ldots,\ n\} \Rightarrow x_1{}^i = x_1{}^{i-1} + \delta(\vec{x}^{i-1}) \text{ y } x_2{}^i = \varphi_{(\delta,\vec{x}^{i-1})}(x_1{}^i))»$$

Se deduce de la definición que para todo $(\delta, \vec{x}^0) \in \mathcal{F}_D(G\,;\, \mathbf{R}) \times G$, la secuencia $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq 0}$ constituida por el único punto $\vec{x}^0$ es una δ^+-cadena, y por otra parte, si $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n}$ es una δ^+-cadena se tiene que:

$$\left.\begin{array}{c} «x_1{}^0 \leq x_1{}^n» \\ \text{y} \\ «n \neq 0 \Rightarrow x_1{}^0 < x_1{}^n» \end{array}\right\}$$

y en consecuencia:

$$«(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n} \text{ es una } \delta^+\text{-cadena y } x_1{}^0 = x_1{}^n \Rightarrow n = 0»$$

es decir:

$$«(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n} \text{ es una } \delta^+\text{-cadena y } x_1{}^0 = x_1{}^n \Rightarrow \vec{x}^0 = \vec{x}^n»$$

Sean $(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') \in G \times G$ y $\delta \in \mathcal{F}_D(G\,;\, \mathbf{R})$, respectivamente, un par ordenado de $G \times G$ y una D-función sobre G. Por definición pondremos: «$\vec{x}\,''$ está δ^+-encadenado a $\vec{x}\,'$ $\Longleftrightarrow$ Existe una δ^+-cadena $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n}$, tal que $\vec{x}\,' = \vec{x}^0$ y $\vec{x}\,'' = \vec{x}^n$».

De esta definición y de lo precedente se deduce que para todo $\vec{x} \in G$ y todo $(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') \in G \times G$, son válidas las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «\vec{x} \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}» \\ \text{y} \\ «\vec{x}\,'' \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}\,' \Rightarrow x_1{}' \leq x_1{}''» \end{array}\right\}$$

así como:

$$«\vec{x}'' \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}' \text{ y } x_1' = x_1'' \Rightarrow \vec{x}' = \vec{x}''»$$

por lo que:

$$«\vec{x}'' \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}'$$
$$\text{y } \vec{x}' \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}'' \Rightarrow \vec{x}' = \vec{x}''»$$

Por otra parte, si $\delta \in \mathcal{F}_D(G; \mathbf{R})$ y $(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''') \in G \times G \times G$ y «$\vec{x}''$ está δ^+-encadenado a $\vec{x}'$» y «$\vec{x}'''$ está δ^+-encadenado a $\vec{x}''$», entonces existen sendas secuencias de puntos de G: $(\vec{y}^r)_{0 \leq i \leq p}$, $(\vec{z}^s)_{0 \leq s \leq q}$, tales que:

$$\left.\begin{array}{c} «\vec{x}' = \vec{y}^0; \quad \vec{x}'' = \vec{y}^p = \vec{z}^0; \quad \vec{x}''' = \vec{z}^q» \\ \text{y} \\ «(\forall r)\ (r \in \{1, 2 \ldots, p\} \Rightarrow y_1^r = y_1^{r-1} + \delta(\vec{y}^{r-1}) \text{ e } y_2^r = \varphi_{(\delta; \vec{y}^{r-1})}(y_1^r))» \\ \text{y} \\ «(\forall s)\ (s \in \{1, 2, \ldots, q\} \Rightarrow z_1^s = z^{s-1} + \delta(\vec{z}^{s-1}) \text{ y } z_2^s = \varphi_{(\delta; \vec{z}^{s-1})}(z_1^s))» \end{array}\right\}$$

Pongamos $n = p + q$ y sea $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n}$ la secuencia de puntos de G definida por:

$$\left.\begin{array}{c} (\forall i)\ (i \in \{0, 1, 2, \ldots, p\} \Rightarrow \vec{x}^i = \vec{y}^i) \\ \text{y} \\ (\forall i)\ (i \in \{p + 1, p + 2, \ldots, n\} \Rightarrow \vec{x}^i = \vec{z}^{i-p}) \end{array}\right\}$$

Resulta así que:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall i)\ (i \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow x_1^i = x_1^{i-1} + \delta(\vec{x}^{i-1}) \text{ y } x_2^i = \varphi_{(\delta; \vec{x}^{i-1})}(x_1^i))» \\ \text{y} \\ «\vec{x}' = \vec{x}^0 \text{ y } \vec{x}''' = x^n» \end{array}\right\}$$

es decir:

$$«(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n} \text{ es una } \delta^+\text{-cadena y } \vec{x}' = \vec{x}^0 \text{ y } \vec{x}''' = \vec{x}^n»$$

lo que entraña:

$$«\vec{x}''' \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}'»$$

Pongamos para todo $\delta \in \mathcal{F}_D(G; \mathbf{R})$:

$$«(\vec{x}', \vec{x}'') \in G \times G \Rightarrow [\vec{x}' \mathcal{R}_\delta^+ \vec{x}'' \Longleftrightarrow \vec{x}'' \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}']»$$

se verifica por lo precedente que:

$$\left\{\begin{array}{c}(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in G \Longrightarrow \vec{x}\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x}) \\ (\forall (\vec{x}', \vec{x}''))\ ((\vec{x}', \vec{x}'') \in G \times G \text{ y } \vec{x}'\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x}'' \text{ y } \vec{x}''\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x}' \Rightarrow \vec{x}' = \vec{x}'') \\ (\forall (\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}'''))\ ((\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''') \in G \times G \times G \text{ y} \\ \text{y } \vec{x}'\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x}'' \text{ y } \vec{x}''\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x}''' \Rightarrow \vec{x}'\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x}''')\end{array}\right.$$

es decir, para todo $\delta \in \mathcal{F}_D (G;\ \mathbf{R})$ la correspondiente relación binaria $\mathcal{R}_\delta{}^+$ es una relación de orden sobre G.

Para todo punto $\vec{x}^0 = (x_1{}^0,\ x_2{}^0) \in G$, consideremos el subconjunto de G:

$$H_{(D^+;\vec{x}^0)} = \{\vec{x} \in G - \{\vec{x}^0\} / (\exists\ \delta)\ (\delta \in \mathcal{F}_D (G;\ \mathbf{R}) \text{ y } \vec{x}^0\, \mathcal{R}_\delta{}^+ \vec{x})\}$$

$H_{(D^+;\vec{x}^0)}$ es no vacío, puesto que para todo $\delta \in \mathcal{F}_D (G;\ \mathbf{R})$, el punto $(x_1{}^0 + \delta (\vec{x}^0),\ \varphi_{(\delta;\vec{x}^0)} (x_1{}^0 + \delta (\vec{x}^0)))$ es distinto del $\vec{x}^0$ y está δ^+-encadenado a $\vec{x}^0$, y por tanto: $(x_1{}^0 + \delta (\vec{x}^0),\ \varphi_{(\delta;\vec{x}^0)} (x_1{}^0 + \delta (\vec{x}^0))) \in$ $\in H_{(D^+;\vec{x}^0)}$.

Observemos que, evidentemente:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)} \Rightarrow x_1{}^0 = pr_1 \vec{x}^0 < pr_1 \vec{x} = x_1)» \tag{2}$$

y por otra parte, ya que:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)} \Rightarrow (\exists\ \delta)\ (\delta \in \mathcal{F}_D (G;\ \mathbf{R}) \text{ y y } \vec{x} \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}^0))»$$

y dado que el punto $(x_1 + \delta (\vec{x}),\ \varphi_{(\delta;\vec{x})} (x_1 + \delta (\vec{x})))$ está δ^+-encadenado al $\vec{x}$, se sigue, por tanto, y en virtud de la transitividad de la relación $\mathcal{R}_\delta{}^+$, que el punto $\vec{x}' = (x_1{}',\ x_2{}') = (x_1 + \delta (\vec{x}),\ \varphi_{(\delta;\vec{x})} (x_1 + \delta (\vec{x})))$ está δ^+-encadenado al $\vec{x}^0$, y además se tiene que:

$$«x_1{}^0 < x_1 < x_1{}'»$$

por lo que, consecuentemente, se verifica:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)} \Rightarrow (\exists\ \vec{x}')\ (\vec{x}' \in H_{(D^+;\vec{x}^0)} \text{ y y } x_1 = pr_1 \vec{x} < pr_1 \vec{x}' = x_1{}'))» \tag{3}$$

Sea ahora $\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)}$. Se verifica por (2), que: $x_1{}^0 < x_1$, y además:

$$«(\exists\ \delta)\ (\delta \in \mathcal{F}_D (G;\ \mathbf{R}) \text{ y } \vec{x} \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}^0)»$$

por lo que en virtud de las definiciones precedentes se tiene que:

$$\text{«Existe una secuencia } (\vec{x}'^i)_{0 \leq i \leq n} \text{ tal que: } n \geqslant 1 \text{ y } \vec{x}'^0 = \vec{x}^0 \text{ y}$$
$$\text{y } \vec{x}'^n = \vec{x} \text{ y } (\forall\, i)\ (i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow x_1'^i = x_1'^{i-1} + \delta\,(\vec{x}'^{i-1}) \text{ y}$$
$$\text{y } x_2'^i = \varphi_{(\delta;\, \vec{x}'^{i-1})}\,(x_1'^i))\text{»}$$

Resulta así la familia finita de aplicaciones $(\psi_{(\delta^+;\, \vec{x}'^{i-1})})_{1 \leq i \leq n} =$ $= (\varphi_{(\delta;\, \vec{x}'^{i-1})|[x_1'^{i-1},\, x_1'^i]})_{1 \leq i \leq n}$ que verifican:

$$\text{«}(\forall\, i)\ (i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow \varphi_{(\delta;\, \vec{x}'^{i-1})|[x_1'^{i-1},\, x_1'^i]} = \psi_{(\delta^+;\, \vec{x}'^{i-1})} : [x_1'^{i-1}, x_1'^i] \to \mathbf{R}$$

es una solución local en G por la derecha de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}'^{i-1}$)»

y, además:

$$\text{«}\bigcup_{1 \leq i \leq n} [x_1'^{i-1}, x_1'^i] = [x_1^0, x_1]\text{»}$$

En virtud de la unicidad de las soluciones locales en G pasando por un punto de G (n.º 1 de esta INTRODUCCIÓN), se puede poner:

$$\text{«}(\forall_{(i,j)})\ ((i, j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi_{(\delta^+;\, \vec{x}'^{i-1})|[x_1'^{i-1},\, x_1'^i] \cap [x_1'^{j-1},\, x_1'^j]} = \psi_{(\delta^+;\, \vec{x}'^{j-1})|[x_1'^{i-1},\, x_1'^i] \cap [x_1'^{j-1},\, x_1'^j]})\text{»}$$

por lo que existe una sola función

$$\Psi_{(\delta^+;\, \vec{x}^0;\, \vec{x})} : \bigcup_{1 \leq i \leq n} [x_1'^{i-1}, x_1'^i] = [x_1^0, x_1] \to \mathbf{R},$$

tal que para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ prolonga $\Psi_{(\delta^+;\, \vec{x}'^{i-1})}$ a $[x_1^0, x_1]$, la cual, como es inmediato de comprobar, es derivable sobre $[x_1^0, x_1]$, y además verifica:

$$\text{«}(\forall t)\ (t \in [x_1^0, x_1] \Rightarrow \Psi'_{(\delta^+;\, \vec{x}^0;\, \vec{x})}\,(t) = \varrho\,(t,\ \Psi_{(\delta^+;\, \vec{x}^0;\, \vec{x})}\,(t)))\text{»}$$

lo que prueba que $\Psi_{(\delta^+;\, \vec{x}^0;\, \vec{x})}$ es una solución local en G por la derecha de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo cerrado $[x_1^0, x_1]$.

Si $\delta' \in \mathcal{F}_D\,(G\,;\,\mathbf{R})$ es tal que $\vec{x}$ está δ'^+-encadenado a $\vec{x}^0$, la función correspondiente $\Psi_{(\delta'^+;\, \vec{x}^0;\, \vec{x})} : [x_1^0, x_1] \to \mathbf{R}$, construida análogamente de acuerdo con lo precedente, es asimismo una solución local en G por la derecha de (1) pasando por $\vec{x}^0$ y definida sobre el intervalo $[x_1^0, x_1]$, por lo que en virtud del teorema de unicidad de las soluciones locales en G de (1) pasando por un punto de G, se verifica que:

$$«\Psi_{(\delta'^{+};\vec{x}^0;\vec{x})} = \Psi_{(\delta^{+};\vec{x}^0;\vec{x})}»$$

siendo, por tanto, $\Psi_{(\delta^{+};\vec{x}^0;\vec{x})}$ independiente de la D-función δ, para la cual $\vec{x}$ está δ^{+}-encadenado a $\vec{x}^0$.

Denotemos, para todo $\vec{x} \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)}$, mediante $\Psi^{+}_{(\vec{x}^0;\vec{x})}$ la solución local en G por la derecha de (1), pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre el intervalo cerrado $[x_1{}^0, x_1]$, y unívocamente determinada por el procedimiento de construcción acabado de indicar.

De esta forma se obtiene una familia $\{\Psi^{+}_{(\vec{x}^0;\vec{x})} : [x_1{}^0, x_1] \to \mathbf{R}\}_{\vec{x} \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)}}$ de soluciones locales en G por la derecha de (1) pasando por $\vec{x}^0$.

Sea $x_1{}^{der}(\vec{x}^0) = \sup. \{pr_1 H_{(D^{+};\vec{x}^0)}\} \leqslant +\infty$ el extremo superior del subconjunto de $\mathbf{R}$, $pr_1 H_{(D^{+};\vec{x}^0)} = \{pr_1 \vec{x}\}_{\vec{x} \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)}}$, constituido por las abscisas de los puntos de $H_{(D^{+};\vec{x}^0)}$. En virtud de (2) y (3) se verifica que:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)} \Rightarrow x_1{}^0 < pr_1 \vec{x} = x_1 < x_1{}^{der}(\vec{x}^0))» \qquad (3')$$

Es inmediato, teniendo en cuenta (3'), comprobar que:

$$«\bigcup_{\vec{x} \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)}} [x_1{}^0, x_1] = [x_1{}^0, x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[»$$

y además, en virtud del teorema de unicidad de soluciones locales en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, es válida la relación:

$$«(\forall (\vec{x}, \vec{x}'))\ ((\vec{x}, \vec{x}') \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)} \times H_{(D^{+};\vec{x}^0)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Psi^{+}_{(\vec{x}^0;\vec{x})\,|[x_1{}^0, x_1] \cap [x_1{}^0, x_1']} = \Psi_{(\vec{x}^0;\vec{x}')\,|[x_1{}^0, x_1] \cap [x_1{}^0, x_1']})»$$

por lo que, consecuentemente, existe una única función,

$$\Psi^{+}_{(\vec{x}^0)} : [x_1{}^0, x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[\to \mathbf{R},$$

tal que para todo $\vec{x} \in H_{(D^{+};\vec{x}^0)}$ prolonga $\Psi^{+}_{(\vec{x}^0;\vec{x})}$ a $[x_1{}^0, x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[$, la cual, como es inmediato de constatar, es continuamente derivable sobre $[x_1{}^0, x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[$, y verifica:

$$«(\forall t)\ (t \in [x_1{}^0, x_1{}^{der}(\vec{x}^0)[\Rightarrow (\Psi^{+}_{(\vec{x}^0)})'(t) = \varrho(t, \Psi_{(\vec{x}^0)}(t)))»$$

es decir, $\Psi^{+}_{(\vec{x}^0)}$ es una solución local en G por la derecha de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo semiabierto a derecha $[x_1^0, x_1^{der}(\vec{x}^0)[$. Observemos, que en virtud de lo precedente, se tiene que:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)} \Rightarrow pr_2 \vec{x} = x_2 = \Psi^{+}_{(\vec{x}^0)}(x_1) = \Psi^{+}_{(\vec{x}^0)}(pr_1 \vec{x}))» \qquad (3'')$$

Demostremos ahora, que si $f: [x_1^0, x_1^*] \to \mathbf{R}$ es una solución local en G por la derecha de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre un intervalo cerrado $[x_1^0, x_1^*]$, se verifica entonces, que: $x_1^* < x_1^{der}(\vec{x}^0)$.

En efecto, en caso contrario sería: $x_1^0 < x_1^{der}(\vec{x}^0) \leq x_1^*$, y dado que $x_1^{der}(\vec{x}^0)$ pertenece al intervalo de definición de f, se tiene, como consecuencia: $(x_1^{der}(\vec{x}^0), f(x_1^{der}(\vec{x}^0))) \in G$. Pongamos, para abreviar, $x_1' = x_1^{der}(\vec{x}^0)$; $x_2' = f(x_1') = f(x_1^{der}(\vec{x}^0))$; $\vec{x}' = (x_1', x_2')$.

Sea $Q(\vec{x}') = [x_1' - a, x_1' + a] \times [x_2' - b, x_2' + b] \subset G$, un intervalo cerrado de $\mathbf{R}^2$, centrado en $\vec{x}'$, contenido en G, y denotemos por $M_{Q(\vec{x}')}$ al $\sup\limits_{\vec{x} \in Q(\vec{x}')} |\varrho(\vec{x})|$. Consideremos los dos casos posibles, mutuamente excluyentes:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^{o}) & M_{Q(\vec{x}')} = 0 \\ 2.^{o}) & M_{Q(\vec{x}')} > 0 \end{array}\right\}$$

En el primer caso, poniendo $a' = \frac{a}{2}$, $b' = \frac{b}{2}$ y $Q'(\vec{x}') = [x_1' - a', x_1' + a'] \times [x_2' - b', x_2' + b']$, y para todo $\vec{x} \in Q'(\vec{x}')$: $[x_1 - a', x_1 + a'] \times [x_2 - b', x_2 + b'] = Q(\vec{x})$, se verifica que:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \Rightarrow Q(\vec{x}) = \left[x_1 - \frac{a}{2}, x_1 + \frac{a}{2}\right] \times \left[x_2 - \frac{b}{2}, x_2 + \frac{b}{2}\right] \subset Q(\vec{x}'))»$$

y en consecuencia:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \Rightarrow 0 \leq M_{Q(\vec{x})} \leq M_{Q(\vec{x}')} = 0)»$$

es decir:

$$«(\forall \vec{x})\ (\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \Rightarrow M_{Q(\vec{x})} = 0)»$$

por lo que:

$$«(\forall \vec{x}) \left(\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \Rightarrow h_{Q(\vec{x})} = a' = \frac{a}{2}\right)»$$

En el segundo caso, pongamos $a' = \text{mín.} \left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2 \cdot M_{Q(\vec{x}')}}\right\}$, $b' = \frac{b}{2}$ y $Q'(\vec{x}') = [x_1' - a', x_1' + a'] \times [x_2' - b', x_2' + b']$, y sea para todo $\vec{x} \in Q'(\vec{x}')$, asimismo, $Q(\vec{x}) = [x_1 - a', x_1 + a'] \times [x_2 - b', x_2 + b']$.

Obviamente, se verifica que:

$$«(\forall \vec{x}) \left(\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \subset \left[x_1' - \frac{a}{2}, x_1' + \frac{a}{2}\right] \times \left[x_2' - \frac{b}{2}, x_2' + \frac{b}{2}\right] \Rightarrow \right.$$
$$\Rightarrow Q(\vec{x}) = [x_1 - a', x_1 + a'] \times [x_2 - b', x_2 + b'] \subset$$
$$\subset \left[x_1 - \frac{a}{2}, x_1 + \frac{a}{2}\right] \times \left[x_2 - \frac{b}{2}, x_2 + \frac{b}{2}\right] \subset$$
$$\left. \subset [x_1' - a, x_1' + a] \times [x_2' - b, x_2' + b] = Q(\vec{x}')\right)»$$

resultando, por tanto, que:

$$«(\forall \vec{x}) \left(\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \Rightarrow 0 \leq M_{Q(\vec{x})} \leq M_{Q(\vec{x}')}\right)»$$

Si $\vec{x} \in Q'(\vec{x}')$ es tal que $M_{Q(\vec{x})} = O$, entonces es $h_{Q(\vec{x})} = a'$.
Si $\vec{x} \in Q'(\vec{x}')$ es tal que $M_{Q(\vec{x})} > O$, se verifica, entonces, que:

$$a' \leq \frac{b}{2 M_{Q(\vec{x}')}} = \frac{b'}{M_{Q(\vec{x}')}} \leq \frac{b'}{M_{Q(\vec{x})}}, \text{ y en consecuencia, } h_{Q(\vec{x})} =$$
$$= \text{mín.} \left\{a', \frac{b'}{M_{Q(\vec{x})}}\right\} = a'.$$

Así pues, en este segundo caso, se tiene que:

$$«(\forall \vec{x}) \left(\vec{x} \in Q'(\vec{x}') \Rightarrow h_{Q(\vec{x})} = a'\right)»$$

Combinando ambos casos se puede poner:

$$«(\exists (a', b')) \left((a', b') \in [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \times [\mathbf{R}^+ - \{0\}] \text{ y } (\forall \vec{x}) \left(\vec{x} \in [x_1' - a', x_1' + a'] \times [x_2' - b', x_2' + b'] = Q'(\vec{x}') \Rightarrow (\exists Q) (Q \in \mathrm{Q}_{\vec{x}} \text{ y } h_Q = a')\right)\right)» \quad (4)$$

Puesto que $f : [x_1^0, x_1^*] \to \mathbf{R}$ es continua sobre $[x_1^0, x_1^*]$ y y $x_1' \in]x_1^0, x_1^*]$ y $x_2' = f(x_1')$, se verifica, en consecuencia, que:

$$«(\exists \eta) \left(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall t) \left(t \in]x_1' - \eta, x_1'] \cap [x_0^1, x_1^*] \Rightarrow \right.\right.$$
$$\left.\left. \Rightarrow x_2' - b' < f(t) < x_2' + b'\right)\right)»$$

y poniendo $\eta' = \text{mín.}\ \{a', \eta\}$, se tiene $]x_1' - \eta', x_1'] \subset]x_1' - a', x_1'] \subset \subset]x_1' - a', x_1' + a'[$, y a fortiori:

$$(\forall t)\ (t \in]x_1' - \eta', x_1'[\cap [x_0^1, x_1^*] \Rightarrow x_2' - b' < f(t) < x_2' + b')$$

por lo que:

$$«(\forall t)\ (t \in]x_1' - \eta', x_1'[\cap [x_0^1, x_1^*] \Rightarrow \Rightarrow (t, f(t)) \in]x_1' - a', x_1' + a'[\times]x_2' - b', x_2' + b'[\subset Q'(\vec{x}'))» \quad (4')$$

Ahora bien:

$$«]x_1' - \eta', x_1'[\cap [x_1^0, x_1^*] \neq \phi»$$

y consecuentemente:

$$«(\exists t')\ (t' \in]x_1' - \eta', x_1'[\cap [x_1^0, x_1^*])»$$

Pero $t' \in]x_1' - \eta', x_1'[\cap [x_1^0, x_1^*]$, entraña:

$$«x_1' - \eta' < t' < x_1' = x_1^{der}(\vec{x}^0) = \sup_{\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)}} \{pr_1 \vec{x}\}»$$

y esta última relación entraña a su vez:

$$«(\exists \vec{x})\ (\vec{x} \in H_{(D^+;\vec{x}^0)} \text{ y } x_1' - \eta' < t' < x_1 = pr_1 \vec{x} < x_1^{der}(\vec{x}^0) = x_1')»$$

resultando, en consecuencia:

$$«(\exists \delta)\ (\delta \in \mathcal{F}_D(G; \mathbf{R}) \text{ y } \vec{x} \text{ está } \delta^+\text{-encadenado a } \vec{x}^0 \text{ y y } x_1 \in]x_1' - \eta', x_1'[\cap [x_1^0, x_1^*])»$$

así como, habida cuenta (3''), y en virtud de la unicidad de soluciones locales en G pasando por $\vec{x}^0$:

$$«x_2 = \Psi^+_{(\vec{x}^0)}(x_1) = f_{|[x_1^0, x_1^{der}(\vec{x}^0)[}(x_1)»$$

de todo lo cual, y teniendo en cuenta además (4'), se deduce:

$$«(\exists (\vec{y}^i)_{0 \leq i \leq n})\ ([(\vec{y}^i)_{0 \leq i \leq n} \text{ es una } \delta^+\text{-cadena e } \vec{y}^0 = \vec{x}^0 \text{ e } \vec{y}^n = \vec{x}] \text{ y y } (x_1, f(x_1)) = \vec{x} \in]x_1' - a', x_1' + a'[\times]x_2' - b', x_2' + b'[\subset \subset Q'(\vec{x}'))» \quad (4'')$$

Por otra parte, $\vec{x} \in Q'(\vec{x}')$ entraña, en virtud de (4), que:

$$«(\exists\, Q)\ (Q \in Q_{\vec{x}}\ y\ h_Q = a')»$$

por lo que:

$$«a' \in D_{\vec{x}} = D_{\vec{y}^n}» \qquad (4''')$$

Sea $J = \{\vec{y}^0, \vec{y}^1, \ldots, \vec{y}^n\} \subset G$. Se verifica como consecuencia de (4'''), que:

$$«(\delta(\vec{y}^0),\ \delta(\vec{y}^1), \ldots, \delta(\vec{y}^{n-1}),\ a') \in \prod_{\vec{y} \in J} D_{\vec{y}}»$$

Puesto que, como se ha establecido en el n.º 1 de esta INTRODUCCION, es válida la relación:

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in G \Rightarrow D_{\vec{y}} \neq \phi)»$$

la aplicación: $pr_J : \prod_{\vec{y} \in G} D_{\vec{y}} \to \prod_{\vec{y} \in J} D_{\vec{y}}$, es (Chap. II, § 5, n.º 4 de [5]), consecuentemente suprayectiva, por lo que:

$$«(\exists\, \varDelta')\ (\varDelta' \in \prod_{\vec{y} \in G} D_{\vec{y}}\ \text{y}\ pr_J(\varDelta') = (\delta(\vec{y}^0),\ \delta(\vec{y}^1), \ldots, \delta(\vec{y}^{n-1}),\ a'))»$$

Pongamos $\delta' = (\varDelta', G, \mathbf{R})$; se verifica que:

$$«\delta' \in \mathcal{F}_D(G;\ \mathbf{R})\ \ y\ \ (\forall i)\ (i \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta'(\vec{y}^{i-1}) = \delta(\vec{y}^{i-1})\ \ y\ \ \delta'(\vec{y}^n) = a')»$$

y haciendo:

$$«\vec{y}^{n+1} = (y_1^n + \delta'(\vec{y}^n),\ \varphi_{(\delta';\vec{y}^n)}(y_1^n + \delta'(\vec{y}^n))) =$$
$$= (x_1 + \delta'(\vec{x}),\ \varphi_{(\delta';\vec{x})}(x_1 + \delta'(\vec{x}))) = (x_1 + a',\ \varphi_{(\delta';\vec{x})}(x_1 + a'))»$$

se puede poner:

$$«(\forall i)\ (i \in \{1, 2, \ldots, n+1\} \Rightarrow y_1^i = y_1^{i-1} + \delta'(\vec{y}^{i-1})\ \text{e}\ y_2^i = \varphi_{(\delta';\vec{y}^{i-1})}(y_1^i))\ \text{e}$$
$$\text{e}\ \vec{y}^0 = \vec{x}^0\ \text{e}\ \vec{y}^{n+1} = (x_1 + a',\ \varphi_{(\delta';\vec{x})}(x_1 + a'))»$$

es decir, el punto $(x_1 + a',\ \varphi_{(\delta';\vec{x})}(x_1 + a'))$ está δ'^{+}-encadenado a $\vec{x}^0$ y además $(x_1 + a',\ \varphi_{(\delta';\vec{x})}(x_1 + a')) \neq \vec{x}^0$, por lo que,

$$(x_1 + a',\ \varphi_{(\delta';\vec{x})}(x_1 + a')) \in H_{(D^+;\vec{x}^0)},$$

y consecuentemente, $x_1 + a' \in \{pr_1 \vec{y}\}_{\vec{y} \in H_{(D^+; \vec{x}^0)}}$, resultando:

$$«x_1 + a' \leq x_1^{der} (\vec{x}^0) = \text{sup. } [\{pr_1 \vec{y}\}_{\vec{y} \in H_{(D^+; \vec{x}^0)}}]»$$

Pero de (4'') se deduce:

$$«x_1^{der} (\vec{x}^0) = x_1' = (x_1' - a') + a' < x_1 + a'»$$

lo que es contradictorio con el resultado acabado de establecer.

La contradicción proviene de haber supuesto $x_1^{der} (\vec{x}^0) \leq x_1^*$. Así, pues, para toda solución local en G por la derecha, $f : [x_1^0, x_1^*] \to \mathbf{R}$ de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre un intervalo cerrado $[x_1^0, x_1^*]$, se verifica que $x_1^* < x_1^{der} (\vec{x}^0)$. Se deduce de ello que si $f : [x_1^0, x_1'] \to \mathbf{R}$ es una solución local en G por la derecha de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo semiabierto a derecha $[x_1^0, x_1']$ se verifica, en estas condiciones, que $x_1' \leq x_1^{der} (\vec{x}^0)$.

A la función $\Psi^+_{(\vec{x}^0)} : [x_1^0, x_1^{der} (\vec{x}^0)[\to \mathbf{R}$ considerada precedentemente, la denominaremos «solución global en G por la derecha de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$», la cual, en virtud de lo demostrado, prolonga a todas las soluciones locales en G por la derecha de la ecuación diferencial (1) pasando por $\vec{x}^0$.

Análogamente, si $\delta \in \mathcal{F}_D (G ; \mathbf{R})$ y $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n}$ son, respectivamente, una D-función sobre G y una secuencia de puntos de G, poniendo por definición:

$$«(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n} \text{ es una } \delta^-\text{-cadena} \iff (\forall i) \ (i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1^i = x_1^{i-1} - \delta (\vec{x}^{i-1}) \text{ y } x_2^i = \varphi_{(\delta; \vec{x}^{i-1})} (x_1^i))»$$

así como:

«$(\vec{x}', \vec{x}'') \in G \times G$ y $\delta \in \mathcal{F}_D (G; \mathbf{R}) \Rightarrow [\vec{x}''$ está δ^--encadenado a $\vec{x}' \iff$ Existe una δ^--cadena $(\vec{x}^i)_{0 \leq i \leq n}$ tal que $\vec{x}' = \vec{x}^0$ y $\vec{x}'' = \vec{x}^n]$»

se podrá, para todo $\delta \in \mathcal{F}_D (G; \mathbf{R})$ definir sobre G, la relación de orden:

«$(\vec{x}', \vec{x}'') \in G \times G \Rightarrow [\vec{x}' \mathcal{R}_\delta^- \vec{x}'' \iff \vec{x}''$ está δ^--encadenado a $\vec{x}']$»

y además, para todo $\vec{x}^0 \in G$, definir el subconjunto no vacío de G:

$H_{(D^-; \vec{x}^0)} = \{\vec{x} \in G - \{\vec{x}^0\} / (\exists \ \delta) \ (\delta \in \mathcal{F} (G; \mathbf{R})$ y $\vec{x}$ es δ^--encadenado a $\vec{x}^0)\}$

y el correspondiente:

$$x_1^{izq}(\vec{x}^0) = \inf_{\vec{x} \in H_{(D^-;\vec{x}^0)}} [\{pr_1 \vec{x}\}] \geq -\infty$$

y procediendo de modo enteramente similar a como se hizo anteriormente, se obtendría primeramente la familia

$$\{\Psi^-_{(\vec{x}^0;\vec{x})} : [x_1, x_1^0] \to \mathbf{R}\}_{\vec{x} \in H_{(D^-;\vec{x}^0)}}$$

de soluciones locales en G por la izquierda de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y, finalmente la función $\Psi^-_{(\vec{x}^0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0] \to \mathbf{R}$ que es solución local en G por la izquierda de (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo semiabierto a izquierda $]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0]$, que para todo $\vec{x} \in H_{(D^-;\vec{x}^0)}$ prolonga $\Psi^-_{(\vec{x}^0,\vec{x})}$ a $]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0]$, y con la particularidad de que si $f : [x_1^*, x_1^0]$ es una solución local en G por la izquierda de la ecuación diferencial (1) pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre el intervalo cerrado $[x_1^*, x_1^0]$, se verifica en estas condiciones $x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1^*$, y en consecuencia, si $f :]x_1', x_1^0] \to \mathbf{R}$ es una solución local en G por la izquierda de (1) pasando por $\vec{x}^0$ y definida sobre el intervalo semiabierto a izquierda $]x_1', x_1^0]$, se verifica entonces $x_1^{izq}(\vec{x}^0) \leq x_1$.

A dicha función $\Psi^-_{(\vec{x}^0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0] \to \mathbf{R}$ se la denominará «solución global en G por la izquierda de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$», la cual prolonga a todas las soluciones locales en G por la izquierda de (1) pasando por $\vec{x}^0$.

Sentado esto, sea:

$$\Psi_{(\vec{x}^0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[\to \mathbf{R}$$

la función definida por:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{x} \in]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^0] \to \Psi_{(\vec{x}^0)}(\vec{x}) = \Psi^-_{(\vec{x}^0)}(\vec{x}) \in \mathbf{R} \\ \text{y} \\ \vec{x} \in [x_1^0, x_1^{der}(\vec{x}^0)[\to \Psi_{(\vec{x}^0)}(\vec{x}) = \Psi^+_{(\vec{x}^0)}(\vec{x}) \in \mathbf{R} \end{array}\right\}$$

la cual, evidentemente, es solución local en G de (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$, definida sobre el intervalo abierto $]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}(\vec{x}^0)[$, y tal que para toda $f : [x_1^{**}, x_1^*] \to \mathbf{R}$, [resp. $(f :]x_1^{**}, x_1^*[\to \mathbf{R})$; $(f :]x_1^{**}, x_1^*] \to \mathbf{R})$; $(f : [x_1^{**}, x_1^*[\to \mathbf{R})$], que sea solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, se verifica que: $x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1^{**} \leq x_1^* < x_1^{der}(\vec{x}^0)$, [resp. $(x_1^{izq}(\vec{x}^0) \leq x_1^{**} < x_1^{*} \leq x_1^{der}(\vec{x}^0))$; $(x_1^{izq}(\vec{x}^0) \leq x_1^{**} < x_1^{*} < x_1^{der}(\vec{x}^0))$; $(x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1^{**} < x_1^{*} \leq x_1^{der}(\vec{x}^0))$], lo que se demuestra fácilmente aplicando los resultados precedentes a los pares de restricciones:

$$(\Psi_{(\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^0]} = \Psi^{-}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|[x_1^{**},\, x_1^0]}) \text{ y } (\Psi_{(\vec{x}^0)|[x_1^0,\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi^{+}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|[x_1^0,\, x_1^{*}]})$$

$$\text{resp. } \{[(\Psi_{(\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^0]} = \Psi^{-}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|]x_1^{**},\, x_1^0]}) \text{ y}$$

$$\text{y } (\Psi_{(\vec{x}^0)|[x_1^0,\, x_1^{der}(\vec{x}_0)[} = \Psi^{+}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|[x_1^0,\, x_1^{*}[})],$$

$$[(\Psi_{(\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^0]} = \Psi^{-}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|]x_1^{**},\, x_1^0]}) \text{ y } (\Psi_{(\vec{x}^0)|[x_1^0,\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi^{+}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|[x_1^0,\, x_1^{*}]})],$$

$$[(\Psi_{(\vec{x}^0)|]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^0]} = \Psi^{-}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|[x_1^{**},\, x_1^0]}) \text{ y}$$

$$\text{y } (\Psi_{(\vec{x}^0)|[x_1^0,\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[} = \Psi^{+}_{(\vec{x}^0)} \; ; \; f_{|[x_1^0,\, x_1^{*}[})]\},$$

A la función $\Psi_{(\vec{x}_0)} :]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[\to \mathbf{R}$, así construida, se le denominará «solución global en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$».

A todo punto $\vec{x}^0 = (x_1^0,\, x_2^0) \in G$ le están, pues, asociados unívocamente, los elementos de la recta completada $\widehat{\mathbf{R}}$ que hemos denotado por $x_1^{izq}(\vec{x}^0)$, $x_1^{der}(\vec{x}^0)$, extremidades izquierda y derecha, respectivamente, del intervalo abierto $]x_1^{izq}(\vec{x}^0),\, x_1^{der}(\vec{x}^0)[$, al que pertenece x_1^0, y sobre el cual está definida la solución $\Psi_{(\vec{x}_0)}$ global en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{x}^0$ de G.

4. El subconjunto $\mathcal{A}_{(G;\varrho)} = \{(x_1,\, x_1^0,\, x_2^0) \in \mathbf{R}^3 / (x_1^0,\, x_2^0) \in G$ y y $x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1 < x_1^{der}(\vec{x}^0)\}$ de $\mathbf{R}^3$. — Consideremos el subconjunto de $\mathbf{R}^3$:

$$«\mathcal{A}_{(G;\varrho)} = \{(x_1,\, x_1^0,\, x_2^0) \in \mathbf{R}^3 / \vec{x}^0 = (x_1^0,\, x_2^0) \in G \text{ y}$$

$$\text{y } x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1 < x_1^{der}(\vec{x}^0)\}»$$

Se verifica que:

$$«\mathcal{A}_{(G;\varrho)} \text{ es un abierto de } \mathbf{R}^3»$$

En efecto, sea $(\tilde{x}_1,\, \tilde{x}_1^0,\, \tilde{x}_2^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)}$. Se tendrá, en virtud de la misma definición de $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}$: $(\tilde{x}_1^0,\, \tilde{x}_2^0) = \vec{\tilde{x}}^0 \in G$ y $x_1^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0) < \tilde{x}_1 < x_1^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)$, y también: $x_1^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0) < \tilde{x}_1^0 < x_1^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)$. Cabe considerar los casos siguientes, mutuamente excluyentes:

1.°) $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_1^0$. Sea $\widetilde{Q} = [\widetilde{x}_1^0 - \widetilde{a}, \widetilde{x}_1^0 + \widetilde{a}] \times [\widetilde{x}_2^0 - \widetilde{b}, \widetilde{x}_2^0 + \widetilde{b}] \subset G$, un intervalo cerrado, centrado en $\overrightarrow{\widetilde{x}^0} = (\widetilde{x}_1^0, \widetilde{x}_2^0)$ y contenido en G, y denotemos por $M_{\widetilde{Q}}$ a $\sup_{\vec{x} \in \widetilde{Q}} |\varrho(\vec{x})|$. Pongamos $k_{\widetilde{Q}} = \text{mín.} \left\{\widetilde{a}, \dfrac{\widetilde{b}}{4 M_{\widetilde{Q}}}\right\}$, , si $M_{\widetilde{Q}} > 0$, y $k_{\widetilde{Q}} = \widetilde{a}$, si $M_{\widetilde{Q}} = 0$.

Se verifica, (Véase el° n. 2 de esta INTRODUCCIÓN):

«$(\exists \chi^{(\overrightarrow{\widetilde{x}^0}, \widetilde{Q})})$ $(\chi^{(\overrightarrow{\widetilde{x}^0}, \widetilde{Q})} \in \mathcal{F}([\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times$

$\times \left[\widetilde{x}_2^0 - \dfrac{\widetilde{b}}{2}, \widetilde{x}_2^0 + \dfrac{\widetilde{b}}{2}\right]$; **R**) y $\chi^{(\overrightarrow{\widetilde{x}^0}, \widetilde{Q})}$ es una integral general local en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) relativamente al punto $\overrightarrow{\widetilde{x}^0}$)»

y, por tanto:

«$(\forall_{(x_1^0, x_2^0)})$ $((x_1^0, x_2^0) \in [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times \left[\widetilde{x}_2^0 - \dfrac{\widetilde{b}}{2}, \widetilde{x}_2^0 + \dfrac{\widetilde{b}}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la aplicación parcial $\chi^{(\overrightarrow{\widetilde{x}^0}, \widetilde{Q})}_{(x_1^0, x_2^0)}$ determinada por $\chi^{(\overrightarrow{\widetilde{x}^0}, \widetilde{Q})}$ relativamente a los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercer argumento, es una solución local en G de (1), pasando por (x_1^0, x_2^0) y definida sobre el intervalo cerrado $[\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}]$)»

lo que entraña:

«$(\forall \vec{x}^0)$ $(\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, x_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times \left[\widetilde{x}_2^0 - \dfrac{\widetilde{b}}{2}, \widetilde{x}_2^0 + \dfrac{\widetilde{b}}{2}\right] \subset G \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^{izq}(\vec{x}^0) < \widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}} < \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}} < x_1^{der}(\vec{x}^0))$»

es decir, se tiene que:

«$(\forall_{(x_1, x_1^0, x_2^0)})$ $((x_1, x_1^0, x_2^0) \in [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times$

$\times [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times \left[\widetilde{x}_2^0 - \dfrac{\widetilde{b}}{2}, \widetilde{x}_2^0 + \dfrac{\widetilde{b}}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \in G$ y $x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1 < x_1^{der}(\vec{x}^0))$»

o lo que es equivalente:

«$[\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times [\widetilde{x}_1^0 - k_{\widetilde{Q}}, \widetilde{x}_1^0 + k_{\widetilde{Q}}] \times$

$\times \left[\widetilde{x}_2^0 - \dfrac{\widetilde{b}}{2}, \widetilde{x}_2^0 + \dfrac{\widetilde{b}}{2}\right] \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}$»

y en consecuencia:

$$«(\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) = (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in \mathring{\mathfrak{a}}_{(G;\varrho)}»$$

2.º) $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_1{}^0$. Supongamos para fijar ideas que sea $\tilde{x}_1{}^0 < \tilde{x}_1$ [El razonamiento a utilizar en el caso de ser $\tilde{x}_1{}^0 > \tilde{x}_1$, sería el mismo que el que ahora se va a efectuar], y consideremos la solución global $\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}$ en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por el punto $\vec{\tilde{x}}^0$, la cual está definida sobre el intervalo $]x_1{}^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0),\ x_1{}^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)[$; denotemos por $F = \bigcup_{x_1 \in [\tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_1]} \{(x_1,\ \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}(x_1))\}$ al grafo de la restricción $\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)|[\tilde{x}_1{}^0, \tilde{x}_1]}$ de $\Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}$ al intervalo cerrado $[\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_1]$. Este grafo es un compacto de $\mathbf{R}^2$ contenido en G, por lo que:

$$«(\exists r)\ (r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{ y }\ (\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow B_r(\vec{y}) \subset G))»$$

Por otra parte, si $\vec{h} : F \times \left[0, \frac{r}{2}\right] \times [0,2\pi] \subset \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ es la aplicacióu definida por:

$$«(\vec{y},\ \varrho,\ \varphi) \in F \times \left[0, \frac{r}{2}\right] \times [0,2\pi] \to \vec{h}(\vec{y},\ \varrho,\ \varphi) =$$

$$= (pr_1\vec{y} + \varrho \cdot \cos\ \varphi,\ pr_2\vec{y} + \varrho \cdot \text{sen}\ \varphi) \in \mathbf{R}^2»$$

dicha aplicación es continua sobre el compacto

$$F \times \left[0, \frac{r}{2}\right] \times [0,2\pi] \text{ de } \mathbf{R}^4,$$

y además:

$$«\vec{h}\left(F \times \left[0, \frac{r}{2}\right] \times [0,2\pi]\right) = \bigcup_{\vec{y} \in F} \bar{B}_{r/2}(\vec{y}) \subset \bigcup_{\vec{y} \in F} B_r(\vec{y}) \subset G» \ (*)$$

por lo que $\bigcup_{\vec{y} \in F} \bar{B}_{r/2}(\vec{y})$ es asimismo un compacto de $\mathbf{R}^2$ contenido en G.

(*) Para todo $\vec{y} \in F$, denota $\bar{B}_{r/2}(\vec{y})$ la bola cerrada de centro $\vec{y}$, y radio $\frac{r}{2}$, es decir, el subconjunto de $\mathbf{R}^2$: $\left\{\vec{x} \in \mathbf{R}^2 / \|\vec{x} - \vec{y}\| < \frac{r}{2}\right\}$, en donde $\vec{x} \in \mathbf{R}^2 \to \|\vec{x}\| \in \mathbf{R}$ es la norma euclídea de $\mathbf{R}^2$.

Sean: $a = \text{mín}\left\{\frac{r}{2\sqrt{2}}, \frac{\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_1{}^0}{2}\right\}$ (4*); $M = \sup\limits_{\substack{\vec{x} \in \bigcup \bar{B}_{r/2}(\vec{y}) \\ \vec{y} \in F}} |\varrho(\vec{x})|$ y

pongamos:

$$\begin{cases} k = \text{mín}\left\{a, \dfrac{a}{4M}\right\}; \text{ si } M > 0 \\ k = a; \text{ si } M = 0 \end{cases}$$

y para todo $\vec{y} = (y_1, y_2) \in F$:

$$Q(\vec{y}) = [y_1 - k, y_1 + k] \times [y_2 - a, y_2 + a] \subset$$
$$\subset [y_1 - a, y_1 + a] \times [y_2 - a, y_2 + a] \subset \bar{B}_{r/2}(\vec{y})$$

[Obsérvese que en virtud de (4*) es $k \leq \frac{\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_1{}^0}{2}$ (4**)].

Se tiene: $(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow 0 \leq M_{Q(\vec{y})} \leq M)$ y consideremos los dos casos siguientes:

1*°) $M = 0$. Se verifica entonces que:

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow M_{Q(\vec{y})} = 0)»$$

y consecuentemente:

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow k_{Q(\vec{y})} = k)»$$

2*°) $M > 0$. Puesto que:

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow [(M_{Q(\vec{y})} = 0) \text{ ó } (M_{Q(\vec{y})} > 0)])»$$

cabe a su vez considerar los dos subcasos:

2_α*°) $M_{Q(\vec{y})} = 0$, y por tanto $k_{Q(\vec{y})} = k$.

2_β*°) $M_{Q(\vec{y})} > 0$, de lo cual resulta:

$$k \leq \frac{a}{4M} \leq \frac{a}{4M_{Q(\vec{y})}}$$

y en consecuencia:

$$«k_{Q(\vec{y})} = \text{mín}\left\{k, \frac{a}{4M_{Q(\vec{y})}}\right\} = k»$$

Se obtiene, pues, en los dos subcasos $2_\alpha{}^{*o})$ y $2_\beta{}^{*o})$ en que se desdobla este caso $2^{*o})$, que para todo $\vec{y} \in F$, es $k_{Q(\vec{y})} = k$.

Combinando $1^{*o})$ y $2^{*o})$ se puede poner:

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow k_{Q(\vec{y})} = k)»$$

y por tanto, (Véase el n.º 2 de esta INTRODUCCIÓN):

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in F \Rightarrow (\exists\, \chi^{(\vec{y};\, Q(\vec{y}))})\ (\chi^{(\vec{y};\, Q(\vec{y}))} \in$$

$$\in \mathcal{F}\left([y_1 - k,\ y_1 + k] \times [y_1 - k,\ y_1 + k] \times \left[y_2 - \frac{a}{2},\ y_2 + \frac{a}{2}\right]\right) \text{ y } \chi^{(\vec{y};\, Q(\vec{y}))}$$

es una integral general local en G de (1) relativamente a $\vec{y}))»$

Sean $n = E\left(\dfrac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_1{}^0}{k}\right)$, es decir, $n \in N \cup \{0\}$ es tal que: $nk \leq \leq \tilde{x}_1 - \tilde{x}_1{}^0 < (n + 1)\, k$. En virtud de (4^{**}) es $n \geq 2$.

Pongamos: $\vec{y}^{\,0} = (y_1{}^0,\ y_2{}^0) = \vec{\tilde{x}}^{\,0}$, y para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\vec{y}^{\,i} = (y_1{}^i,\ y_2{}^i) = (\tilde{x}_1{}^0 + ik,\ \chi^{(\vec{y}^{\,i-1};\, Q(\vec{y}^{\,i-1}))}(\tilde{x}_1{}^0 + ik,\ y_1{}^{i-1},\ y_2{}^{i-1})) =$$
$$= (\tilde{x}_1{}^0 + ik,\ \Psi_{(\vec{\tilde{x}}^0)}(\tilde{x}_1{}^0 + ik)) \qquad (4^{***})$$

y consideremos la secuencia de intervalos de $\mathbf{R}^2$ (fig. 1):

$$«\tilde{Q}(\vec{y}^{\,0}) = [y_1{}^0 - k,\ y_1{}^0 + k] \times \left[y_2{}^0 - \frac{a}{2},\ y_2{}^0 + \frac{a}{2}\right];\ [y_1{}^1,\ y_1{}^1 + k] \times$$
$$\times \left[y_2{}^1 - \frac{a}{2},\ y_2{}^1 + \frac{a}{2}\right]; \ldots ;\ [y_1{}^n,\ y_1{}^n + k] \times \left[y_2{}^n - \frac{a}{2},\ y_2{}^n + \frac{a}{2}\right]»$$

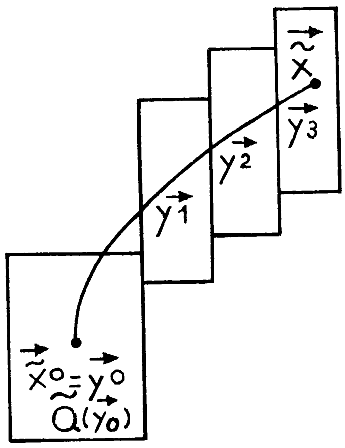

FIG. 1

Denotemos para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ mediante I^i a

$$[y_1^i - k,\ y_1^i + k] \times [y_1^i - k,\ y_1^i + k] \times \left[y_2^i - \frac{a}{2},\ y_2^i + \frac{a}{2}\right]$$

En virtud de la continuidad de $\chi^{(\vec{y}^{n-1};\,Q(\vec{y}^{n-1}))}$ sobre I^{n-1}, existe un intervalo abierto J^{n-1} de $\mathbf{R}$, centrado en y_2^{n-1} y contenido en $\left[y_2^{n-1} - \frac{a}{2},\ y_2^{n-1} + \frac{a}{2}\right]$, tal que:

$$«\chi^{(\vec{y}^{n-1};\,Q(\vec{y}^{n-1}))}(\{y_1^n\} \times \{y_1^{n-1}\} \times J^{n-1}) \subset \left[y_2^n - \frac{a}{2},\ y_2^n + \frac{a}{2}\right]»$$

Asimismo, si $n - 1 \geq 2$, se puede, en virtud de la continuidad de $\chi^{(\vec{y}^{n-2};\,Q(\vec{y}^{n-2}))}$ sobre I^{n-2}, determinar un intervalo abierto J^{n-2} de $\mathbf{R}$, centrado en y_2^{n-2} y contenido en $\left[y^{n-2} - \frac{a}{2},\ y^{n-2} + \frac{a}{2}\right]$, tal que:

$$«\chi^{(\vec{y}^{n-2};\,Q(\vec{y}^{n-2}))}(\{y_1^{n-1}\} \times \{y_1^{n-2}\} \times J^{n-2}) \subset J^{n-1}»$$

y por vía recurrente, se construirá una secuencia de intervalos abiertos de $\mathbf{R}$:

$$«J^{n-1};\ J^{n-2};\ ...;\ J^1»$$

centrados respectivamente en:

$$«y_2^{n-1};\ y_2^{n-2};\ ...;\ y_2^1»$$

y contenidos respectivamente en:

$$«\left[y_2^{n-1} - \frac{a}{2},\ y_2^{n-1} + \frac{a}{2}\right];\ \left[y_2^{n-2} - \frac{a}{2},\ y_2^{n-2} + \frac{a}{2}\right];\ ...;\ \left[y_2^1 - \frac{a}{2},\ y_2^1 + \frac{a}{2}\right]»$$

y tales que:

$$\left\{\begin{array}{c} «(\forall i)\ (i \in \{1, 2, ..., n-2\} \Rightarrow \chi^{(\vec{y}_1^i;\,Q(\vec{y}_1^i))}(\{y_1^{i+1}\} \times \{y_1^i\} \times J^i) \subset J^{i+1})» \\ \text{y} \\ «\chi^{(\vec{y}^{n-1};\,Q(\vec{y}^{n-1}))}(\{y_1^n\} \times \{y^{n-1}\} \times J^{n-1}) \subset \left[y_2^n - \frac{a}{2},\ y_2^n + \frac{a}{2}\right]» \end{array}\right\}$$

Finalmente, sea $Q^*(\vec{y}^0)$ un intervalo abierto de $\mathbf{R}^2$, centrado en $\vec{y}^0$, y contenido en $\widetilde{Q}(\vec{y}^0)$, tal que:

$$«\chi^{(\vec{y}^0;Q(\vec{y}^0))}(\{y_1^1\} \times Q^*(\vec{y}^0)) \subset J^1»$$

intervalo $Q^*(\vec{y}^0)$ existente siempre en virtud de la continuidad de $\chi^{(\vec{y}^0;Q(\vec{y}^0))}$ sobre $I^0 = [y_1^0 - k, y_1^0 + k] \times \widetilde{Q}(\vec{y}^0)$.

Para todo punto $(x_1^0, x_2^0) = \vec{x}^0 \in Q^*(\vec{y}^0)$, la aplicación parcial $\chi^{(\vec{y}^0;Q(\vec{y}^0))}_{(x_1^0,x_2^0)}$ determinada por $\chi^{(\vec{y}^0;Q(\vec{y}^0))}$ relativamente a los valores x_1^0, x_2^0 del segundo y tercero argumento, es (Véase n.º 2 de esta INTRODUCCIÓN) una solución local en G de la ecuación diferencial ordinaria (1) pasando por $\vec{x}^0$, y definida sobre el intervalo $[y_1^0 - k, y_1^0 + k] = [y_1^0 - k, y_1^1]$, que verifica: $«\chi^{(\vec{y}^0;Q(\vec{y}^0))}_{(x_1^0,x_2^0)}(y_1^1) \in J^1»$.

Pongamos:

$$«\alpha^0 = \chi^{(\vec{y}^0;Q(\vec{y}^0))}_{(x_1^0,x_2^0)}»$$

Se tiene así:

$$\left\{\begin{array}{c} «\alpha^0 \text{ es una solución local en } G \text{ de (1) pasando por } \vec{x}^0 \text{ y definida sobre } [y_1^0 - k, y_1^1]» \\ \text{y} \\ «(y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) \in [y_1^1 - k, y_1^1 + k] \times J^1 \subset \\ \subset [y_1^1 - k, y_1^1 + k] \times \left[y_2^1 - \frac{a}{2}, y_2^1 + \frac{a}{2}\right]» \end{array}\right.$$

La aplicación parcial $\chi^{(\vec{y}^1;Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^1,\alpha^0(y_1^1))}$ determinada por $\chi^{(\vec{y}^1;Q(\vec{y}^1))}$ relativamente a los valores $(y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) \in [y_1^1 - k, y_1^1 + k] \times \left[y_2^1 - \frac{a}{2}, y_2^1 + \frac{a}{2}\right]$ del segundo y tercer argumento, es una solución local en G de (1) pasando por $(y_1^1, \alpha^0(y_1^1))$, y definida sobre el intervalo $[y_1^1 - k, y_1^1 + k] = [y_1^0, y_1^2]$, que verifica: $«\chi^{(\vec{y}^1;Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^1,\alpha^0(y_1^1))}(y_1^2) \in J^2»$.

Pongamos:

$$«\alpha^1 = \chi^{(\vec{y}^1;Q(\vec{y}^1))}_{(y_1^1,\alpha^0(y_1^1))|[y_1^1,y_1^2]}»$$

Se tiene así:

$$\left\{\begin{array}{c} «\alpha^1 \text{ es una solución local por la derecha en } G \text{ de (1) pasando por } (y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) \text{ y definida sobre } [y_1^1, y_1^2]» \\ \text{y} \\ «(y_1^2, \alpha^1(y_1^2)) \in [y_1^2 - k, y_1^2 + k] \times J^2 \subset \\ \subset [y_1^2 - k, y_1^2 + k] \times \left[y_2^2 - \frac{a}{2}, y_2^2 + \frac{a}{2}\right]» \end{array}\right.$$

Recurrentemente, se obtendría una secuencia de funciones $(\alpha^i)_{0 \le i \le n}$ tal que:

«α^0 es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0$, definida sobre $[y_1^0 - k, y_1^1]$ y $(y_1^1, \alpha^0(y_1^1)) \in [y_1^1 - k, y_1^1 + k] \times$
$$\times \left[y_2^1 - \frac{a}{2}, y_2^1 + \frac{a}{2}\right] \text{ y } \alpha^0(y_1^1) \in J^1 \subset \left[y_2^1 - \frac{a}{2}, y_2^1 + \frac{a}{2}\right]»$$

y

«$(\forall i)$ $(i \in \{1, 2, ..., n-1\} \Rightarrow \alpha^i$ es una solución local por la derecha en G de (1) pasando por $(y_1^i, \alpha^{i-1}(y_1^i))$, definida sobre $[y_1^i, y_1^{i+1}]$ y
y $(y_1^{i+1}, \alpha^i(y_1^{i+1})) \in [y_1^{i+1} - k, y_1^{i+1} + k] \times$
$$\times \left[y_2^{i+1} - \frac{a}{2}, y_2^{i+1} + \frac{a}{2}\right] \text{ y } \alpha^i(y_1^{i+1}) \in J^{i+1} \subset \left[y_2^{i+1} - \frac{a}{2}, y_2^{i+1} + \frac{a}{2}\right]\Big)»$$

y

«α^n es una solución local por la derecha en G de (1) pasando por $(y_1^n, \alpha^{n-1}(y_1^n))$, definida sobre $[y_1^n, y_1^n + k]$»

y

$$«(\forall i)\ (i \in \{1, 2, ..., n\} \Rightarrow \alpha^i(y_1^i) = \chi^{(\vec{y}^i; \varrho(\vec{y}^i))}_{(y_1^i, \alpha^{i-1}(y_1^i))}(y_1^i) = \chi^{(\vec{y}^i; \varrho(\vec{y}^i))}_{(y_1^i, y_1^i, \alpha^{i-1}(y_1^i))} =$$
$$= \alpha^{i-1}(y_1^i) \text{ y } (\alpha^i)'(y_1^i) = \varrho(y_1^i, \alpha^i(y_1^i)) =$$
$$= \varrho(y_1^i, \alpha^{i-1}(y_1^i)) = (\alpha^{i-1})'(y_1^i))»$$

Sea $f : [y_1^0 - k, y_1^n + k] \to \mathbf{R}$, la función que para todo $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, prolonga α^i a $[y_1^0 - k, y_1^n + k] = [y_1^0 - k, y_1^1] \cup \cup \left(\bigcup_{1 \le i \le n-1} [y_1^i, y_1^{i+1}]\right) \cup [y_1^n, y_1^n + k]$, la cual es una solución local en G de (1) pasando por $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, y definida sobre el intervalo $[y_1^0 - k, y_1^n + k]$, teniéndose, por tanto, que:

$$«x_1^{izq}(\vec{x}^0) < y_1^0 - k \le x_1^0 \le y_1^0 + k = y_1^1 < y_1^n =$$
$$= \tilde{x}_1^0 + nk \le \tilde{x}_1 < \tilde{x}_1^0 + (n+1)k = y_1^n + k < x_1^{der}(\vec{x}^0)»$$

por lo que:

$$«\vec{x}^0 \in G \text{ y } \tilde{x}_1 \in [y_1^n, y_1^n + k[\subset]y_1^n - k, y_1^n + k[\subset]x_1^{izq}(\vec{x}^0), x_1^{der}\vec{x}^0)[\text{ y}$$
$$\text{y } (\forall x_1)\ (x_1 \in]y_1^n - k, y_1^n + k[\Rightarrow x_1^{izq}(\vec{x}^0) < x_1 < x_1^{der}(\vec{x}^0))»$$

es decir:

$$«\tilde{x}_1 \in]y_1^n - k, y_1^n + k[\text{ y }]y_1^n - k, y_1^n + k[\times \{\vec{x}^0\} \subset \mathcal{A}_{(G; \varrho)}»$$

y puesto que $\vec{x}^0 \in Q^*(\vec{y}^0) = Q^*(\vec{\widetilde{x}}^0)$ es arbitrario, se puede poner:

$$«\widetilde{x}_1 \in]y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k[\text{ y } (\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in Q^*(\vec{\widetilde{x}}^0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow]y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k[\times \{\vec{x}^0\} \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)})»$$

o lo que es equivalente:

$$«\widetilde{x}_1 \in]y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k[\text{ y }]y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k[\times Q^*(\vec{\widetilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}»$$

y por tanto:

$$«(\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) = (\widetilde{x}_1,\ \vec{\widetilde{x}}^0) \in]y_1{}^n - k,\ y_1{}^n + k[\times \mathring{Q}^*(\vec{\widetilde{x}}^0) \subset \mathcal{A}_{(G;\varrho)}»$$

lo que prueba que:

$$«(\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) \in \mathring{\mathcal{A}}_{(G;\varrho)}»$$

Combinando 1.º) y 2.º), podemos, pues, poner:

$$«(\forall_{(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0)})\ ((\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\widetilde{x}_1,\ \widetilde{x}_1{}^0,\ \widetilde{x}_2{}^0) \in \mathring{\mathcal{A}}_{(G;\varrho)})»$$

es decir:

$$«\mathcal{A}_{(G;\varrho)} = \mathring{\mathcal{A}}_{(G;\varrho)}»$$

lo que prueba lo afirmado más arriba.

Por otra parte, si G además de ser un abierto de $\mathbf{R}^2$, es un subconjunto conexo de $\mathbf{R}^2$, entonces, se verifica asimismo que $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}$ es un subconjunto conexo de $\mathbf{R}^3$.

En efecto, para todo par de puntos $((\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1{}^0, \widetilde{x}_2{}^0), (\widetilde{\widetilde{x}}_1, \widetilde{\widetilde{x}}_1{}^0, \widetilde{\widetilde{x}}_2{}^0)) =$ $= ((\widetilde{x}_1, \vec{\widetilde{x}}^0), (\widetilde{\widetilde{x}}_1, \vec{\widetilde{\widetilde{x}}}^0)) \in \mathcal{A}_{(G;\varrho)} \times \mathcal{A}_{(G;\varrho)}$ de $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}$, se tiene, en virtud de la misma definición de $\mathcal{A}_{(G;\varrho)}$:

$$\left.\begin{array}{c} «(\vec{\widetilde{x}}^0, \vec{\widetilde{\widetilde{x}}}^0) \in G \times G \text{ y } x_1{}^{izq}(\vec{\widetilde{x}}^0) < \widetilde{x}_1 < x_1{}^{der}(\vec{\widetilde{x}}^0) \text{ y } x_1{}^{izq}(\vec{\widetilde{\widetilde{x}}}^0) < \widetilde{\widetilde{x}}_1 < x_1{}^{der}(\vec{\widetilde{\widetilde{x}}}^0)» \\ \text{y} \\ «x_1{}^{izq}(\vec{\widetilde{x}}^0) < \widetilde{x}_1{}^0 < x_1{}^{der}(\vec{\widetilde{x}}^0) \text{ y } x_1{}^{izq}(\vec{\widetilde{\widetilde{x}}}^0) < \widetilde{\widetilde{x}}_1{}^0 < x_1{}^{der}(\vec{\widetilde{\widetilde{x}}}^0)» \end{array}\right\}$$

así como:

$$\left\{\begin{array}{c} «(\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0),\ x_1^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)[\ \Rightarrow (x_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)})» \\ \text{y} \\ «(\forall x_1)\ (x_1 \in]x_1^{izq}(\vec{\approx{x}}^0),\ x_1^{der}(\vec{\approx{x}}^0)[\ \Rightarrow (x_1,\ \approx{x}_1^0,\ \approx{x}_2^0) \in (\mathfrak{A}_{(G;\varrho)})» \end{array}\right.$$

y consecuentemente:

$$\left\{\begin{array}{c}]x_1^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0),\ x_1^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)[\ \times \{(\tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0)\} \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \\ \text{y} \\ ]x_1^{izq}(\vec{\approx{x}}^0),\ x_1^{der}(\vec{\approx{x}}^0)[\ \times \{(\approx{x}_1^0,\ \approx{x}_2^0)\} \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \end{array}\right.$$

Poniendo:

$$\left\{\begin{array}{c} H_1 =]x_1^{izq}(\vec{\tilde{x}}^0),\ x_1^{der}(\vec{\tilde{x}}^0)[\ \times \{(\tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0)\} \\ \text{y} \\ H_3 =]x_1^{izq}(\vec{\approx{x}}^0),\ x_1^{der}(\vec{\approx{x}}^0)[\ \times \{(\approx{x}_1^0,\ \approx{x}_2^0)\} \end{array}\right.$$

se verifica que:

$$\left\{\begin{array}{c} «H_1 \text{ es un sub-conjunto conexo de } \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \in H_1 \text{ y} \\ \text{y } (\tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \in H_1» \\ \text{y} \\ «H_3 \text{ es un sub-conjunto conexo de } \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \text{ y } (\approx{x}_1,\ \approx{x}_1^0,\ \approx{x}_2^0) \in H_3 \text{ y} \\ \text{y } (\approx{x}_1^0,\ \approx{x}_1^0,\ \approx{x}_2^0) \in H_3» \end{array}\right.$$

Sea:

$$«H_2 = \bigcup_{\vec{x}^0 \in G} \{(pr_1\vec{x}^0,\ pr_1\vec{x}^0,\ pr_2\vec{x}^0)\} = \bigcup_{\vec{x}^0 \in G} \{(pr_1\vec{x}^0,\ \vec{x}^0)\}»$$

Se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{c} «(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow x_1^{izq}(\vec{x}^0) < pr_1\vec{x}^0 < x_1^{der}(\vec{x}^0))» \\ \text{y} \\ «(\tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0) \in H_2 \text{ y } (\approx{x}_1^0,\ \approx{x}_1^0,\ \approx{x}_2^0) \in H_2» \end{array}\right\}$$

es decir:

$$«(\forall \vec{x}^0)\ (\vec{x}^0 \in G \Rightarrow (pr_1 \vec{x}^0,\ \vec{x}^0) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)})\ \text{y}\ (\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in H_2\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (\approx{x}_1{}^0,\ \approx{x}_1{}^0,\ \approx{x}_2{}^0) \in H_2»$$

o lo que es equivalente:

$$«\bigcup\{(pr_1 \vec{x}^0,\ \vec{x}^0)\} = H_2 \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\ \text{y}\ (\tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in H_2\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (\approx{x}_1{}^0,\ \approx{x}_1{}^0,\ \approx{x}_2{}^0) \in H_2»$$

por lo que:

$$«H_2 \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\ \text{y}\ H_1 \cap H_2 \neq \phi\ \text{y}\ H_2 \cap H_3 \neq \phi»$$

y por otra parte, denotando por $I_{\mathbf{R}^2} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la aplicación idéntica de $\mathbf{R}^2$ sobre $\mathbf{R}^2$, se verifica que:

$$«(pr_1 \times I_{\mathbf{R}^2})\ (G) = \bigcup_{\vec{x}^0 \in G} \{(pr_1 \times I_{\mathbf{R}^2})\ (\vec{x}^0)\} =$$
$$= \bigcup_{\vec{x}^0 \in G} \{(pr_1 \vec{x}^0,\ I_{\mathbf{R}^2}(\vec{x}^0))\} = \bigcup_{\vec{x}^0 \in G} \{(pr_1 \vec{x}^0,\ \vec{x}^0)\} = H_2»$$

y dada la continuidad de $pr_1 \times I_{\mathbf{R}^2} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}^2$, y puesto que además G se ha supuesto conexo, se sigue que:

$$«H_2 \subset \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\ \text{y}\ H_2\ \text{es un sub-conjunto conexo de}\ \mathbf{R}^3\ \text{y}$$
$$\text{y}\ H_1 \cap H_2 \neq \phi\ \text{y}\ H_2 \cap H_3 \neq \phi»$$

es decir:

$$«H_2\ \text{es un sub-conjunto conexo de}\ \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ H_1 \cap H_2 \neq \phi\ \text{y}\ H_2 \cap H_3 \neq \phi»$$

Se deduce de todo ello que:

$$«H = H_1 \cup H_2 \cup H_3\ \text{es un subconjunto conexo de}\ \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in H\ \text{y}\ (\approx{x}_1,\ \approx{x}_1{}^0,\ \approx{x}_2{}^0) \in H»$$

Así, pues, es válida la relación:

$$«(\exists\, H)\ (H \in \mathfrak{P}\,(\mathfrak{A}_{(G;\varrho)})\ \text{y}\ H\ \text{es conexo}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1{}^0,\ \tilde{x}_2{}^0) \in H\ \text{y}\ (\approx{x}_1,\ \approx{x}_1{}^0,\ \approx{x}_2{}^0) \in H)»$$

y dada la arbitrariedad de $((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0), (\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_1^0, \tilde{\tilde{x}}_2^0)) \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \times \mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$, lo es asimismo la:

$$«(\forall ((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0), (\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_1^0, \tilde{\tilde{x}}_2^0))) (((\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0), (\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_1^0, \tilde{\tilde{x}}_2^0)) \in \\ \in \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \times \mathfrak{A}_{(G;\varrho)} \Rightarrow (\exists H) (H \in \mathfrak{P}(\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}) \text{ y} \\ \text{y } H \text{ es conexo y } (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0) \in H \text{ y } (\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_1^0, \tilde{\tilde{x}}_2^0) \in H))»$$

relación que entraña (Chap. I, § 11, n.º 5, [6]) : «$\mathfrak{A}_{(G;\varrho)}$ es un subconjunto conexo de $\mathbf{R}^3$»

(Continuará en el próximo fascículo)