

FUNCIONALES ABELOIDES Y APLICACIONES A
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
DE CUARTO ORDEN

POR

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

INDICE

	<u>Páginas</u>
Introducción.....	5

CAPÍTULO I

*Ecuaciones en derivadas parciales de 4.º orden, homogéneas
y con tres variables independientes*

1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de 4.º orden, lineales, con coeficientes constantes, tres variables independientes y homogéneas respecto al orden de derivación.....	7
2. Cuárticas con dos puntos dobles infinitamente próximos. ...	10
3. Estudio especial del caso IV.....	17
4. Consideraciones sobre el problema de Cauchy.....	20
5. Resolución de la ecuación con condiciones iniciales nulas....	21
6. Resolución de la ecuación sin segundo miembro y con condiciones iniciales de tipo general.....	23

CAPÍTULO II

Estudio de los funcionales abeloides

	<u>Páginas</u>
7. Aplicación del producto funcional proyectivo a un funcional abeloide	25
8. Determinación de las funciones $J_r(X, Y)$	26
9. Interpretación geométrica	29
10. Aplicación a las ecuaciones de cuarto orden	31

CAPÍTULO III

Cálculo del producto funcional proyectivo

11. Estudio de los términos Z_r	32
12. Puntos singulares de $\frac{1}{J_r(X_1, Y)}$	33
13. Descomposición en ramas de la función J	35
14. Expresión del producto funcional proyectivo en el campo real.	39

CAPÍTULO IV

Fórmulas resolutivas

15. Media proyectiva de la indicatriz	42
16. Solución en el primer caso	44
17. Estudio del primer núcleo resolvente $\varphi(\tau)$	51
18. Estudio del segundo núcleo resolvente $\varphi_1(\tau)$	58
19. Influencia de la tangente doble	61
20. Solución en el segundo caso	63
Bibliografía	71

INTRODUCCION

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, cuyas soluciones estén en el campo real, implica considerar los problemas adecuados a cada ecuación; así para las de 2.º orden y con dos variables independientes resultan los tipos hiperbólico, elíptico y parabólico. En el primero un problema adecuado es el de CAUCHY, en el segundo el de contorno de DIRICHLET y en el tercero un problema mixto. Al aumentar el número de variables independientes o el orden de la ecuación, aparecen otros tipos, y la clasificación se hace más penosa, distinguiéndose siempre uno al que llamamos *totalmente hiperbólico* en el cual un problema adecuado es el de CAUCHY, pero, como para el mencionado de 2.º orden y dos variables independientes se pueden dar las condiciones iniciales sobre una curva no característica y no tangente a ninguna característica, ahora no se obtiene un resultado tan general, debiendo imponer a la superficie no característica otras condiciones, así para la ecuación de ondas de VOLTERRA hay que suponer que la región limitada por dicha superficie y el cono característico sea finita, condición que ha sido generalizada por COURANT y HILBERT en su « *Methoden der Mathematischen Physik* » para todas las ecuaciones de tipo totalmente hiperbólico.

L. FANTAPPIÈ ha dado un método para la integración en forma finita de las ecuaciones en derivadas parciales completamente lineales y con coeficientes constantes (8), y en algún otro caso, (10) valiéndose de su cálculo simbólico con los operadores de un campo lineal, mediante el cual él ha integrado la ecuación de ondas de VOLTERRA con las condiciones iniciales del tipo mencionado anteriormente; y en casos de cono característico no convexo se han estudiado las ecuaciones de 3.º orden lineales, con coeficientes constantes y homogéneas respecto al orden de derivación por J. AUGÉ (2), quien integra el tipo totalmente hiperbólico y cono característico de género 1; y por J. CASULLERAS (5), quien integra el tipo totalmente hiperbólico y cono característico de género 0; y una familia de las de 4.º orden ha sido estudiada por J. TEIXIDOR (20). En estas tres Memorias se halla solamente la solución con condiciones iniciales nulas sobre una superficie con las condiciones mencionadas anteriormente, excepto en la de J. CASULLERAS, quien plantea el problema con condiciones iniciales de tipo mas general (1), pero debe advertirse que la expresión conocida del 2.º miembro de la ecuación no

(1) Véase (5) pág. 57.

siempre se podrá poner en la forma $I^4 f(t, x, y)$, pues ello implicaría que esta función y sus derivadas respecto a t hasta la de 3.º orden fueran nulas sobre la superficie en la que se dan las condiciones iniciales, cosa que en general no sucede.

El presente trabajo se ha dividido en cuatro capítulos; en el I se separan diferentes clases en las ecuaciones de 4.º orden lineales, con coeficientes constantes y homogéneas respecto al orden de derivación y con tres variables independientes (a este caso se pueden reducir las completamente lineales y con dos variables independientes, como es sabido), se obtienen diversos tipos, destacándose el totalmente hiperbólico. La clasificación se acaba con todo detalle para las ecuaciones con cono característico con singularidades más elevadas (correlativo de cuárticas planas con cúspide de 2.ª especie o punto tacnodal ⁽¹⁾), y se ha elegido el totalmente hiperbólico de género 0 (que salvo las complicaciones de cálculo, se puede generalizar para el de género 1), y a fin de que sea más manejable elegimos un modelo, lo cual no implica simplificaciones de concepto, sólo de cálculo. Luego se considera la ecuación correspondiente, con las condiciones iniciales sobre una superficie Γ no característica cumpliendo las condiciones antes mencionadas, de tipo general, y para ello se desdobra el problema en dos, uno con las condiciones iniciales nulas y el otro con segundo miembro nulo y condiciones iniciales de tipo general, siendo la solución la suma de ambas. Y se plantea la solución siguiendo los métodos de FANTAPPÌÈ.

En el capítulo II se estudian los funcionales abeloides de las funciones de dos variables, obteniéndose unos teoremas de completa generalidad.

En el capítulo III se aplican estos teoremas al caso antes mencionado de cono característico con generatriz tacnodal y género 0.

Finalmente en el capítulo IV obtenemos las soluciones en el campo real de los dos problemas en que hemos dividido el problema general, se calculan los núcleos resolventes y se llega a la solución del problema con condiciones iniciales nulas por una integral de volumen extendida al volumen limitado entre la superficie Γ y el mínimo cono convexo que contenga al cono característico, según la teoría general. Luego se estudia con todo rigor la ecuación sin segundo miembro y condiciones iniciales del tipo más general obteniendo la solución por la derivada respecto a t de integrales de volumen y dobles de superficie.

OBSERVACIONES. Los números entre paréntesis que aparecen en esta introducción y en las notas se refieren a los de la tabla de bibliografía.

(1) Véase (4) pág. 436.

CAPITULO I

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 4.º ORDEN, HOMOGENEAS Y CON TRES VARIABLES INDEPENDIENTES

1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de 4.º orden, lineales, con coeficientes constantes, tres variables independientes y homogéneas respecto al orden de derivación. Se podrá poner la ecuación en la forma :

$$\sum_{\lambda+\mu+\nu=4} a_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^4 u}{\partial t^\lambda \partial x^\mu \partial y^\nu} = f(t, x, y) \quad (1,1)$$

la ecuación de las superficies características es :

$$\sum_{\lambda+\mu+\nu=4} a_{\lambda\mu\nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^\lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^\mu \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^\nu = 0 \quad (1,2)$$

y para que un plano pasando por un punto $M(t_0, x_0, y_0)$

$$\gamma(t - t_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \quad (1,3)$$

sea característico (es decir, que sea solución de (1,2)), deben verificar sus coeficientes

$$\sum_{\lambda+\mu+\nu=4} a_{\lambda\mu\nu} \gamma^\lambda \alpha^\mu \beta^\nu = 0 \quad (1,4)$$

que es la ecuación tangencial de un cono de 4.ª clase y vértice en el punto M ; este cono se llama cono característico de vértice en este punto. De (1,4) se deduce que la curva impropia de dicho cono es independiente del punto M y tiene como ecuación tangencial (1,4) que es una curva de 4.ª clase.

Si aplicamos a (1,4) una transformación proyectiva :

$$\begin{aligned} \alpha' &= a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma \\ \beta' &= a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma \\ \gamma' &= a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma \end{aligned} \quad (1,5)$$

de módulo no nulo, se transforma en

$$\sum_{\lambda'+\mu'+\nu'=4} A_{\lambda'\mu'\nu'} \gamma'^{\lambda'} \alpha'^{\mu'} \beta'^{\nu'} = 0 \quad (1,6)$$

y haciendo en (1,2) el cambio de variables

$$\begin{aligned}x &= a_{11} x' + a_{21} y' + a_{31} t' \\y &= a_{12} x' + a_{22} y' + a_{32} t' \\t &= a_{13} x' + a_{23} y' + a_{33} t'\end{aligned}\quad (1,7)$$

resulta :

$$\sum_{\lambda + \mu + \nu = 4} A_{\lambda \mu \nu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right)^{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right)^{\mu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right)^{\nu} = 0 \quad (1,8)$$

que es la ecuación de las superficies características de la

$$\sum_{\lambda + \mu + \nu = 4} A_{\lambda \mu \nu} \frac{\partial^4 u}{\partial t'^{\lambda} \partial x'^{\mu} \partial y'^{\nu}} = F(t', x', y') \quad (1,9)$$

Por tanto, reduciendo (1,4) a una forma canónica, se obtiene la reducción para (1,1).

Por otra parte, consideremos la cuártica correlativa de (1,4) que llamaremos forma asociada a (1,1)

$$C(t, x, y) = \sum_{\lambda + \mu + \nu = 4} a_{\lambda \mu \nu} t^{\lambda} x^{\mu} y^{\nu} = 0 \quad (1,10)$$

y de su estudio obtenemos la siguiente clasificación de (1,1) :

a) Si por una cierta transformación de las variables del tipo (1,5) (cambiando α, β, γ , por x, y, t), obtenemos que en (1,10) se puede destacar una variable (que podemos considerar que sea t), tal que dando de x e y valores arbitrarios reales, la ecuación en t que resulta tiene siempre sus cuatro raíces reales, diremos que (1,1) es del tipo *totalmente hiperbólico*. (Esto equivale a decir que toda recta que pasa por el origen corta a C en cuatro puntos reales).

b) Si (1,10) es una forma definida positiva (o negativa), diremos que (1,1) es del tipo *elíptico*.

c) Si (1,10) por una cierta transformación de las variables se puede llevar a otra forma con menos variables, diremos que (1,1) es del tipo *parabólico*. (Esto implica que (1,10) sea el producto de cuatro rectas que pasen por un punto).

Estos casos no agotan la clasificación, pueden aparecer otros que implicarán otros problemas para (1,1), distinguiremos los siguientes :

d) Si (1,10) es irreducible y no es ni de a) ni de b).

e) Si (1,10) es reducible y no es del tipo c).

f) Si (1,10) es forma semidefinida positiva o negativa (es decir, que se anule en algún punto, que será doble aislado).

El caso al que dedicaremos mayor atención es al *a*), y vamos a deducir algunas consecuencias de su definición. (Supondremos siempre efectuada la transformación a que alude dicho apartado).

1.^a La curva $C(x, y, t)$ no puede tener puntos cuspidales reales, pues en el entorno de este punto *a* el desarrollo de PUISSIEUX es una serie en

$(x - a)^{\frac{1}{p}}$ siendo *p* el orden de multiplicidad de dicho punto (suponemos que la tangente en él no es paralela al eje de ordenadas, si lo fuera *p* sería menor que el orden de multiplicidad); por tanto, toda recta que pase por un punto de dicho entorno no puede tener todas sus intersecciones con la curva reales si es *p* mayor que 2, y si *p* = 2, para $x < a$ las dos intersecciones con la curva son imaginarias. En todo caso se llega a contradicción con la definición de tipo totalmente hiperbólico.

2.^a El origen no puede pertenecer a *C*, pues al hacer $x = y = 0$, la ecuación en *t* es idénticamente nula.

3.^a Por el origen no pueden pasar tangentes reales a *C* que tengan contacto de orden impar, la demostración es análoga que la de la consecuencia 1.^a

4.^a De la 3.^a se deduce que es necesario que la clase de *C* sea par, pero no es suficiente.

5.^a La curva *C* no puede tener puntos dobles aislados, pues una recta próxima a él corta en dos puntos imaginarios conjugados y las que pasan por él están excluidas por la consecuencia 2.^a

De la 2.^a se deduce que en (1,10) habrá un término en t^4 cuyo coeficiente podemos suponer que es la unidad; por tanto (1,1) se podrá poner en la forma:

$$\frac{\partial^4 u}{\delta t^4} + \sum_{\substack{\lambda + \mu + \nu = 4 \\ \lambda < 4}} a_{\lambda, \mu, \nu} \frac{\partial^4 u}{\delta t^\lambda \delta x^\mu \delta y^\nu} = f(t, x, y) \quad (1,11)$$

De las cuárticas de género 3, vista la clasificación hecha por G. KOHN y G. LORIA ⁽¹⁾, resulta que es de tipo *a*) el VI formada por dos continuos reales uno interior al otro, del *b*) el V imaginaria, y los I formada por cuatro continuos reales, II por tres, III por dos, uno exterior al otro, y IV por un solo continuo real son del tipo *d*) (figura 1).

(1) Véase (17), página 520-21.

En las de género 2, 1, 0, dada la complejidad de casos que se pueden presentar, no haremos un estudio completo, (un caso particular del tipo *a*) y género 0 está estudiado por J. TEIXIDOR ⁽¹⁾), solamente lo haremos con detalle para las cuárticas (1,10) con singularidades infinitamente próximas que se verán en el próximo párrafo.

2. Cuárticas con dos puntos dobles infinitamente próximos. Estas cuárticas tienen que ser de género 1 ó 0. Para reducirlas a una forma canónica por una transformación homográfica llevamos este punto singular al impropio del eje *Y*, su única tangente a la recta impropia, el

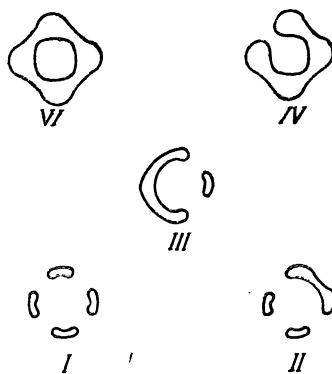


FIG. 1

origen sobre la 1.^a polar de este punto y el eje *X* a la tangente a dicha polar en el origen. La ecuación (en coordenadas absolutas) queda reducida a :

$$y^2 = P_4(x) + hx^2y$$

$$P_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \quad (2,1)$$

$$a_0 \neq 0$$

según sea :

$$h^2 + 4a_0 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad (2,2)$$

será el punto impropio del eje *Y*, punto de contacto de dos ramas lineales reales (punto tacnodal), cúspide de 2.^a especie o punto de contacto de dos ramas imaginarias conjugadas respectivamente ; por consiguiente, el signo de (2,2) es invariante afín.

⁽¹⁾ Véase (20).

La 1.^a polar del punto singular considerado es una cúbica descompuesta en la recta impropia y la parábola $2y = hx^2$ que a su vez en el caso que sea $h = 0$ degenera en la recta impropia y la $y = 0$

Si (2,1) tiene otro punto doble, éste debe verificar el sistema formado por (2,1) y

$$\begin{aligned} P'_4(x) + 2hxy &= 0 \\ 2y &= hx^2 \end{aligned} \quad (2,3)$$

o sea, su abscisa debe verificar el sistema

$$\begin{aligned} P_4(x) + \frac{h^2}{4}x^4 &= 0 \\ P'_4(x) + h^2x^3 &= 0 \end{aligned}$$

y como la segunda es la derivada de la primera, la abscisa del punto doble debe ser raíz múltiple de la ecuación:

$$\left(a_0 + \frac{h^2}{4}\right)x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \quad (2,4)$$

y la ordenada queda determinada por la segunda (2,3). Y como la parábola $2y = hx^2$ es la 1.^a polar del punto impropio del eje Y las tangentes en el punto doble deben estar armónicamente separadas por la tangente a dicha parábola en este punto y la paralela al eje Y que pasa por él, por tanto si éste fuera cuspidal su tangente coincidiría con la tangente a la parábola, y su abscisa sería raíz triple de (2,4). Las raíces simples de (2,4) dan las restantes intersecciones de la curva (2,1) con la mencionada parábola, que son los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde el punto impropio del eje Y. De (2,2) se deduce que si no es nulo (2,4) es de 4.^o grado, y si es nulo, de 3.^{er} grado.

Procedamos ahora a la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales (1,1) que tengan como forma asociada la (2,1) (puesta en homogéneas). Si (2,2) es nulo, por la consecuencia 1.^a del párrafo anterior la ecuación será siempre del tipo *d*) (por tener una cúspide real, y la curva no puede ser reducible, pues una curva de orden menor que 3 no puede tener cúspide de 2.^a especie), por tanto estudiaremos solamente cuando (2,2) sea distinto de cero.

Cortemos la curva (2,1) por una recta paralela al eje Y, $x = \bar{x}$, las ordenadas de los puntos de intersección de esta recta con la curva son (además del punto impropio doble), las raíces de:

$$y^2 - h\bar{x}^2y - P_4(\bar{x}) = 0 \quad (2,5)$$

cuyo discriminante es :

$$h^2 \bar{x}^4 + 4 P_4(\bar{x}) = 4 \left[\left(a_0 + \frac{h^2}{4} \right) \bar{x}^4 + a_1 \bar{x}^3 + a_2 \bar{x}^2 + a_3 \bar{x} + a_4 \right] \quad (2,6)$$

En primer lugar, consideremos que (2,1) sea de género 1, entonces (2,4) será primo con su derivada, y de las fórmulas de PLÜCKER se deduce que su clase es 8, el n.º de puntos de inflexión es 12, y el n.º de tangentes dobles es 8, dos de las cuales están confundidas con la tangente en el punto tacnodal (recta impropia). Las raíces de (2,4) pueden ser :

I. Las cuatro reales y distintas.

II. Dos reales y distintas, y las otras dos imaginarias conjugadas.

III. Dos pares de imaginarias conjugadas.

CASO I. Sean $a < b < c < d$, las cuatro raíces. (2,6) se puede escribir :

$$(4 a_0 + h^2) (\bar{x} - a) (\bar{x} - b) (\bar{x} - c) (\bar{x} - d) \quad (2,7)$$

si (2,2) es positivo (2,7) lo será solamente para

$$\bar{x} < a \quad b < \bar{x} < c \quad \bar{x} > d$$

por tanto, la curva constará de dos continuos reales, uno para $x \leq a$, $x \geq d$ y otro para $b \leq x \leq c$, siendo el primero infinito (parabólico) y el segundo finito, sobre este último no puede haber puntos de inflexión reales, pues si hubiera alguno su tangente cortaría a la curva en tres puntos confundidos en él, y en un punto más (por lo menos) a cada uno de los continuos métricos que forman el otro continuo gráfico, (pues la parábola $2y = hx^2$ es lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas al eje Y, por pasar cada una de estas ramas por el punto impropio de este eje tiende a él para valores positivos y negativos de y , de donde resulta que toda recta no paralela a dicho eje tiene con ese continuo un punto de intersección real), en total serían por lo menos cinco puntos de intersección, lo cual es absurdo, por tanto, este continuo finito es un óvalo, toda recta que pase por un punto interior de él corta a la curva en cuatro puntos reales, y por un punto exterior pasan tangentes reales a dicho óvalo, por tanto, no tiene esta propiedad; por consiguiente, la ecuación (1,1) relativa a este caso es del tipo a), debiendo elegir el origen entre b y c .

A fin de estudiar la forma de la curva, veamos que para $x > d$ hay solamente dos puntos de inflexión reales, uno interior y otro exterior a la parábola $2y = hx^2$; en efecto: para $x > d$ y próximo a él en un punto interior a dicha parábola la curvatura es hacia las y negativas (suponemos que es $h \geq 0$, pues en caso contrario basta cambiar y por $-y$) y para x suficientemente grande es hacia las y positivas, por tanto ha de haber un número impar de puntos de inflexión (no puede haber inflexiones de orden superior, pues su tangente cortaría en cuatro puntos

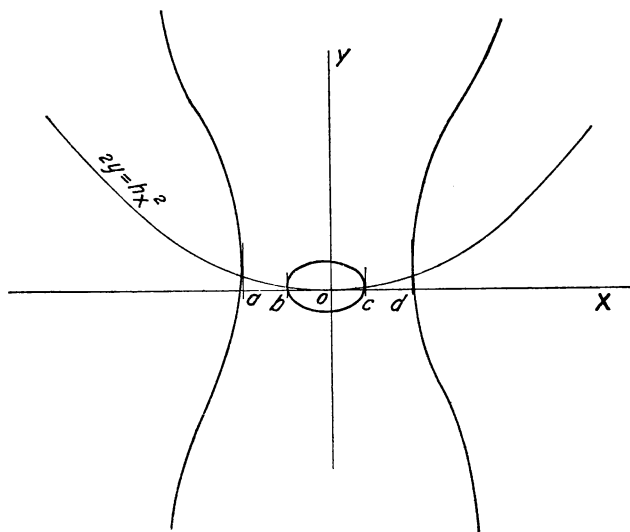


FIG. 2

por lo menos confundidos en él, y en otro punto al otro continuo métrico), si hubiera más de una, la tangente a la segunda cortaría a la curva en cinco puntos por lo menos, lo cual es absurdo, y análogamente para un punto exterior a la parábola y para $x < a$. De un modo análogo se puede ver que no hay tangentes dobles reales (figuras 2 y 3).

Si (2,2) es negativo, por ser el punto tacnodal aislado, y (2,7) positivo para

$$a < \bar{x} < b \quad c < \bar{x} < d$$

se deduce que la ecuación (1,1) correspondiente es del tipo d).

CASO II. Sean a, b las raíces reales de (2,4) y $c + di, c - di, d \neq 0$ las imaginarias conjugadas, (2,6) se puede escribir:

$$(4a_0 + h^2)(\bar{x} - a)(\bar{x} - b)[(\bar{x} - c)^2 + d^2] \quad (2,8)$$

si (2,2) es positivo (2,8) lo será solamente para $x < a$, $x > b$ y la curva constará de un solo continuo gráfico parabólico, y si fuera $h = 0$ una recta paralela al eje X la corta en dos puntos reales solamente, y si fuera $h > 0$, si corta a un continuo métrico en tres puntos, al ir girando forzosamente llegará a una posición límite tangente, por tanto (consecuencia 3.^a del § 1) se deduce que la ecuación (1,1) correspondiente es, del tipo d). Si (2,2) fuera negativa, la curva constaría de un solo continuo gráfico, y análogamente al caso I resulta que la ecuación correspondiente es del tipo d).

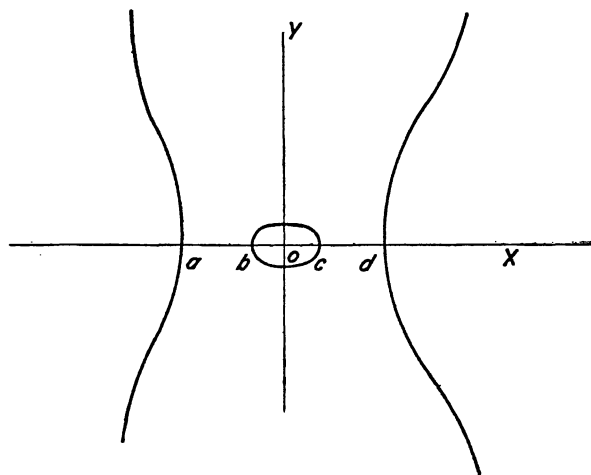


FIG. 3

CASO III. Sean $a + bi$, $a - bi$, $c + di$, $c - di$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ las raíces de (2,4). (2,6) se podrá poner en la forma

$$(4a_0 + h^2) [(\bar{x} - a)^2 + b^2] [(\bar{x} - c)^2 + d^2] \quad (2,9)$$

si (2,2) es positivo (2,9) lo será para todo valor de x y la curva constará de dos continuos gráficos tangentes entre sí en el punto tacnodal y exteriores uno a otro, y desde cualquier punto, toda recta al ir girando llegará a cortar forzosamente en puntos imaginarios, por tanto la ecuación correspondiente es del tipo d). Si (2,2) fuera negativo, entonces (2,2) es negativo para todo valor de x por tanto (2,1) es una curva imaginaria con sólo el punto tacnodal real. La ecuación (1,1) correspondiente es del tipo f).

Consideremos ahora que el género sea 0, entonces (2,6) tendrá una raíz doble o triple; si fuera triple el punto doble propio sería cuspidal,

y por lo que se ha dicho la ecuación correspondiente sería del tipo *d*). Estudiaremos, pues, solamente cuando la raíz sea doble, a la cual llamaremos en lo sucesivo *a*. De las fórmulas de PLÜCKER se deduce que la clase es 6, el n.º de puntos de inflexión 6 y 4 tangentes dobles, dos de las cuales están confundidas en la recta impropia. Distinguiremos los siguientes casos :

IV. Tiene (2,6) otras dos raíces reales simples *b* y *c*, siendo *a* exterior al segmento de extremos *b* y *c*.

V. Como en la anterior, tiene dos raíces simples *b* y *c*, y *a* interior al segmento \overline{bc} .

VI. Las otras dos raíces son imaginarias conjugadas.

VII. Y para completar, consideramos los casos de degeneración que serán cuando (2,6) tenga dos raíces dobles (reales o imaginarias conjugadas) o una cuádruple.

CASO IV. Podemos siempre considerar que sea $a < b < c$, pues si fuera $a > b > c$ por el cambio

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= y\end{aligned}$$

se pasa a la anterior; (2,6) se puede escribir

$$(4a_0 + h^2)(\bar{x} - a)^2(\bar{x} - b)(\bar{x} - c) \quad (2,10)$$

que si (2,2) es positivo, es positivo para

$$\bar{x} > c \quad a < \bar{x} < b \quad \bar{x} < a$$

repitiendo los mismos razonamientos, que para el caso I, se ve que contendrá dos inflexiones para $\bar{x} > c$ y no habrá más inflexiones reales (pues para $x < a$ e interior a la parábola la curvatura es hacia las *y* positivas, si hubiera un primer punto de inflexión su tangente por el mismo, razonamiento que para el caso mencionado cortaría en más de cuatro puntos), y toda recta que pasa por un punto interior al arco de curva entre *a* y *b* cortará en cuatro puntos reales; por tanto la ecuación en derivadas parciales correspondiente es del tipo *a*), debiendo elegir el origen entre *a* y *b*. Si (2,2) fuera negativo, repitiendo los mismos razonamientos, resultaría que la ecuación es del tipo *d*). (Figuras 4 y 5).

CASO V. Sea $b < a < c$ en este caso es fácil ver que si $(2,2)$ es positivo la curva tiene el punto doble aislado a , y por la consecuencia 5.^a

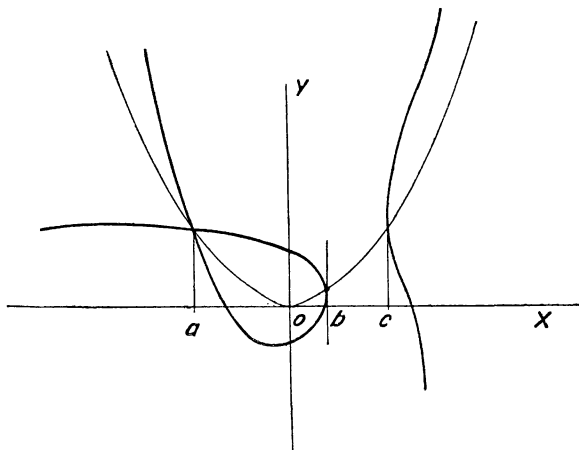


FIG. 4

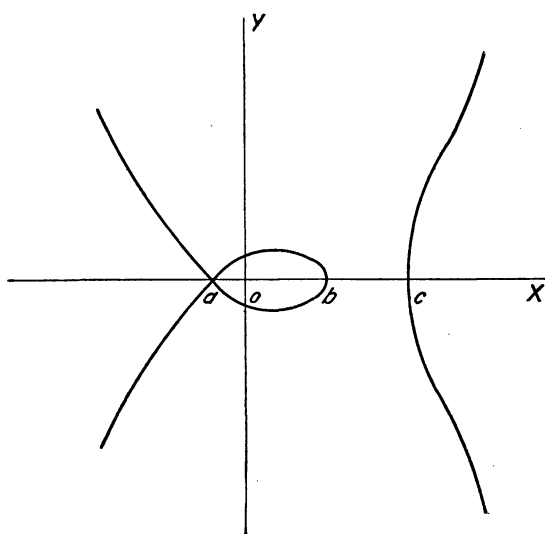


FIG. 5

del § 1 resulta que la ecuación correspondiente es del tipo d). Y para $(2,2)$ negativo análogamente a los casos anteriores resulta que también es del tipo d).

CASO VI. Si (2,2) es positivo se deduce fácilmente que la ecuación correspondiente es del tipo d), y si es negativo, del tipo f).

CASO VII. En este caso (2,1) son dos parábolas de eje paralelo al Y , por tanto la ecuación correspondiente es del tipo e). Si las raíces dobles de (2,6) son reales, entonces hay una región del plano en que todas las rectas que pasan por un punto de ella cortan en cuatro puntos reales lo que da un tipo análogo al a), y si son imaginarias o es una cuádruple da un tipo análogo al d).

3. Estudio especial del caso IV. Fijaremos en lo sucesivo nuestra atención en el caso IV del párrafo anterior, que para simplificar los cálculos tomaremos $h = 0$ aunque los razonamientos se pueden generalizar para $h \neq 0$, por tanto, será la ecuación (1,1) que tiene como curva asociada la

$$y^2 = a_0 (x - a)^2 (x - b) (x - c) \quad (3,1)$$

con $a_0 > 0$, $a < 0 < b < c$, por tanto, la curva impropia del cono característico será (véase § 1) la

$$\beta^2 = a_0 (\alpha - a)^2 (\alpha - b) (\alpha - c) \quad (3,2)$$

y efectuando la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{-aa_0} \beta' \\ \alpha &= -a \alpha' \end{aligned} \quad (3,3)$$

y suprimiendo los acentos se pasa a una curva de ecuación

$$\beta^2 = (\alpha + 1)^2 (\alpha - b) (\alpha - c) \quad (3,4)$$

los b y c son los mismos que en (3,2) divididos por $-a$, por tanto, siguen siendo positivos y $b < c$; tomando como nuevas variables

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + 1 \\ \beta_1 &= \beta \end{aligned} \quad (3,5)$$

resulta :

$$\beta_1^2 = \alpha_1^4 + a_1 \alpha_1^3 + a_2 \alpha_1^2 \quad (3,6)$$

y vamos a obtener la ecuación puntual de (3,6), para lo cual siguiendo a J. TEIXIDOR ⁽¹⁾, apliquémosle la transformación cuadrática

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{u} \\ \beta_1 &= \frac{v}{u^2}\end{aligned}\quad (3,7)$$

(3,6) se transforma en la cónica (en coordenadas plückerianas u, v).

$$v^2 = 1 + a_1 u + a_2 u^2 \quad (3,8)$$

aplicando la misma transformación (3,7) al punto

$$x_1 \alpha_1 + y_1 \beta_1 + t_1 = 0 \quad (3,9)$$

lo transforma en la cónica

$$\alpha_1 u + y_1 v + t_1 u^2 = 0 \quad (3,10)$$

consideremos la serie formada por las cónicas (3,8) y (3,10) y para que el punto (3,9) pertenezca a (3,6) deben ser estas cónicas tangentes entre sí; por tanto, la ecuación característica de la serie debe tener una raíz doble. Esta ecuación es:

$$\begin{vmatrix} a_2 + \lambda t_1 & 0 & \frac{a_1 + \lambda x_1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{\lambda y_1}{2} \\ \frac{a_1 + \lambda x_1}{2} & \frac{\lambda y_1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o sea:

$$y_1 \lambda^3 + (a_2 y_1^2 - x_1^2) \lambda^2 + (4 t_1 - 2 a_1 x_1) \lambda + 4 a_2 - a_1^2 = 0 \quad (3,11)$$

y su discriminante igualado a cero será la ecuación puntual de (3,6). Recordando que el discriminante de una ecuación de 3.^{er} grado

$$l_0 \lambda^3 + l_1 \lambda^2 + l_2 \lambda + l_3 = 0$$

es:

$$l_1^2 l_2^2 - 4 l_1^3 l_3 + 18 l_0 l_1 l_2 l_3 - 4 l_0 l_2^3 - 27 l_0^2 l_3^2$$

⁽¹⁾ Véase (20), página 6 y sgs.

aplicándolo a (3,11) y operando queda :

$$\begin{aligned} & 16 a_2 x_1^6 + 4 a_2^3 (a_1 - 4 a_2) y_1^5 + 4 a_2 (a_1^2 - 12 a_2) x_1^4 y_1^2 + \\ & + 8 a_1^2 (6 a_2 - a_1^2) x_1^2 y_1^4 - 16 x_1^5 t_1 + 4 a_1 (44 a_2 - a_1^2) x_1^3 y_1^2 t_1 - \\ & - 4 a_1 a_2 (40 a_2 - 9 a_1^2) x_1 y_1^4 t_1 + 4 x_1^4 t_1^2 - 8 (40 a_2 - 3 a_1^2) x_1^2 y_1^2 t_1^2 + \\ & + (144 a_1^2 a_2 - 128 a_2^2 - 27 a_1^4) y_1^4 t_1^2 + 384 a_1 x_1 y_1^2 t_1^3 - 256 y_1^2 t_1^4 = 0 \quad (3,12) \end{aligned}$$

aplicándole la transformación inversa de la dual de (3,5), o sea :

$$\begin{aligned} x_1 &= X \\ y_1 &= Y \\ t_1 &= T - X \end{aligned} \quad (3,13)$$

obtendremos la ecuación puntual de (3,4), y pasando a coordenadas absolutas ($T = 1$) queda :

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= 4(4 a_0 + 4 a_1 + 1) X^6 + 4 a_2^3 (a_1^2 - 4 a_2) Y^6 + 4 [a_2 (a_1^2 - 12 a_2) + \\ & + a_1 (a_1^2 - 44 a_2) + 2(3 a_1 - 40 a_2) - 96 a_1 - 64] X^4 Y^2 + [8 a_2^2 (6 a_2 - a_1^2) + \\ & + 4 a_1 a_2 (40 a_2 - 9 a_1^2) + 144 a_1^2 a_2 - 128 a_2 - 27 a_1^4] X^2 Y^4 - 8(2 a_1 + 1) X^5 + \\ & + 4 [a_1 (44 a_2 - a_1^2) + 4(40 a_2 - 3 a_1^2) + 288 a_1 + 256] X Y^4 + 4 X^4 + \\ & + 8(3 a_1^2 - 40 a_2 - 144 a_1 - 192) X^2 Y^2 + (144 a_1^2 a_2 - 128 a_2^2 - 27 a_1^4) Y^4 + \\ & + 128(3 a_1 + 8) X Y^2 - 256 Y^2 = 0. \quad (3,14) \end{aligned}$$

Los parámetros a_1 , a_2 , han de ser tales que las raíces de (3,6) sean reales, distintas y mayores que la unidad (que equivale a decir que las de (3,2) sean reales, distintas y positivas), lo que da las condiciones :

$$a_1 + 2 < 0 \quad a_1 + a_2 + 1 > 0 \quad a_1^2 - 4 a_2 > 0 \quad (3,15)$$

(3,4) puesto en función de estos parámetros es :

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &\equiv \alpha^4 + (4 + a_1) \alpha^3 + (6 + 3 a_1 + a_2) \alpha^2 + (4 + 3 a_1 + 2 a_2) \alpha + \\ & + 1 + a_1 + a_2 - \beta^2 = 0 \quad (3,16) \end{aligned}$$

y con el fin de simplificar los cálculos, tomaremos unos valores particulares de estos parámetros (lo que no restringe la generalidad, mientras sigan cumpliendo las condiciones (3,15)), los más sencillos que cumplen dichas condiciones son $a_1 = -5$, $a_2 = 5$, con lo que :

$$Q(\alpha, \beta) \equiv \alpha^4 - \alpha^3 - 4 \alpha^2 - \alpha + 1 - \beta^2 = 0 \quad (3,17)$$

y

$$\begin{aligned}
 P(X, Y) = & 16 X^6 + 2500 Y^6 + 264 X^4 Y^2 + 1425 X^2 Y^4 + \\
 & + 48 X^5 + 564 X^3 Y^2 + 1650 X Y^4 + \\
 & + 16 X^4 - 376 X^2 Y^2 - 2075 Y^4 - 896 X Y^2 - 256 Y^2 = 0.
 \end{aligned} \quad (3,18)$$

y para este caso

$$b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad c = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (3,19)$$

Se deduce que $P(X, Y) = 0$ tiene la tangente doble $X = 1$ con puntos de contacto $Y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, el punto $X = Y = 0$ es un punto tacnodal

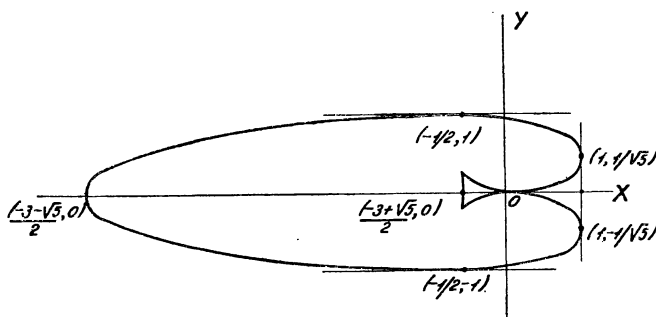


FIG. 6

de tangente $Y = 0$ que la corta además en los puntos $\frac{-1}{b}$, $\frac{-1}{c}$, tiene dos puntos cuspidales reales y cuatro imaginarios, otros dos puntos nodales imaginarios, y ningún punto de inflexión (real ni imaginario) (Figura 6).

4. Consideraciones sobre el problema de Cauchy. Nos proponemos, pues, integrar la ecuación (1,1) de cono característico (3,17), o sea :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} - 4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(t, x, y) \quad (4,1)$$

con las condiciones iniciales sobre una superficie no característica :

$$\Gamma \equiv t - \psi(x, y) = 0 \quad (4,2)$$

siguientes :

$$\begin{aligned} u_{\Gamma} &= \varphi_0(x, y); \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{\Gamma} = \varphi_2(x, y) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\Gamma} &= \varphi_1(x, y); \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{\Gamma} = \varphi_3(x, y) \end{aligned} \quad (4,3)$$

donde supondremos que las funciones $\varphi_i(x, y)$ son continuas y derivables hasta el orden que sea necesario para las consideraciones que siguen.

El problema que nos proponemos resolver se reduce a los dos siguientes : 1.º, Resolver la ecuación (4,1) con las condiciones iniciales sobre Γ idénticamente nulas. 2.º, Resolver la ecuación (4,1) con el segundo miembro idénticamente nulo y las condiciones iniciales sobre Γ (4,3).

En efecto : sea $u = \omega(t, x, y)$, la solución del 1.º y $u = \chi(t, x, y)$ la del 2.º, es inmediato que la solución del problema propuesto es la suma de ambas soluciones.

5. Resolución de la ecuación con condiciones iniciales nulas. Introduzcamos los operadores ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} I f(t, x, y) &= \int_{\psi}^t f(s, x, y) ds \\ B_x f(t, x, y) &= I \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, y) = \int_{\psi}^t f_x'(s, x, y) ds \\ B_y f(t, x, y) &= I \frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y) = \int_{\psi}^t f_y'(s, x, y) ds \end{aligned} \quad (5,1)$$

aplicando cuatro veces el operador I a ambos miembros de (4,1), y teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas, dichos operadores aplicados a la solución serán permutables ⁽²⁾, y permutando con la derivación respecto a x e y , se obtiene :

$$u - B_x u - 4 B_x^2 u - B_y^2 u - B_x u + B_x^4 u = I^4 f(t, x, y) \quad (5,2)$$

que por ser estos operadores de campo lineal (5,2) es el resultado de aplicar a u el operador

$$Q(B_x, B_y) = 1 - B_x - 4 B_x^2 - B_y^2 - B_x^3 + B_x^4 \quad (5,3)$$

⁽¹⁾ Véase (8), pág. 166.

⁽²⁾ Véase (8), pág. 167.

y, por tanto, la solución es el resultado de aplicar a ambos miembros de (5,2) el operador inverso al (5,3), o sea,

$$u = \frac{1}{Q(B_x B_y)} I^4 f(t, x, y) \quad (5,4)$$

y para abreviar, llamando

$$I^n f(t, x, y) = f_n(t, x, y) \quad (5,5)$$

resulta :

$$u = \frac{1}{Q(B_x B_y)} I f_3(t, x, y) \quad (5,6)$$

y recordando que el segundo miembro de (5,6) es un funcional analítico mixto lineal de $\frac{1}{Q(\alpha, \beta)}$, consideramos su indicatriz proyectiva que es la función definida por el siguiente operador :

$$p(a, b; t, x, y) = \frac{1}{1 + a B_x + b B_y} I f_3(t, x, y) \quad (5,7)$$

y siguiendo a CASULLERAS ⁽¹⁾, llamaremos I_x al operador

$$\frac{I}{1 + a B_x + b B_y}$$

por tanto (5,7) es

$$p(a, b; t, x, y) = I_x f_3(t, x, y) \quad (5,8)$$

y, por tanto, $p(a, b)$ es la solución de la ecuación integrodiferencial :

$$p + a B_x p + b B_y p = I f_3(t, x, y) \quad (5,9)$$

y derivando respecto a t , queda :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a \frac{\partial p}{\partial x} + b \frac{\partial p}{\partial y} = f_3(t, x, y) \quad (5,10)$$

por tanto, p es la solución de esta ecuación con las condiciones iniciales :

$$(p)_\Gamma = (I f_3)_\Gamma = 0 \quad (5,11)$$

o sea :

$$p = \int_{t_0}^t f_3[s, x + a(s - t), y + b(s - t)] ds \quad (5,12)$$

donde t_0 es punto de intersección con Γ de la recta que pasa por el punto $M(t, x, y)$ y de cosenos directores proporcionales a $1, a, b$, respectivamente.

⁽¹⁾ Véase (5), pág. 13.

Con esto la solución es (1).

$$u = \left\{ \frac{\overset{\Delta}{1}}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} \frac{\overset{\Delta}{p(\lambda^1, \lambda^2; t, x, y)}}{\quad} \quad (5,13)$$

Ahora bien, por ser el producto funcional proyectivo simétrico respecto a ambas funciones que intervienen, podemos considerar en (5,13) que $\frac{1}{Q}$ sea la indicatriz, con lo que el funcional será abeloide (2).

6. Resolución de la ecuación sin segundo miembro y con condiciones iniciales de tipo general. En primer lugar, observemos que de las diferenciales totales sucesivas de la solución u , considerando que la variable t es función de x e y dada por (4,2), podremos conocer todas las derivadas de 1.º, 2.º y 3.º orden de u sobre Γ en función de x, y .

Consideremos los mismos operadores (5,1), pero como las condiciones iniciales no son nulas, éstos aplicados a la solución no serán permutables (3). Apliquemos cuatro veces el operador I a (4,1) (donde el segundo miembro es nulo), y teniendo en cuenta las condiciones iniciales (4,3) resulta

$$u - I \frac{\partial u}{\partial x} - 4 I^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - I^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - I^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + I^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = g(t, x, y) \quad (6,1)$$

donde :

$$\begin{aligned} g(t, x, y) = & I^3 \varphi_3(x, y) + I^2 \varphi_2(x, y) + I \varphi_1(x, y) + \varphi_0(x, y) - \\ & - I^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right)_{\Gamma} - I^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_{\Gamma} - I \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\Gamma} - 4 I^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right)_{\Gamma} - 4 I^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{\Gamma} - \\ & - I^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} \right)_{\Gamma} - I^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{\Gamma} - I^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{\Gamma} \end{aligned} \quad (6,2)$$

pero teniendo en cuenta que (4)

$$\begin{aligned} I \frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{\partial}{\partial x} I f + f_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ I \frac{\partial}{\partial y} f &= \frac{\partial}{\partial y} I f + f_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (6,3)$$

(1) Véase (11), pág. 288.

(2) Véase (11), pág. 260 y siguientes.

(3) Véase (8), pág. 167.

(4) Véase (8), pág. 167.

resultan las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned}
I \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} Iu + \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
I^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} B_x Iu + \frac{\partial}{\partial x} I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + I \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
I^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} B_y Iu + \frac{\partial}{\partial y} I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + I \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
I^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} B_x^2 Iu + \frac{\partial}{\partial x} B_x I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} I^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\
&\quad + I^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
I^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \frac{\partial}{\partial x} B_x^3 Iu + \frac{\partial}{\partial x} B_x^2 I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} B_x I^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} I^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} + I^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6,4}
\end{aligned}$$

Efectuadas estas transformaciones en los términos de (6,1) y pasando los términos conocidos al segundo miembro, apliquémosle otra vez a ambos miembros el operador I , y llamando

$$u_1 = Iu \tag{6,5}$$

resulta :

$$u_1 - B_x u_1 - 4 B_x^2 u_1 - B_y^2 u_1 - B_x^3 u_1 + B_x^4 u_1 = I \bar{g}(t, x, y) \tag{6,6}$$

donde :

$$\begin{aligned}
\bar{g}(t, x, y) &= g(t, x, y) + \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4 \frac{\partial}{\partial x} I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4 I \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\
&\quad + 4 \frac{\partial}{\partial x} I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} I \varphi_0 y \frac{\partial \psi}{\partial y} + I \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} B_y I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} I^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} + I^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} B_x^2 I \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x} B_x I^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} I^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} - I^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6,7}
\end{aligned}$$

ahora bien, tanto u_1 como $I \bar{g}$ son nulas sobre Γ , por tanto, los operadores (5,1) aplicados a u_1 , son permutables, y se puede hacer con ellos un cálculo riguroso.

Por consiguiente, tendremos :

$$u_1 = \frac{1}{Q(B_x B_x)} I\bar{g}(t, x, y) \quad (6,8)$$

y

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{Q(B_x B_y)} I\bar{g}(t, x, y) \quad (6,9)$$

Análogamente como en § 5, la indicatriz proyectiva será

$$P_1(a, b; t, x, y) = I_x \bar{g}(t, x, y) \quad (6,10)$$

o sea :

$$p_1(a, b; t, x, y) = \int_{t_0}^t \bar{g}[s, x + a(s-t), y + b(s-t)] ds \quad (6,11)$$

y la solución es :

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\Delta}{Q(\lambda_1 \lambda_2)} \right\} \frac{\Delta}{p_1(\lambda^1 \lambda^2; t, x, y)} \quad (6,12)$$

que es la derivada de un funcional abeloide.

CAPITULO II

ESTUDIO DE LOS FUNCIONALES ABELOIDES

7. Aplicación del producto funcional proyectivo a un funcional abeloide. Sea $Q(\alpha, \beta) = 0$ la ecuación plückeriana de una curva de clase m ; y de grado $g \leq m$ respecto a β . En una Memoria del Profesor FANTAPPIÈ⁽¹⁾, se llega a la expresión del producto funcional proyectivo de indicatriz $\frac{1}{Q(\alpha, \beta)}$, el cual es :

$$\left\{ \frac{\Delta}{Q(\lambda_1 \lambda_2)} \right\} \frac{\Delta}{y(\lambda^1 \lambda^2)} = \sum_{r=1}^g Z_r \quad (7,1)$$

donde :

$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\delta_r(0)}} dY \int_{C_1} \frac{1}{XQ'_\beta[\alpha, \delta_r(\alpha)] - YQ'_\alpha[\alpha, \delta_r(\alpha)]} z(X, Y) dX \quad (7,2)$$

⁽¹⁾ Véase (11), pág. 265 y siguientes.

y $\beta = \delta_r(\alpha)$ es una raíz de $Q(\alpha, \beta) = 0$, y α puesta en función de X, Y por

$$\alpha X + \delta_r(\alpha) Y + 1 = 0 \quad (7,3)$$

$z(a, b)$ es la media proyectiva de la función $y(a, b)$, o sea,

$$z(a, b) = y(a, b) + a \frac{\partial y}{\partial a} + b \frac{\partial y}{\partial b} \quad (7,4)$$

y C_1 es, para cada valor de Y real entre los límites de integración, un camino cerrado en el plano complejo de X tal que sobre él y en su interior sea regular $z(X, Y)$ y a su exterior y sobre él lo sea el otro factor de (7,2) (C_1 por tanto depende de Y). Y llamando

$$J_r(X, Y) = X Q'_\beta[\alpha, \delta_r(\alpha)] - Y Q'_\alpha[\alpha, \delta_r(\alpha)] \quad (7,5)$$

donde α se ha puesto en función de X, Y por (7,3), resulta que (7,2) se puede escribir :

$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\delta_r(0)}} dY \int_{C_1} \frac{z(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX \quad (7,6)$$

y el extremo superior de la primera integral es la ordenada de una tangente paralela al eje X de la envolvente $Q(\alpha, \beta) = 0$.

8. Determinación de las funciones $J_r(X, Y)$. Por lo que se ha visto en el párrafo anterior, resulta que las m funciones $J_r(X, Y)$ son las ramas de la función que resulta de eliminar α, β entre

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= 0 \\ \alpha X + \beta Y + 1 &= 0 \\ X Q'_\beta - Y Q'_\alpha &= J \end{aligned} \quad (8,1)$$

donde $Q(\alpha, \beta) = 0$ representa la curva que se ha indicado en el párrafo anterior.

TEOREMA 1. *La eliminante es un polinomio de grado m en J .* En efecto : de la segunda (8,1) despejamos β ⁽¹⁾,

$$\beta = -\frac{1 + \alpha X}{Y} \quad (8,2)$$

⁽¹⁾ Véase (2), pág. 26 y siguientes.

y sustituyendo en la primera, tenemos :

$$Q\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) = 0 \quad (8,3)$$

y multipliquémosla por Y^g (donde $g \leq m$ es el grado de $Q(\alpha, \beta)$ respecto a β), con lo que

$$f(\alpha) = Y^g Q\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) = 0 \quad (8,4)$$

será un polinomio en α de grado m (pues en $Q(\alpha, \beta)$ habrá un término de grado m , al que corresponderá un término de grado m en $f(\alpha)$) y sus coeficientes polinomios en X, Y de grado g (puesto que en un término $\alpha^\mu \beta^\nu$ de $Q(\alpha, \beta)$ ($\mu + \nu \leq m, \nu \leq g$) corresponde $\alpha^\mu (-1 - \alpha X)^\nu Y^{g-\nu}$ que le corresponde un término de grado g del coeficiente de $\alpha^{\mu+\nu}$ el cual no se puede simplificar con otro, pues para otro término $\alpha^{\mu'} \beta^{\nu'}$ con $\mu' + \nu' = \mu + \nu$, el término de grado g en el coeficiente de $\alpha^{\mu+\nu}$ es $X^{\nu'} Y^{g-\nu'}$ que es distinto del anterior y los términos del coeficiente de $\alpha^{\mu+\nu}$ que provienen de términos $\alpha^{\mu''} \beta^{\nu''}$ con $\mu'' + \nu'' > \mu + \nu$ son de grado menor que g). Sustituyendo β dada por (8,2) en la tercera (8,1), tenemos :

$$X Q'_\beta\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) - Y Q'_\alpha\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) - J = 0 \quad (8,5)$$

y multipliquémosla por Y^{g-1} con lo que

$$X Y^{g-1} Q'_\beta\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) - Y^g Q'_\alpha\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) - Y^{g-1} J = 0 \quad (8,6)$$

pero por otra parte, derivemos (8,4) respecto a α

$$f'(\alpha) = Y^g Q'_\alpha\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) - X Y^{g-1} Q'_\beta\left(\alpha, -\frac{1+\alpha X}{Y}\right) \quad (8,7)$$

y por tanto (8,6) se puede escribir :

$$f'(\alpha) + Y^{g-1} J = 0 \quad (8,8)$$

y llamando

$$\eta = -Y^{g-1} J \quad (8,9)$$

tenemos que hay que eliminar α entre

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ f'(\alpha) - \eta &= 0 \end{aligned} \quad (8,10)$$

y la eliminante de SYLVESTER será un polinomio de grado m en η

$$R(X, Y, \eta) = A_0 \eta^m + A_1 \eta^{m-1} + \dots + A_{m-2} \eta^2 + A_{m-1} \eta + A_m = 0 \quad (8,11)$$

cuyos coeficientes serán polinomios en X, Y con A_0 no idénticamente nulo, puesto que el determinante de SYLVESTER tiene $m - 1$ filas con los coeficientes de $f(\alpha)$ y m con los de $f'(\alpha) - \eta$ y el coeficiente de η^m es, por tanto, el menor principal de orden $m - 1$, que por ser triangular es el producto de los términos de su diagonal principal, y éstos son todos iguales al coeficiente de α^m en $f(\alpha)$.

Poniendo otra vez J dada por (8,9), resulta el teorema, s. q. d.

TEOREMA 2. A_m es nulo sobre la curva envolvente de $Q(\alpha, \beta) = 0$ sobre sus tangentes múltiples y de inflexión, y sobre el eje X solamente.

En efecto: A_m es el resultado de eliminar α en (8,10) donde se ha hecho $\eta = 0$; por tanto, será nulo solamente cuando $f(\alpha) = 0$ tenga raíces múltiples, pero en el punto de coordenadas X, Y de (8,4) se deduce que sus raíces serán las inversas cambiadas de signo de las abscisas de los puntos donde las tangentes a la curva $P(X, Y) = 0$, envolvente de $Q(\alpha, \beta) = 0$, cortan al eje X , y para que haya dos confundidas, o dos de dichas tangentes se han de confundir, o han de cortar en un mismo punto al eje X , de donde resulta el teorema, s. q. d.

COROLARIO. $A_m(X, Y)$ es una expresión de la forma

$$A_m(X, Y) = K Y^m r_1^{s_1} r_2^{s_2} \dots r_h^{s_h} [P(X, Y)]^q \quad (8,12)$$

donde $r_1 r_2 \dots r_h$ igualadas a cero son las ecuaciones de las tangentes múltiples y de inflexión, $m, s_1 s_2 \dots s_h, q$ números naturales no nulos (más adelante veremos que $q = 1$, la determinación de los restantes es, en general, complicada y se puede obtener considerando el grado de la eliminante, como lo hacemos en el § 10 para un caso particular), y K es un número complejo distinto de cero que se puede hallar sustituyendo un valor particular de una variable cuando se conoce la eliminante.

En cuanto a A_{m-1} resulta el siguiente

TEOREMA 3. A_{m-1} es idénticamente nulo.

En efecto; por una demostración análoga a la que hace J. AUGÉ⁽¹⁾ resulta que siempre que es A_m nulo también lo es A_{m-1} , por tanto, ésta

(1) Véase (2), pág. 28.

ha de ser de grado igual o mayor que A_m , pero por el determinante de SYLVESTER resulta que A_{m-1} es de grado inferior a A_m en los coeficientes de $f(\alpha)$ y como éstos son de grado g en X, Y , resulta que A_{m-1} debe ser de grado inferior a A_m y para que sean compatibles ha de ser $A_{m-1} \equiv 0$
s. q. d.

Y para los demás coeficientes se descompone el determinante de SYLVESTER en suma de determinantes y se hace directamente su cálculo.

Por lo tanto, sustituyendo en (8,11) η por J dada por (8,9) y simplificando un factor común a todos sus coeficientes (en caso de que exista), resulta :

$$S_0(X, Y) J^m + S_1(X, Y) J^{m-1} + \dots + S_{m-3}(X, Y) J^3 + S_{m-2}(X, Y) J^2 + S_m(X, Y) = 0 \quad (8,13)$$

TEOREMA 4. *Los puntos de ramificación de $J(X, Y)$ definida por (8,13) están entre los que la anulan.*

La demostración es completamente análoga a la que hace J. AUGÉ ⁽¹⁾ y por tanto no la reproducimos.

9. Interpretación geométrica. La expresión (8,13), considerando X, Y, J como las variables en tres ejes cartesianos rectangulares, representa una superficie alabeada ⁽²⁾ de generatrices las intersecciones de los planos (véase (8,1)).

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta Y + 1 &= 0 & Q(\alpha, \beta) &= 0 \\ X Q'_\beta - Y Q'_\alpha - J &= 0 \end{aligned} \quad (9,1)$$

donde $P(X, Y) = 0, J = 0$ es una curva directriz; y las ecuaciones de las generatrices puestas en forma normal son :

$$\frac{X - \xi}{-\beta} = \frac{Y - \eta}{\alpha} = \frac{J}{Q'_\gamma(\alpha, \beta)} \quad Q(\alpha, \beta) = 0 \quad (9,2)$$

(donde γ es la coordenada que resulta de homogeneizar $Q(\alpha, \beta) = 0$) ξ, η representan unos valores que verifican $P(\xi, \eta) = 0$, luego por cada punto de $P(X, Y) = 0$ pasa una sola generatriz (9,2), y por tanto resulta el siguiente :

TEOREMA 5. *La curva $P(X, Y) = 0$ es directriz simple de la superficie alabeada (8,13).*

⁽¹⁾ Véase (2), pág. 31.

⁽²⁾ Véase (2), pág. 29 y sgs.

Por tanto, en (8,12) ha de ser $q = 1$.

De (9,1) o (9,2) se deduce que la proyección ortogonal de las generatrices sobre el plano XY son las tangentes a $P(X, Y) = 0$ por consiguiente, el plano tangente en un punto $P(X, Y) = 0$, $J = 0$ es paralelo al eje J .

Para hallar las generatrices que están en el plano XY , observemos que para éstas ha de ser $Q'_y(\alpha, \beta) = 0$ que solamente lo es cuando α, β son las coordenadas de una tangente múltiple o de inflexión, o las de una tangente que tenga el punto de contacto impropio, pero en este último caso, dichas tangentes, si son simples, no anulan a (8,12), y se deduce que son generatrices paralelas a dicho plano, pero no contenidas en él. Si una tangente múltiple pasa por el origen, se ve homogeneizando (9,1) que los dos planos coinciden formando una parte reducible de dicha superficie; por tanto, se tiene el siguiente

TEOREMA 6. *Las generatrices contenidas en el plano XY son las tangentes múltiples y de inflexión de $P(X, Y) = 0$, excepto a lo sumo las que pasan por el origen.*

Además del hecho de ser estas generatrices tangentes a una curva directriz, se deduce que son *singulares* para dicha superficie, y por tanto los exponentes de las tangentes que aparecen en (8,12) (excepto a lo sumo para las que pasan por el origen) son superiores a la unidad.

Por un punto propio genérico del plano XY pasan m tangentes a $P(X, Y) = 0$, por tanto este punto es la proyección de m puntos propios de dicha superficie.

Los puntos en que se anulan tres determinaciones de J dada por (8,13) son los comunes a $S_m(X, Y) = 0$ y $S_{m-2}(X, Y) = 0$ por tanto, por lo que acabamos de ver, tres de los puntos de (8,13) que se proyectan en uno de éstos, han de coincidir con el mismo, lo que tiene lugar en los puntos de contacto de las tangentes dobles, en los restantes de intersección de éstas con $P(X, Y) = 0$, en los puntos múltiples de $P(X, Y) = 0$ y en las tangentes de multiplicidad superior a dos, y recíprocamente; si coinciden cuatro será punto común a $S_m(X, Y) = 0$, $S_{m-2}(X, Y) = 0$, $S_{m-3}(X, Y) = 0$, lo que tiene lugar en los puntos nodales, en los de intersección (no de contacto) con las tangentes dobles, en los de contacto e intersección con las tangentes triples, en todos los puntos de las tangentes de multiplicidad superior a tres, etc., y así paso a paso llegamos al siguiente

TEOREMA 7. *$S_m(X, Y) = 0$, $S_{m-2}(X, Y) = 0$ tienen en común los puntos múltiples de $P(X, Y) = 0$, los comunes con sus tangentes dobles*

y las tangentes de multiplicidad mayor que dos, y de éstos pertenecen a $S_{m-3}(X, Y) = 0$ los nodales de $P(X, Y) = 0$ los de intersección con sus tangentes dobles, los de contacto e intersección de sus tangentes triples y de inflexión de orden superior al primero, las cúspides de 2.ª especie, los puntos triples y de orden superior y las tangentes múltiples de multiplicidad mayor que tres, y así sucesivamente. Es decir, que quedan determinados los puntos comunes a $S_m S_{m-2} \dots S_{m-i}$ ($i = 2, 3, \dots m$).

10. Aplicación a las ecuaciones de cuarto orden. Cuando $Q(\alpha, \beta) = 0$ es la (3,17), la expresión (8,11) es de 4.º grado, donde

$$A_4(X, Y) = K Y^m (X - 1)^n P(X, Y) \quad (10,1)$$

y la expresión (8,4) teniendo presente que es ahora $g = 2$ es :

$$f(\alpha) = Y^2 Q\left(\alpha, -\frac{1 + \alpha X}{Y}\right) = b_4 \alpha^4 + b_3 \alpha^3 + b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0 \quad (10,2)$$

donde :

$$\begin{aligned} b_4 &= Y^2, & b_3 &= -Y^2, & b_2 &= -Y^2 - 4X^2 \\ b_1 &= -Y^2 - 2X, & b_0 &= Y^2 - 1 \end{aligned} \quad (10,3)$$

y como hemos demostrado que es $q = 1$, y puesto que $P(X, Y) = 0$ (3,18) es de grado 6, y el determinante de SYLVESTER es de grado 7 en las b_i , por tanto de grado 14 en X, Y , tenemos que :

$$m + n + 6 \leq 14 \quad (10,4)$$

y además ha de ser m par, pues las b_i son simétricas respecto al eje X , y por tanto también lo será la eliminante. Haciendo ahora la eliminación entre $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0$ para $X = 0$ resulta que el término de menor grado en Y de la eliminante es $-256 Y^2$ y como en $P(O, Y)$ es $-256 Y^2$ resulta que :

$$m + 2 = 8 \quad m = 6 \quad k = 1 \quad (10,5)$$

y como hemos demostrado que n ha de ser mayor que la unidad, ha de ser $n = 2$.

Calculados los demás coeficientes, que son :

$$\begin{aligned} A_0 &= b_4^3 = Y^6 \\ A_1 &= b_4(8 b_1 b_4^2 + b_3^3 - 4 b_2 b_3 b_4) = -Y^6 \Theta(X, Y) \\ A_2 &= b_4(18 b_1^2 b_4^2 + 4 b_2^3 b_4 + 6 b_0 b_3^2 b_4 - 14 b_1 b_2 b_3 b_4 - 16 b_0 b_2 b_4^2 + \\ &\quad + 3 b_1 b_3^3 - b_2^2 b_3^2) = Y^4 \Omega(X, Y) \end{aligned} \quad (10,6)$$

donde :

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= 4X^2 + 25Y^2 + 16X. \\ \Omega(X, Y) &= -4X^6 - 125Y^6 - 49X^4Y^2 - 170X^2Y^4 + \\ &\quad + 28X^3Y^2 + 190XY^4 + 56X^2Y^2 - 70Y^4\end{aligned}\quad (10,7)$$

y simplificando Y^6 la (8,3) es :

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y, J) &= Y^4J^4 + Y^3\Theta(X, Y)J^3 + \Omega(X, Y)J^2 + \\ &\quad + (X-1)^2P(X, Y) = 0\end{aligned}\quad (10-8)$$

Del estudio hecho en el párrafo anterior, resulta que están determinados los puntos comunes a $P(X, Y) = 0$, $\Omega(X, Y) = 0$ y los de éstos que pertenezcan a $\Theta(X, Y) = 0$. Analíticamente resulta que

$$P(1, Y) = -20\Omega(1, Y)\quad (10,9)$$

CAPITULO III

CALCULO DEL PRODUCTO FUNCIONAL PROYECTIVO

11. Estudio de los términos Z_r . Recordemos que la expresión del producto funcional proyectivo de indicatriz proyectiva el inverso del polinomio (3,17) es :

$$\left\{ \frac{\Delta}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} \frac{\Delta}{y(\lambda^1, \lambda^2)} = \sum_{r=1}^2 Z_r\quad (11,1)$$

$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\delta_r(0)}} dY \int_{C_r} \frac{z(X, Y)}{J_r(X, Y)} dX$$

pero $Q(0, \beta) = 0$ tiene las raíces finitas $\beta = \pm 1$ cuya ecuación cartesiana es $\pm Y + 1 = 0$, por tanto es $Y = \mp 1$ y

$$-\frac{1}{\delta_r(0)} = \mp 1\quad (11,2)$$

tomemos el índice $r = 1$ para el signo $+$ en (11,2), por consiguiente :

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dY \int_{C_1} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX \quad (11,3)$$

donde J_1 para $Y = 1$ (que corresponde a $\alpha = 0$) es (véase (7,5)).

$$J_1(X, 1) = X Q'_\beta(0, -1) - Q'_\alpha(0, -1) \quad (11,4)$$

o sea :

$$J_1(X, 1) = 2X + 1 \quad (11,5)$$

y al ir variando Y aparecerán puntos de ramificación, que es lo que vamos a estudiar en el próximo párrafo.

12. Puntos singulares de $\frac{1}{J_r(X, Y)}$. En la integral interior de (11,1) Y es un parámetro, por tanto interesa considerar (10,8) como una función algebraica de J y X , y la Y como un parámetro ; ya hemos visto (§ 8) que los puntos de ramificación anulan al término independiente de (8,16), y de la primera (10,4) resulta que en un punto X, Y de $P(X, Y) = 0$ que no sea de la tangente doble, ni punto múltiple, ni que su tangente sea paralela al eje X , es $\frac{\partial P}{\partial X} \neq 0$, por tanto, en este punto

es :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)_{J=0} \neq 0 \quad (12,1)$$

lo que indica que es punto de ramificación de primer orden ⁽¹⁾ para la función J dada por (10,8), (pues la derivada segunda respecto a J es en este punto distinta de cero, ya que $\Omega(X, Y) \neq 0$). En un punto de la tangente doble, pero que no sea de $P(X, Y) = 0$, se anulan dos determinaciones, y aplicando el método de NEWTON-KRAMER (teniendo presente que $\Omega(X, Y)$ no es nula en este punto, según el teorema 7 § 9), resulta la gráfica de la figura 7, y haciendo en (10,8) $J = \nu(X - 1)$, resulta :

$$(X - 1)^2 [\Omega(1, Y) \nu^2 + P(1, Y) + (X - 1) \psi(X, Y, \nu)] = 0 \quad (12,2)$$

y el término entre paréntesis para $X - 1 = 0$ tiene dos raíces distintas ν_1 y $\nu_2 (= -\nu_1)$, por consiguiente (12,2) define dos funciones $\nu_1(X)$, $\nu_2(X)$ holomorfas que se anulan para $X = 1$; por tanto, las dos ramas son lineales. En uno de los puntos de contacto de dicha tangente doble

(1) Véase (1), pág. 180.

$\left(X = 1, Y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, según el mencionado teorema 7, se anulan $P(X, Y)$, $\Omega(X, Y)$ y no $\Theta(X, Y)$, por tanto, se anulan tres determinaciones, y aplicando otra vez el método de NEWTON-KRAMER, la gráfica es la de la figura 8 a); haciendo en (10,8) $J = \nu(X - 1)$, resulta :

$$(X - 1)^3 [Y_1^3 \Theta(1, Y_1) \nu^3 + \Omega'_x(1, Y_1) \nu^2 + P'_x(1, Y_1) + (X - 1) \psi(X, \nu)] = 0$$

el término entre paréntesis para $X - 1 = 0$ es

$$\pm \frac{1}{5\sqrt{5}} \Theta\left(1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \nu^3 + \Omega'_x\left(1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \nu^2 + P'_x\left(1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad (12,3)$$

que da como ecuación en ν la

$$\pm \sqrt{5} \nu^3 - 30 \nu^2 + 800 = 0 \quad (12,4)$$

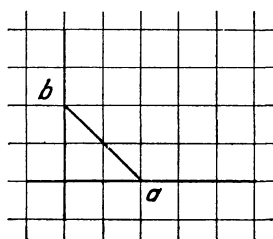


FIG. 7

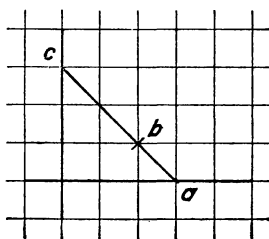


FIG. 8 a)

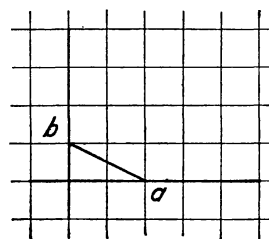


FIG. 8 b)

que tiene la raíz doble $\nu = \pm \frac{20}{\sqrt{5}}$ y otra simple; a esta última corresponde una rama lineal y a la doble, haciendo una segunda aproximación y observando que en estos puntos es $\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$ distinta de cero la gráfica es la de la figura 8 b), de lo que resulta que es una rama superlineal de 2.º orden; en resumen, las tres ramas de J son una lineal y una superlineal de 2.º orden (es decir, se permutan entre sí dos determinaciones solamente). En un punto de intersección de la curva $P(X, Y) = 0$ con la tangente doble que son $\left(1, \pm \frac{2i}{\sqrt{5}}\right)$, que por el teorema 7 § 9 ha de ser común a $P(X, Y) = 0$, $\Omega(X, Y) = 0$, $\Theta(X, Y) = 0$, resulta que se anulan las cuatro determinaciones, y no se anula $\frac{\partial P}{\partial X}$ (pues la tangente no es

paralela al eje X), y comprobado que tampoco es nula $\frac{\partial \Omega}{\partial X}$, se verifica

$$\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3}\right)_{J=0} \neq 0 \quad (12,5)$$

y la gráfica del método NEWTON-KRAMER es la de la figura 9 de donde resulta fácilmente que hay dos ramas lineales y se permutan entre sí las otras dos. En un punto de $P(X, Y) = 0$ en el cual la tangente sea paralela al eje X (exclusión hecha de $Y = 0$), no es nula $\Omega(X, Y)$; por tanto, sólo se anulan dos determinaciones y en este punto es $\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$ distinta de cero (por no ser punto de inflexión), luego se verifica

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}\right)_{J=0} \neq 0 \quad (12,6)$$

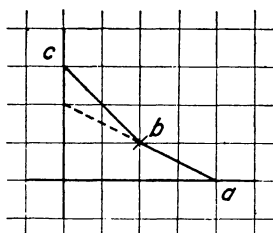


FIG. 9

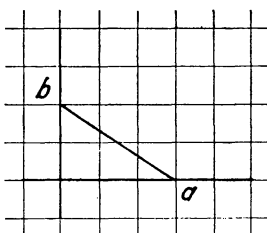


FIG. 10

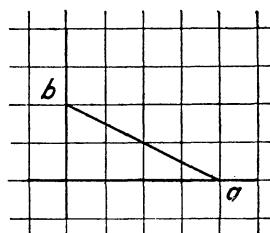


FIG. 11

la gráfica es la de la figura 7, de lo que se deduce que no hay ramificación (conforme con lo visto en (11,5)). En un punto cuspidal de $P(X, Y) = 0$ se anulan tres determinaciones solamente (véase teorema 7 § 9), y como su tangente no es paralela al eje X , se verifica (12,6), y la gráfica del método de NEWTON-KRAMER es la de la figura 10, y por tanto resulta que es un punto de ramificación de 2.º orden (se permutan entre sí las tres ramas). Y, finalmente, en un punto nodal de $P(X, Y) = 0$ se anulan las cuatro ramas (teorema 7 § 9), y se verifica (12,6) por la misma razón que anteriormente, por consiguiente, la gráfica es la de la figura 11, y resulta que dicho punto es la superposición de dos puntos de ramificación de primer orden.

13. Descomposición en ramas de la función J . En la función (10,8) haciendo $Y = 0$, dos raíces se hacen infinitas y las otras dos vienen dadas por

$$J = \pm 2 \frac{X-1}{X} \sqrt{X^2 + 3X + 1} \quad (13,1)$$

y como las infinitas corresponden para $Y = 0$ a la tangente tacnodal, resulta que las (13,1) son J_1 y J_2 , y a las infinitas las llamaremos J_3 y J_4 . Pero J_1 para $Y=1$ viene dada por (11,5), que es negativa para $X < -\frac{1}{2}$

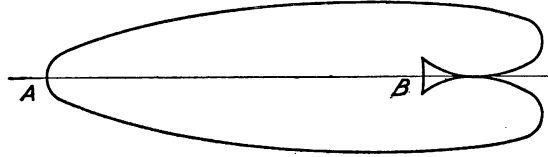


FIG. 12

y siguiendo un camino sin ningún punto común con la curva, desde un punto $X < -\frac{1}{2}$, $Y = 1$ hasta un punto de $Y = 0$ y X menor que las raíces del radicando de (13,1) (que son las $-\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{c}$ (3,19)), se ha de

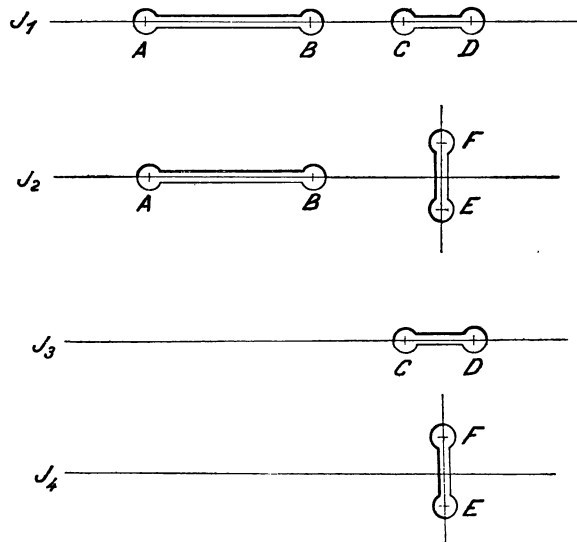


FIG. 13

llegar con el mismo signo, por tanto J_1 es la determinación de (13,1) que es negativa para los puntos del eje X a la izquierda de la curva y se ramifica por J_2 en los puntos (véase figura 12).

$$A = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad B = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad (13,2)$$

(por tanto J_1 es positiva para $X > 1$, y $B < X < 0$, y negativa para $0 < X < 1$ y $X < A$ e imaginaria para $A < X < B$). Para $Y > 0$ y menor que la ordenada del punto cuspidal de ordenada positiva, J_1 se permuta con J_2 en los puntos que provienen por continuidad de los (13,2) sobre la curva, y se permuta con otra determinación J_3 en los puntos que provienen del origen, y J_2 y J_4 se permutan en los puntos imagi-

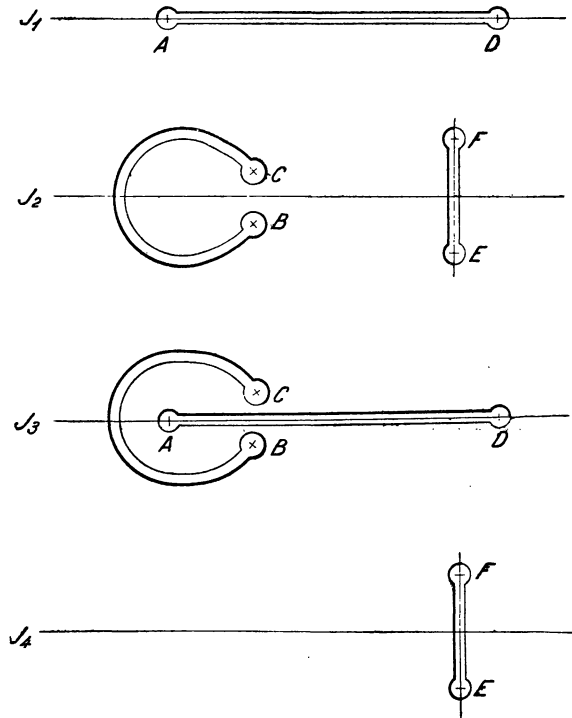


FIG. 14

narios conjugados que provienen del punto de contacto para $Y = 0$ en el origen de la rama que está por debajo de dicha tangente, en definitiva tendremos una superficie de RIEMANN de cuatro hojas, y los cortes a efectuar son los de la figura 13. Al ir creciendo Y , hasta llegar al valor $Y = \omega$ ordenada del punto cuspidal, se confunden en él los puntos B y C , por tanto, se permutan $J_1 J_2 J_3$, y para $Y > \omega$ los puntos B y C pasan a ser imaginarios, y para evitar que J_1 se permute por valores imaginarios, hagamos (véase APPEL-GOURSAT) ⁽¹⁾ un cambio de cortes

⁽¹⁾ Véase (1), págs. 190-91.

en la superficie de RIEMANN (haciéndolos adelantar y retrasar, como se ve en el lugar citado), se llega a los de la figura 14; y así hasta llegar a $Y = 1$ donde se confunden A y D , y, por tanto, desaparece la ramificación de J_1 y las otras se ramifican como se indica en la figura 15.

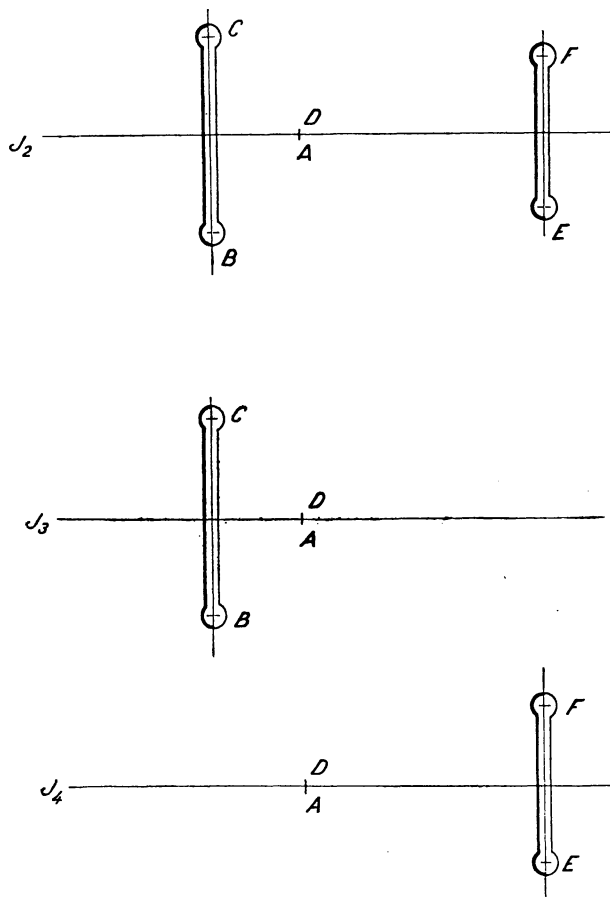


FIG. 15

Ahora vamos a estudiar las determinaciones que se anulan sobre la tangente doble. Para $Y = 0$ se anulan J_1 y J_2 (13,1) y al crecer Y se siguen anulando las mismas, hasta llegar a $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}$, punto de contacto, en éste se acaba de ver que se permutan J_1 y J_3 y para $Y > \frac{1}{\sqrt{5}}$ se anulan sobre dicha tangente dos determinaciones, y como en virtud de (11,5)

J_1 no es nula sobre ella, se deduce que las que se anulan son J_2 y J_3 ⁽¹⁾.

Para los valores de Y negativos se hace un estudio análogo; la ramificación está indicada en las anteriores figuras cambiando los sub-índices 1, 2 y 3, 4 y el signo de Y . Para $Y = 0$ el signo de J_2 es el opuesto del de J_1 .

14. Expresión del producto funcional proyectivo en el campo real.

En (11,3) el camino C_1 lo podemos deformar hasta hacerlo coincidir en los dos bordes del corte (pues en sus extremos la función a integrar es infinita de orden $1/2$, por tanto integrable), y llamando $\frac{1}{J_1} = \frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_i}$ ($i = 2, 3$), al salto entre los dos bordes, resulta

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\omega dY \left\{ \int_{A(Y)}^{B(Y)} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX + \int_{C(Y)}^{D(Y)} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX \right\} + \quad (14,1)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dY \int_{A(Y)}^{D(Y)} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} dY \int_{\gamma(Y)} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX$$

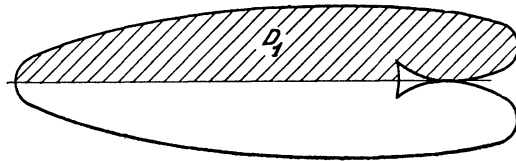


FIG. 16

donde $\gamma(Y)$ es un círculo en sentido positivo conteniendo en su interior el punto de la tangente doble, y los extremos de las integrales interiores son puntos de $P(X, Y) = 0$ como se detallan en las figuras precedentes. Por tanto es:

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \iint_{D_1} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX dY + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} dY \int_{\gamma(Y)} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX \quad (14,2)$$

donde D_1 es el dominio rayado en la figura 16.

En un punto interior del dominio de integración J_1 no es real ni se anula, ni se hace infinita, por tanto su inversa es imaginaria y de parte ima-

⁽¹⁾ Otra demostración puede verse en (5), pág. 34, pero creemos que la nuestra es más concisa.

ginaria de signo constante, y como se permuta con su conjugada, el salto $\frac{1}{\overline{J_1(X, Y)}}$ será imaginario puro, e igual al doble del coeficiente de la parte imaginaria de $\frac{1}{J_1(X, Y)}$ y para hallar su signo, de (13,1) se deduce que el radicando en un punto entre sus dos raíces, y en el borde inferior del corte, es de argumento $-\pi$, y $\frac{X-1}{X}$ es de argumento 0 , por tanto J_1 en uno de estos puntos (visto el signo que debe tomarse) es de argumento $-\frac{\pi}{2}$, y $\frac{1}{J_1}$ de argumento $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, el salto es de parte imaginaria positiva, y llamando $\frac{1}{J_1^*(X, Y)}$ a la parte imaginaria de $\frac{1}{J_1(X, Y)}$ es:

$$\frac{1}{\overline{J_1(X, Y)}} = \frac{2i}{J_1^*(X, Y)} \quad (14,3)$$

y en la segunda integral (13,4) la función a integrar tiene un polo en el punto $X = 1$, y, por tanto, la integral interior será el producto de $2\pi i$ por su residuo, que es:

$$\frac{z(1, Y)}{\left(\frac{\partial J}{\partial X}\right)_{\substack{J=0 \\ X=1}}} \quad (14,4)$$

derivando (10,8) respecto a X , y considerando J como función de X , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial X} &= Y^3 \frac{\partial \Theta}{\partial X} J^3 + \frac{\partial \Omega}{\partial X} J^2 + (X-1) \left[P(X, Y) + (X-1) \frac{\partial P}{\partial X} \right] + \\ &+ [4 Y^4 J^3 + 3 Y^3 \Theta(X, Y) J^2 + 2 \Omega(X, Y) J] \frac{\partial J}{\partial X} = 0 \end{aligned} \quad (14,5)$$

que para $X = 1$, $J = 0$ es indeterminada; derivando de nuevo resulta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial X} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2} \left(\frac{\partial J}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial J} \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial X^2} = 0 \quad (14,6)$$

que calculada para $X = 1$, $J = 0$ queda :

$$2P(1, Y) + 2\Omega(1, Y) \left(\frac{\partial J}{\partial X} \right)_{\substack{J=0 \\ X=1}}^2 = 0 \quad (14,7)$$

de donde,

$$\left(\frac{\partial J}{\partial X} \right)_{\substack{J=0 \\ X=1}} = \pm \sqrt{-\frac{P(1, Y)}{\Omega(1, Y)}} = \pm 2\sqrt{5} \quad (14,8)$$

(recordando (10,9)) y de (13,1) (que es positiva para $X > 1$), se deduce que hay que tomar en (14,8) el signo +, por tanto, queda :

$$Z_1 = \frac{1}{\pi} \iint_{D_1} \frac{z(X, Y)}{J_1^*(X, Y)} dX dY + \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} z(1, Y) dY \quad (14,9)$$

procediendo análogamente resulta :

$$Z_2 = \frac{1}{\pi} \iint_{-D_2} \frac{z(X, Y)}{J_2^*(X, Y)} dX dY - \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} z(1, Y) dY \quad (14,10)$$

donde D_2 es el dominio simétrico del de la figura 16, y el signo $-$ indica que Y varía entre 0 y -1 , y $\frac{1}{J_2^*}$ es de parte imaginaria negativa; por tanto, cambiando los sentidos en (14,10) y sumándola con (14,9) tendremos :

$$\left\{ \frac{\Delta}{Q(\lambda_1 \lambda_2)} \right\} \frac{\Delta}{y(\lambda_1^2 \lambda_2^2)} = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{z(X, Y)}{J^*(X, Y)} dX dY + \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} z(1, Y) dY \quad (14,11)$$

donde D es el dominio suma de los D_1 y D_2 y $\frac{1}{J^*}$ la función que coincide con $\frac{1}{J_1^*}$ para $Y \geq 0$ y con $-\frac{1}{J_2^*}$ para $Y < 0$.

CAPÍTULO IV

FORMULAS RESOLUTIVAS

15. **Media proyectiva de la indicatriz.** Recordando las expresiones (5,13) y (6,12) y la expresión del producto funcional proyectivo (14,11), en la que $z(a, b)$, viene dada por (7,4) y reemplazando $y(a, b)$ por $p(a, b; t, x, y)$ (5,12) o por $p_1(a, b; t, x, y)$ (6,11), según se trate del primer problema o del segundo del § 4, tenemos :

$$z(a, b) = p(a, b; t, x, y) + a \frac{\partial p}{\partial a} + b \frac{\partial p}{\partial b} \quad (15,1)$$

debiendo reemplazar p por p_1 para el segundo problema.

En el primer problema, p viene dada por (5,7); por la derivabilidad respecto a un parámetro de un funcional analítico lineal, es

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= \frac{-B_x}{(1 + a B_x + b B_y)^2} I f_3(t, x, y) \\ \frac{\partial p}{\partial b} &= \frac{-B_y}{(1 + a B_x + b B_y)^2} I f_3(t, x, y) \end{aligned} \quad (15,2)$$

que sustituidas en (15,1) da :

$$\begin{aligned} z(a, b) &= \frac{1}{1 + a B_x + b B_y} I f_3(t, x, y) - \frac{a B_x}{(1 + a B_x + b B_y)^2} I f_3 - \\ &\quad - \frac{b B_y}{(1 + a B_x + b B_y)^2} I f_3 \end{aligned}$$

o sea :

$$z(a, b) = \frac{1}{(1 + a B_x + b B_y)^2} I f_3(t, x, y) \quad (15,3)$$

pero,

$$f_3(t, x, y) = I f_2(t, x, y)$$

de donde :

$$z(a, b) = \frac{I^2}{(1 + a B_x + b B_y)^2} f_2(t, x, y) = I_\alpha^2 f_2(t, x, y) \quad (15,4)$$

recordando (5,8) y su expresión (5,12), iterando el operador, queda :

$$z(a, b; t, x, y) = \int_{t_0}^t (t-s) f_2[s, x+a(s-t), y+b(s-t)] ds \quad (15,5)$$

donde t_0 tiene el significado explicado en el § 5.

En el segundo problema, por consideraciones análogas tendremos :

$$z(a, b) = \frac{1}{(1 + a B_x + b B_y)^2} I g(t, x, y) \quad (15,6)$$

donde \bar{g} es la (6,7), la cual se puede descomponer (aplicando (6,3) en los términos en que el operador I aparezca bajo el signo de derivación, donde los operadores B_x, B_y se han sustituido por $I \frac{\partial}{\partial x}, I \frac{\partial}{\partial y}$ respectivamente, y llevando el operador I siempre a la izquierda) en

$$\bar{g}(t, x, y) = I G(t, x, y) + h(x, y) \quad (15,7)$$

donde $G(t, x, y)$ y $h(x, y)$ resultan conocidas a partir de las condiciones iniciales (4,4). Por tanto (15,6) se podrá escribir :

$$z(a, b) = I_\alpha^2 G(t, x, y) + \frac{1}{1 + a B_x + b B_y} I_\alpha h(x, y) \quad (15,8)$$

pero,

$$I_\alpha^2 G(t, x, y) = \int_{t_0}^t (t-s) G[s, x+a(s-t), y+b(s-t)] ds \quad (15,9)$$

y

$$I_\alpha h(x, y) = \int_{t_0}^t h[x+a(s-t), y+b(s-t)] ds \quad (15,10)$$

con lo que, llamando

$$w = \frac{1}{1 + a B_x + b B_y} I_\alpha h(x, y) \quad (15,11)$$

w será la solución de la ecuación integro-diferencial

$$w + a B_x w + b B_y w = I_\alpha h(x, y) \quad (15,12)$$

y derivando respecto a t , w será la solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} = h(x, y) - a \int_{t_0}^t h'_x [x + a(s-t), y + \\ + b(s-t)] ds - b \int_{t_0}^t h'_y [x + a(s-t), y + b(s-t)] ds \end{aligned} \quad (15,13)$$

con las condiciones iniciales

$$w_{\Gamma} = [I_{\alpha} h(x, y)]_{\Gamma} = 0 \quad (15,14)$$

o sea :

$$\begin{aligned} w = \int_{t_0}^t \{ h[x+a(s-t), y+b(s-t)] - a(t-s) h'_x [x+a(s-t), y+b(s-t)] - \\ - b(t-s) h'_y [x+a(s-t), y+b(s-t)] \} ds \end{aligned} \quad (15,15)$$

y, por tanto :

$$\begin{aligned} z(a, b) = \int_{t_0}^t \{ (t-s) \{ G[s, x+a(s-t), y+b(s-t)] - a h'_x [x + \\ + a(s-t), y+b(s-t)] - b h'_y [x+a(s-t), y+b(s-t)] \} + \\ + h[x+a(s-t), y+b(s-t)] \} ds \end{aligned} \quad (15,16)$$

16. Solución en el primer caso. La solución será :

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{Q(B_x, B_y)} I^{\Delta} f(t, x, y) = \left\{ \frac{1}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} \frac{1}{p(\lambda^1 \lambda^2; t, x, y)} = \\ = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{dX dY}{J^*(X, Y)} \int_{t_0}^t (t-s) f_2 [s, x + X(s-t), y + Y(s-t)] ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} dY \int_{t_0}^t (t-s) f_2 [s, x + (s-t), y + Y(s-t)] ds \end{aligned} \quad (16,1)$$

en la integral triple

$$\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{dX dY}{J^*(X, Y)} \int_{t_0}^t (t-s) f_2 [s, x + X(s-t), y + Y(s-t)] ds \quad (16,2)$$

hagamos el cambio ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned}\tau &= s \\ \xi &= x + X(s - t) \\ \eta &= y + Y(s - t)\end{aligned}\tag{16,3}$$

que en el sistema de ejes rectangulares τ, ξ, η representa las coordenadas de la recta que pasa por el punto $M(t, x, y)$ y de parámetros $(1, X, Y)$. Como en el plano impropio el punto X, Y describe el dominio D , el volumen V limitado por τ, ξ, η será el del cono característico de vértice M entre la superficie Γ y el punto M .

Haremos la hipótesis de que *las generatrices del cono característico cortan en un solo punto a la superficie Γ , sin serle tangente*, y para fijar ideas supondremos que la recta $\xi = x, \eta = y$ encuentra a la superficie Γ en un punto de cota sobre el plano ξ, η menor que la del punto M (así en el volumen V sólo intervendrá la hoja inferior del cono característico). Con esto y siendo

$$\frac{D(s, X, Y)}{D(\tau, \xi, \eta)} = \frac{1}{(\tau - t)^2}$$

(16,2) será :

$$\frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)}\tag{16,4}$$

y a fin de que intervenga explícitamente la función f , hagamos primeramente en (16,4) la integración respecto a τ .

Vamos a ver que una recta paralela al eje τ corta a la hoja inferior del cono característico a lo sumo en tres puntos propios reales, en efecto : la generatriz tacnodal $\xi = x, \eta = y$ es la única generatriz paralela al eje τ , cuyo punto impropio es el $X = Y = 0$ de $P(X, Y) = 0$; sea $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$, una recta paralela al eje τ , ésta cortará al cono en total en seis puntos (por ser éste de 6.º orden), pero su punto impropio es doble, por tanto, quedan cuatro intersecciones restantes. Consideremos el plano determinado por el punto M y dicha recta, éste cortará al plano impropio en una recta r pasando por $X = Y = 0$ (fig. 17), si ésta es interior al ángulo Θ el plano considerado cortará en cuatro generatrices reales además de la tacnodal, de lo que se deduce que esos cuatro puntos serán reales, y si r es del ángulo suplementario del Θ sólo cortará, en dos puntos

(1) Véase (5), pág. 46.

propios reales, pero respecto a la recta r los puntos de intersección con la curva que están en una misma semirrecta de origen O corresponden, a puntos de intersección de la recta dada con una misma hoja del cono, y si en semirrectas opuestas, con hojas distintas, por tanto si la recta considerada (paralela al eje τ) corta en cuatro puntos (véase fig. 17), habrá uno en una hoja y tres en la otra (salvo si r fuera la tangente en O

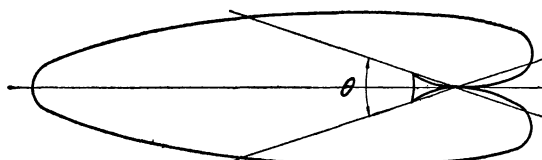


FIG. 17

en cuyo caso la recta tendría cuatro puntos de intersección impropios y los otros dos en una misma hoja), y si sólo corta en dos, corresponden una a cada hoja.

La superficie Γ cortará a la hoja inferior del cono característico, según una curva topológicamente equivalente a la $P(X, Y) = 0$ en virtud de las hipótesis hechas. Consideremos su proyección ortogonal sobre el

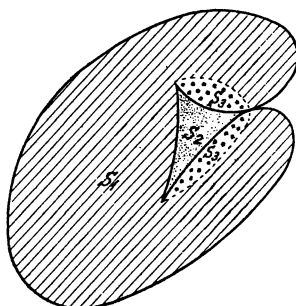


FIG. 18

plano $\tau = 0$; las intersecciones con Γ de los planos que proyectan desde M los segmentos del plano impropio que unen el punto tacnodal a los puntos cuspidales (reales), se proyectarán según arcos de curva, sea (fig. 18), esta proyección y los arcos marcados de puntos los arcos mencionados. Naturalmente, sólo interesan los puntos de intersección de la recta $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ con la hoja inferior del cono que tengan su τ superior a $\psi(\xi, \eta)$ por tanto, si esta recta corta el plano $\tau = 0$ en un punto de la región S_1 (rayada en la figura), sólo cortará a V en ψ y en un punto \bar{t} , si

en un punto de S_2 (marcado con puntos) el punto de intersección con ψ no es del contorno de V , y la recta corta a éste en dos puntos \bar{t} , \bar{t} , finalmente si es de la región S_3 (marcada con asteriscos) corta en ψ y en \bar{t} , y luego, en \bar{t} , \bar{t} , y el segmento entre \bar{t} y \bar{t} no pertenece a V .

Con esto (16,4) se puede escribir :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \iint_{S_1} d\xi d\eta \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{S_2} d\xi d\eta \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{S_3} d\xi d\eta \left[\int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \right. \\
& \left. + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \right]
\end{aligned} \tag{16,5}$$

en la integral

$$\begin{aligned}
& \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} = \\
& = \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \int_{\psi}^{\tau} (\tau-s) f(s, \xi, \eta) ds
\end{aligned} \tag{16,6}$$

hagamos una integración por partes, llamando (considerando t, x, y, ξ, η como parámetros)

$$\begin{aligned}
U &= \int_{\psi}^{\tau} (\tau-s) f(s, \xi, \eta) ds \\
dV &= \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)}
\end{aligned} \tag{16,7}$$

de donde,

$$dU = d\tau \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad (16,8)$$

$$V = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t - \tau') J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} = \varphi(\tau)$$

elegido de modo que $\varphi(\bar{t}) = 0$.

Por tanto (16,6) es igual a

$$\left[\varphi(\tau) \int_{\psi}^{\tau} (\tau - s) f(s, \xi, \eta) ds \right]_{\psi}^{\bar{t}} - \int_{\psi}^{\bar{t}} \varphi(\tau) d\tau \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad (16,9)$$

donde el término integrado es nulo, pues para $\tau = \bar{t}$ se anula $\varphi(\tau)$, y para $\tau = \psi$ se anula el otro factor; hagamos otra integración por partes en la integral que aparece en (16,9), llamando

$$U = \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad (16,10)$$

$$dV = \varphi(\tau) d\tau$$

de donde:

$$dU = f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (16,11)$$

$$V = \int_{\bar{t}}^{\tau} \varphi(\tau') d\tau' = \varphi_1(\tau)$$

elegido de modo que sea $\varphi_1(\bar{t}) = 0$, por consiguiente (16,6) es igual a

$$- \left[\varphi_1(\tau) \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \right]_{\psi}^{\bar{t}} + \int_{\psi}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (16,12)$$

y el término integrado también es nulo por la misma razón que en (16,9). Por tanto, el primer término de (16,5) es

$$\frac{1}{\pi} \int \int_{S_1} d\xi d\eta \int_{\psi(\xi, \eta)}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau, \xi, \eta; t, x, y) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (16,13)$$

Respecto al segundo término aparece la integral

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} = \\ & = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \int_{\psi}^{\tau} (\tau-s) f(s, \xi, \eta) ds \end{aligned} \quad (16,14)$$

hagámosle las mismas integraciones que en el caso anterior, pero los términos integrados ya no serán nulos, porque para $\tau = \bar{t}$ no se anula ningún factor, con lo que obtendremos que (16,14) será igual a

$$-\varphi(\bar{t}) f_2(\bar{t}, \xi, \eta) + \varphi_1(\bar{t}) f_1(\bar{t}, \xi, \eta) + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (16,15)$$

y respecto al tercer término de (16,5) aparecen las dos integrales

$$\int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \quad (16,16)$$

y haciendo en la segunda las mismas integraciones por partes que anteriormente, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} = -\varphi(\bar{t}) f_2(\bar{t}, \xi, \eta) + \varphi_1(\bar{t}) f_1(\bar{t}, \xi, \eta) + \\ & + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \end{aligned} \quad (16,17)$$

que es análoga a la (16,15). Y respecto a la primera integral (16,16), teniendo presente que sólo hemos definido J^* para X, Y interior o sobre el contorno de D , y para τ entre \bar{t} y \bar{t} , el punto X, Y correspondiente cae fuera de ese dominio; haremos en dicha integral las mismas integra-

ciones por partes, cambiando las funciones $\varphi(\tau)$ y $\varphi_1(\tau)$ que serán ahora

$$\bar{\varphi}(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t-\tau') J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} \quad (16,18)$$

que es nula para $\tau = \bar{t}$ y

$$\bar{\varphi}_1(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \bar{\varphi}(\tau') d\tau' + \int_{\bar{t}}^{\tau} \varphi(\tau') d\tau' \quad (16,19)$$

pues la segunda integral es independiente de τ , y para $\tau = \bar{t}$; $\bar{\varphi}_1(\bar{t}) = \varphi_1(\bar{t})$, por tanto :

$$\int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} = -\varphi_1(\bar{t}) f_1(\bar{t}, \xi, \eta) + \int_{\psi}^{\bar{t}} \bar{\varphi}_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (16,20)$$

que sumada con (16,17) y recordando los significados de f_2 y f_1 resultan que (16,16) es igual a

$$\begin{aligned} & -\varphi(\bar{t}) \int_{\psi}^{\bar{t}} (t-\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau + \varphi_1(\bar{t}) \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} f(\tau, \xi, \eta) d\tau + \\ & + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau + \int_{\psi}^{\bar{t}} \bar{\varphi}_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \end{aligned} \quad (16,21)$$

que substituidas todas en (16,5) queda :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \iiint_{V'} \varphi_1(\tau, \xi, \eta; t, x, y) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \iiint_{V''} [\bar{\varphi}_1(\tau, \xi, \eta; t, x, y) - \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) (\bar{t}-\tau)] f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \iiint_C [\varphi_1(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) - \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) (\bar{t}-\tau)] f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta \end{aligned} \quad (16,22)$$

donde V' es el volumen determinado por las dos primeras integrales triples de (16,5) y la última de la tercera; y V'' el determinado por la

primera de la tercera; por tanto, $V = V' + V''$ y C el limitado por S_2 y $\psi \leq \tau \leq \bar{t}$; S_3 y $\bar{t} \leq \tau \leq \bar{t}$, y, por tanto, los tres sumados forman el volumen limitado por F y la hoja exterior del cono característico (su sección por el plano impropio será de la figura 19).

17. Estudio del primer núcleo resolvente $\varphi(\tau)$. En la expresión de

$$\varphi(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t-\tau') J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} \quad (17,1)$$

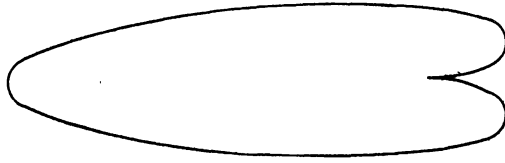


FIG. 19

hagamos el cambio inverso al (16,2), sustituyendo X, Y por $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}$ y, por tanto, será:

$$\varphi(\tau) = - \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{T' J^* \left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} \quad (17,2)$$

donde X, Y son consideradas como constantes, y T, X, Y son las coordenadas homogéneas de un punto impropio, que al variar T describe una recta pasando por el origen (punto impropio del eje τ), y el punto \bar{T} corresponde al punto de intersección de esta recta con el contorno exterior de D y T es un punto interior a dicho dominio, tal que entre \bar{T} y T no haya ningún punto del contorno; recordando que $\frac{1}{J^*} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{J_i} - \frac{1}{J_h} \right)$ resulta:

$$\varphi(\tau) = - \frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{T' J_i \left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} + \frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{T' J_h \left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} \quad (17,3)$$

Ahora bien, J_i se ha calculado sobre la tangente a la envolvente que pasa por el punto (T, X, Y) y que procede por continuidad de la que se nula para $T = \bar{T}$, pero para este punto se anulan dos, que en un punto

interior se hacen imaginarias conjugadas. Consideremos la ecuación (3,17) tangencial de $P(X, Y) = 0$

$$\beta^2 = (\alpha + 1)^2 (\alpha^2 - 3\alpha + 1) \quad (17,4)$$

y sea :

$$\alpha X + \beta Y + T = 0 \quad (17,5)$$

la tangente correspondiente.

De (17,4) se deduce :

$$\beta = \pm (\alpha + 1) \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \quad (17,6)$$

que sustituida en (17,5)

$$\alpha X \pm Y(\alpha + 1) \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} + T = 0$$

da T en función de α , o sea :

$$T = -[\alpha X \pm Y(\alpha + 1) \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}] \quad (17,7)$$

y diferenciando

$$dT = -\left[X \pm \left[\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} + (\alpha + 1) \frac{2\alpha - 3}{2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} \right] Y \right] d\alpha$$

o sea,

$$dT = -\frac{2X\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \pm (4\alpha^2 - 7\alpha - 1)Y}{2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} d\alpha \quad (17,8)$$

y recordando que $J_1 = XQ'_\beta - YQ'_\alpha$, puesta en homogéneas será

$$T J_1 \left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T} \right) = XQ'_\beta - YQ'_\alpha$$

que sustituyendo por sus expresiones deducidas de (17,4) da

$$\begin{aligned} T J_1 \left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T} \right) &= -2\beta X - 2Y(\alpha + 1)(4\alpha^2 - 7\alpha - 1) = \\ &= \mp 2X(\alpha + 1)\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} - 2Y(\alpha + 1)(4\alpha^2 - 7\alpha - 1) \end{aligned} \quad (17,9)$$

y, por consiguiente :

$$\begin{aligned} & \frac{dT}{TJ_1\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right)} = \\ & = \frac{2X\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \pm (4\alpha^2 - 7\alpha - 1)Y}{\mp 4X(\alpha + 1)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) + 2Y(\alpha + 1)(4\alpha^2 - 7\alpha - 1)\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} d\alpha = \\ & = \pm \frac{d\alpha}{2(\alpha + 1)\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} \quad (17,10) \end{aligned}$$

y, por tanto, cuando T' varía de \bar{T} a T , α sigue el camino que va del valor α_1 (real) que es la raíz que anula a (17,9) correspondiente a la tangente en el punto (\bar{T}, X, Y) a un valor α que hace a (17,9) imaginario (α es la primera coordenada plückeriana de la tangente correspondiente a la curva desde el punto (T, X, Y) y, por tanto, cuando el punto es interior, sólo será real si es $Y = 0$). La tangente correspondiente al segundo término de (17,4) es la imaginaria conjugada de la anterior, que coincide con ella para $\alpha = \alpha_1$; por tanto (17,2) es igual a

$$\mp \frac{1}{2i} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha'}{2(\alpha' + 1)\sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}} \pm \frac{1}{2i} \int_{\alpha_1}^{\bar{\alpha}} \frac{d\alpha'}{2(\alpha' + 1)\sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}} \quad (17,11)$$

siendo $\bar{\alpha}$ el imaginario conjugado de α , y, por consiguiente, (17,11), se puede escribir :

$$\mp \frac{1}{4i} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \frac{d\alpha'}{(\alpha' + 1)\sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}} \quad (17,12)$$

siendo el camino de integración uno que proceda del $\bar{\alpha}$ a α_1 por deformación continua.

El radicando $\alpha^2 - 3\alpha + 1$ se anula para $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y para $\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ que corresponden a los puntos en que $Y = 0$ corta a $P(X, Y) = 0$ exclusión hecha del origen, y sobre cualquier otra recta por 0 los valores de α en los puntos de esta curva no anulan al radical, y el valor α_1 es menor que $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (o es negativo según se tome una u otra semirrecta de origen 0), de lo cual se deduce que el camino que va

de α a α en (17,12), se puede deformar mientras no corte el segmento de eje real $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ y cortando a la izquierda del mismo a dicho eje, por tanto se podrá considerar simétrico respecto a él y las dos integrales (17,11) serán imaginarias conjugadas, su diferencia imaginaria pura, que multiplicada por $\frac{1}{2i}$ será real.

Para hallar la determinación del radical en (17,6) observemos que (véase fig. 20) en el arco $A M H$ es $\alpha_1 + 1 > 0$, $\beta_1 < 0$; por tanto hay que tomar el signo $-$; en el arco $H O$ es $\alpha_1 + 1 < 0$, $\beta_1 > 0$; por tanto, también hay que tomar el signo $-$; y en el resto por el mismo razonamiento se ve que hay que tomar el signo $+$, por tanto en (17,12) hay que,

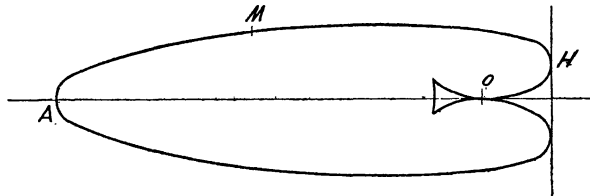


FIG. 20

tomar el signo $+$ para $Y > 0$ y el $-$ para $Y < 0$. Pero recordando que para $Y > 0$ el salto es imaginario puro de parte imaginaria positiva, por tanto α extremo superior de la integral (17,12) es de parte imaginaria positiva, y si $Y < 0$ el salto es de parte imaginaria negativa; por tanto, α es de parte imaginaria negativa, y tomando siempre en (17,12) el extremo superior que sea de parte imaginaria positiva (para $Y < 0$ cambiar los extremos) con este convenio hay que tomar siempre en (17,12) el signo $+$.

Calculada la integral

$$\int \frac{d\alpha}{(\alpha + 1)\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log C \frac{\sqrt{5}(\alpha - 1) + 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}{\alpha + 1} = \quad (17,13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log C \frac{\alpha + 1}{\sqrt{5}(\alpha - 1) - 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}$$

interesa tomar $C = -1$ para que sea real para $\alpha = 0$. Representemos la función bajo el signo logaritmo sobre una superficie de RIEMANN de dos hojas, en la que la línea de paso es el segmento de eje real de ex-

tremos $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ raíces del polinomio subradical, y sea $u^2 = \alpha^2 - 3\alpha + 1$; indiquemos por u_1 la determinación sobre la hoja que para $\alpha = 0$ se reduce a 1, y u_2 la otra determinación, esta función tiene un cero en el punto $(-1, u_1)$ y un polo en el punto $(-1, u_2)$, que son los puntos de ramificación del logaritmo. Por lo que hemos visto, el camino de integración en (17,12) está en la hoja u_1 y la integración va de un valor $\bar{\alpha}$ de parte imaginaria negativa a su conjugado cortando al eje real en un punto a la izquierda de la línea de paso (para $Y = 0$ será un camino que va de un punto real del borde inferior de la línea de paso al mismo punto en el borde superior; y para $\tau = \bar{i}$ será un camino que saliendo de un punto real α_2 a la derecha de la línea de paso y en sentido positivo la contenga en su interior, volviendo al punto de partida).

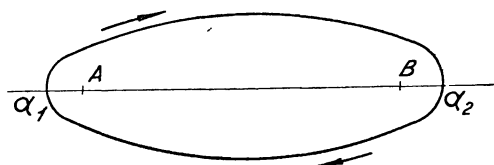


FIG. 21

La integral (17,12) será, pues:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\log \left(- \frac{\sqrt{5} (\alpha' - 1) + 2 \sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}}{\alpha' + 1} \right) \right]_{\alpha' = \bar{\alpha}}^{\alpha' = \alpha} \quad (17,14)$$

siguiendo el camino que se acaba de precisar. El módulo de la función bajo el logaritmo vuelve a su valor inicial, por tanto (17,14) será igual a

$$\frac{i}{\sqrt{5}} \left[\arg. \left(- \frac{\sqrt{5} (\alpha' - 1) + 2 \sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}}{\alpha' + 1} \right) \right]_{\alpha' = \bar{\alpha}}^{\alpha' = \alpha} \quad (17,15)$$

ahora bien, para $\alpha' = \alpha_1$ si $\alpha_1 > -1$ la expresión bajo el logaritmo es real y positiva (de argumento 0), luego (17,15) será:

$$\frac{2i}{\sqrt{5}} \arg. \left(- \frac{\sqrt{5} (\alpha - 1) + 2 \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}{\alpha + 1} \right) \quad (17,16)$$

Si es $\tau = \bar{i}$ cuando $\left| \frac{Y}{X} \right| \leq \tan \theta$, α es α_2 (véase figura 21) y la función

bajo el logaritmo es negativa (de argumento $\pm \pi$), y, por tanto, de (17,16) y (17,12), se tiene :

$$\varphi(\bar{t}) = \pm \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \quad (17,17)$$

para saber qué signo hay que tomar, observemos que al ir de α_1 a α_2 siguiendo el camino superior de la figura 21, la función no se hace real en ningún punto intermedio del camino, y su argumento será de signo constante, y el camino se puede deformar hasta hacerlo coincidir sobre el borde superior de la línea de paso, y en un punto de ésta próximo a α , la parte real es positiva y la imaginaria negativa, luego hay que tomar en (17,17) el signo $-$.

Sea $\alpha = u + iv$ y calculemos el argumento de :

$$\frac{\sqrt{5}(\alpha - 1) + 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}{\alpha + 1}$$

que será el argumento del numerador menos el del denominador, sea :

$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = H + iK$$

donde :

$$H = u^2 - v^2 - 3u + 1; K = 2uv - 3v$$

y se tiene :

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1} &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{H^2 + K^2} + H}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{H^2 + K^2} - H}{2}} = \\ &= A + iB \end{aligned} \quad (17,18)$$

donde para $\alpha = \alpha_1$ en el primer término hay que tomar el signo $+$ y el segundo es nulo, y luego por continuidad hay que tomar en el primero el signo $+$ y en el segundo el signo de K que por ser $\alpha_1 < \frac{3}{2}$ para un valor próximo v es positivo, por tanto $K < 0$, hay que tomar el signo $-$. Al llegar a anularse la parte real, cambia entonces el signo del primer término, y en el segundo siempre es el signo $-$.

Con esto el numerador es :

$$\sqrt{5}(u - 1 + iv) + 2(A + iB) = [\sqrt{5}(u - 1) + 2A] + i(\sqrt{5}v + 2B)$$

y su argumento

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}v + 2B}{\sqrt{5}(u - 1) + 2A}$$

y el denominador

$$\alpha + 1 = u + 1 + i v$$

y su argumento

$$\operatorname{arctg} \frac{v}{u+1}$$

por tanto :

$$\begin{aligned} \arg. \left(- \frac{\sqrt{5}(\alpha-1) + 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}{\alpha+1} \right) &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}v + 2B}{\sqrt{5}(u-1) + 2A} - \\ &- \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1} + \pi \end{aligned} \quad (17,19)$$

y por consiguiente es :

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}v + 2B}{\sqrt{5}(u-1) + 2A} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1} + \pi \right] \quad (17,20)$$

hay ahora que expresar u, v en función de T, X, Y sustituyendo en (17,7), tenemos :

$$\begin{aligned} T &= -(u+iv)X + (u+1+iv)(A+iB)Y = \\ &= -Xu + Y[A(u+1) - Bv] + i \{ -Xv + Y[A v + B(u+1)] \} \end{aligned} \quad (17,21)$$

y por ser X, Y y T reales, resulta :

$$\begin{aligned} T &= -Xu + Y[A(u+1) - Bv] \\ 0 &= -Xv + Y[A v + B(u+1)] \end{aligned} \quad (17,22)$$

donde A y B están expresadas en función de u, v y de este sistema se puede despejar u, v en función de T, X, Y .

Cuando es $\alpha_1 < -1$ como para este valor la función bajo el logaritmo en (17,14) es negativa, de argumento $-\pi$ la variación del argumento en (17,15) es equivalente a la que se ha hecho anteriormente más un circuito en sentido negativo alrededor del punto $\alpha = -1$, lo que aumenta el argumento en -2π , y, por tanto, habrá que restar $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$ en

(17,20), esta circunstancia se presenta cuando el punto T, X, Y es interior a la curva $P(X, Y) = 0$ y también al triángulo determinado por la tangente doble y los segmentos que proyectan desde el origen los puntos de contacto.

Determinemos ahora $\bar{\varphi}(\tau)$ que por el cambio inverso del (16,2) viene dada por

$$\bar{\varphi}(\tau) = - \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{T' J^* \left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} \quad (17,23)$$

donde el punto T, X, Y pertenece a la región rayada en la figura 22 y \bar{T} corresponde al primer punto en que encuentra la curva. Repitiendo las mismas consideraciones que para $\varphi(\tau)$, variando ahora que el camino de integración que va de $\bar{\alpha}$ a α corta al eje real a la derecha de la línea de paso (pues $\alpha_3 > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$) que es equivalente a un camino cortando a

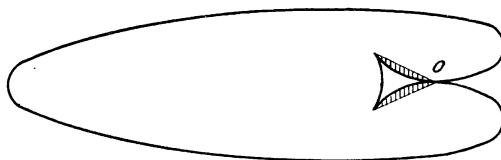


FIG. 22

la izquierda de dicha línea más un circuito en sentido positivo conteniéndola en su interior, pero la integral a lo largo de este circuito es (véase (17,17)), $-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$ por tanto, hay que restar a (17,20) $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}$.

18. Estudio del segundo núcleo resolvente $\varphi_1(\tau)$. En la expresión de $\varphi_1(\tau)$

$$\varphi_1(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{(\tau - \tau') d\tau'}{(t - \tau') J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} \quad (18,1)$$

que podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{\tau - t - (\tau' - t)}{(t - \tau') J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} d\tau' = \\ &= (\tau - t) \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t - \tau') J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} + \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} \end{aligned} \quad (18,2)$$

donde la primera integral es $\varphi(\tau)$ ya estudiada y la segunda por las mismas consideraciones que en el párrafo precedente es:

$$\frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{J_1\left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}\right)} - \frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{J_2\left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}\right)} \quad (18,3)$$

que aplicando el mismo cambio (17,7) es:

$$\frac{dT'}{J_1\left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}\right)} = \frac{T' dT'}{T' J_1\left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}\right)} = - \frac{-\alpha' X + (\alpha' + 1) \sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}}{2(\alpha' + 1) \sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}} Y d\alpha' \quad (18,4)$$

y por tanto (18,3) es

$$\begin{aligned} & \frac{X}{4i} \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\alpha' d\alpha'}{(\alpha' + 1) \sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}} - \\ & - \frac{Y}{4i} \int_{\alpha}^{\alpha'} d\alpha' = \frac{X}{4i} \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\alpha' d\alpha'}{(\alpha' + 1) \sqrt{\alpha'^2 - 3\alpha' + 1}} - \frac{Yv}{2} \end{aligned} \quad (18,5)$$

donde se recordará que: $\alpha = u + iv$

Calculemos

$$\int \frac{\alpha d\alpha}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} - \int \frac{d\alpha}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}$$

donde:

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} = \log C (2\alpha - 3 + 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1})$$

y la segunda es (17,13), por tanto:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\alpha d\alpha}{(\alpha + 1) \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}} = \\ & = \log [-(2\alpha - 3 + 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1})] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left[- \frac{\sqrt{5}(\alpha - 1) + 2\sqrt{\alpha^2 - 3\alpha + 1}}{\alpha + 1} \right] \end{aligned} \quad (18,6)$$

(elegida $C = -1$ por la misma razón de antes).

Por tanto, en definitiva

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & \frac{T-X}{2\sqrt{5}} \arg \left[-\frac{\sqrt{5}(\alpha-1) + 2\sqrt{\alpha^2-3\alpha+1}}{\alpha+1} \right] + \\ & + \frac{X}{2} \arg [-(2\alpha-3+2\sqrt{\alpha^2-3\alpha+1})] - \frac{Yv}{2} \end{aligned} \quad (18,7)$$

para $\alpha > -1$ (véase (17,16) y (18,5)).

Análogamente a (17,17), será :

$$\varphi_1(\bar{t}) = -\frac{\bar{T}-X}{2\sqrt{5}} \pi - \frac{X}{2} \pi \quad (18,8)$$

y para $\alpha < -1$ hay que restar a (18,7) $\frac{T-X}{2\sqrt{5}} \pi$

Por tanto, en definitiva

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & \frac{T-X}{2\sqrt{5}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}v+2B}{\sqrt{5}(u-1)+2A} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1} + \pi \right] + \\ & + \frac{X}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{2v+2B}{2u-3+2A} + \pi \right] - \frac{Yv}{2} \end{aligned} \quad (18,9)$$

donde u, v, A, B , vienen dados en función de T, X, Y por (17,21) y la fórmula anterior es válida mientras sea $\alpha+1 > 0$, sino que hay hacer la corrección mencionada.

Para determinar $\bar{\varphi}_1(\tau)$ recurramos a su fórmula de definición (16,19) que consta de dos integrales, la segunda es $\varphi_1(\bar{t})$ (18,8) y en la primera hagamos razonamientos completamente análogos a los hechos para $\varphi_1(\tau)$, sólo que en (18,2) el extremo inferior de las integrales es \bar{t} en vez de t , llegamos por el mismo razonamiento que en el párrafo anterior para determinar $\bar{\varphi}(\tau)$, que dicha integral es igual a (18,7) más un circuito en sentido positivo alrededor de la línea de paso, que como se ve, fácilmente vale

$$-\frac{T-X}{2\sqrt{5}} \pi - \frac{X}{2} \pi \quad (18,10)$$

por tanto $\bar{\varphi}_1(\tau)$ es la suma de las expresiones (18,8), (18,9) y (18,10).

19. Influencia de la tangente doble. Consideremos el segundo término de (16,1)

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} dY \int_{t_0}^t (t-\tau) f_2[\tau, x+\tau-t, y+Y(\tau-t)] d\tau \quad (19,1)$$

Haciendo en (19,1) el cambio de variables

$$\begin{aligned} \xi &= x + \tau - t \\ \eta &= y + Y(\tau - t) \end{aligned} \quad (19,2)$$

cuyo jacobiano es $\frac{D(\tau, Y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{1}{\tau - t}$ y, por consiguiente (19,1) vale:

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A f_2(\xi + t - x, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (19,3)$$

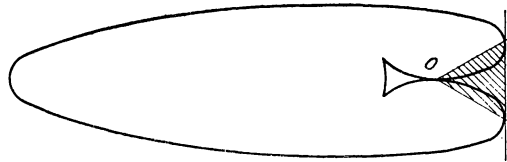


FIG. 23

donde A es el área de la proyección ortogonal sobre el plano $\tau = 0$ de la intersección del triedro formado por el plano bitangente y los planos determinados por la generatriz tacnodal y las de contacto del plano bitangente con la superficie Γ (el triángulo impropio de dicho triedro es el rayado en la figura 23), y recordando que es

$$f_2(\xi + t - x, \xi, \eta) = \int_{\psi}^{\xi + t - x} (\xi + t - x - \tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (19,4)$$

que sustituida en (19,3), resulta

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A d\xi d\eta \int_{\psi}^{\xi + t - x} (\xi - x + t - \tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A d\xi d\eta \int_{\psi}^{\xi + t - x} (\tau - t + x - \tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{5}} \iiint_{V_1} (\tau - t + x - \xi) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta \end{aligned} \quad (19,5)$$

donde el volumen V_1 es el limitado entre el sólido inferior de dicho triedro y la superficie Γ , dicho volumen podemos descomponerlo en dos, uno V' y el otro V''_1 donde el primero es la parte común con el volumen V' , y V''_1 la parte exterior a dicho volumen; la proyección desde el punto M sobre el plano impropio dará que V'_1 , se proyecta en los puntos interiores a la curva y al triángulo limitado por la tangente doble y las rectas que unen los puntos de contacto al punto tacnodal (véase figura 24) y V''_1 la parte interior a este triángulo y exterior a la curva.

Recordando que cuando el punto T, X, Y cae en la parte común de V' V'_1 a la función $\varphi_1(\tau)$ dada por (18,9) hay que restarle $\frac{T-X}{2\sqrt{5}}\pi$ por

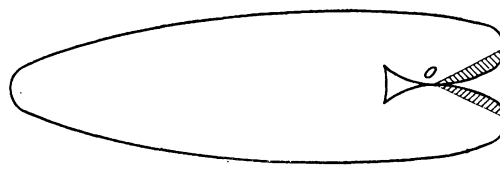


FIG. 24

tanto la integral (19,5) en el volumen V'_1 se simplifica con esta corrección; tendremos en definitiva (véase (16,22)).

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\pi} \iiint_V K(\tau, \xi, \eta; t, x, y) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
 &+ \iiint_{V''} \left(\frac{\xi - x + t - \bar{t}}{2\sqrt{5}} + \frac{x - \xi}{2} + \frac{\xi - x - t - \tau}{2\sqrt{5}} + \frac{x - \xi}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\bar{t} - \tau}{2\sqrt{5}} \right) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \quad (19,6) \\
 &+ \iiint_C \left(\frac{\xi - x + t - \bar{t}}{2\sqrt{5}} + \frac{x - \xi}{2} + \frac{\bar{t} - \tau}{2\sqrt{5}} \right) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{5}} \iiint_{V'_1} (\xi - x + t - \tau + \tau - t + x - \xi) f(\tau, \xi, \tau) d\tau d\xi d\eta + \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{5}} \iiint_{V''_1} (\tau - t + x - \xi) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

o sea :

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{2\pi} \iiint_V K(\tau, \xi, \eta; t, x, y) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
 & + \iiint_{V''} \left(\frac{\xi - x + t - \tau}{\sqrt{5}} + x - \xi \right) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
 & + \frac{1}{2} \iiint_C \left(\frac{\xi - x + t - \tau}{\sqrt{5}} + x - \xi \right) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{5}} \iiint_{V_1''} (\tau - t + x - \xi) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{19,7}$$

llamando

$$\begin{aligned}
 K(\tau, \xi, \eta; t, x, y) = & \\
 = & \frac{\tau - t + x - \xi}{\sqrt{5}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}v + 2B}{\sqrt{5}(u-1) + 2A} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1} + \pi \right] + \\
 & + (\xi - x) \left[\operatorname{arctg} \frac{2v + 2B}{2u - 3 + 2A} + \pi \right] + (y - \eta)v
 \end{aligned} \tag{19,8}$$

donde los volúmenes de integración son los especificados en los §§ 16 y 19. Resulta que V'' está contenido en V y, por tanto, su conjunto forma un volumen limitado por el contorno de la hoja externa del cono característico y su plano bitangente, es decir, el volumen de integración se proyecta desde M sobre el plano impropio según la mínima región convexa que contiene a la curva impropia del cono característico.

20. Solución en el segundo caso. De (14,11) y de (15,17), resulta que :

$$\begin{aligned}
 u_1 = & \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{dX dY}{J^*(X, Y)} \int_{t_0}^t \left\{ (t-s) \left\{ G[s, x + X(s-t), y + Y(s-t)] - \right. \right. \\
 & - X h_x' [x + X(s-t), y + Y(s-t)] - Y h_y' [x + X(s-t), \\
 & \left. \left. y + Y(s-t)] \right\} + h[x + X(s-t), y + Y(s-t)] \right\} ds +
 \end{aligned} \tag{20,1}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} dY \int_{t_0}^t \left\{ (t-s) \left\{ G[s, x+s-t, y+Y(s-t)] - \right. \right. \\
& - h'_x[x+s-t, y+Y(s-t)] - Y h'_y[x+s-t, y+Y(s-t)] \left. \right\} + \\
& \left. + h[x+s-t, y+Y(s-t)] \right\} ds
\end{aligned}$$

y aplicando los mismos cambios que en el caso anterior, resulta :

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{G(\tau, \xi, \eta)}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_V G(\xi+t-x, \xi, \eta) d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{h(\xi, \eta) + (\xi-x) h'_\xi(\xi, \eta) + (\eta-y) h'_\eta(\xi, \eta)}{(t-\tau)^2 J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A \left[\frac{h(\xi, \eta) + (\eta-y) h'_\eta(\xi, \eta)}{x-\xi} - h'_\xi(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{20,2}$$

donde podemos descomponer :

$$G(t, x, y) = I^2 R(x, y) + IT(x, y) + V(x, y) \tag{20,3}$$

que son conocidas en función de las condiciones iniciales (4,5) y, por tanto, las dos primeras integrales (20,2) las podemos descomponer en la suma de las siguientes :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{R_2(\tau, \xi, \eta)}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A R_2(\xi+t-x, \xi, \eta) d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{T_1(\tau, \xi, \eta)}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} d\tau d\xi d\eta -
\end{aligned} \tag{20,4}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A T_1(\xi + t - x, \xi, \eta) d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{V(\xi, \eta)}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A V(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \iiint_{V'} \frac{R_2(\tau, \xi, \eta)}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A R_2(\xi + t - x, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (20,5)
\end{aligned}$$

aplicándole las mismas transformaciones que en el caso anterior se llega a la expresión (19,8) cambiando $f(\tau, \xi, \eta)$ por $R(\xi, \eta)$, o sea:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \iiint_V K(\tau, \xi, \eta; t, x, y) R(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
& + \iint_{V''} \left(\frac{\xi - x + t - \tau}{\sqrt{5}} + x - \xi \right) R(\xi, \eta) d\xi d\tau d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \iiint_C \left(\frac{\xi - x + t - \tau}{\sqrt{5}} + x - \xi \right) R(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{5}} \iiint_{V_1''} (\tau - t + x - \xi) R(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (20,6)$$

En

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \iiint_{V'} \frac{T_1(\tau, \xi, \eta)}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_A T_1(\xi + t - x, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (20,7)
\end{aligned}$$

donde la integral triple se puede escribir (véase (16,5)) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \int \int_{S_1} T(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{\psi}^{\bar{i}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int \int_{S_2} T(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{\bar{i}}^{\bar{i}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int \int_{S_3} T(\xi, \eta) d\xi d\eta \left\{ \int_{\psi}^{\bar{i}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} + \right. \\
 & \left. + \int_{\bar{i}}^{\bar{i}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{t - \tau}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} \right\}
 \end{aligned} \tag{20,8}$$

y en la integral

$$\int_{\psi}^{\bar{i}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} \tag{20,9}$$

hagamos la integración por partes tomando :

$$\begin{aligned}
 U &= \tau - \psi \\
 dV &= \frac{d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)}
 \end{aligned} \tag{20,10}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 dU &= d\tau \\
 V &= \varphi(\tau)
 \end{aligned}$$

por tanto (20,8) es

$$- \int_{\psi}^{\bar{i}} \varphi(\tau) d\tau = \varphi_1(\tau) \tag{20,11}$$

En la integral

$$\int_{\bar{i}}^{\bar{i}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{t - \tau}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} \tag{20,12}$$

haciendo la misma integración por partes, resulta que es igual a :

$$- (\bar{i} - \psi) \varphi(\bar{i}) + \varphi_1(\bar{i}) \tag{20,13}$$

y en la

$$\int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{(\tau - \psi) d\tau}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} \quad (20,14)$$

haciendo la misma integración por partes, pero tomando $V = \bar{\varphi}(\tau)$ es :

$$- \int_{\psi}^{\bar{t}} \bar{\varphi}(\tau) d\tau = \bar{\varphi}_1(\psi) - \varphi_1(\bar{t}) \quad (20,15)$$

y la última (20,7) la podemos descomponer en dos : una extendida a A_1 (proyección de V_1') y la otra a A_2 (proyección de V_1'') con lo que (20,7) es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int \int_{S_1} T(\xi, \eta) \varphi_1(\psi, \xi, \eta; t, x, y) d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \int_{S_2} T(\xi, \eta) [\varphi_1(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) - (\bar{t} - \psi) \varphi(\bar{t}, \xi, \eta, t, x, y)] d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \int_{S_3} T(\xi, \eta) [\bar{\varphi}_1(\psi, \xi, \eta; t, x, y) - (\bar{t} - \psi) \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y)] d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \int_A T(\xi, \eta) (\xi + t - x - \psi) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (20,16)$$

y con los mismos razonamientos que para el primer caso, resulta que es :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int \int_{S_1} K(\tau, \xi, \eta; t, x, y) T(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{2} \int \int_{S_2} \left[\frac{\xi - x + t - \tau}{\sqrt{5}} + x - \xi \right] T(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int \int_{S_3} \left[\frac{\xi - x + t - \tau}{\sqrt{5}} + x - \xi \right] T(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \int_{S_1} (\tau - t + x - \xi) T(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (20,17)$$

donde $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, son las regiones de la cara superior de la superficie Γ que se proyectan en S_1, S_2, S_3, A_2 , respectivamente.

El otro término será :

$$\frac{1}{\pi} \int \int \int_V \frac{V(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left(\frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \int_A V(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (20,18)$$

en que la integral triple se puede escribir :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \iint_{S_1} V(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{S_2} V(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{S_3} V(\xi, \eta) d\xi d\eta \left\{ \int_{\psi}^{\bar{\bar{t}}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \right\}
\end{aligned} \tag{20,19}$$

o sea :

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi} \iint_{S_1} V(\xi, \eta) \varphi(\psi, \xi, \eta; t, x, y) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{\pi} \iint_{S_2} V(\xi, \eta) \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{\pi} \iint_{S_3} V(\xi, \eta) \left[\bar{\varphi}(\psi, \xi, \eta; t, x, y) + \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) \right] d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{20,20}$$

que sumándole el término correspondiente a la tangente doble, se puede escribir :

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \iint_{S_1} k(\tau, \xi, \eta; t, x, y) V(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
& \quad + \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_{S_2} V(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{\sqrt{5}} \iint_{S_3} \left[\frac{1}{2\pi} k(\tau, \xi, \eta; t, x, y) - 1 \right] V(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\
& \quad - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_{S_1} V(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{20,21}$$

llamando :

$$k(\psi, \xi, \eta; t, x, y) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}v + 2B}{\sqrt{5}(u-1) + 2A} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1} + \pi \quad (20,22)$$

Respecto a los últimos términos de (20,2), llamando :

$$H(\xi, \eta; x, y) = h(\xi, \eta) + (\xi - x)h'_\xi + (\eta - y)h'_\eta \quad (20,23)$$

y en la integral triple haciendo la descomposición

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int \int_{S_1} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta \int_{\psi}^{\bar{i}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2 J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \int_{S_2} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta \int_{\bar{i}}^{\bar{i}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2 J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \int_{S_3} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta \left\{ \int_{\psi}^{\bar{i}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2 J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \right. \\ & \left. + \int_{\bar{i}}^{\bar{i}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2 J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (20,24)$$

y efectuando las integraciones por partes, tomando :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{t-\tau} & dU &= \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \\ dV &= \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} & V &= \varphi(\tau) \text{ o } V = \bar{\varphi}(\tau) \end{aligned} \quad (20,25)$$

se llega a :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \int \int \int_{V'} \frac{\varphi(\tau, \xi, \eta; t, x, y)}{(t-\tau)^2} H(\xi, \eta; x, y) d\tau d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \int \int \int_{V''} \frac{\varphi(\tau, \xi, \eta; t, x, y)}{(t-\tau)^2} H(\xi, \eta; x, y) d\tau d\xi d\eta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi} \iint_{S_1} \frac{\varphi(\tau, \xi, \eta; t, x, y)}{t - \tau} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{\pi} \iint_{S_2 + S_3} \frac{\varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y)}{\bar{t} - t} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{\pi} \iint_{S_3} \frac{\bar{\varphi}(\tau, \xi, \eta; t, x, y)}{t - \tau} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{20,26}$$

y sumándole el término correspondiente a la tangente doble, y teniendo en cuenta la expresión de $\varphi(\tau)$, queda :

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \iiint_V \frac{k(\tau, \xi, \eta; t, x, y)}{(t - \tau)^2} H(\xi, \eta; x, y) d\tau d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{5}} \iiint_{\bar{V}} \frac{H(\xi, \eta; x, y)}{(t - \tau)^2} d\tau d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \iint_{S_1} \frac{k(\tau, \xi, \eta; t, x, y)}{t - \tau} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_{\sigma} \frac{H(\xi, \eta; x, y)}{t - \tau} d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \iint_{S_3} \frac{k(\tau, \xi, \eta; t, x, y) - \pi}{t - \tau} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{5}} \iint_{S_1} \frac{H(\xi, \eta; x, y)}{t - \tau} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{20,27}$$

donde \bar{V} es $V'_1 + V''$ y σ la región interior del cono característico determinada por \bar{t} y que se proyectan en $S_2 + S_3$; y la solución en este caso es la suma de las expresiones (20,6), (20,17), (20,20) y (20,27), después de haber derivado respecto a t . Y la solución en el caso general es ésta más la (19,7).

BIBLIOGRAFIA

- (1) APPEL-GOURSAT. — *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales*. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1929.
- (2) AUGÉ, J. — *Sobre clasificación e integración de las ecuaciones en derivadas parciales de tercer orden*. Collectanea Mathematica. Vol. IV, Fasc. 1. Barcelona (1951).
- (3) BIEBERBACH, L. — *Differentialgleichungen*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band. VI. J. Springer. Berlin, 1930.
- (4) CÁMARA, S. — *Elementos de Geometría Analítica*. Madrid, 1951.
- (5) CASULLERAS, J. — *Aplicación de la Teoría de los funcionales analíticos a la resolución de un tipo de ecuaciones en derivadas parciales de tercer orden*. Collectanea Mathematica. Vol. 1. Fasc. 2. Barcelona (1948).
- (6) COURANT UND HILBERT. — *Methoden der Mathematischen Physik*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bände XII-XLVIII. J. Springer, Berlin. I, 1924 : II, 1937.
- (7) ENRIQUES-CHISINI. — *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. N. Zanichelli. Bologna, 1929.
- (8) FANTAPPPIÉ, L. — *Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones*. Recopilación por R. Rodríguez-Vidal. Seminario Matemático de Barcelona, 1943.
- (9) FANTAPPPIÉ, L. — *I Funzionali analitici*. Memoria della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Serie sesta, vol. III, fasc. XI. Città di Castello (1930).
- (10) FANTAPPPIÉ, L. — *La teoria dei funzionali analitici nell'integrazione delle equazioni a derivate parziali di qualsiasi ordine*. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei. Vol. IV, serie 6.ª, 2.º sem. fasc. 12. Roma (1926).
- (11) FANTAPPPIÉ, L. — *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi*. Annali di Matematica pura ed applicata. Serie IV. Tomo XXII. Bologna (1943).
- (12) FANTAPPPIÉ, L. — *La Poliaromia dei funzionali analitici lineari*. Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei lincei. Vol. IV. Serie 6.ª, fasc. 1-2. Roma (1926).
- (13) FANTAPPPIÉ, L. — *Sulle soluzioni del problema di Cauchy per tutti i sistemi di equazioni a derivate parziali e a coefficienti costanti d'ordine qualunque*. Commentationes Pontificia Academia Scientiarum. Vol. III, n. 12. (1939).
- (14) FANTAPPPIÉ, L. — *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari*. Rendiconti del circolo Matematico di Palermo. T. LVII (1933).
- (15) FANTAPPPIÉ, L. — *La giustificazione del calcolo simbolico*. Memoria della Reale Accademia d'Italia. Roma, 1930.
- (16) GOURSAT, E. — *Cours d'Analyse Mathématique*. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1933.
- (17) KOHN UND LORIA. — *Spezielle ebene algebraische Kurven*. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Zweiter Teil. erste Hälfte Band III G. B. Teubner. Leipzig (1903-15).
- (18) LÉVY-PELLEGRINO. — *Les problèmes concrets d'Analyse fonctionnelle*. Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1951.
- (19) LORIA, G. — *Curve piane speciali*. U. Hoepli. Milano, 1930.
- (20) TEIXIDOR, J. — *Resolución en términos finitos del problema de Cauchy para una familia de ecuaciones en derivadas parciales de 4.º orden*. Collectanea Mathematica. Vol. III. Fasc. 1. Barcelona (1950).

