ESTUDIO DE ALGUNAS CLASES DE TOPOLOGIAS NO NECESARIAMENTE COMPATIBLES SOBRE ESPACIOS VECTORIALES. (*)

por

JUAN-LUIS CERDÁ

INTRODUCCION

En la teoría general de los espacios vectoriales topológicos se consideran topologías sobre espacios vectoriales no siempre compatibles, como veremos en los ejemplos de I-1, pero que gozan todas ellas de numerosas propiedades de compatibilidad.

Aquí tratamos de describir algunas estructuras que aparecen cuando se consideran espacios vectoriales provistos de topologías con ciertas propiedades de modo que queden incluidos los mencionados ejemplos y se obtengan estructuras próximas a la de espacio vectorial topológico.

Utilizamos las notaciones de Bourbaki y las de Kothe en [4]. E, E_1, E_2, F, etc. serán siempre espacios vectoriales sobre un cuerpo valorado no discreto K en el que la única topología que consideremos será la del valor absoluto. Si K es R ó C su valor absoluto será el habitual del módulo.

El capítulo I está destinado al estudio del concepto de topología casi compatible o topología sobre un espacio vectorial con la que son continuas las homotecias y las traslaciones y es continuo en el origen el producto por escalares. Destaquemos que para tales topologías pueden haber puntos no acotados. En lo que se refiere a la dualidad damos una condición necesaria y suficiente para que un espacio vectorial E sobre R ó C con una topología casi compatible y su dual topológico formen sistema dual, o sea, para que E y E' estén en dualidad separante.

En el capítulo II imponemos además la condición de que la suma

(*) Realizado con una ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad.

sea continua. Se obtienen condiciones de metrizabilidad y vemos como en esta situación más general que la de los espacios vectoriales topológicos metrizables se sigue cumpliendo el teorema de BANACH-STEINHAUS y lo que permanece del de BANACH-SCHAUDER.

En el capítulo III consideramos espacios vectoriales con topologías casi compatibles para las que existen bases de entornos de cero que son absolutamente convexos (un subconjunto M de E es absolutamente convexo si

$$\delta M + \delta' M \subset M$$

siempre que δ y δ' son escalares tales que $|\delta| + |\delta'| \leq 1$). Para un espacio E de este tipo, si K es R o C, se tiene una forma del teorema de HAHN-BANACH y como consecuencia se demuestra que, si la topología es separada, E' y E forman sistema dual.

En las I Jornadas Matemáticas Luso-Españolas (Lisboa, abril de 1971), bajo el título «Consideraciones sobre ciertas topología en espacios vectoriales», presentamos un avance de este trabajo, al que se han incorporado algunos resultados obtenidos a raíz de unas sugerencias que el Prof. RODRÍGUEZ-SALINAS nos hizo en aquella ocasión.

I. TOPOLOGÍAS CASI COMPATIBLES.

1. — *Ejemplos y definiciones.*

Si E es espacio vectorial con una topología $\mathcal{T}$, se trata de imponer a $\mathcal{T}$ unas condiciones de compatibilidad que se satisfagan en todos los casos siguientes:

(1) E espacio vectorial topológico sobre K.

(2) E espacio lineal sobre K en el sentido de [4] (capítulo 2) pero considerando sobre el cuerpo K la topología del valor absoluto, de manera que E posee base de entornos de cero constituida por subespacios vectoriales que, en general, no serán absorbentes y E no será espacio vectorial topológico sobre K.

(3) $E = E_2 [\mathcal{T}^f]$, en donde $\mathcal{T}^f$ es la topología sobre E_2 asociada a una topología localmente convexa separada de tipo $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = \mathcal{T}$ sobre E_1, respecto de un sistema dual $< E_2, E_1 >$. Aquí K es R o C. En

E se tiene una base de entornos de cero que son equilibrados y absorbentes, pero la suma no es necesariamente continua ([4] pág. 267, [5] pág. 150).

(4) E subespacio de $F^X = \mathcal{F}(X; F)$, X conjunto arbitrario y F espacio vectorial topológico, con la topología $T = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de una familia $\mathcal{M}$ de partes de X. La topología $\mathcal{T}$ es invariante por traslaciones y, si M recorre $\mathcal{M}$ y V una base $\mathcal{V}$ de entornos de cero en F, los conjuntos

$$W(M; V) = \{f \varepsilon E : f(M) \subset V\}$$

forman una base de entornos de cero para la topología $\mathcal{T}$. Se cumple que E es espacio vectorial topológico si y sólo si cada conjunto $f(M)$ ($f \varepsilon E, M \varepsilon \mathcal{M}$) es un acotado de F. Si V es absolutamente convexo, también lo es $W(M; V)$ ([5], pág.79).

(5) $E = M(D)$, espacio vectorial sobre $K = C$ de las funciones meromorfas en un abierto no vacío D del plano con la topología invariante por traslaciones de la convergencia uniforme sobre cada compacto. Tampoco aquí son absorbentes todos los entornos de cero.

Diremos que una topología $\mathcal{T}$ sobre un espacio vectorial E es *casi compatible* (c.c.) si cumple las siguientes condiciones:

(C.C.1) Cada traslación

$$T_z : x \to x + z$$

es aplicación continua de E sobre sí mismo. Ello equivale a que la suma

$$(x, y) \to x + y$$

sea separadamente continua y a que $\mathcal{T}$ sea invariante por traslaciones.

(C.C.2) Cada homotecia

$$H_\delta : x \to \delta x$$

es continua de E en E. En virtud de (C.C.1) para ello es suficiente que cada H_δ sea continua en $0 \varepsilon E$. Esta condición equivale a que el producto por escalares

$$(\delta, x) \rightarrow \delta x$$

sea continuo respecto de x.

(C.C.3) El producto por escalares

$$(\delta, x) \rightarrow \delta x$$

es continuo en el origen $(0, o) \varepsilon K \times E$. Es decir, para cada entorno de cero U en E existe otro V y un $\varepsilon > 0$ tales que $D\varepsilon\, V \subset U$, para $D\varepsilon = \{\delta \varepsilon K: |\delta| \leq \varepsilon\}$. Esto es equivalente, si se cumple (C.C.2), a que exista un entorno de cero V en E tal que $D_1 V \subset U$.

Las topologías de los ejemplos anteriores son todas casi compatibles.

2. — *Propiedades generales.*

Proposicicn 1.— Si E es espacio con topología c.c., posee una base de entornos de cero constituida por abiertos equilibrados.

Demostración.— Sea $\mathcal{W}$ la familia de todos los entornos abiertos y equilibrados de cero. Dado U entorno de cero se puede tomar otro V abierto tal que $W = D_1 V \subset U$ y es $W \varepsilon \mathcal{W}$.

Proposición 2.— Sea M subconjunto equilibrado de E, espacio con topología c.c. Entonces $\overline{M}$ es equilibrado y, si o es interior de M, también es equilibrado $\mathring{M}$.

Demostración.— Basta considerar $|\delta| \leq 1$ y tener presente que si $\delta \neq 0$ la homotecia H_δ es homeomorfismo.

También es fácil demostrar:

Proposición 3.— Si $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero en E, espacio con topología c.c., para cada subconjunto M de E se cumple

$$\overline{M} = \bigcap_{U \varepsilon \mathcal{U}} (M + U)$$

Aunque no se tienen aquí estructuras uniformes, diremos que una familia de aplicaciones $(f_i)_{i \varepsilon I}$ de E en F, espacios con topologías c.c., es «uniformemente» equicontinua si para cada entormo de cero V en F existe otro U en E de manera que, cualquiera que sea $i \varepsilon I$, se cumple $f_i(x) - f_i(y) \varepsilon V$ siempre que $x - y \varepsilon U$. Con ello es inmediato que se cumple:

Proposición 4.— Si $(f_i)_{i \varepsilon I}$ es familia de aplicaciones lineales entre los espacios con topologías c.c. E y F, son equivalentes:

(a) $(f_i)_{i \varepsilon I}$ es equicontinua.

(b) $(f_i)_{i \varepsilon I}$ es equicontinua en el origen.

(c) $(f_i)_{i \varepsilon I}$ es uniformemente equicontinua.

Proposición 5.— Si $f_i: E \to E_i$ $(i \varepsilon I)$ es familia de aplicaciones lineales y, para cada $i \varepsilon I$, $\mathcal{T}_i$ es topología c.c. sobre E_i, la correspondiente topología inicial $\mathcal{T}$ sobre E es también casi compatible.

Demostración.— Sean $z \varepsilon E, z_i \varepsilon E_i$ con $f_i(z) = z_i$. La continuidad de T_z y de cada H_δ resulta de las identidades

$$f_i\, H_\varepsilon = H_\varepsilon\, f_i$$

$$f_i\, T_z = T_{zi}\, f_i$$

válidas para todo $i \varepsilon I$; al ser continuos los términos de la derecha, resulta la continuidad de T_ε y de H_δ. Por último, si $\mathcal{U}_i$ es base de entornos equilibrados de cero en E_i $[\mathcal{T}_i]$ y U es la familia de intersecciones finitas de conjuntos del tipo $f_i^{-1}(\overline{U}_i)$, con $i \varepsilon I$ y $U_i \varepsilon \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero para $\mathcal{T}$ y al cumplirse $D_1\, U \subset U$ para cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ por ser estos conjuntos equilibrados, resulta (C.C.3).

Proposición 6.— Para cada $i \varepsilon I$ sea E_i un espacio vectorial con una topología $\mathcal{T}_i$. En $E = \prod_{i \varepsilon I} E_i$ la topología producto $\mathcal{T}$ es casi compatible si y sólo si lo es cada $\mathcal{T}_i$.

Demostración.— Si T_y (resp. H_δ) no es continua en E_i, tampoco lo es T_x (resp. H_δ) en E para $x = (x_i)$, con $x_i = 0$ si $i \neq j$ y con $x_j = y$. Si para E el producto por escalares es continuo en el origen, también lo es para cada E_j, pues dado un entorno de cero U_j en E_j y tomando $U_i = E_i$ si $i \neq j$ para $U = \prod_{i \varepsilon I} U_i$ existe otro entorno de cero $V = \prod_{i \varepsilon I} V_i$ en E tal que $D_1 V \subset U$ y con ello $D_1 V_j \subset U_j$.

El límite proyectivo de un sistema inverso (E_i, f_{ij}) de espacios vectoriales con topología c.c. (en el sentido de [1], pero aquí suponemos además que *cada* f_{ij} *es lineal*) resulta ser también espacio vectorial con topología c.c.

Sea de nuevo $(E_i)_{i \varepsilon I}$ una familia de espacios vectoriales con topologías c.c. y, para cada $i \varepsilon I$, f_i: $E_i \to E$ lineal. El supremo $\mathcal{T}$ del conjunto de topologías c.c. sobre E para las que todas las aplicaciones f_i son continuas es también topología c.c. por ser topología inicial de topologías c.c. y recibirá el nombre de *topología c.c. final* de la familia $(f_i)_{i \varepsilon I}$ de aplicaciones lineales.

Los cocientes son casos particulares:

Si F es subespacio vectorial de E, espacio con una topología c.c. T, sobre E/F consideraremos la topología cociente $\widetilde{\mathcal{T}}$ que es la más fina de *todas* las topologías sobre E/F para las que la aplicación canónica k: $E \to E/F$ es continua, sus abiertos son los conjuntos $\widetilde{A}$ para los que $A + F + k^{-1}(\widetilde{A})$ es abierto, k es abierta y g: $E/F \to X$ (X espacio topológico) es continua si gk es continua.

Proposición 7.— La topología cociente $\widetilde{\mathcal{T}}$ es la topología c.c. final respecto de la aplicación canónica k: $E \to E/F$, $\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{V} = k(V)\colon V \varepsilon \mathcal{V}\}$ es base de entornos de cero en E/F si $\mathcal{V}$ lo es en E y los puntos de E/F son cerrados si y solo si F es cerrado en E.

Demostración.— Veamos que $\widetilde{\mathcal{T}}$ es c.c.: cada $T_{k(x)}$ y cada H_δ es continua por cumplirse $T_{k(x)}\, k = k T_x$ y $H_\delta\, k = k H_\delta$ y la propiedad (C.C.3) es consecuencia de ser $k(U)$ equilibrado si U lo es.

Si F es cerrado y $k(x) \neq \widetilde{o}\ (= k(o))$, se cumplirá $(x + V) \cap F = \phi$ para algún $V \varepsilon V$ y con ello $\widetilde{o} \notin k(x) + V$ quedando demostrado que $\{\widetilde{o}\}$ es cerrado y con él lo es todo punto de E/F. Si F no es cerrado, tampoco lo es $\{\widetilde{o}\}$ en E/F porque si $x \varepsilon \overline{F}$ necesariamente $k(x)$ es adherente al origen ya que si $x + V$ corta a F, $k(x) + \widetilde{V}$ contiene a $\widetilde{o}$.

3. — *Dualidad.*

En este número E será espacio vectorial real o complejo con una topología c.c. $\mathcal{T}$.

Es fácil comprobar que su dual topológico E' es subespacio vectorial del dual algebraico, pero, en general $< E', E >$ no será sistema dual, como sucede ya incluso si es E espacio vectorial topológico separado (un ejemplo de espacio vectorial topológico separado E no nulo y tal que $E' = o$ puede verse en [4], pág. 158). Pero se cumple:

Proposición 8. — Es condición necesaria y suficiente para que $< E', E >$ sea sistema dual que la intersección de los entornos absorbentes y absolutante convexos de cero en E se reduzca al origen, o sea, que exista sobre E una topología de espacio vectorial topológico localmente convexo separado menos fina que $\mathcal{T}$.

Demostración. — Si $< E', E >$ es sistema dual, para cada $x \neq o$ de E existirá algún $u \varepsilon E'$ tal que $| ux | > 1$ y el conjunto

$$U = \{ y \varepsilon E \colon | uy | \leq 1 \}$$

es entorno absolutamente convexo y absorbente de cero que no contiene al elemento x.

Recíprocamente, si la intersección de los entornos absobentes y absolutamente convexos de cero es nula, estos entornos determinan una topología de espacio vectorial topológico localmente convexo separado sobre E con la que éste tiene un dual topológico contenido en E' y con el que E forma sistema dual, por lo que, con mayor razón $< E', E >$ será también sistema dual.

4. — *El conjunto de los puntos acotados.*

Un subconjunto A de E, espacio con una topología c.c., es *acotado* si es absorbido por todos los entornos de cero. $A(E)$ será el conjunto de todos los puntos acotados, aunque diremos que E no tiene puntos acotados si $A(E) = o$.

En los ejemplos del primer apartado se tiene:

(1) Si E es espacio vectorial topológico, $A(E) = E$.

(2) Si E es espacio lineal, $A(E)$ es la intersección de los entornos de cero de manera que E es separado cuando E no tiene puntos acotados.

(3) Si sobre E se tiene una topología $\mathcal{T}'$, es $A(E) = E$.

(4) Si E es subespacio de F^X con una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ es

$A(E) = \{f \varepsilon E : f(M)$ acotado en F para todo $M \varepsilon \mathcal{M}\}$

Esto es cierto incluso si F es espacio vectorial con topología c.c. También en este caso los conjuntos

$$W(M; V) = \{f \varepsilon E : f(M) \subset V\}$$

forman base de entornos de cero para una topología c.c. $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, cuando $M \varepsilon \mathcal{M}$ y $V \varepsilon \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ base de entornos de cero en F).

(5) $A(M(D))$ es el subespacio $H(D)$ de las funciones holomorfas.

En cualquier caso es $KA(E) \subset A(E)$ y en todos los ejemplos anteriores $A(E)$ es subespacio vectorial de E (en el caso (4) lo es si F es espacio vectorial topológico o, simplemente, si es continua la suma del espacio con topología c.c. F).

Proposición 9.— Sea E espacio vectorial con la topología c.c. final de una familia de aplicaciones lineales $f_i : E_i \to E$ $(i \varepsilon I)$, con E_i espacio con topología c.c. (a) Si $A(E)$ es subespacio vectorial de E, $\sum_i f_i(A(E_i))$ está contenido en $A(E)$.

(b) En el caso en que $E = \oplus E_i$ y que f_i sea la inyección canónica y si $A(E)$ es subespacio vectorial, entonces cada $A(E_i)$ es subespacio vectorial y $A(E) = \oplus A(E_i)$.

Demostración.— (a) Al ser cada f_i continua, $f_i(A(E_i)) \subset A(E)$. (b) Cada proyección $p_k : E \to E_k$ es continua, para cada $x = (x_i)$ de $A(E)$ se cumple $x_k = p_k(x) \varepsilon A(E_k)$ y por lo tanto es $x \varepsilon \oplus A(E_i)$. La inclusión inversa es consecuencia de (*a*).

Proposición 10.— Sea E espacio vectorial con la topología c.c. inicial de una familia $f_i : E \to E_i$ $(i \varepsilon I)$, con cada E_i con una topología c.c. Se cumplen:

(a) Un subconjunto M de E es acotado si y sólo si lo es cada $f_i(M)$.

(b) Es $A(E) = \bigcap_i f_i^{-1}(E_i))$ de manera que si cada $A(E_i)$ es subespacio vectorial también lo es $A(E)$.

(c) En el caso en que $E = \prod_i E_i$ y las aplicaciones f_i son las proyecciones se cumple $A(E) = \prod_i A(E_i)$.

(d) Si F es subespacio de E se cumple $A(F) = A(E) \cap F$.

Demostración. — (a) Si $U = \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(U_{ik})$ y $\delta f_{i_k}^{-1}(U_{ik})$ contiene a M, necesariamente δU contiene a M = (*b*) Basta aplicar (a) a cada punto. (*c*) y (*d*) son casos particulares.

II. Espacios de suma continua.

1. — *Espacios de suma continua. Ejemplos.*

En un espacio E con una topología c.c. la suma

$$E \times E \to E$$
$$(x, y) \to x + y$$

es continua si y sólo si para cada entorno de cero U existe otro V tal que $V + V \subset U$. En este caso con la suma E es grupo topológico abaliano debido a que H_{-1} es continua y diremos que E es *espacio de suma continua.*

Proposición 11. — Es condición necesaria y suficiente para que E, espacio con topología c.c., sea de suma continua que sobre E exista una estructura uniforme compatible invariante por traslaciones. En este caso tal estructura es única.

Demostración. — Unicidad: Si en E hay una estructura uniforme invariante por traslaciones compatible, para cada entorno de cero U se tiene una vecindad N_U tal que

$$U = \{x \in E : (x, o) \in N_U\}$$

y de la invariancia por traslaciones resulta

$$N_U = \{(y, z) \in E \times E : y - z \in U\}.$$

Además toda vecindad N es de este tipo, pues

$$\{x \in E : (x, o) \in N\}$$

ha de ser entorno de cero.

Por otra parte, si existe tal estructura uniforme, la suma es continua porque si $N_V{}^2 \subset N_U$, con $V = -V$, es $V + V \subset U$ pues se entiende que $(x, o) \varepsilon N_V$ y $(y, o) \varepsilon N_V$, o sea, $(x, o) \varepsilon N_V$ y $(o, -y) \varepsilon N_V$, implica $(x, -y) \varepsilon N_U$ y $x + y \varepsilon U$.

Proposición 12. — En todo espacio de suma continua existe una base de entornos equilibrados y cerrados de cero. Es separado si y sólo si la intersección de los entornos de cero se reduce al origen, o sea, cuando los puntos son cerrados.

Demostración. — Para cada entorno de cero U existe otro V equilibrado tal que $V + V \subset U$. Si $z \varepsilon \overline{V}$ necesariamente $(z - V) \cap V \neq \phi$ con lo que $z - v = w$ para ciertos v, w de V y por lo tanto $z \varepsilon U$, de manera que $\overline{V} \subset U$ y además $\overline{V}$ es equilibrado por serlo V (proposición 2).

La condición de separación la cumplen los grupos topológicos.

Proposición 13. — Sea $\mathcal{U}$ base de filtro sobre E, espacio vectorial sobre K. Si se cumplen:

(S.C.1) Para cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ y cada $\delta \varepsilon K$ existe un $V \varepsilon \mathcal{U}$ tal que $\delta V \subset U$.

(S.C.2) Para cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ existe algún $V \varepsilon \mathcal{U}$ tal que $V + V \subset U$.

(S.C.3) Para cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ existe $V \varepsilon \mathcal{U}$ tal que $D_1 V \subset U$, entonces existe sobre E una topología $\mathcal{T}$ y solo una con la que sea espacio de suma continua y en el que $\mathcal{U}$ sea base de entornos de cero. El recíproco también es cierto.

Obsérvese que si cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ es equilibrado automáticamente se cumple (S.C.3) y que si cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ es absolutamente convexo, o convexo si K es R o C, se cumple (S.C.2).

Demostración. — Si $\mathcal{U}_x = \{U + x: U \varepsilon \mathcal{U}\}$ para cada $x \varepsilon E$ y considerando abierto a todo subconjunto A de E tal que para cada $x \varepsilon A$ algún $U_x \varepsilon \mathcal{U}_x$ contenido en A se obtiene una topología con la que E es grupo topológico aditivo ([1] pág. 222) por cumplirse (S.C.1) para $\delta = -1$ y (S.C.2). Es topología c.c. pues de (S.C.2) resulta (C.C.1) y de (S.C.1) y (S.C.3) resultan (C.C.2) y (C.C.3) respectivamente.

El recíproco es obvio.

Ejemplos:

(1) Todo espacio vectorial topológico es espacio de suma continua.

(2) Los entornos de cero de un espacio lineal cumplen (S.C.1), (S.C.2) y (S.C.3) por lo que estos espacios son espacios de suma continua.

(3) La suma de un espacio con una topología $\mathcal{J}^f$ en general no es continua.

(4) Si F es espacio de suma continua, un subespacio E de F^X con una topología $\mathcal{J}_M$ es espacio de suma continua pues de $V + V \subset U$ en F resulta $W(M; V) + W(M; V)$ contiendo en $W(M; U)$.

(5) $\mathcal{M}(D)$ también es espacio de suma continua.

2. — *Propiedades generales.*

Si E es espacio con suma continua, $\mathcal{U}$ será base de entornos cerrados y equilibrados de cero.

Proposición 14. — Sea M subconjunto de un espacio de suma continua E. Si M es equilibrado, absolutamente convexo, convexo (en el caso en que K sea R o C) o subespacio vectorial, también lo es su adherencia $\overline{M}$.

Demostración. — Consideremos, por ejemplo, el caso en que M es absolutamente convexo. Si $a, b \varepsilon \overline{M}$ y $|r| + |s| \leq 1$ también se cumple que $ra + sb$ es adherente a M pues dado $U \varepsilon \mathcal{U}$ y si $V \varepsilon \mathcal{U}$ cumple $V + V \subset U$, tomando $x \varepsilon (a + V) \cap M, y \varepsilon (b + V) \cap M$ necesariamente

$$(ra + sb) - (rx + sy) = r(a - x) + sb(-y) \varepsilon U$$

de manera que $(ra + sb + U) \cap M$ no es vacío.

Proposición 15. — Sea E espacio de suma continua.

(a) $A(E)$ es subespacio vectorial cerrado de E.

(b) $A(E)$, con la topología inducida por E, es espacio vectorial topológico.

(c) Un subespacio de E es espacio vectorial topológico si y sólo si está contenido en $A(E)$.

(d) E es separado si y sólo si lo es $A(E)$.

Demostración.— (a) Si $U \varepsilon \mathcal{U}$ sea $V \varepsilon \mathcal{U}$ tal que $V + V \subset U$. Si x, y son de $A(E)$ existe $\delta > 0$ tal que x, y son de rV si $|r| \geq \delta$ de manera que $x + y \varepsilon r V + r V \subset r U$ y es $x + y$ de $A(E)$. Por otra parte, si $x \varepsilon \overline{A(E)}$, se puede tomar $y \varepsilon x + V \subset A(E)$ de manera que si $y \varepsilon r V$ siempre que $|r| \geq \delta$, para un $\delta < 1$, resulta

$$(1/r)\, x + (1/r)\, y + (1/r)\, (y - x) \;\varepsilon\; V + (1/r)\, V \subset U$$

lo que demuestra que $x \varepsilon A(E)$.

(b) $A(E)$ es espacio vectorial topológico porque en él la suma es continua y sus entornos de cero son absorbentes (ver [4] pág. 146).

(d) Si $A(E)$ es separado y $o \neq x \varepsilon A(E)$ evidentemente existe $U \varepsilon \mathcal{U}$ tal que $x \notin U$ mientras que si $x \notin A(E)$, x no es absorbido por algún $U \varepsilon \mathcal{U}$ y por lo tanto $x \notin U$. Resulta así que $\cap\, U = o$ y E es separado.

Proposición 16.— El cociente $E/A(E)$ no tiene puntos acotados.

Demostración.— Si $\tilde{x} \varepsilon A(E/A(E))$, también $x \varepsilon A(E)$ pues si $\tilde{x} \varepsilon \delta \tilde{U}$ necesariamente $x - a \varepsilon \delta U$ para un $a \varepsilon A(E)$ y a es absorbido por U, luego U también absorbe a x.

3. — *Propiedades de permanencia.*

Proposición 17. — Cada espacio separado de suma continua E posee una completación separada $\tilde{E}$ que es espacio de suma continua.

Demostración.— Como grupo topológico aditivo, E posee completación separada $\tilde{E}$ que es grupo topológico ([1] pág. 249) y al ser cada homotecia H_δ uniformemente continua en E, determina una aplicación

$$\tilde{E} \to \tilde{E}$$
$$\tilde{x} \to \delta \tilde{x}$$

con la que se define

$$K \times \tilde{E} \to \tilde{E}$$
$$(\delta, \tilde{x}) \to \delta \tilde{x}$$

que, junto con la suma, determina sobre $\widetilde{E}$ una estructura de espacio vectorial. Además el producto por escalares $(\delta, \widetilde{x}) \to \delta \widetilde{x}$ es continuo en el origen porque si en $\widetilde{E}$ se tiene $D_1 V \subset U$, tomando adherencias en E, se obtiene también $D_1 \widetilde{V} \subset \widetilde{U}$.

Proposición 18.— Si E es espacio vectorial con la topología inicial de una familia de aplicaciones lineales $f_i: E \to E_i$ $(i \in I)$, en donde cada E_i es espacio de suma continua, entonces E es espacio de suma continua. El producto de una familia de espacios de suma continua es espacio de suma continua.

Demostración.— Si en E se tiene

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} f_{ik}^{-1}(U_{ik})$$

y si $V_{ik} + V_{ik} \subset U_{ik}$, tomando

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} f_{ik}^{-1}(V_{ik})$$

resulta $V + V \subset U$.

Proposición 19.— Sea F subespacio de E, espacio de suma continua. El cociente E/F también es espacio de suma continua y es separado si y sólo si F es cerrado.

Demostración.— $V + V \subset U$ implica $k(V) + k(V) \subset k(U)$ y $\{k(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es base de entornos de cero en E/F. En cuanto a la separación véase la proposición 7.

Dadas $f_i: E_i \to E$ lineales con E_i espacio de suma continua (para cada $i \in I$), sobre E se puede considerar la más fina de las topologías c.c. de suma continua sobre E para las que todas las aplicaciones f_i son continuas y con ella se dirá que E es el *espacio de suma continua final* respecto de la familia $(f_i)_{iI\varepsilon}$ de aplicaciones lineales. Ejemplos son los cocientes.

4. — *Espacios metrizables.*

Decir que E es *espacio metrizable* significará que está provisto de una topología c.c. inducida por una distancia invariante por traslaciones con lo que necesariamente es de suma continua (proposición 12).

Proposición 20.— Un espacio de suma continua E separado es espacio metrizable si y solo si cumple el primer axioma de numerabilidad. En este caso existe sobre E una distancia compatible e invariante por traslaciones $(x, y) \to d(x, y)$ tal que, si $|x| = d(x, o)$, se cumplen:

(a) $|x| \geq 0$ para todo $x \varepsilon E$

(b) $|\delta x| \leq |x|$ si $|\delta| \leq 1$ y $x \varepsilon E$

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ cualesquiera que sean x, y de E

(d) Sobre E, $|x| = 0$ implica $x = o$

(e) $x_n \varepsilon E$ y $|x_n| \underset{n}{\to} 0$ implica $|\delta x_n| \underset{n}{\to} 0$ para cada $\delta \varepsilon K$.

Demostración.— Todo espacio topológico metrizable cumple el primer axioma de numerabilidad. Recíprocamente, sea

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$$

base de entornos equilibrados de cero en un espacio de suma continua separado E. La estructura uniforme de E, de base de vecindades $\{N_{U_n}: n = 1, 2. \dots\}$, es metrizable ([4] pág. 45 — 47) y se puede construir una distancia compatible definiendo

$$d(x, y) = \inf \sum_{k=2}^{n} f(x_{k-1}, x_k),$$

en donde se toma el ínfimo respecto de todas las sucesiones finitas $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$ y $f: E \times E \to R$ es la función

$$f(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{2^k} : x - y \varepsilon U_k \right\}$$

Por ser f invariante por traslaciones, también lo es d. Se cumplen (a), (c) y (d) por ser d distancia y también (b) porque si $|\delta| \leq 1$ y $x \varepsilon U_k$ también es $\delta x \varepsilon U_k$ de modo que $f(\delta x, o) \leq f(x, o)$ y $|\delta x| \leq |x|$. La propiedad (e) equivale a la continuidad de cada homotecia H_δ.

Proposión 21.— Si sobre E se tiene un funcional real $x \to |x|$ que cumple las propiedades (a), (b), (c), (d), (e) de la proposición anterior, se cumplen también:

(f) $|o| = 0$

(g) Si $\delta \varepsilon K$ cumple $|\delta| = 1$, entonces $|\delta x| = x|$ para todo $x \varepsilon E$.

Además $(x, y) \to d(x, y)$ es distancia sobre E invariante por traslaciones con cuya topología E es espacio metrizable (de suma continua).

Si K es R o C, la propiedad (e) es consecuencia de las anteriores.

Demostración. — (f) es consecuencia de (e) que a su vez, en el caso en que K es R o C, se puede demostrar escribiendo

$$\delta = (m + r)\, e^{it} \quad m \,\varepsilon\, N,\ |r| \leq 1,\ t \,\varepsilon\, R$$

pues, en virtud de (b) y (c)

$$|\delta\, x_n| \leq m\, |e^{it}\, x_n| + |re^{it}\, x_n| \leq (m + 1)\, |x_n| \underset{n}{\to} 0.$$

La propiedad (g) también es consecuencia de (b) pues si $|\delta| = 1$ será $|\delta\, x| \leq |x|$ y también $|x| = \left|\frac{1}{\delta}\, \delta x\right| \leq |\delta\, x|$ por ser $\left|\frac{1}{\delta}\right| = 1$.

De las propiedades (a) hasta (f) tenemos que d es distancia invariante por traslaciones y su topología es casi compatible pues (C.C.1) resulta de ser d invariante por traslaciones, (C.C.2) de (e) y (C.C.3) es consecuencia de (b) porque si $|\delta| \leq 1$ y $|x| \leq 1$ y $|x| \leq \varepsilon$, también $|\delta\, x| \leq \varepsilon$.

Obsérvese que E es espacio vectorial topológico cuando además de las propiedades (a) hasta (e) mencionadas se cumple

(h) $\delta_n \underset{n}{\to} 0$ implica $|\delta_n\, x| \underset{n}{\to} 0$ para cada $x \,\varepsilon\, E$. Pues esta propiedad implica la continuidad de cada aplicación $\delta \to \delta\, x$ de K en E (en [4] pág. 163 se puede suprimir de las hipótesis la condición $(F5)$ por ser K el cuerpo R o C).

Corolario. — Si E es espacio metrizable, todo cociente separado E/F es espacio metrizable. Si además E es completo, también E/F es completo.

Demostración. — Al ser E/F de suma continua que cumple el primer axioma de numerabilidad es espacio metrizable. La completitud del cociente ya se cumple en el caso de grupos topológicos metrizables completos ([2] pág. 163).

Se cumple el siguiente *principio de acotación uniforme:*

Proposición 22.— Sea G una familia de aplicaciones lineales continuas de E, espacio metrizable completo, en F, espacio de suma continua. Si cada

$$G(x) = \{g(x) : g \varepsilon G\}$$

es acotado en F, G es equicontinua.

Demostración.— Es la habitual. Si V es entorno de cero en F y W otro equilibrado y cerrado tal que $W - W \subset V$, el conjunto

$$M = \bigcap_{g \varepsilon G} \overset{-1}{g}(W)$$

es cerrado, equilibrado y además absorbente por ser cada $G(x)$ acotado. Por lo tanto, si (δ_n) es una sucesión de términos no nulos de K tal que $|\delta_n| \underset{n}{\rightarrow} \infty$ (existe por ser no discreta la valoración de K), es

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n M$$

pues si $x \varepsilon \delta M$ y $|\delta| \leq |\delta_n|$, también $x \varepsilon \delta_n M$.

Al ser E de Baire, M tiene algún punto interior, pues lo tiene algún $\delta_n M$, $U = M - M$ es entorno de cero y

$$g(U) = g(M - M) \subset W - W \subset V$$

cualquiera que sea $g \varepsilon G$.

Como consecuencia, y con la misma demostración que la de [4] pág. 170, por ejemplo, se obtiene la siguiente generalización del *teorema de Banach-Steinhaus*:

Proposición 23.— Sea E espacio metrizable completo, F espacio de suma continua y $g_n : E \rightarrow F$ una sucesión de aplicaciones lineales continuas tal que $(g_n(x))$ es sucesión acotada para cada $x \varepsilon E$. Se cumplen:

(a) Si $(g_n(x))$ es de Cauchy para cada $x \varepsilon M$ y M es subconjunto denso de E, entonces $(g_n(x))$ es de Cauchy para cada $x \varepsilon E$.

(b) Si en F existe $\lim\limits_{n} g_n(x)$ para cada $x \varepsilon E$, la aplicación $x \to g(x) = \lim\limits_{n} g_n(x)$ es lineal continua de E en F.

Para demostrar el *teorema de Banach-Schauder* se usa el hecho de que los entornos de cero del primer espacio son absorbentes:

Proposición 24. — Sea $g: E \to F$ lineal continua entre dos espacios metrizables completos. Si $A(E) = E$, o sea, si además E es espacio vectorial topológico, se cumplen:

I. — O bien g es morfismo estricto o $g(E)$ es magro en $\overline{g(E)}$.

II. — Es g morfismo estricto si y sólo si $\overline{g(E)} = g(E)$.

Demostración. — En lugar de repetir la habitual (en la que se utiliza que si $|\delta_n| \underset{n}{\to} \infty$ y si U es bola abierta de centro $o \varepsilon E$ respecto de la distancia que aparece en la proposición 20, es $E = \bigcup\limits_{n>0} \delta_n U$ y dicha demostración es válida cualquiera que sea K) es suficiente observar que $g: E \to \overline{g(E)}$ es lineal continua entre espacios vectoriales topológicos (pues $\overline{g(E)} \subset A(F)$) metrizables completos.

Corolario. — Si E es espacio metrizable completo, no existe sobre E ninguna topología de espacio vectorial topológico metrizable y completo que sea estrictamente menos fina que la de E.

III. Convexidad local.

1. — *Calibradores y topologías definidas por calibradores.*

Llamamos *calibrador* sobre el espacio vectorial E a todo funcional positivo

$$p : E \to [0, \infty]$$

que cumple $p(\delta x) = |\delta| \, p(x)$ y $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ cualesquiera que sean δ de K y x, y de E. Se conviene que $O \cdot \infty = O$.

Las bolas abierta y cerrada del calibrador p serán, respectivamente, los conjuntos

$$A_p = \{x \varepsilon E : p(x) < 1\}, \; C_p = \{x \varepsilon E : p(x) \leq 1\}$$

de manera que si es $0 \neq \delta \varepsilon K$ se cumplen

$$\delta A_p = \{x \varepsilon E : p(x) < |\delta|\}, \ \delta C_p = \{x \varepsilon E : p(x) \leq |\delta|\}$$

y todos estos conjuntos son absolutamente convexos.

Proposición 25.— Sea E espacio vectorial con una topología c.c. y p un calibrador sobre E. Son equivalentes:

(a) p es uniformemente continuo.

(b) p es continuo.

(c) A_p es abierto.

(d) A_p es entorno de cero.

(e) p es continuo en $o \varepsilon E$.

Demostración.— (d) implica (e) porque cada δA_p $(\delta \neq 0)$ será entorno de cero y se cumple $p(x) < |\delta|$ si $x \varepsilon \delta A_p$ y al no ser K discreto se puede tomar $\delta \neq 0$ tal que $|\delta| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$.

Para ver como (e) implica (a) consideremos sobre $[0, \infty]$ una distancia d compatible con la única estructura uniforme del espacio compacto $[0, \infty]$ tal que se cumpla

$$d(a, b) \leq |a - b| \text{ si } a, b \varepsilon [0, \infty).$$

Si se cumple (e), dado $\varepsilon < 0$ en E habrá un entorno equilibrado de cero U sobre el que se cumple $p(z) \leq \varepsilon$. Consideremos $x, y \varepsilon E$ tales que $x - y \varepsilon U$, de manera que es $p(x) - y) \leq \varepsilon$. Si, por ejemplo, $p(x) = \infty$, al ser $p(x - y)$ finito y $p(x) \leq p(x - y) + p(y)$, necesariamente $p(y) = \infty$ y $d(p(x), p(y)) = 0$. Si $p(x)$ y $p(y)$ son finitos tendremos

$$d(p(x), p(y)) \leq |p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \leq \varepsilon.$$

Diremos que una familia $(p_i)_{i \varepsilon I}$ de calibradores sobre E es suficiente para una topología $\mathcal{T}$ (o que define la topología $\mathcal{T}$) sobre E si $\mathcal{T}$ es invariante por traslación y los conjuntos δA_{p_i} $(\delta \neq 0, i \varepsilon I)$ constituyen una sub-base de entornos de cero para dicha topología. En este caso también se dirá que E, con la topología $\mathcal{T}$, tiene la familia $(p_i)_{i \varepsilon I}$ suficiente de calibradores.

Proposición 26. — Sobre E cada familia $(p_i)_{i \varepsilon I}$ de calibradores define una única topología $\mathcal{T}$ invariante por traslaciones, con ella E es espacio de suma continua y la familia $\mathcal{U}$ de conjuntos del tipo $\delta\, U_{i_1, \dots, i_n}$ con $\delta \neq 0$ y

$$U_{i_1, \dots, i_n} = \{x \,\varepsilon\, E : p_{i_k}(x) \leq 1,\ 1 < k < n\}$$

constituye una base de entornos absolutamente convexos y cerrados de cero para $\mathcal{T}$. Esta topología es separada cuando para cada $x \neq 0$ de E se cumple $p_i(x) \neq 0$ para algún $i \,\varepsilon\, I$.

Demostración. — Los conjuntos de $\mathcal{U}$ y los del tipo

$$\delta\, V_{i_1, \dots, i_n} = \delta \bigcap_{k=1}^{n} A_{p_{i_k}}$$

($\delta \neq 0$) son bases del mismo filtro que es filtro de entornos de cero de una topología sobre E con la que éste es espacio de suma continua por cumplirse (S.C. 1), (S.C. 2) y (S.C. 3) de la proposición 14. Además la propiedad de separación indicada equivale a que se cumpla $\bigcap_{U \varepsilon \mathcal{U}} U = o$.

En general la topología $\mathcal{T}$ definida por la familia (p_i) de calibradores no será la topología inicial de la familia

$$p_i : E \to [0, \infty]$$

de aplicaciones, pero si F es espacio con topología c.c. una aplicación g: $F \to E$ es continua si y sólo si lo son todas las aplicaciones $p_i\, g : F \to [0, \infty]$, o sea, si y sólo si para cada p_i existe un entorno de cero en F sobre el que se cumple $p_i(g(x)) \leq 1$. Se puede enunciar un criterio análogo de equicontinuidad de familias de aplicaciones lineales de F en E.

Proposición 27. — Sea $(p_i)_{i \varepsilon I}$ familia suficiente de calibradores para E. Se cumplen:

(a) Para cada $i \,\varepsilon\, I$, p_i es continuo en E.

(b) La familia de todos los calibradores continuos sobre E es filtrante para la ordenación $\leq$ y es suficiente para E.

Demostración. — De la proposición 25 resulta (a).

(b) Si p, q son calibradores continuos, también lo es $r = \sup(p, q)$ puesto que éste, además de ser calibrador, cumple $A_r = A_p \cap A_q$. La topología de E coincide con la definida por todos los calibradores continuos.

Proposición 28. — Si $(p_i)_{i \varepsilon I}$ es familia suficiente de calibradores para E, un subconjunto M de E es acotado si y sólo si para cada $i \varepsilon I$ $p_i(M)$ es un acotado de $[0, \infty)$. La restricción de cada p_i *a* $A(E)$ es seminorma.

Demostración. — $U_i = A_{p_i} \cap A(E)$ es entorno de cero, luego absorbente, en $A(E)$ de manera que si $x \varepsilon A(E)$ se tiene $\delta x \varepsilon U_i$ para algún $\delta \neq 0$, es decir, $p_i(\delta x) < 1$ y $p_i(x) < \left|\dfrac{1}{\delta}\right|$ de manera que, al ser finito, p_i es seminorma sobre el subespacio $A(E)$.

Por otra parte, M es acotado en E si y sólo si es un acotado de $A(E)$.

Sea F subespacio vectorial de E, espacio con una familia suficiente $(p_i)_{i \varepsilon I}$ de calibradores. Está claro que la topología inducida por E en F está definida por la familia $(p_{i|F})_{i \varepsilon I}$ de calibradores.

Por otra parte, si p es calibrador sobre E, la función $\widetilde{p}$ definida sobre E/F mediante

$$\widetilde{p}(w) = \inf_{x \varepsilon w} p(x)$$

es también calibrador y la imagen canónica de A_p es $A_{\widetilde{p}}$, por lo que:

Proposición 29. — Si la topología de E está definida por la familia filtrante $(p_i)_{i \varepsilon I}$ de calibradores, la de E/F lo está por $(\widetilde{p}_i)_{i \varepsilon I}$.

A partir de la definición de las topologías iniciales resulta también

Proposición 30. — Para cada $i \varepsilon I$ sea E_i un espacio con familia suficiente de calibradores y $f_i : E \to E_i$ lineal. La topología inicial de E respecto de la familia $(f_i)_{i \varepsilon I}$ de aplicaciones está definida por los calibradores $p_i f_i$, en donde i recorre I y, para cada $i \varepsilon I$, p_i recorre la familia de calibradores que define la topología de E_i.

Los productos son casos particulares.

2. — *Topologías con bases de entornos de cero absolutamente convexos.*

Si E es espacio con topología c.c. que, como en el caso en que posea familia suficiente de calibradores, tenga una base de entornos de cero absolutamente convexos diremos simplemente que E es espacio con base de entornos absolutamente convexos. En este caso la suma de E es continua.

Si $(E_i)_{i\varepsilon I}$ es familia de espacios con base de entornos absolutamente convexos y para cada $i \varepsilon I$ se tiene una aplicación lineal $f_i: E \rightarrow E_i$, con la correspondiente topología inicial E es espacio con base de entornos absolutamente convexos. Los subespacios, los productos y los límites proyectivos son casos particulares.

Si para cada $i \varepsilon I$ se tiene una aplicación lineal f_i del espacio con base de entornos absolutamente convexos E_i en E, con el supremo de las topologías con las que E es espacio con base de entornos absolutamente convexos diremos que E es espacio con base de entornos absolutamente convexos final respecto de $(f_i)_{i\varepsilon I}$.

Proposición 31.— Sea E espacio con base de entornos absolutamente convexos final respecto de las aplicaciones lineales

$$f_i: E_i \rightarrow E \ (i \varepsilon I)$$

Son bases de entornos de cero en E:

(a) La familia $\mathcal{U}$ de los subconjuntos absolutamente convexos U de E tales que $f_i^{-1}(U)$ es entorno de cero en E_i para cada $i \varepsilon I$.

(b) La familia $\mathcal{V}$ de los conjuntos del tipo

$$V = \underset{i\varepsilon I}{\Gamma} f_i(V_i)$$

con V_i entorno de cero en E_i.

Demostración.— (a) $\mathcal{U}$ es base de filtro que cumple las condiciones (S.C.1), (S.C.2), (S.C.3) constituida por conjuntos absolutamente convexos, de manera que es base de entornos de una topología, la más fina por construcción, con la que E es espacio con base de entornos absolutamente convexos y cada f_i continua.

(b) Cada $V \varepsilon \mathcal{V}$ es entorno de cero puesto que para cada $i \varepsilon I$ el conjunto $f_i^{-1}(V)$ contiene a V_i y además V es absolutamente convexo.

Por otra parte, para cada $U \in \mathcal{U}$ se tiene

$$U \supset \underset{i \in I}{\Gamma} [U \cap f_i (E_i)]$$

pues U es absolutamente convexo y contiene a cada $U \cap f_i (E_i)$. Basta observar que $U \cap f_i (E_i) = f_i (V_i)$, siendo V_i el entorno de cero de E_i

$$V_i = f_i^{-1} (U \cap f_i (E_i)) = f_i^{-1} (U).$$

Observación.— Si en la proposición anterior se cumple además que cada E_i es espacio vectorial topológico, el espacio E que se obtiene no será en general espacio vectorial topológico. Lo será si se cumple

$$\sum_{i \in I} f_i (E_i) = E.$$

Lema.— Si $(A_i)_{i \in I}$ es familia de subconjuntos de E y

$$g : E \to F$$

es lineal, se cumple

$$g (\underset{i \in I}{\Gamma} (A_i)) = \underset{i \in I}{\Gamma} g (A_i)$$

Demostración.— De

$$A_i \subset g^{-1} (\underset{i \in I}{\Gamma} g (A_i))$$

resulta

$$\underset{i \in I}{\Gamma} A_i \subset g^{-1} (\underset{i \in I}{\Gamma} g (A_i))$$

por lo que, al ser absolutamente convexa la imagen por g del primer miembro, necesariamente se tiene la identidad del enunciado.

Proposición 32.— Bajo las hipótesis de la proposición 31, si $(g_j)_{j \in J}$ es una familia de aplicaciones lineales de E en otro espacio F con base de entornos absolutamente convexos se cumple que $(g_j)_{j \in J}$ es equicontinua si y sólo si para cada $i \in I$ lo es la familia $(g_j f_i)_{j \in J}$.

Demostración. — El directo es evidente. Para demostrar el recíproco basta observar que si W es entorno absolutamente convexo de cero en F y se cumplen $g_j f_i (V_i) \subset W$ para todo $j \varepsilon J$, designando

$$V = \underset{i \varepsilon I}{\Gamma} f_i (V_i),$$

del lema resulta $g_j (V) \subset W$ para todo $j \varepsilon J$.

En el caso particular de las sumas directas se obtiene, por el procedimiento de la proposición 10:

Proposición 33. — Si $E = \underset{i \varepsilon I}{\oplus} E_i$ es espacio con base de entornos absolutamente convexos final respecto de las inyecciones canónicas

$$E_i \to E$$

se cumple

$$A(E) = \underset{i \varepsilon I}{\oplus} A(E_i).$$

3. — *Espacios localmente convexos.*

Si M es subconjunto absolutamente convexo y no vacío de E, p_M será su funcional de Minkowski

$$\begin{aligned} p_M : E &\to [0, \infty] \\ x &\to \inf \{|\delta| : x \varepsilon \delta M\} \end{aligned}$$

con $p_M (x) = \infty$ si $x \notin KM$.

Proposición 34. — Si K es R o C y M es subconjunto absolutamente convexo y no vacío de E, se cumplen:

(a) p_M es calibrador.

(b) $A_{p_M} \subset M \subset C_{p_M}$

(c) Si p, q son calibradores sobre E se cumple $A_p \subset C_q$ si y sólo si $q \leq p$.

Demostración. — (a) Para demostrar la desigualdad triangular se pueden suponer finitos $p_M (x)$ y $p_M (x')$ y si son $x \varepsilon \delta M$ y $x' \varepsilon \delta' M$

se cumple $x + x' \varepsilon \delta M + \delta' M = (\delta + \delta') M$ por ser M absolutamente convexo, o sea, $p_M (x + x') \leq |\delta| + |\delta'|$ de manera que tomando ínfimos $p_M (x + x') \leq p_M (x) + p_M (x')$.

(b) Si $p_M (x) < \varepsilon < 1$, es x de εM y por lo tanto de M, o sea $A_{p_M} \subset M$. Además, de $x \varepsilon M = 1 M$ resulta $x \varepsilon C_{p_M}$.

(c) Basta observar que de $p (y) < \delta < q (y)$ resulta $(1/\delta) y \varepsilon A_p$ y $(1/\delta) y \notin C_q$.

Corolario.— Para N absolutamente convexo y no vacío se cumple que $p_M = p_N$ si y sólo si $A_{p_M} \subset N \subset C_{p_N}$.

Diremos que un espacio E con una topología c.c. es *localmente convexo* si el cuerpo K de escalares es R o C y si posee una base de entornos convexos de cero. Tales espacios son de suma continua pues para la mencionada base de entornos se cumplen (S.C.1), (S.C.2) y (S.C.3).

Lema.— Si M es un abierto de E, espacio de suma continua sobre R o C, también son abiertos sus envolturas absolutamente convexa ΓM y convexa $C M$.

Demostración.— Consideremos

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \text{ con } x_i \varepsilon M, \sum_{i=1}^{n} |\delta_i| = \varepsilon \leq 1, \ \delta_i \neq 0$$

de manera que tomando un entorno equilibrado de cero V tal que $x_i + V \subset M$ resulta

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i + \varepsilon V = \sum_{i=1}^{n} \delta_i (x_i + (|\delta_i|/\delta_i) V) \subset \sum_{i=1}^{n} \delta_i (x_i + V)$$

que está contenido en ΓM, de manera que este conjunto es abierto.

La demostración es análoga para $C M$.

Proposición 35.— Si E es espacio localmente convexo se cumplen:

(a) E posee una base de entornos absolutamente convexos y cerrados de cero.

(b) E posee una base de entornos absolutamente convexos y abiertos de cero.

(c) Si $\mathcal{U}$ es base de entornos absolutamente convexos de cero en E, la familia de calibradores $(p_U)_{U \varepsilon \mathcal{U}}$ define la topología de E.

Demostración. — Si $\mathcal{V}$ es base de entornos equilibrados y abiertos de cero, la familia de las envolturas convexas $C\,V$ de los $V \varepsilon \mathcal{V}$ es base de entornos absolutamente convexos de cero y (a) y (b) resultan de la proposición 15 y del lema.

(c) Cada p_U es calibrador (proposición 34) y la topología $\mathcal{T}$ definida por $(p_U)_{U \varepsilon \mathcal{U}}$ coincide con la de E ya que cada $U \varepsilon \mathcal{U}$ contiene al correspondiente A_{p_U} y éste es entorno de cero en E, pues si es $V \subset \frac{1}{2}\,U$ también $V \subset A_{p_U}$.

Ejemplos. — (1) Los espacios vectoriales topológicos localmente convexos son espacios localmente convexos en el sentido de muestra definición.

(2) También son localmente convexos los espacios lineales sobre R o C.

(3) Las topologías $\mathcal{T}^f$ poseen base de entornos de cero formada por conjuntos equilibrados y absorbentes pero, en general no todos convexos pues se tienen ejemplos en que la suma no es continua.

(4) Si F es espacio con $(p_i)_{i \varepsilon I}$ familia suficiente de calibradores (resp. con una base $\mathcal{V}$ de entornos absolutamente convexos de cero) y $\mathcal{M}$ un conjunto de partes de X, cada subespacio E de F^X con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ tiene la familia suficiente de calibradores

$$p_{i,M} : f \to \sup p_i\,(f\,(M)) \qquad (i \,\varepsilon\, I,\ M \,\varepsilon\, \mathcal{M})$$

(resp. una base de entornos absolutamente convexos de cero constituida por los conjuntos $W(M;\,V)$, con $M \,\varepsilon\, \mathcal{M}$, $V \,\varepsilon\, \mathcal{V}$).

(5) $\mathcal{M}(D)$ es espacio localmente convexo metrizable y completo con el sistema suficiente de calibradores definidos por

$$q_K\,(f) = \sup_{z \varepsilon K} |f\,(z)|$$

($q_K\,(f) = \infty$ si f posee algún polo en K), cuando K recorre la familia de compactos de D o, simplemente, una sucesión exhaustiva de compactos de D.

El cociente $M(D)/H(D)$, espacio localmente convexo sin puntos acotados, es el espacio lineal separado que puede identificarse con el conjunto de pares $(M, (P_z)_{z\varepsilon D}) = P_M$, en donde M es subconjunto discreto de D y son $P_z \varepsilon C[X]$ tales que $P_z = o$ si $z \notin M$, con las leyes de composición $P_M + P'_{M'} = P''_{M \cup M'}$, siendo $P''_z = P_z + P'_z$ para cada $z \varepsilon D$; $\delta P_M = (\delta P)_M$, siendo $(\delta P)_z = \delta P_z$ para cada $z \varepsilon D$ y con la topología invariante por traslaciones con base de entornos de cero constituida por los conjuntos

$$U_K = \{P_M : M \text{ parte discreta de } D \text{ disjunta con } K\},$$

de calibrador

$$p_K(P_M) = \begin{cases} 0 \text{ si } M \subset D - K \\ \infty \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

cuando K recorre la familia de compactos de D.

4. — *Teorema de Hahn-Banach y dualidad.*

La forma analítica del *teorema de Hahn-Banach* se extiende al caso de calibradores del siguiente modo:

Proposición 36. — Sea $q: E \to [0, \infty]$ un funcional sobre el espacio vectorial real E tal que $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ y $q(tx) = tq(x)$ si $x, y \varepsilon E$ y si $t \geq 0$ (se supone $0 \cdot \infty = 0$). Sean F subespacio vectorial de E y h forma lineal sobre F tal que $h(z) \leq q(z)$ para todo $z \varepsilon F$. Existe entonces una prolongación de h a una forma lineal u sobre E tal que $u(x) \leq q(x)$ para todo $x \varepsilon E$.

Demostración. — Como en el caso en que q es finito (ver, por ejemplo [4] pág. 190-191) resultará de aplicar el lema de ZORN, pues si h se ha extendido a F_1 sobre el que $h(z) \leq q(z)$ y si $x_0 \notin F_1$ se obtiene otra prolongación u sobre $[x_0] \oplus F_1$ sin más que definir $u(x) = tr + h(z)$ si $x = tx_0 + z$ con $z \varepsilon F_1$, habiéndose elegido $r \varepsilon R$ del siguiente modo:

Si z, z' son de F_1 se cumple

$$h(z') - h(z) \leq q(z' - z) \leq q(z' + x_0) + q(-z - x_0)$$

y se puede tomar r *finito* tal que

$$\sup_{z \varepsilon F_1} [-q(-z-x_0) - h(z)] \leq r \leq \inf_{z' \varepsilon F_1} [q(z'+x_0) - h(z')] \; z \; \varepsilon \; F_1$$

puesto que si

$$\inf_{z' \varepsilon F_1} [q(z'+x_0) - h(z')] = \infty$$

necesariamente $q(z'+x_0) = \infty$ para todo $z' \; \varepsilon \; F_1$ lo que implica

$$\sup_{z \varepsilon F_1} [-q(-z-x_0) - h(z)] = -\infty$$

y recíprocamente, con lo que en este caso se puede tomar $r = 0$.

De la definición de u resulta $u(x) = q(x)$.

Corolario.— Si q es calibrador sobre E, espacio vectorial real o complejo y h forma lineal sobre F, subespacio vectorial de E, tal que

$$|h(z)| \leq q(z) \text{ para todo } z \; \varepsilon \; F$$

existe una prolongación de h a una forma lineal u sobre E tal que

$$|u(x)| \leq q(x) \text{ para todo } x \; \varepsilon \; E.$$

Demostración.— La misma que cuando q es seminorma ([4] pág. 191) a partir de la proposición anterior).

Proposición 37.— Si E es espacio localmente convexo separado se cumplen:

(a) *Si* $o \neq y \; \varepsilon \; E$, existe $u \; \varepsilon \; E'$ tal que $u y \neq 0$.

(b) $< E', E >$ es sistema dual.

(c) La topología débil $\sigma(E, E')$ es topología de espacio vectorial topologico separado localmente convexo menos fina que la inicial de E.

Demostración.— (*a*) Sea q calibrador continuo sobre E tal que $q(y) > \delta > 0$ y como la aplicación lineal

$$\begin{aligned} h : [y] &\to K \\ ry &\to r\delta \end{aligned}$$

cumple $|h(ry)| = |r|\,\delta \leq |r|\,q(y) = q(ry)$ por lo que existe una prolongación de h a una forma lineal u sobre E tal que $|u(x)| \leq q(x)$ cualquiera que sea $x \in E$. Evidentemente $u \in E'$ y es $u(y) \neq 0$.

Consecuencia de (a) son (b) y (c).

Si escribimos $E' \doteq A(E)'$ cuando la aplicación lineal $u \to u_{|A(E)}$ de E' en $A(E)'$ es biyectiva, se cumple:

Proposición 38.— Sea E espacio localmente convexo.

(a) Para cada elemento no acotado x de E existe $u \in E'$ tal que $u(x) = 1$.

(b) Es necesario y suficiente para que $A(E)' = E'$ que se cumpla $A(E) = E$.

Demostración.— Si $x \notin A(E)$ se puede tomar $w \in [E/A(E)]'$ tal que $w\,x = 1$ de manera que $u = wk \in E'$ cumple $ux = 1$. Observese además que en este caso $u_{|A(E)} = o$ de manera que $u \to u_{|A(E)}$ no es inyectiva.

Seminario Matemático de Barcelona,
junio de 1972

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Bourbaki, *General Topology, Part 1;* Hermann, 1966.

[2] N. Bourbaki, *General Topology, Part 2;* Hermann, 1966.

[3] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 et 2;* Hermann, 1966 (Segunda edición).

[4] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I;* Springer, 1969.

[5] H. Schaefer, *Topological Vector Spaces;* Macmillan, 1966.