«RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO A UNA CLASE DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.er ORDEN, CUASI-LINEALES Y DE TIPO HIPERBÓLICO»

por

J. M. CASCANTE DÁVILA

Parte segunda

UNICIDAD DE LA SOLUCION Y DEPENDENCIA CONTINUA DE LA MISMA RESPECTO A LAS CONDICIONES INICIALES

1. Unicidad de la solución. — «La solución al Problema de Cauchy considerado:

$$\left.\begin{aligned} D_{112}\,u + \varrho\,(x_1, x_2)\,(D_{122}\,u) &= f\,(x_1, x_2, u, \underset{(i=1,2)}{D_i\,u}, \underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{D_{jk}\,u}) \\ \left.\begin{aligned} u\,(M) &= \varphi\,(M) \\ (D_1\,u)\,(M) &= \Psi\,(M) \\ (D_{12}\,u)\,(M) &= \chi\,(M) \end{aligned}\right\} & M \in C \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

supuesto verificadas las restricciones sobre ϱ y f exigidas en el n.º 1 de la Parte primera, es, para cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi})$, única en el sentido siguiente: si u y u^* son dos funciones definidas y continuas, respectivamente, sobre ciertos subconjuntos V y V^* de $\mathbf{R}^2$ que verifican la relación $D \subset V \cap V^*$, las cuales son además tres veces continuamente diferenciables, respectivamente, sobre los abiertos W y W^* de $\mathbf{R}^2$, tales que $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}} \subset W \subset V$ y $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}} \subset W^* \subset V^*$, siendo $\underset{(i=1,2)}{D_i\,u_{|W}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,u_{|W}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,u_{|W}}$ y $\underset{(i=1,2)}{D_i\,\overset{*}{u}_{|W^*}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,\overset{*}{u}_{|W^*}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,\overset{*}{u}_{|W^*}}$, continuamente prolongables a $\overline{W}$ y $\overline{W^*}$, respectivamente [Puesto que: $D \subset \overline{\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}} \subset \overline{W}$ y $D \subset \overline{\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}} \subset \overline{W^*}$, y una vez prolongadas con continuidad $\underset{(i=1,2)}{D_i\,u_{|W}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,u_{|W}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,u_{|W}}$ y $\underset{(i=1,2)}{D_i\,\overset{*}{u}_{|W^*}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,\overset{*}{u}_{|W^*}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,\overset{*}{u}_{|W^*}}$ a $\overline{W}$ y $\overline{W^*}$, respectivamente, (prolongaciones continuas que serán denotadas a lo largo de este n.º 1 por $\underset{(i=1,2)}{D_i\,u}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,u}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,u}$ y por $\underset{(i=1,2)}{D_i\,u^*}$, $\underset{(jk=1,2)}{D_{jk}\,u^*}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,u^*}$, respectivamente), se podrán considerar las restricciones $\underset{(i=1,2)}{(D_i\,u)_{|D}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk}\,u)_{|D}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{(D_{pqr}\,u)_{|D}}$ y $\underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^*)_{|D}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk}\,u^*)_{|D}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{(D_{pqr}\,u^*)_{|D}}$ a D de tales prolongaciones continuas], verificándose

$$\begin{aligned} &\Big(\bigcup_{M \in D} \{ (M, u\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u)}\,(M), \underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk}\,u)}\,(M)) \}\Big) \cup \\ \cup\, &\Big(\bigcup_{M \in D} \{ (M, u^*\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^*)}\,(M), \underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk}\,u^*)}\,(M)) \}\Big) \subset A, \end{aligned}$$

y satisfaciendo u y u^* al sistema (1), en estas condiciones, se tiene que: $u_{|D} = \overset{*}{u}_{|D}$ y $\underset{(i=1,2)}{(D_i\, u)_{|D} = (D_i\, u^*)_{|D}}$ y $\underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk}\, u)_{|D} = (D_{jk}\, u^*)_{|D}}$ y $(D_{pqr}\, u)_{|D} = \underset{(p,q,r=1,2)}{= (D_{pqr}\, u^*)_{|D}}$ ».

En efecto, para todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, poniendo: $v = u_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}} - \overset{*}{u}_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$; $D_i\, v = (D_i\, u)_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}} - (D_i\, u^*)_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$; $D_{jk}\, v = (D_{jk}\, u)_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}} - (D_{jk}\, u^*)_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$; $D_{pqr}\, v = (D_{pqr}\, u)_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}} - (D_{pqr}\, u^*)_{|D_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$, $(i, j, k, p, q, r = 1,2)$, es v continua sobre $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con restricción $v_{|\overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$ a $\overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ tres veces continuamente diferenciable sobre $\overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, cuyas derivadas primeras, segundas y terceras son prolongables unívocamente con continuidad a $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, y además v es solución del Problema de Cauchy representado por el sistema:

$$\left.\begin{aligned} D_{112}\, v + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, v) &= \Phi\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{aligned} v\,(M) &= 0 \\ (D_1\, v)\,(M) &= 0 \\ (D_{12}\, v)\,(M) &= 0 \end{aligned}\right\} & \; M \in C^{(\nu,\varkappa)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

en la que $\Phi : D_{C^{(\nu,\varkappa)}} \to \mathbf{R}$ es la aplicación así definida:

$$\begin{aligned} M \in D_{C^{(\nu,\varkappa)}} \to \Phi\,(M) &= f\,(M, u\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u)\,(M)}, \underset{(j,k=1,2\,;\, j \leq k)}{(D_{jk}\, u)\,(M)}) - \\ &- f\,(M, u^*\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^*)\,(M)}, \underset{(j,k=1,2\,;\, j \leq k)}{(D_{jk}\, u^*)\,(M)}) \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

La ecuación en derivadas parciales que figura en (2), así como las condiciones iniciales impuestas a la solución v de dicha ecuación, son del mismo tipo que la estudiada en el n.º 11 de la INTRODUCCION, por lo que, en virtud del Teorema de Unicidad allí establecido, las expresiones de v, $\underset{(i=1,2)}{D_i\, v}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\, v}$, para todo $M \in D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} v\,(M) &= \iint\limits_{(M P_M Q_M)} (J\,(\Phi))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ (D_1\, v)\,(M) &= -\int\limits_{(M P_M)} (J\,(\Phi))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \\ (D_2\, v)\,(M) &= -\int\limits_{(M Q_M)} (J\,(\Phi))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
(D_{11}\,v)\,(M) &= -\,(\varrho\cdot J\,(\Phi))\,(M) - \int_{(MP_M)} ((D_2\,\varrho)\cdot J\,(\Phi))\,(\xi_1,\,\xi_2)\,d\xi_2 - \\
&\quad - \int_{(MP_M)} \Phi\,(\xi_1,\,\xi_2)\,d\xi_2 \\
(D_{12}\,v)\,(M) &= \quad (J\,(\Phi))\,(M) \\
(D_{22}\,v)\,(M) &= -\left(\frac{J\,(\Phi)}{\varrho}\right)(M) + \int_{(MQ_M)} \left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2}\cdot J\,(\Phi)\right)(\xi_1,\,\xi_2)\,d\,\xi_1 - \\
&\quad - \int_{(MQ_M)} \left(\frac{\Phi}{\varrho}\right)(\xi_1,\,\xi_2)\,d\,\xi_1
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Sea $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ el máximo del conjunto finito constituido por los extremos superiores sobre el compacto $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ (n.º 11 de la INTRODUCCION), de los módulos de $v,\, D_i\,v,\, D_{jk}\,v,\, (i,\,j,\,k\,=\,1{,}2)$, y $\widetilde{H}$ el máximo del conjunto integrado por los coeficientes $\widetilde{A},\ \underset{(i=1,2)}{\widetilde{A}_i},\ \underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{\widetilde{A}_{jk}}$ correspondientes a la desigualdad global de Lipschitz, que sobre el compacto:

$$\mathcal{K} = [\bigcup_{M\,\in\,D_{C^{(\nu,\varkappa)}}} \{(M,\,u\,(M),\,\underset{(i=1,2)}{(D_i\,u)}\,(M),\,\underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk}\,u)}\,(M))\}] \cup$$

$$\cup\,[\bigcup_{M\,\in\,D_{C^{(\nu,\varkappa)}}} \{(M,\,u^*\,(M),\,\underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^*)}\,(M),\,\underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk}{}^*\,u)}\,(M))\}] \subset \mathcal{A}$$

de $\mathbf{R}^8$, verifica f.

Procediendo de modo enteramente análogo a como se hizo en el n.º 6 de la PARTE PRIMERA, resulta, en primer lugar, la siguiente desigualdad, válida para todo $M \in D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$:

$$\text{«}\,|\,\Phi\,|\,(M) = |\,f\,(M,\,u\,(M),\,\underset{(i=1,2)}{(D_i\,u)}\,(M),\,\underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk}\,u)}\,(M)) -$$

$$-\,f\,(M,\,u^*\,(M),\,\underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^*)}\,(M),\,\underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk}\,u^*)}\,(M))\,|\,\leq \widetilde{A}\cdot|\,u-u^*\,|\,(M) +$$

$$+\sum_{i=1,2}\widetilde{A}_i\cdot|\,D_i\,u - D_i\,u^*\,|\,(M) + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}}\widetilde{A}_{jk}\,|\,D_{jk}\,u - D_{jk}\,u^*\,|\,(M) =$$

$$= \widetilde{A}\cdot|\,v\,|\,(M) + \sum_{i=1,2}\widetilde{A}_i\cdot|\,D_i\,v\,|\,(M) + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}}\widetilde{A}_{jk}\,|\,D_{jk}\,v\,|\,(M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0\cdot 6\,\widetilde{H}\text{»}$$

de la cual se deduce, [en donde ξ, η tienen el significado habitual (n.º 7 de la PARTE PRIMERA de S.P.A., [3])]:

$$| J(\Phi) | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \frac{6 \widetilde{H}}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

obteniéndose, como consecuencia de lo precedente, y teniendo en cuenta además (3), las desigualdades siguientes, válidas para todo $M \in D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$:

$$| v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H} \cdot (\alpha + \beta)^2}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| D_1 v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H} (\alpha + \beta)}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| D_2 v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H} (\alpha + \beta)}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| D_{11} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot 6 \widetilde{H} \cdot \left[L \cdot \frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| D_{12} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H}}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| D_{22} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot 6 L \widetilde{H} \left[\frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

Denotando por $\widetilde{K}$ al mayor de los coeficientes numéricos que multiplican a $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$ en las expresiones de los segundos miembros de las desigualdades anteriores, se obtiene como mayorante sobre $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ de los módulos de v, $\underset{(i=1,2)}{D_i v}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk} v}$, a $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$.

A partir de esta mayorante se obtienen sucesivamente las desigualdades, válidas para todo $M \in D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, siguientes:

$$| \Phi | (M) \leq \widetilde{A} \cdot | v | (M) + \sum_{i=1,2} \widetilde{A}_i \, | D_i v | (M) +$$

$$+ \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} \widetilde{A}_{jk} \cdot | D_{jk} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot 6 \widetilde{H} \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| J(\Phi) | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H}}{1 - m} \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$| v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H} \cdot (\alpha + \beta)^2}{1 - m} \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$| D_1 v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H} \cdot (\alpha + \beta)}{1 - m} \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$| D_2 v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H} \cdot (\alpha + \beta)}{1 - m} \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$| D_{11} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot 6 \widetilde{H} \cdot \left[L \cdot \frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$| D_{12} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \frac{6 \widetilde{H}}{1 - m} \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$| D_{22} v | (M) \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot 6 L \widetilde{H} \cdot \left[\frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \cdot \widetilde{K} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

Teniendo en cuenta el significado de $\widetilde{K}$, se obtiene como mayorante sobre $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ de los módulos de v, $\underset{(i=1,2)}{D_i v}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk} v}$, a $\widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \widetilde{K}^2 \cdot \dfrac{(\xi + \eta)^2}{2!}$.

Por recurrencia, y procediendo de modo análogo a como se efectuó en el n.º 8 de la Parte primera, se establece sin dificultad la relación:

$$\text{«} (\forall_{(n,\, M)}) \Big((n, M) \in N \times D_{C^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Máx} \cdot \{ | v | (M), \underset{(i=1,2)}{| D_i v |} (M), \underset{(j,k=1,2\,;\, j \leq k)}{(D_{jk} v) (M)} \} \leq$$

$$\leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \widetilde{K}^n \cdot \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} \leq \widetilde{\mathcal{M}}_0 \cdot \widetilde{K}^n \cdot \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} \Big) \text{»}$$

lo que entraña:

$$\left.\begin{array}{c} \text{« } v = \underset{(i=1,2)}{D_i\, v} = \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\, v} = O_{\mathcal{F}(D_{c(\nu,\varkappa)}\,;\,\mathbf{R})} \text{ »} \\ \text{y} \\ \text{« } \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\, v_{|\mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}} = O_{\mathcal{F}(\mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}\,;\,\mathbf{R})} \text{ »} \end{array}\right\}$$

es decir:

$$\left.\begin{array}{c} \text{« } u_{|D_{c(\nu,\varkappa)}} = \overset{*}{u}_{|D_{c(\nu,\varkappa)}}\,;\ (D_i\, u)_{|D_{c(\nu,\varkappa)}} = \\ = (D_i\, u^*)_{|D_{c(\nu,\varkappa)}}\,,\ (i = 1,2)\,;\ (D_{jk}\, u)_{|D_{c(\nu,\varkappa)}} = (D_{jk}\, u^*)_{|D_{c(\nu,\varkappa)}}\,,\ (j,k = 1,2) \text{ »} \\ \text{y} \\ \text{« } (D_{pqr}\, u)_{|\mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}} = \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\, u_{|\mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}}} = D_{pqr}\, \overset{*}{u}_{|\mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}} = (D_{pqr}\, u^*)_{|\mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}} \text{ »} \end{array}\right\}$$

y dada la arbitrariedad de $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, y puesto que $D = \bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, se puede poner:

$$\left.\begin{array}{c} \text{« } u_{|D} = \overset{*}{u}_{|D}\,;\ (D_i\, u)_{|D} = \\ = (D_i\, u^*)_{|D}\,,\ (i = 1,2)\,;\ (D_{jk}\, u)_{|D} = (D_{jk}\, u^*)_{|D}\,,\ (j,\, k = 1,2) \text{ »} \\ \text{y} \\ \text{« } (D_{pqr}\, u)_{|\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}} \underset{(p,q,r=1,2)}{=} (D_{pqr}\, u^*)_{|\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}} \text{ »} \end{array}\right\}$$

resultando en definitiva [supuesto prolongadas con continuidad a D las funciones $\underset{(p,q,r=1,2)}{(D_{pqr}\, u)_{|\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{(D_{pqr}\, u^*)_{|\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{c(\nu,\varkappa)}}}$]:

$$\left.\begin{array}{c} \text{« } u_{|D} = \overset{*}{u}_{|D}\ ;\ \ (D_i\, u)_{|D} \underset{(i=1,2)}{=} (D_i\, u^*)_{|D}\ ;\ \ (D_{jk}\, u)_{|D} \underset{(j,k=1,2)}{=} (D_{jk}\, u^*)_{|D}\ ; \\ (D_{pqr}\, u)_{|D} \underset{(p,q,r=1,2)}{=} (D_{pqr}\, u^*)_{|D} \text{ »} \end{array}\right\}$$

de acuerdo con lo afirmado al principio de este número.

2. DEPENDENCIA CONTINUA DE LA SOLUCION DE LA ECUACION EN DERIVADAS PARCIALES $D_{112}\,u + \varrho\,(x_1, x_2)\cdot(D_{122}\,u) = f\,(x_1, x_2, u, \underset{(i=1,2;}{D_i}\,u, \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{D_{jk}\,u)}$ RESPECTO A LAS CONDICIONES INICIALES DADAS SOBRE EL ARCO C. — Consideremos la sucesión de aplicaciones:

$$\Lambda^{(n)} : (\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}\,(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \subset E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)} \to u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} \in E_D^{(3)}$$

definidas por recurrencia como sigue:

para cada $n \in N$ y para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}\,(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, la imagen $\Lambda^{(n)}\,(\varphi, \Psi, \chi)$ de (φ, Ψ, χ) mediante $\Lambda^{(n)}$ es la solución $u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ al Problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\,u + \varrho\,(x_1, x_2)\,(D_{122}\,u) = \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \varphi\,(M) \\ (D_1\,u)\,(M) = \Psi\,(M) \\ (D_{12}\,u)\,(M) = \chi\,(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\} \quad (4)$$

en donde, para $n \in N$ y $n \geq 2$, $\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}: D \to \mathbf{R}$, denota la aplicación compuesta:

$$M \in D \to f\,(M, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M)) \in \mathbf{R}$$

y si $n = 1$, $\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}: D \to \mathbf{R}$ es la aplicación compuesta:

$$M \in D \to f\,(M, u^0_{(\gamma,\Psi,\chi)}\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\,u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M)) \in \mathbf{R}$$

[$u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}$; $D_i\,u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $(i = 1,2)$; $D_{jk}\,u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $(j, k = 1,2)$, son las restricciones a D, respectivamente, de la solución $w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras y segundas, al Problema de Cauchy (ya considerado en el n.º 11 de la INTRODUCCION) parcialmente homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\,u + \varrho\,(x_1, x_2)\,(D_{122}\,u) = 0 \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \varphi\,(M) \\ (D_1\,u)\,(M) = \Psi\,(M) \\ (D_{12}\,u)\,(M) = \chi\,(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\} \quad (4')$$

]

Denotaremos, igual que en el n.º 11 de la INTRODUCCION, mediante $\Lambda^{(0)}$: $E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)} \to E_{D_C}^{(3)}$, la aplicación lineal que asocia a todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)}$ como imagen $\Lambda^{(0)}(\varphi, \Psi, \chi)$, la solución $w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ al Problema de Cauchy definido por el sistema (4').

Suponiendo $E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)}$ dotado de la norma:

$$(\varphi, \Psi, \chi) \in E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)} \to ||(\varphi, \Psi, \chi)||_{(C)} = \text{máx}\{||\varphi||_{(C)}, ||\Psi||_{(C)}, ||\chi||_{(C)}\} \in \mathbf{R}$$

$$\text{con } ||\varphi||_{(C)} = \sum_{i=0}^{3} \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\varphi^{(i)}(r)|; ||\Psi||_{(C)} = \sum_{i=0}^{2} \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\Psi^{(i)}(r)|; ||\Psi||_{(C)} = \sum_{i=0}^{2} \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\chi^{(i)}(r)|,$$

y al espacio $E_D^{(3)}$ [constituido por las funciones numéricas u definidas, continuas y acotadas sobre D, cuyas restricciones al abierto $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathcal{C}^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ son tres veces continuamente diferenciables sobre $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathcal{C}^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con continuidad a D, y cuyas prolongaciones continuas a D, son asimismo acotadas sobre D], dotado de la norma de la convergencia uniforme:

$$u \in E_D^{(3)} \to ||u||_{(D)} = \sup_{M \in D} |u|(M) + \underset{i=1,2}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} |D_i u|(M)\} +$$

$$+ \underset{j,k=1,2}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} |D_{jk} u|(M)\} + \underset{p,q,r=1,2}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} |D_{pqr} u|(M)\} \in \mathbf{R}$$

así como a $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \subset E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)}$ provisto de la topología inducida sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, por la topología de $E_C^{(3)} \times E_C^{(2)} \times E_C^{(2)}$, generada por la norma $||(\cdot)||_{(C)}$, nos proponemos demostrar el siguiente:

LEMA I. — «La aplicación $\Lambda^{(I)}$ es uniformemente continua sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, y pertenece, por tanto, al espacio vectorial $C^{unif}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D^{(3)})$ de las aplicaciones uniformemente continuas de $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ en $E_D^{(3)}$».

Para demostrar dicho LEMA, consideremos las soluciones respectivas $u^1_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)} = \Lambda^{(I)}(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)$ y $u^1_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})} = \Lambda^{(I)}(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})$

de los Problemas de Cauchy representados, respectivamente, por los sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2)\,(D_{122}\, u) = \Phi^0{}_{(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)}\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \varphi^*\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \Psi^*\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \chi^*\,(M) \end{array}\right\}\; M \in C \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2)\,(D_{122}\, u) = \Phi^0{}_{(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})}\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \varphi^{**}\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \Psi^{**}\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \chi^{**}\,(M) \end{array}\right\}\; M \in C \end{array}\right\}$$

Poniendo $\bar{v}^1 = u^1{}_{(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)} - u^1{}_{(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})}$; $\bar{\Phi}^0 = \Phi^0{}_{(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)} - \Phi^0{}_{(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})}$; $\bar{\varphi} = \varphi^* - \varphi^{**}$; $\bar{\Psi} = \Psi^* - \Psi^{**}$; $\bar{\chi} = \chi^* - \chi^{**}$, la función $\bar{v}^1$ será solución del Problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, u) = \bar{\Phi}^0\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \bar{\varphi}\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \bar{\Psi}\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \bar{\chi}\,(M) \end{array}\right\}\; M \in C \end{array}\right\}$$

y consecuentemente, para cada $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, la restricción $\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$ a $D_{C(\nu,\varkappa)}$ será solución del Problema de Cauchy definido por la ecuación en derivadas parciales y condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, u) = \Phi^0{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \varphi\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \Psi\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \chi\,(M) \end{array}\right\}\; M \in C^{(\nu,\varkappa)} \end{array}\right\}$$

Puesto que $\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$ es la solución al Problema de Cauchy representado por el sistema (4) con las condiciones iniciales sobre $C^{(\nu,\varkappa)}$ determinadas por las funciones $\bar{\varphi}_{|[{}_rA_{C(\nu,\varkappa)},\, {}_rB_{C(\nu,\varkappa)}]}$, $\bar{\Psi}_{|[{}_rA_{C(\nu,\varkappa)},\, {}_rB_{C(\nu,\varkappa)}]}$,

$\overline{\chi}_{|[r^A{}_{C(\nu,\varkappa)},\, r^B{}_{C(\nu,\varkappa)}]}$, así como $\overline{\overline{\Phi}}{}^0{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$ y ϱ, ($[r^A{}_{C(\nu,\varkappa)},\, r^B{}_{C(\nu,\varkappa)}] \subset [r^A,\, r^B]$ es el subintervalo de $[r^A,\, r^B]$ que define el subarco $C^{(\nu,\varkappa)}$ considerado), verifican las restricciones exigidas en el n.º 11 de la INTRODUCCION, $\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$ y sus derivadas primeras, segundas y terceras están univocamente determinadas, y sus expresiones, para todo $M \in D_{C(\nu,\varkappa)}$, vienen dadas por las fórmulas resolutivas que allí se obtuvieron, y teniendo en cuenta la arbitrariedad de $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ así como que $\bar{v}^1$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\bar{v}_1$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\bar{v}^1$ y $\underset{(p,q,r=1\,2)}{D_{pqr}}\bar{v}^1$, prolongan para cada $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, respectivamente, $\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu,\varkappa)}}$ y $D_{pqr}\bar{v}^1{}_{|D_{C(\nu\,\varkappa)}}$ a D, se deduce que para todo $M \in D$, las expresiones de $\bar{v}^1$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\bar{v}^1$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\bar{v}^1$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{p,q,r}}\bar{v}^1$ son las siguientes (Ver n.º 11 de la INTRODUCCION):

$$\bar{v}^1(M) = w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})}(M) + \iint_{(MP_MQ_M)} (J(\overline{\Phi}^0))(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$(D_1\bar{v}^1)(M) = (D_1 w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})})(M) - \int_{(MP_M)} (J(\overline{\Phi}^0))(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$(D_2\bar{v}^1)(M) = (D_2 w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})})(M) - \int_{(MQ_M)} (J(\overline{\Phi}^0))(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_1$$

$$(D_{11}\bar{v}^1)(M) = (D_{11} w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})})(M) - (\varrho \cdot J(\overline{\Phi}^0))(M) -$$

$$- \int_{(MP_M)} ((D_2\,\varrho) \cdot J(\overline{\Phi}^0))(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_2 - \int_{(MP_M)} \overline{\Phi}^0(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$(D_{12}\bar{v}^1)(M) = (D_{12} w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})})(M) + (J(\overline{\Phi}^0))(M)$$

$$(D_{22}\bar{v}^1)(M) = (D_{22} w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})})(M) - \left(\frac{J(\overline{\Phi}^0)}{\varrho}\right)(M) +$$

$$+ \int_{(MP_M)} \left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho_2} \cdot J(\overline{\Phi}^0)\right)(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_1 - \int_{(MQ_M)} \left(\frac{\overline{\Phi}^0}{\varrho}\right)(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_1$$

$$(D_{111}\bar{v}^1)(M) = (D_{111} w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})})(M) - (D_1(\varrho \cdot J(\overline{\Phi}^0)))(M) -$$

$$- \int_{(MP_M)} (D_1((D_2\,\varrho) \cdot J(\overline{\Phi}^0)))(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_2 - \int_{(MP_M)} (D_1\,\overline{\Phi}^0)(\xi_1,\, \xi_2)\, d\xi_2 - (\overline{\Phi}^0 \cdot \frac{x'_2}{x'_1})(P_M)$$

$$(D_{112}\,\bar{v}^1)\,(M) = (D_{112}\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})})\,(M) + \bar{\Phi}^0\,(M) + \left(\bar{\Phi}^0\frac{x'_1}{x'_2 - \varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\,\cdot$$

$$\cdot\,(\varrho\cdot\exp\{-J\,(D_2\,\varrho)\})\,(M) - (\varrho\cdot\exp\{-J\,(D_2\,\varrho)\}\,\cdot$$

$$\cdot\,J\,((D_2\,\bar{\Phi}^0)\exp\{J\,(D_2\,\varrho)\}))\,(M)$$

$$(D_{122}\,\bar{v}^1)\,(M) = (D_{122}\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})})\,(M) - \left(\bar{\Phi}^0\cdot\frac{x'_1}{x'_1 - \varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\,\cdot$$

$$\cdot\exp\{-J\,(D_2\,\varrho)\}\,(M) + (\exp\{-J\,(D_2\,\varrho)\}\cdot J((D_2\,\bar{\Phi}^0)\exp\{J(D_2\,\varrho)\}))\,(M)$$

$$(D_{222}\,\bar{v}^1)\,(M) = (D_{222}\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})})\,(M) - \left(D_2\left(\frac{J\,(\bar{\Phi}^0)}{\varrho}\right)\right)(M) +$$

$$+\int_{(MQ_M)}\left(D_2\left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\bar{\Phi}^0)\right)\right)(\xi_1,\,\xi_2)\,d\xi_1 - \int_{(MQ_M)}\left(D_2\left(\frac{\bar{\Phi}^0}{\varrho}\right)\right)(\xi_1,\,\xi_2)\,d\xi_1 -$$

$$-\left(\frac{\bar{\Phi}^0}{\varrho}\cdot\frac{x'_1}{x'_2}\right)(Q_M)$$

Ahora bien, según se estableció en el n.º 11 de la INTRODUCCION, el conjunto:

$$«\bigcup_{(M,\varphi,\Psi,\chi)\in D_c\times B\sigma_r(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})}\{(M,\,w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M),\,\underset{(i=1,2)}{(D_i\,w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)},\,\underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\,w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)})\}»$$

y en particular, el conjunto:

$$«\bigcup_{(M,\varphi,\Psi,\chi)\in D\times B\sigma_r(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})}\{(M,\,w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M),\,(D_i\,w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M),\,(D_{jk}\,w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M))\}»$$

está contenido en el compacto $\mathcal{H}^0$ de $\mathbf{R}^8$ que allí se construyó y sobre el cual, consecuentemente, son globalmente lipschitzianas respecto a u, u_i, u_{jk} las funciones f, $\underset{(l=1,2)}{f_{x_l}}$, f_u, $\underset{(i=1,2)}{f_{u_i}}$, $\underset{(j,k=1;2;j\leq k)}{f_{u_{jk}}}$ por lo que, para todo $M\in D$, se pueden aplicar las respectivas desigualdades de Lipschitz para acotar los módulos de las diferencias de valores de f, $\underset{(l=1,2)}{f_{x_l}}$, f_u, $\underset{(i=1,2)}{f_{x_i}}$, $\underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{f_{u_{jk}}}$ correspondientes a los sistemas de argumentos $(M,\,w^0_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)}\,(M)$, $\underset{(i=1,2)}{(D_i\,w^0_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)})}\,(M)$, $\underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\,w^0_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)})}\,(M))$ y $(M,\,w^0_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\Psi^{**})})\,(M)$, $\underset{(i=1,2)}{(D_i\,w^0_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})})}\,(M)$, $\underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{D_{jk}\,w^0_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})}}\,(M))$, resultando:

$$|\,\bar{\Phi}^0\,(M)\,| \leq A\cdot|\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})}\,|\,(M) + \sum_{i=1,2} A_i\cdot|\,D_i\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})}\,|\,(M) +$$

$$+\sum_{\substack{i,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}\cdot|D_{jk}\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})}\,|\,(M) \leq 6\,H\cdot\|\,w^0_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})|D}\,\|_{(D)}$$

$$| (D_l\ \Phi^0)\ (M) | \leq (A^{(x_l)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(x_l)} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j\leq k)}} A_{jk}^{(x_l)}) \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} +$$

$$+ R \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} +$$

$$+ (A^{(u)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u)} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j\leq k)}} A_{jk}^{(u)}) \cdot T \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} + 2\,R \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} +$$

$$+ \sum_{i=1,2} (A^{(u_r)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_r)} \cdot + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j\leq k)}} A_{jk}^{(u_r)}) \cdot T \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} +$$

$$+ 3\,R \,\| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} + \sum_{\substack{p,q=1,2 \\ (p\leq q)}} (A^{(u_{pq})} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_{pq})} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j\leq k)}} A_{jk}^{(u_{pq})}) \cdot T \cdot$$

$$\cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)} \leq 6\ [R + H\ (1 + 6\ T)] \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)},\ (l = 1,\ 2)$$

y además:

$$| J\ (\bar{\Phi}^0) |\ (M) = \left| \int_{\mathcal{L}(M)} \bar{\Phi}^0\ (\xi_1,\ \xi_2)\ d\xi_1 \right| \leq 6\ \alpha \cdot H \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi\cdot\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$| J\ (D_2\,\bar{\Phi}^0) |\ (M) = \left| \int_{\mathcal{L}(M)} (D_2\,\bar{\Phi}^0)\ (\xi_1,\ \xi_2)\ d\xi_1 \right| \leq 6\alpha \cdot [\,R + H\ (1 + 6\,T)\,] \cdot$$

$$\cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

así como:

$$| D_1\ (J\ (\bar{\Phi}^0)) |\ (M) \leq 6 \cdot [H \cdot (1 + L \cdot U \exp \{L\alpha\}) + L\alpha \cdot \exp \{L\alpha\} \cdot$$

$$\cdot (R + H\ (1 + 6\ T))] \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$| D_2\ (J\ (\bar{\Phi}^0)) |\ (M) \leq 6 \exp \{L\alpha\} \cdot [H \cdot U + \alpha \cdot (R + H\ (1 +$$

$$+ 6\ T))] \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$\left(\text{con } U = \sup_{r\in[r^A, r^B]} \left| \frac{x'_1\ (r)}{x'_2\ (r) - \varrho\ (x_1\ (r),\ x_2\ (r)) \cdot x'_1\ (r)} \right| \right)$$

Se deduce de todo ello las siguientes desigualdades, válidas para todo $M \in D$:

$$| \bar{v}^1 |\ (M) \leq (1 + 6\ H\ \alpha^2\ \beta) \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$| D_1\,\bar{v}^1 |\ (M) \leq (1 + 6\,H\ \alpha\ \beta) \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$| D_2\,\bar{v}^1 |\ (M) \leq (1 + 6\ H\ \alpha^2) \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$| D_{11}\,\bar{v}^1 |\ (M) \leq [1 + 6\,H\ (L\,\alpha + L\ \alpha\ \beta + \beta)] \cdot \| w^0_{\overline{(\varphi,\Psi,\chi)}|D} \|_{(D)}$$

$$|D_{12}\,\bar{v}^1|\,(M) \leq (1 + 6\,H\,\alpha)\cdot ||\,w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)}$$

$$|D_{111}\,\bar{v}^1|\,(M) \leq [1 + 6\,\{1 + H\cdot(U+\beta) + L\cdot(1+\beta)\cdot[L\exp\{L\cdot\alpha\}\cdot$$

$$\cdot(H\,U + \alpha\,(R + H\,(1 + 6\,T))) + H\cdot(\alpha+1)]\}]\cdot||\,w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)}$$

$$|D_{112}\,\bar{v}^1|\,(M) \leq [1 + 6\,\{H\,(1 + L\,U\exp\{L\alpha\}) +$$

$$+ L\alpha\exp\{L\alpha\}\cdot(R + H\,(1 + 6\,T))\}]\cdot||\,w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)}$$

$$|D_{122}\,\bar{v}^1|\,(M) \leq [1 + 6\exp\{L\alpha\}\cdot(H\,U + \alpha\,[R +$$

$$+ H\,(1 + 6\,T)])]\cdot||\,w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)}$$

$$|D_{222}\,\bar{v}^1|\,(M) \leq [1 + 6\,L\,\{H\,(\alpha^2 + 2\,\alpha + U) + (1+\alpha)\cdot$$

$$\cdot\exp.\{L\alpha\}\cdot[H\,U + \alpha\,(R + H\,(1 + 6\,T))]\}]\cdot||\,w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)}$$

de las cuales se obtiene, como cota superior sobre D de los módulos de $\bar{v}^1$, $\underset{(i=1,2)}{D_i\,\bar{v}^1}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\,\bar{v}^1}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\,\bar{v}^1}$, la:

$$k\cdot||\,w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)} = k\cdot||\,w^0{}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)|D} - w^0{}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})|D}\,||_{(D)} =$$

$$= k\cdot||\,(\Lambda^{(0)}(\varphi^*,\,\Psi^*,\,\chi^*))_{|D} - (\Lambda^{(0)}(\varphi^{**},\,\Psi^{**},\,\chi^{**}))_{|D}||_{(D)},$$

siendo $k \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ el mayor de los coeficientes de $||w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D}\,||_{(D)}$ que figuran en los segundos miembros de las desigualdades precedentes.

Resulta así, en consecuencia:

$$«||\,\Lambda^{(I)}(\varphi^*,\,\Psi^*,\,\chi^*) - \Lambda^{(I)}(\varphi^{**},\,\Psi^{**},\,\chi^{**})\,||_{(D)} = ||\,u^1{}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)} -$$

$$- u^1{}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})}\,||_{(D)} = ||\,\bar{v}^1\,||_{(D)} = \sup_{M\in D}|\bar{v}^1|_{(D)}(M) + \underset{(i=1,2)}{\text{Máx}}\,\{\sup_{M\in D}|D_i\,\bar{v}^1|\,(M)\} +$$

$$+ \underset{(j,k=1,2)}{\text{Máx}}\,\{\sup_{M\in D}|D_{jk}\,\bar{v}^1|\,(M)\} + \underset{(p,q,r=1,2)}{\text{Máx}}\,\{\sup_{M\in D}|D_{pqr}\,\bar{v}^1|\,(M)\} \leq$$

$$\leq 4\,k\cdot||\,\Lambda^{(0)}(\varphi^*,\,\Psi^*,\,\chi^*))_{|D} - (\Lambda^{(0)}(\varphi^{**},\,\Psi^{**},\,\chi^{**}))_{|D}\,||_{(D)}» \quad (5)$$

y habida cuenta la continuidad de la aplicación lineal $\Lambda^{(0)}$: $E_c{}^{(3)} \times E_c{}^{(2)} \times E_c{}^{(2)} \to E_{D_c}{}^{(3)}$, ya considerada en el n.º 11 de la INTRODUCCION; se puede poner:

$$«(\forall\,\varepsilon)\,(\varepsilon \in \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow (\exists\,\eta)\,(\eta \in \mathbf{R} - \{0\}\text{ y }(\forall\,((\varphi^*,\,\Psi^*,\,\chi^*),\,(\varphi^{**},\,\Psi^{**},\,\chi^{**})))$$

$$(((\varphi^*,\,\varphi^*,\,\chi^*),\,(\varphi^{**},\,\Psi^{**},\,\chi^{**})) \in B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi},\,\tilde{\Psi},\,\tilde{\chi}) \times B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi},\,\tilde{\Psi},\,\tilde{\chi})\text{ y}$$

$$\text{y } \| (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) - (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(C)} < \eta \Rightarrow \| (\Lambda^{(0)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*))_{|D} -$$

$$- (\Lambda^{(0)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}))_{|D} \|_{(D)} \leq \| \Lambda^0(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) -$$

$$- \Lambda^0 (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D_c)} < \frac{\varepsilon}{4k})))»$$

relación de la cual, y teniendo en cuenta además (5), se deduce la validez de la relación:

$$«(\forall \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Leftarrow (\exists \eta) (\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall ((\varphi^*, \Psi^*, \chi^*),$$

$$, (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}))) (((\varphi^*, \Psi^*, \chi^*), (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})) \in$$

$$\in B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \times B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \text{ y } \| (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) - (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(C)} < \eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \Lambda^{(l)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) - \Lambda^{(l)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D)} < 4\, k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} = \varepsilon)))»$$

lo que demuestra la continuidad uniforme de $\Lambda^{(l)} : B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \to E_D{}^{(3)}$ sobre $B_{\sigma_r} (\varphi, \Psi, \chi)$ y consecuentemente $\Lambda^{(l)} \in C^{unif} (B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi});\ E_D{}^{(3)})$ de acuerdo con lo afirmado.

Generalicemos el resultado anterior, demostrando el:

LEMA II. — «Para todo $n \in N$, la aplicación $\Lambda^{(n)} : B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \to E_D{}^{(3)}$ es uniformemente continua sobre $B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi})$, y en consecuencia, pertenece, asimismo, al espacio vectorial $C^{unif} (B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ de las aplicaciones uniformemente continuas de $B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi})$ en $E_D{}^{(3)}$».

Para establecer la validez de dicho LEMA procederemos por recurrencia. Supuesto que para un $n - 1 \in N$ se verifique que $\Lambda^{(n-1)} \in C^{unif} (B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$, sean $u^i{}_{(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)} = \Lambda^{(i)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)$; $u^i{}_{(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})} = \Lambda^{(i)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})$, $(i = n - 1, n)$, con $((\varphi^*, \Psi^*, \chi^*), (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})) \in B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \chi) \times B_{\sigma_r} (\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi})$, y pongamos $\bar{v}^i = u^i{}_{(\varphi^* \Psi^*, \chi^*)} - u^i{}_{(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})}$, $(i = n - 1, n)$, así como: $\bar{\varphi} = \varphi^* - \varphi^{**}$; $\bar{\Psi} = \Psi^* - \Psi^{**}$; $\bar{\chi} = \chi^* - \chi^{**}$; $\bar{\Phi}^{n-1} = \Phi^{n-1}_{(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})}$

La $\bar{v}^n$, será por tanto, solución al Problema de Cauchy definido poı el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2)\cdot (D_{122}\, u) = \overline{\Phi}^{n-1}\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \overline{\varphi}\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \overline{\Psi}\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \overline{\chi}\,(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\}$$

Razonando como en el LEMA I, se deduce, que para todo $M \in D$, las expresiones de $\overline{v}^n\,(M)$, $\underset{(i=1,2)}{(D_i\,\overline{v}^n)}\,(M)$, $\underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk}\,\overline{v}^n)}\,(M)$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{(D_{pqr}\,\overline{v}^n)}\,(M)$, son respectivamente:

$$\overline{v}^n\,(M) = w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})}\,(M) + \iint_{(MP_MQ_M)} (J\,(\overline{\Phi}^{n-1}))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$(D_1\,\overline{v}^n)\,(M) = (D_1\, w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})})\,(M) - \int_{(MP_M)} (J\,(\overline{\Phi}^{n-1}))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$(D_2\,\overline{v}^n)\,(M) = (D_2\, w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})})\,(M) - \int_{(MQ_M)} (J\,(\overline{\Phi}^{n-1}))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1$$

$$(D_{11}\,\overline{v}^n)\,(M) = (D_{11}\, w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})})\,(M) - (\varrho\cdot J(\overline{\Phi}^{n-1}))\,(M) -$$

$$- \int_{(MP_M)} ((D_2\,\varrho)\cdot J(\overline{\Phi}^{n-1}))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 - \int_{(MP_M)} \overline{\Phi}^{n-1}\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2$$

$$(D_{12}\,\overline{v}^n)\,(M) = (D_{12}\, w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})})(M) + (J\,(\overline{\Phi}^{n-1}))\,(M)$$

$$(D_{22}\,\overline{v}^n)\,(M) = (D_{22}\, w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})})\,(M) - \left(\frac{J\,(\overline{\Phi}^{n-1})}{\varrho}\right)(M) +$$

$$+ \int_{(MQ_M)} \left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\overline{\Phi}^{n-1})\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 - \int_{(MQ_M)} \frac{\overline{\Phi}^{n-1}}{\varrho}\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1$$

$$(D_{111}\,\overline{v}^n)\,(M) = (D_{111}\, w^0_{(\overline{\varphi},\overline{\Psi},\overline{\chi})})\,(M) - (D_1\,(\varrho\cdot J\,(\overline{\Phi}^{n-1})))\,(M) -$$

$$- \int_{(MP_M)} (D_1\,((D_2\,\varrho)\cdot J\,(\overline{\Phi}^{n-1})))\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 - \int_{(MP_M)} (D_1\,\overline{\Phi}^{n-1})\,(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 -$$

$$- \left(\overline{\Phi}^{n-1}\cdot\frac{x'_2}{x'_1}\right)(P_M)$$

$$(D_{112}\bar{v}^n)(M) = (D_{112}\, w^0{}_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})})(M) + \bar{\Phi}^{n-1}(M) + \left(\bar{\Phi}^{n-1}\cdot\frac{x'_1}{x'_2 - \varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot$$

$$\cdot(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M) - (\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\}\,.\,J((D_2\bar{\Phi}^{n-1})\cdot$$

$$\cdot\exp\{J(D_2\varrho)\}))(M)$$

$$(D_{122}\bar{v}^n)(M) = (D_{122}\, w^0{}_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})})(M) - \left(\bar{\Phi}^{n-1}\cdot\frac{x'_1}{x'_2 - \varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot$$

$$\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\}(M) + (\exp\{-J(D_2\varrho)\}\cdot J((D_2\bar{\Phi}^{n-1})\cdot$$

$$\cdot\exp\{J(D_2\varrho)\}))(M)$$

$$(D_{222}\bar{v}^n)(M) = (D_{222}\, w^0{}_{(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})})(M) - \left(D_2\left(\frac{J(\bar{\Phi}^{n-1})}{\varrho}\right)\right)(M) +$$

$$+\int_{(MQ_M)}\left(D_2\left(\frac{D_1\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\bar{\Phi}^{n-1})\right)\right)(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 - \int_{(MQ_M)}\left(D_2\left(\frac{\bar{\Phi}^{n-1}}{\varrho}\right)\right)(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 -$$

$$-\left(\frac{\bar{\Phi}^{n-1}}{\varrho}\cdot\frac{x'_1}{x'_2}\right)(Q_M)$$

Pero, en virtud de lo establecido en el n.º 4 de la PARTE PRIMERA, el conjunto:

$$\bigcup_{(M,\varphi,\Psi,\chi)\in D\times B\sigma_r(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})} \{(M,\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M),\, \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)},\, \underset{(j,k=1,2;j\leqq k)}{(D_{jk}\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)})\}$$

está contenido en el compacto $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A}$, sobre el cual son, por tanto, globalmente lipschitzianas f, $\underset{(l=1,2)}{f_{x_l}}$, f_u, $\underset{(i=1,2)}{f_{u_i}}$, $\underset{(j,k=1,2;j\leqq k)}{f_{u_{jk}}}$ respecto a u, $\underset{(i=1,2)}{u_i}$, $\underset{(j,k=1,2;j\leqq k)}{u_{jk}}$, y consecuentemente, para todo $M\in D$, se pueden aplicar las respectivas desigualdades de Lipschitz, para acotar los módulos de las diferencias de valores de f, $\underset{(l=1,2)}{f_{x_l}}$, f_u, $\underset{(i=1,2)}{f_{u_i}}$, $\underset{(j,k=1,2;j\leqq k)}{f_{u_{jk}}}$, relativos a los sistemas de argumentos $(M,\, u^{n-1}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)}(M),\, \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^{n-1}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)})(M)},\, \underset{(j,k=1,2;j\leqq k)}{(D_{jk}\, u^{n-1}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)})(M)})$ y $(M,\, u^{n-1}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})}(M),\, \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^{n-1}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})})(M)},\, \underset{(j,k=1,2;j\leqq k)}{(D_{jk}\, u^{n-1}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})})(M)})$, con lo que resulta, sucesivamente:

$$|\bar{\Phi}^{n-1}|(M) \leq A\cdot|\bar{v}^{n-1}|(M) + \sum_{i=1,2} A_i\cdot|D_i\bar{v}^{n-1}|(M) +$$

$$+\sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leqq k)}} A_{jk}\,|D_{jk}\bar{v}^{n-1}|(M) \leq 6\cdot H\cdot\|\bar{v}^{n-1}\|_{(D)}$$

$$| D_l \bar{\Phi}^{n-1} | (M) \leq (A^{(x_l)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(x_l)} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(x_l)}) \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} + R \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} +$$

$$+ (A^{(u)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u)} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(u)}) \cdot T \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} + 2\, R \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} +$$

$$+ \sum_{r=1,2} (A^{(u_r)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_r)} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(u_r)}) \cdot T \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} + 3\, R \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2\\(p\leq q)}} (A^{(u_{pq})} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_{pq})} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(u_{pq})}) \cdot T \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)} \leq 6\, [R +$$

$$+ H \cdot (1 + 6\, T)] \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}, \ (l = 1,2)$$

$$| J(\bar{\Phi}^{n-1}) | (M) = \left| \int_{L(M)} \bar{\Phi}^{n-1} (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq 6 \cdot \alpha\, H \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| J(D_2 \bar{\Phi}^{n-1}) | (M) = \left| \int_{L(M)} (D_2 \bar{\Phi}^{n-1}) (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq$$

$$\leq 6\, \alpha \cdot [R + H \cdot (1 + 6\, T)] \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_1 (J(\bar{\Phi}^{n-1})) | (M) \leq 6 \cdot [H \cdot (1 + L \cdot U \cdot \exp \{L \cdot \alpha\}) +$$

$$+ L \cdot \alpha \cdot \exp \{L \cdot \alpha\} (R + H \cdot (1 + 6\, T))] \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_2 (\bar{J}(\Phi^{n-1})) | (M) \leq 6 \cdot \exp \{L \cdot \alpha\} \cdot [HU + \alpha \cdot (R +$$

$$+ H \cdot (1 + 6\, T))] \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

De las desigualdades precedentes se deducen estas obras, válidas para todo $M \in D$:

$$| \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6\, H\, \alpha^2 \beta\, || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_1 \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6\, H\, \alpha\, \beta \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_2 \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6\, H\, \alpha^2\, || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_{11} \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6\, H\, (L\, \alpha + L\, \alpha\, \beta + \beta) \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_{12} \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6\, H\, \alpha \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_{22} \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6\, H\, L\, \alpha \cdot (\alpha + 2) \cdot || \bar{v}^{n-1} ||_{(D)}$$

$$| D_{111} \bar{v}^n | (M) \leq || w^0{}_{(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}, \bar{\chi}) | D} ||_{(D)} + 6 \cdot [1 + H\, (U + \beta) + L \cdot (1 + \beta) \cdot$$

$$\cdot (L \cdot \exp\{L\alpha\} \cdot (HU + \alpha(R + H(1 + 6T))) + H \cdot (\alpha + 1))] \cdot \| v^{n-1} \|_{(D)}$$

$$| D_{112} \bar{v}^n | (M) \leq \| w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D} \|_{(D)} + 6 \cdot [H \cdot (1 + L \cdot U \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}) + + L\,\alpha \cdot \exp\{L \cdot \alpha\} \cdot (R + H\,(1 + 6\,T))] \cdot \| \bar{v}^{n-1} \|_{(D)}$$

$$| D_{122} \bar{v}^n | (M) \leq \| w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D} \|_{(D)} + 6 \cdot \exp\{L\,\alpha\} \cdot [H\,U + \alpha\,(R + + H \cdot (1 + 6\,T))] \cdot \| \bar{v}^{n-1} \|_{(D)}$$

$$| D_{222} \bar{v}^n | (M) \leq \| w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D} \|_{(D)} = 6\,L\,[H\,(\alpha^2 + 2\,\alpha + U) + (1 + \alpha) \cdot \cdot \exp\{L\,\alpha\} \cdot (H\,U + \alpha\,(R + H\,(1 + 6\,T\,)))] \cdot \| \bar{v}^{n-1} \|_{(D)}$$

Si $\widetilde{k} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ designa el máximo del conjunto constituido por los coeficientes de $\| \bar{v}^{n-1} \|_{(D)}$ que figuran en los segundos miembros de las desigualdades anteriores, una cota superior sobre D de los módulos de $\bar{v}^n$, $\underset{(i=1,2)}{D_i} \bar{v}^n$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} \bar{v}^n$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} \bar{v}^n$ es la:

$$«\| w^0{}_{(\bar{\varphi},\bar{\Psi},\bar{\chi})|D} \|_{(D)} + \widetilde{k} \cdot \| \bar{v}^{n-1} \|_{(D)} = \| w^0{}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)|D} - w^0{}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})|D} \|_{(D)} + + \widetilde{k} \cdot \| u^{n-1}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)} - u^{n-1}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})} \|_{(D)} = \| (\Lambda^{(0)}\,(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)_{;D} - - \Lambda^{(0)}\,(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})_{|D} \|_{(D)} + \widetilde{k} \cdot \| \Lambda^{(n-1)}\,(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) - - \Lambda^{(n-1)}\,(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D)}»$$

por lo que se obtiene, consecuentemente:

$$«\| \Lambda^{(n)}\,(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) - \Lambda^{(n)}\,(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D)} = \| u^n{}_{(\varphi^*,\Psi^*,\chi^*)} - - u^n{}_{(\varphi^{**},\Psi^{**},\chi^{**})} \|_{(D)} = \| \bar{v}^n \|_{(D)} = \sup_{M \in D} | \bar{v}^n | (M) + \underset{(i=1,2)}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} | D_i \bar{v}^n | (M)\} + + \underset{(j,k=1,2)}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} | D_{jk} \bar{v}^n | (M)\} + \underset{(p,q,r=1,2)}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} | D_{pqr} \bar{v}^n | (M)\} \leq \leq 4 \cdot \| \Lambda^{(0)}\,(\varphi^*, \Psi^*, \chi^*)_{|D} - \Lambda^{(0)}\,(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})_{|D} \|_{(D)} + + 4 \cdot \widetilde{k} \cdot \| \Lambda^{(n)}\,(\varphi^*, \Psi^*\,\chi^*) - \Lambda^{(n)}\,(\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D)}» \quad (5^*)$$

y en virtud de la continuidad de la aplicación lineal, $\Lambda^{(0)}$: $E_c{}^{(3)} \times \times E_c{}^{(2)} \times E_c{}^{(2)} \to E_c{}^{(3)}$, así como de la hipótesis de recurrencia relativa a la continuidad uniforme sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ de la aplicación $\Lambda^{(n-1)}$, se sigue que es válida la relación:

$$«(\forall \varepsilon)\,(\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \eta)\,(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall\, ((\varphi^*, \Psi^*, \chi^*),$$

$$, (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})) \in B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \times B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \text{ y } \| (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) -$$

$$- (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(C)} < \eta \Rightarrow \| (\Lambda^{(0)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*))_{|D} -$$

$$- (\Lambda^{(0)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}))_{|D} \|_{(D)} \leq \| \Lambda^{(0)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) -$$

$$- \Lambda^{(0)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D_r)} < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \| \Lambda^{(n-1)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) -$$

$$- \Lambda^{(n-1)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D)} < \frac{\varepsilon}{8\tilde{k}})))\text{»}$$

de la cual, y teniendo en cuenta (5*), se deduce a su vez la validez de la relación:

$$\text{«}(\forall \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \eta) (\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall ((\varphi^*, \Psi^*, \chi^*),$$

$$, (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**})) \in B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \times B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \text{ y } \| (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) -$$

$$- (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(C)} < \eta \Rightarrow \| \Lambda^{(n)} (\varphi^*, \Psi^*, \chi^*) -$$

$$- \Lambda^{(n)} (\varphi^{**}, \Psi^{**}, \chi^{**}) \|_{(D)} < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{8} + 4\tilde{k} \cdot \frac{\varepsilon}{8\tilde{k}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon)))\text{»}$$

lo que prueba la continuidad uniforme sobre $B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi})$ de la aplicación $\Lambda^{(n)}$: $B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \to E_D{}^{(3)}$.

Como para $n = 2$, y en virtud del LEMA I es cierta la hipótesis de recurrencia, el resultado obtenido es completamente general, quedando así establecida la validez del LEMA II.

Establecidos estos dos LEMAS, demostremos finalmente, el siguiente:

TEOREMA. — «La aplicación Λ: $B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi}) \to E_D{}^{(3)}$ que asigna a cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\chi})$ como imagen $\Lambda(\varphi, \Psi, \chi) = u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, la solución al Problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, u) = f\,(x_1, x_2, u, \underset{(i=1,2)}{D_i\, u}, \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{D_{jk}\, u}) \\ \left.\begin{array}{r} u\,(M) = \varphi\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \Psi\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \chi\,(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\}$$

es uniformemente continua sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, y por tanto $\Lambda \in C^{unif}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$».

En efecto, en virtud de lo demostrado en el LEMA II, para todo $n \in N$, se tiene que $\Lambda^{(n)} \in C^{unif}(B_{\sigma_r}(\varphi, \Psi, \chi); E_D{}^{(3)})$, y por otra parte, según se estableció en la PARTE PRIMERA [(12) de Observación del n.º 9], es válida la relación:

$$«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall\ (n, \varphi, \Psi, \chi)\ (n, \varphi, \Psi, \chi) \in$$
$$\in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y } n > \nu \Rightarrow \| u^n{}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \|_{(D)} =$$
$$= \| \Lambda^{(n)}(\varphi, \Psi, \chi) - \Lambda(\varphi, \Psi, \chi) \|_{(D)} < \varepsilon)))»$$

la cual establece que la sucesión $(\Lambda^{(n)})_{n \in N}$ converge en $\mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ y uniformemente sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ hacia $\Lambda \in \mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$. [$\mathcal{F}(X; Y)$ denota, como es habitual, el conjunto de las aplicaciones de un conjunto X en un conjunto Y], o lo que es equivalente, la sucesión de aplicaciones $(\Lambda^{(n)})_{n \in N}$ converge en $\mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ hacia $\Lambda \in \mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ según la topología de la convergencia uniforme sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$. Así pues, Λ es adherente en $\mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ para la topología de la convergencia uniforme sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, al conjunto $\bigcup_{n \in N} \{\Lambda^{(n)}\} \subset C^{unif}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)}) \subset \mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$, y por consiguiente, ya que $C^{unif}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ es una parte cerrada de $\mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$, [supuesto dotado $\mathcal{F}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})$ de la topología de la convergencia uniforme sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$] (*), se verifica, consecuentemente, que:

$$«\Lambda \in C^{unif}(B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}); E_D{}^{(3)})»$$

de acuerdo con lo afirmado en el TEOREMA.

En definitiva, el problema en los límites que hemos considerado es adecuado a la ecuación en derivadas parciales:

$$«D_{112}\, u + \varrho(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, u) = f(x_2, x_2, u, \underset{(i=1,2)}{D_i\, u}, \underset{(j,k=1,2;j \leq k)}{D_{jk}\, u})»$$

propuesta.

(*) Véase, por ejemplo, el Chap. X, § 1, n.º 6 (Remarque 3, pag. 21), del Livre III de N. Bourbaki «Topologie generale» (Espaces fonctionnels) [7].

Apéndice

El operador J asociado a una ecuacion diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$, (con ϱ: $G' = \overset{\circ}{G'} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre el abierto G') y a un arco de la clase (Γ) contenido en el abierto G (con $\overline{G} \subset G'$ y G regularmente convexo relativamente a $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$) relativamente a $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$. —

I

El conjunto $\mathcal{A}_\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ asociado a un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un abierto de $\mathbf{R}^n$, $(n \geq 2)$ no vacio. Para todo punto $(y_1, y_2, .., y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, pondremos para abreviar: «$(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y_n, y_{n+1})$», con $\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} = (y_1, y_2, .., y_{n-1})$.

Consideremos el subconjunto de $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$«\mathcal{A}_\Omega = \{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} / [\text{mín}\,\{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega\}»$$

Se tiene que: $(\forall\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y_n))\ ((\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y_n) \in \Omega \Rightarrow [\text{mín}\,\{y_1, y_1\},\ \text{máx}\,\{y_1, y_1\}] \times \{y_2, .., y_n\} = \{y_1\} \times \{y_2, .., y_n\} \subset \Omega)$, y consecuentemente: $(\forall\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n))\ ((\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n) \in \Omega \Rightarrow (y_2, y_3, .., y_n;\ y_1, y_1) \in \mathcal{A}_\Omega)$, por lo que $\mathcal{A}_\Omega \neq \phi$. Además se tiene, evidentemente, que: $(\forall\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n, y_{n+1})\ ((\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \mathcal{A}_\Omega \Rightarrow (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_{n+1}, y_n) \in \mathcal{A}_\Omega)$.

Nos proponemos demostrar el siguiente:

Lema 1.º — «Para todo $n \in N$ y $n \geq 2$, se verifica que cualquiera sea el abierto no vacio Ω de $\mathbf{R}^n$, el conjunto $\mathcal{A}_\Omega$ es un abierto de $\mathbf{R}^{n+1}$, es decir:

$$(\forall n)\ (n \in N\ \text{y}\ n \geq 2 \Rightarrow (\forall \Omega)\ (\Omega \in \mathfrak{P}\,(\mathbf{R}^n)\ \text{y}\ \phi \neq \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \Rightarrow \mathcal{A}_\Omega = \overset{\circ}{\mathcal{A}_\Omega}))\ ·»$$

En efecto, sea $(\vec{y}^{\,*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y^*_n, y^*_{n+1}) \in \mathcal{A}_\Omega$.

Se verificará, en virtud de la misma definición de $\mathcal{A}_\Omega$:

$$«[\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \times \{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega»$$

Pero $[\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \times \{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\}$ es un compacto de $\mathbf{R}^n$ contenido en el abierto Ω, por lo que si I^* denota el intervalo cerrado $[\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}]$, y si para todo $u \in \mathbf{R}$ y todo $(y_1, y_2, .., y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$, se pone, para simplificar, $(u, y_1, y_2, .., y_{n-1}) = (u; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})$, es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\exists\, \varrho)\ (\varrho \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{y}\ (\forall u)\ (u \in I^* \Rightarrow B_\varrho\,(u; \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega))»$$

Sea $r = \dfrac{\varrho}{\sqrt{n}} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$. Haciendo, para abreviar, $Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = \,]y_1^* - r, y_1^* + r[\, \times .. \times \,]y_{n-1}^* - r, y_{n-1}^* + r[$, se tiene $Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = \mathring{Q}\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})$, así como:

$$«(\forall u)\ (u \in I^* \Rightarrow\ ]\,u - r, u + r\,[\, \times Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset B_\varrho\,(u; \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}))»$$

y consecuentemente, se verifica:

$$«(\exists r)\ (r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{y}\ (\forall u)\ (u \in I^* \Rightarrow\ ]u - r, u + r[\, \times Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega))» \quad (^0)$$

Sentado esto, sea:

$$«(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y_n, y_{n+1}) \in Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times\,]\,y_n^* - r, y_n^* + r\,[\, \times \\ \times\,]\,y_{n+1}^* - r, y_{n+1}^* + r\,[» \quad (^{0*})$$

Se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «\text{mín}\,\{y_n, y_{n+1}\} = y_n \in\,]\,y_n^* - r, y_n^* + r\,[\ \text{ó mín}\,\{y_n, y_{n+1}\} = \\ \qquad = y_{n+1} \in\,]\,y_{n+1}^* - r, y_{n+1}^* + r\,[» \\ \qquad\qquad\qquad \text{y} \\ «\text{máx}\,\{y_n, y_{n+1}\} = y_n \in\,]\,y_n^* - r, y_n^* + r\,[\ \text{ó máx}\,\{y_n, y_{n+1}\} = \\ \qquad = y_{n+1} \in\,]\,y_{n+1}^* - r, y_{n+1}^* + r\,[» \end{array}\right\}$$

por lo que en consecuencia, es válida la relación:

$$\left.\begin{array}{c} «\text{mín}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\} - r \leq y_n^* - r < \text{mín}\ \{y_n, y_{n+1}\}\ \text{ó} \\ \text{ó mín}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\} - r \leq y_{n+1}^* - r < \text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}» \\ \text{y} \\ «\text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} < y_n^* + r \leq \text{máx}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\} + r\ \text{ó} \\ \text{ó máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} < y_{n+1}^* + r \leq \text{máx}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\} + r» \end{array}\right\}$$

y por tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} «\text{mín}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\} - r < \text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}» \\ \text{y} \\ «\text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} < \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} + r» \end{array}\right\} (^1)$$

Ahora bien, se verifica trivialmente:

$$«(\forall\ u)\ (u \in [\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}] \Rightarrow (\text{mín}\ \{y_n, y_{n+1}\} \leq u \leq$$
$$\leq \text{máx}\ \{y_n, y_{n+1}\})\ \text{y}\ [(u < \text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\})\ \text{ó}\ (u > \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\})\ \text{ó}$$
$$\text{ó}\ (\text{mín}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\} \leq u \leq \text{máx}\ \{y_n^*,\ y_{n+1}^*\})])»$$

relación que entraña:

$$«(\forall u)\ (u \in [\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}, \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}] \Rightarrow [(\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} \leq u <$$
$$< \text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} + r)\ \text{ó}\ (\text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} - r < u \leq$$
$$\leq \text{máx}\ \{y_n, y_{n+1}\})\ \text{ó}\ (u \in [\text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] = I^*)])»$$

Esta última relación combinada con la (^{1}), establece, a su vez, la validez de la relación:

$$«(\forall\ u)\ (u \in [\text{mín}\ \{y_n, y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n, y_{n+1}\}] \Rightarrow [(\text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} - r <$$
$$< u < \text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} + r)\ \text{ó}\ (\text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} - r < u <$$
$$< \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} + r)\ \text{ó}\ (u \in I^*)])»$$

es decir:

$$«(\forall\ u)\ (u \in [\text{mín}\ \{y_n, y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n, y_{n+1}\}] \Rightarrow [(u \in]\ \text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} - r,$$
$$,\ \text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} + r[)\ \text{ó}\ (u \in]\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} - r,$$
$$,\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\} + r[)\ \text{ó}\ (u \in I^*)])»$$

y puesto que:

$$«\text{mín}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} \in I^* \text{ y } \text{máx}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} \in I^*»$$

y consecuentemente, en virtud de (^{0}), [habida cuenta además (^{0*}], se tiene:

$$«u \in]\,\text{mín}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} - r,\ \text{mín}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} + r\,[\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u\,;\,\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in]\,\text{mín}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} - r,\ \text{mín}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} + r\,[\times Q(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega»$$

y

$$«u \in]\,\text{máx}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} - r,\ \text{máx}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} + r\,[\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u\,;\,\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in]\,\text{máx}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} - r,\ \text{máx}\,\{y_n^*,\,y_{n+1}^*\} + r\,[\times Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega»$$

así como:

$$«u \in I^* \Rightarrow (u\,;\,\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in]\,u - r,\ u + r\,[\times Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega»$$

se concluye [dado que se ha partido del supuesto (^{0*})], que es válida la relación:

$$«(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\,y_n,\ y_{n+1}) \in Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times]\,y_n^* - r,\ y_n^* + r\,[\times$$

$$\times\,]\,y_{n+1}^* - r,\ y_{n+1}^* + r\,[\Rightarrow (\forall u)\ (u \in [\text{mín}\,\{y_n,\,y_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_n,\,y_{n+1}\}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u;\,\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \Omega)»$$

y por tanto:

$$«(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\,y_n,\ y_{n+1}) \in Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times]\,y_n^* - r,\ y_n + r\,[\times$$

$$\times\,]\,y_{n+1}^* - r,\ y_{n+1}^* + r\,[\Rightarrow [\text{mín}\,\{y_n,\,y_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_n,\,y_{n+1}\}] \times$$

$$\times\, \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega»$$

relación, que en virtud de la propia definición de A_Ω equivale a la:

$$«(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\,y_n,\ y_{n+1}) \in Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times]\,y_n^* - r,\ y_n^* + r\,[\times$$

$$\times\,]\,y_{n+1}^* - r,\ y_{n+1}^* + r\,[\Rightarrow (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\,y_n,\ y_{n+1}) \in A_\Omega»$$

y dado que $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in Q\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times]\,y_n^* - r,\ y_n^* + r\,[\times$ $\times\,]\,y_{n+1}^* - r,\ y_{n+1}^* + r\,[$, es arbitrario, se puede poner:

$$«(\forall\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, y_n, y_{n+1}))\ ((\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, y_n, y_{n+1}) \in Q\ (\vec{y}^{*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times]\, y^*_n - r, y^*_n + r\, [\ \times$$

$$\times\ ]\, y^*_{n+1} - r,\ y^*_{n+1} + r\, [\ \Rightarrow\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, y_n,\ y_{n+1}) \in A_\Omega)»$$

es decir:

$$«Q\ (\vec{y}^{*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times]\, y^*_n - r,\ y^*_n + r\, [\times]\, y^*_{n+1} - r,\ y^*_{n+1} + r\, [\ \subset A_\Omega»$$

y por tanto, se verifica que:

$$«(\vec{y}^{*}_{\mathbf{R}^{(n-1)}}\,;\ y^*_n,\ y^*_{n+1}) \in \mathring{A}_\Omega»$$

Así pues, y dada la arbitrariedad de $(\vec{y}^{*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\ y^*_n,\ y^*_{n+1}) \in A_\Omega$ es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\forall\ (\vec{y}^{*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, y^*_n,\ y^*_{n+1}))\ ((\vec{y}^{*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, y^*_n,\ y^*_{n+1}) \in A_\Omega \Rightarrow$$

$$(\vec{y}^{*}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\ y^*_n,\ y^*_{n+1}) \in \mathring{A}_\Omega)»$$

o lo que es equivalente:

$$«A_\Omega = \mathring{A}_\Omega»$$

resultado que demuestra el LEMA.

OBSERVACION 1.ª. — Sea $\vec{y} = (\vec{y}_{((\mathbf{R}^{n-1})}\,;\ y_n,\ y_{n+1}) \in \bar{A}_\Omega$, por lo que existe, por tanto, una sucesión $(\vec{y}^{(i)})_{i \in N} = (\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\ y^{(i)}_n\,;\ y^{(i)}_{n+1})_{i \in N}$ de elementos de A_Ω que converge en $\mathbf{R}^{n+1}$ hacia $\vec{y}$. Pero, en virtud de la propia definición de A_Ω, la relación:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow (\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\ y^{(i)}_n,\ y^{(i)}_{n+1}) \in A_\Omega)»$$

es equivalente a la:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow [\text{mín}\ \{y^{(i)}_n,\ y^{(i)}_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y^{(i)}_n,\ y^{(i)}_{n+1}\}] \times \{\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega)» \quad (^a)$$

y esta última relación entraña, en particular, la validez de la relación:

$$«(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow (y^{(i)}_n,\ \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \Omega \text{ y } (\vec{y}^{(i)}_{n+1},\ y^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \Omega)»$$

y puesto que se tiene:

$$«(y^{(i)}_n,\ \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})_{i \in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^n \text{ hacia } (y_n,\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \text{ y}$$

$$\text{y } (y_{n+1}^{(i)},\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(i)})_{i\in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^n \text{ hacia } (y_{n+1},\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\text{»}$$

se deduce de todo ello, que:

$$\text{«}(y_n;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \overline{\Omega} \text{ y } (y_{n+1};\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \overline{\Omega}\text{» } (\alpha^*)$$

Si $y_n = y_{n+1}$, se tiene obviamente:

$$\text{«}[\text{mín } \{y_n, y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n, y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \overline{\Omega}\text{»}$$

Si $y_n \neq y_{n+1}$, y suponiendo para fijar ideas que sea $y_n < y_{n+1}$, se tiene primeramente:

$$\text{«mín } \{y_n, y_{n+1}\} = y_n \text{ y máx } \{y_n, y_{n+1}\} = y_{n+1}\text{» } (\alpha^{**})$$

y por otra parte, se verifican sucesivamente las relaciones:

$$\text{«}(\forall u)\ (u \in]\, y_n, y_{n+1}\, [\ \Rightarrow y_n = \lim_{i\to\infty} y_n^{(i)} < u < \lim_{i\to\infty} y_{n+1}^{(i)} = y_{n+1})\text{»}$$

y

$$\text{«}y_n = \lim_{i\to\infty} y_n^{(i)} < u < \lim_{i\to\infty} y_{n+1}^{(i)} = y_{n+1} \Rightarrow (\exists\, \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y}$$
$$\text{y } i > \nu \Rightarrow y_n^{(i)} < u < y_{n+1}^{(i)}))\text{»}$$

las cuales, junto con la relación válida, [consecuencia de (α)]:

$$\text{«}y_n^{(i)} < u < y_{n+1}^{(i)} \Rightarrow (u;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(i)}) \in [y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(i)}\} =$$
$$= [\text{mín } \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\},\ \text{máx } \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(i)}\} \subset \Omega\text{»}$$

y de la hipótesis de convergencia en $\mathbf{R}^{n+1}$ de $(\vec{y}^{(i)})_{i\in N} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(i)};\ y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)})_{i\in N}$ hacia $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1})$, entrañan, para todo $u \in\ ]\, y_n, y_{n+1}\, [$, la validez de la relación:

«$(\forall\, r)\ (r \in N \Rightarrow (u;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(r+\nu)}) \in \Omega)$ y $(u;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}^{(r+\nu)})_{r\in N}$ converge en $\mathbf{R}^n$ hacia $(u;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})$» resultando, por tanto, que para todo $u \in\ ]\, y_n, y_{n+1}\, [$, se verifica, que:

$$\text{«}(u;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \overline{\Omega}\text{»}$$

Así pues, es válida la relación:

$$\text{«}(\forall\, u)\ (u \in]\, y_n, y_{n+1}\, [\ \Rightarrow (u;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \overline{\Omega})\text{»}$$

o lo que es equivalente:

$$«]y_n,\ y_{n+1}[\ \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \overline{\Omega}»$$

relación que junto con la ($^{\alpha *}$) y la ($^{\alpha **}$) establece, finalmente, (en el caso $y_n < y_{n+1}$), la validez de la:

$$«[y_n,\ y_{n+1}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} = [\text{mín } \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times$$
$$\times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \overline{\Omega}»$$

En el caso $y_n < y_{n+1}$, procediendo de modo enteramente análogo se establecería, asimismo, la validez de la relación:

$$«[y_{n+1},\ y_n] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} = [\text{mín } \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \overline{\Omega}»$$

Resulta así que en todos los casos se tiene:

$$«[\text{mín } \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \overline{\Omega}»$$

y dado que se ha partido del supuesto $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R})^{n-1}};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \overline{A}_\Omega$, y que por otra parte $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R})^{n-1}};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \overline{A}_\Omega$ es arbitrario, se concluye que es válida la relación:

$$«(\forall \vec{y})(\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \overline{A}_\Omega \Rightarrow [\text{mín } \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times$$
$$\times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \overline{\Omega})» \quad (^{\alpha ***})$$

Sea ahora $f\colon \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (con $n \geq 2$), una función numérica definida y continua sobre el abierto Ω de $\mathbf{R}^n$, y A_Ω el correspondiente abierto de $\mathbf{R}^{n+1}$ asociado a Ω. Para todo $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in A_\Omega$, se tiene que:

$$«[\text{mín } \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega»$$

por lo que denotando por $\overset{-1}{\Omega}(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})$, (traza de $\overset{-1}{\Omega}$ según $\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}$, Chap. II, § 3, n.º 2 de [5]), al abierto de $\mathbf{R}$, (Chap. I, § 4, n.º 2 de [6]):

$$«\{t \in \mathbf{R} / (t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \Omega\}$$

se verifica que:

$$«[\text{mín } \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx } \{y_n,\ y_{n+1}\}] \subset \overset{-1}{\Omega}(y_{(\mathbf{R}^{n-1})})»$$

y consecuentemente, se puede considerar la restricción $f_{|[\text{mín}\{y_n, y_{n+1}\},\, \text{máx}\{y_n, y_{n+1}\}]}$ al intervalo cerrado $I = [\text{mín}\{y_n, y_{n+1}\}, \text{máx}\{y_n, y_{n+1}\}]$ de la aplicación parcial $f_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})}$ determinada por f relativamente a los valores $y_1, y_2, .., y_{n-1}$ de su segundo, tercero, ..., y n-ésimo argumento. Dicha restricción es continua sobre I, y por tanto, es integrable-Riemann sobre I. Pondremos para abreviar:

$$«\int_{y_n}^{y_{n+1}} f_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(t)\,dt = \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,dt»$$

Sea, $F\colon A_\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, la función numérica así definida:

$$«(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) \in A_\Omega \to F(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,dt \in \mathbf{R}»$$

cuyas propiedades vamos a estudiar. Denotaremos, para cada $f \in C(\Omega; \mathbf{R})$, mediante $J^{(\Omega)}(f)\colon A_\Omega \to \mathbf{R}$, a la correspondiente función F definida precedentemente. Se verifica el:

LEMA 2º «Para todo $f \in C(\Omega; \mathbf{R})$, la función $F = J^{(\Omega)}(f)$ es continua sobre A_Ω, y continuamente derivable parcialmente sobre A_Ω respecto a su n-ésimo y $(n+1)$-ésimo argumentos, verificándose:

$$\left.\begin{array}{l}(\forall(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};y_n,y_{n+1}))((\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};y_n,y_{n+1}) \in A_\Omega \Rightarrow (D_n F)(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};y_n,y_{n+1}) = \\ = -f(y_n;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \text{ y } (D_{n+1} F)(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) = f(y_{n+1};\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}))\end{array}\right\}$$

Si además f es continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su segundo, tercero, ... , n-ésimo argumentos, se tiene, en estas condiciones, que F es asimismo continuamente derivable parcialmente sobre A_Ω respecto a cada uno de sus $(n+1)$ argumentos, y consecuentemente, F es continuamente diferenciable sobre A_Ω, verificándose:

$$\left.\begin{array}{l}(\forall(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}))\Big((\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) \in A_\Omega \Rightarrow (\forall i)(i \in \{1,2,\dots,n-1\} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow (D_i F)(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) = \displaystyle\int_{y_n}^{y_{n+1}} (D_{i+1} f)(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,dt)\Big)\end{array}\right\}».$$

En efecto, sea $\vec{y}^* = (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n,\, y^*_{n+1}) \in A_\Omega$. Se verifica (dado que $A_\Omega = \mathring{A}_\Omega$), que:

$$«(\exists \eta_1)\ (\eta_1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{y}\ \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) = [y_1^* - \eta_1, y_1^* + \eta_1] \times \dots \times$$
$$\times [y_{n-1}^* - \eta_1, y_{n-1}^* + \eta_1] \times [y_n^* - \eta_1, y_n^* + \eta_1] \times$$
$$\times [y_{n+1}^* - \eta_1, y_{n+1}^* + \eta_1] = \overline{Q}\,(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times [y_n^* - \eta_1, y_n^* + \eta_1] \times$$
$$\times [y_{n+1}^* - \eta_1, y_{n+1}^* + \eta_1] \subset A_\Omega)» \quad (1^*)$$

Ahora bien, para todo $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n, y_{n+1}) \in \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) \subset A_\Omega$, se tiene, como consecuencia de (1^*), las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «\overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times \{(y_n^*, y_{n+1}^*)\} \subset A_\Omega» \\ \text{y} \\ «\overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times \{(y_n^*, y_{n+1})\} \subset A_\Omega» \\ \text{y} \\ «\overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times \{(y_n, y_{n+1}^*)\} \subset A_\Omega» \end{array}\right\} (2)$$

equivalentes, respectivamente, a las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «[\text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}\}] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\ \{y_n, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_n, y_{n+1}^*\}] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \end{array}\right\}$$

las cuales a su vez entrañan:

$$«([\text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \cup [\text{mín}\ \{y_n^*, y_{n+1}\},$$
$$,\ \text{máx}\ \{y_n^*, y_{n+1}\}] \cup [\text{mín}\ \{y_n, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_n, y_{n+1}^*\}]) \times$$
$$\times\ \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) =$$
$$= \underbrace{[\text{mín}\ \{y_n, y_n^*, y_{n+1}, y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_n, y_n^*, y_{n+1}, y_{n+1}^*\}]}_{=I} \times$$
$$\times\ \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega»$$

Puesto que:

$$«(y_n, y_n^*) \in I \times I\ \text{y}\ (y_{n+1}, y_{n+1}^*) \in I \times I»$$

se tiene como consecuencia de la relación precedente, la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «[\text{mín}\ \{y_n,\ y_n^*\},\ \text{máx}\ \{y_n,\ y_n^*\}] \times \bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\ \{y_{n+1},\ y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\ \{y_{n+1},\ y_{n+1}^*\}] \times \bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \end{array}\right\}$$

que son, respectivamente equivalentes a las:

$$\left.\begin{array}{c} «\bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times \{(y_n,\ y_n^*)\} \subset A_\Omega» \\ \text{y} \\ «\bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times \{(y_{n+1},\ y_{n+1}^*)\} \subset A_\Omega» \end{array}\right\} \quad (2^*)$$

De (2) y (2*), se deduce, en particular, [habida cuenta que se tiene, por hipótesis, $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times [y_n^* - \eta_1,\ y_n^* + \eta_1] \times [y_{n+1}^* - \eta_1,\ y_{n+1}^* + \eta_1]$, y consecuentemente: $\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})$]: «$(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}^*) \in A_\Omega$ y $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*) \in A_\Omega$ y y $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_n^*) \in A_\Omega$ y $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_{n+1},\ y_{n+1}^*) \in A_\Omega$»

así como:

$$«(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*) \in A_\Omega»$$

Así pues, para todo $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*)$ los puntos $(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*)$; $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1})$; $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}^*)$; $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*)$; $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_n^*)$ y $(y_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_{n+1},\ y_{n+1}^*)$, pertenecen al conjunto de definición A_Ω de F, lo que permite, para cada $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in \bar{Q}_{\eta_1}\ (\vec{y}^*)$, poner: «$F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) - F\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*) = [F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) - F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}^*)] + [F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}^*) - F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*)] + [F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*) - F\ (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*)]$»

Pero, por definición:

$$«F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) - F\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}^*) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} f\ (t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\ dt - \\ - \int_{y_n}^{y_{n+1}^*} f\ (t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\ dt»$$

$$«F(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y^*_{n+1}) - F(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n,\, y^*_{n+1}) = \int_{y_n}^{y^*_{n+1}} f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt -$$

$$- \int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt»$$

$$«F(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n,\, y^*_{n+1}) - F(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n,\, y^*_{n+1}) = \int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} [f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) -$$

$$- f(t;\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\, dt»$$

y además, dado que las relaciones: $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y^*_n) \in A_\Omega$ y $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};$ $;\, y_{n+1},\, y^*_{n+1}) \in A_\Omega$, establecidas precedentemente, entrañan la existencia de las integrales $\int_{y_n}^{y^*_n} f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt;\ \int_{y_{n+1}}^{y^*_{n+1}} f(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt$, se obtiene, consecuentemente, que para todo $(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) \in \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*)$, es válida la relación:

$$«F(y_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) - F(y^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n,\, y^*_{n+1}) = \int_{y^*_{n+1}}^{y_{n+1}} f(t;\, y_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt +$$

$$+ \int_{y_n}^{y^*_n} f(t;\, y_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt + \int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} [f(t;\, y_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t;\, y^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\, dt»$$

de la cual [k denota el extremo superior de $|f|$ sobre el intervalo compacto $J = [\text{mín}\,\{y^*_n\, y^*_{n+1}\} - \eta_1,\ \text{máx}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\} + \eta_1] \times$ $\times\, \overline{Q}_{\eta_{11}}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega$, intervalo (*) que contiene a: $[\text{mín}\,\{y_n,\, y^*_n\},\ \text{máx}$ $\{y_n,\, y^*_n\}] \times \{y_{(\mathbf{R}^{n-1})}\}$ y a $[\text{mín}\,\{y_{n+1},\, y^*_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_{n+1},\, y^*_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\}$], se deduce sucesivamente:

(*) De la relación deducida precedentemente, [como consecuencia de (2)], válida para todo $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y_n,\, y_{n+1}) \in \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) = \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times [y^*_n - \eta_1,$ $,\, y^*_n + \eta_1] \times [y^*_{n+1} - \eta_1,\, y^*_{n+1} + \eta_1]$:

$$«[\text{mín}\,\{y_n,\, y^*_n,\, y_{n+1},\, y^*_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_n,\, y^*_n,\, y_{n+1},\, y^*_{n+1}\}] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega»$$

y haciendo sucesivamente,

$$\vec{y} = (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n - \eta_1,\, y^*_{n+1} - \eta_1) \text{ e } \vec{y} = (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\, y^*_n + \eta_1,\, y^*_{n+1} + \eta_1),$$

se obtiene en particular, ia validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «[\text{mín}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\} - \eta_1,\ \text{máx}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\}] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\} + \eta_1] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \end{array}\right\}$$

las cuales entrañan:

$$«J = [\text{mín}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\} - \eta_1,\ \text{máx}\,\{y^*_n,\, y^*_{n+1}\} + \eta_1] \times \overline{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega»$$

$$«|F(y_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) - F(y^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n,\ y^*_{n+1})| \leq \int_{\text{mín}\{y_{n+1},y^*_{n+1}\}}^{\text{máx}\{y_{n+1},y^*_{n+1}\}} |f|\,(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,dt +$$

$$+ \int_{\text{mín}\{y_n,y^*_n\}}^{\text{máx}\{y_n,y^*_n\}} |f|\,(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,dt + \left|\int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} [f(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\,dt\right| \leq$$

$$\leq k\cdot|y_{n+1} - y^*_{n+1}| + k\cdot|y_n - y^*_n| + \left|\int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} [f(t;\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\,dt\right| \leq$$

$$\leq 2k\,||(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) - (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n,\ y^*_{n+1})||_{(\mathbf{R}^{n+1})} +$$

$$+ \left|\int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} [f(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\,dt\right|»$$

y daba la arbitrariedad de $\vec{y} \in \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*)$, se puede poner:

$$«(\forall\,\vec{y})\,(\vec{y} \in \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) \Rightarrow |F(\vec{y}) - F(\vec{y}^*)| \leq 2k\,||\vec{y} - \vec{y}^*||_{(\mathbf{R}^{n+1})} +$$

$$+ \left|\int_{y^*_n}^{y^*_{n+1}} [f(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\,dt\right|)»\ (^3)$$

Por otra parte, la restricción de f al intervalo compacto: $J =$ $= [\text{mín}\{y^*_n, y^*_{n+1}\} - \eta_1,\ \text{máx}\{y^*_n, y^*_{n+1}\} + \eta_1] \times \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})$, es uniformemente continua sobre J [intervalo, al que, para todo $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};$ $;\ y_n,\ y_{n+1}) \in \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*)$, y cualquiera que sea $t \in [\text{mín}\{y^*_n,\ y^*_{n+1}\},\ \text{máx}$ $\{y^*_n,\ y^*_{n+1}\}]$, pertenecen, siempre, los puntos $(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})$ y $(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]$ por lo que, para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, se puede determinar un $\eta_2 \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, tal que se verifique:

$$«(\forall\,((t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),\ (t';\ \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}))),\ (((t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),\ (t';\ y'_{(\mathbf{R}_{n-1})})) \in J \times J \text{ y}$$

$$||(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1}}) - (t';\ \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})})||_{(\mathbf{R}^n)} < \eta_2 \Rightarrow |f(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t';\ \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-n})})| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\cdot(|y^*_{n+1} - y^*_n| + 1)}\Big)»$$

y en particular, será válida la relación:

$$«(\forall\,\vec{y})\,(\vec{y} \in \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) \text{ y } ||\vec{y} - \vec{y}^*||_{(\mathbf{R}^{n-1})} < \eta_2 \Rightarrow (\forall\,t)\,(t \in [\text{mín}\{y^*_n,\ y^*_{n+1}\},$$

$$,\ \text{máx}\{y^*_n,\ y^*_{n+1}\}] \Rightarrow |f(t;\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - f(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\,(|y^*_{n+1} - y^*_n| + 1)}\Big)»$$

la cual entraña:

$$«(\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*)\ \text{y}\ \|\vec{y} - \vec{y}^*\|_{(\mathbf{R}^{n+1})} < \eta_2 \Rightarrow \left| \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} [f(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - \right.$$

$$\left. - f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})]\ dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3\,(|y_{n+1}^* - y_n^*| + 1)} \cdot |y_{n+1}^* - y_n^*| \leq \frac{\varepsilon}{3}» \quad (3^*)$$

Pongamos $\eta = \text{mín}\ \{\eta_1,\ \eta_2,\ \dfrac{\varepsilon}{3\,(k+1)}\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$. Se verifica:

$B_\eta(\vec{y}^*) \subset \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) \subset A_\Omega;\ \eta \leq \eta_2;\ \eta \leq \dfrac{\varepsilon}{3\,(k+1)}$, que junto con (3) y (3*), entraña:

$$«(\exists\, \eta)\ (\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{y}\ (\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in B_\eta(\vec{y}^*) \Rightarrow |F(\vec{y}) - F(\vec{y}^*)| <$$

$$< \frac{2}{3} \cdot \varepsilon \cdot \frac{k}{k+1} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon))»$$

es decir, puesto que se ha partido del supuesto $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, es válida, por tanto, la relación:

$$«\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \eta)\ (\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{y}\ (\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in B_\eta(\vec{y}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F(\vec{y}) - F(\vec{y}^*)| < \varepsilon))»$$

y dada la arbitrariedad de $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, se puede poner:

$$«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \eta)\ (\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{y}\ (\forall \vec{y})\ (\vec{y} \in B_\eta(\vec{y}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F(\vec{y}) - F(\vec{y}^*)| < \varepsilon)))»$$

lo que prueba la continuidad de F en $y^* \in A_\Omega$, y al ser $y^* \in A_\Omega$ arbitrario, se concluye que F es continua sobre A_Ω.

Para establecer la continua derivabilidad parcial de F sobre A_Ω respecto a su n-ésimo argumento y respecto a su $(n+1)$-ésimo argumento, consideremos un $\vec{y}^* = (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n^*,\ y_{n+1}^*) \in A_\Omega$, y sea $\bar{Q}_\eta(\vec{y}^*) = \bar{Q}_\eta(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times [y_n^* - \eta,\ y_n^* + \eta] \times [y_{n+1}^* - \eta,\ y_{n+1}^* + \eta] \subset A_\Omega$, un intervalo cerrado $(n+1)$-dimensional (no degenerado), centrado en $\vec{y}^*$ y contenido en A_Ω.

Puesto que se verifica:

$$«\{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \times [y_n^* - \eta,\ y_n^* + \eta] \times \{y_{n+1}^*\} \subset A_\Omega»$$

lo que entraña, en particular:

$$«(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1}) \in A_\Omega \text{ y } (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n + \eta,\ y^*_{n+1}) \in A_\Omega»$$

o lo que es equivalente:

$$\left.\begin{array}{c} «[\text{mín } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1}\},\ \text{máx } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1}\}] \times \{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega» \\ \text{y} \\ «[\text{mín } \{y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\},\ \text{máx } \{y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\}] \times \{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega» \end{array}\right\}$$

y consecuentemente, es válida la relación:

$$«([\text{mín } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1}\},\ \text{máx } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1}\}] \cup [\text{mín } \{y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\},$$
$$,\ \text{máx } \{y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\}]) \times \{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} = \{\text{mín } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\},$$
$$,\ \text{máx } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\}] \times \{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega»$$

se puede afirmar que el intervalo cerrado (no reducido a un punto) $I = [\text{mín } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\},\ \text{máx } \{y^*_n - \eta,\ y^*_{n+1},\ y^*_n + \eta\}]$ está contenido en el conjunto de definición de la aplicación parcial $f_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})}$, determinada por f relativamente a los valores $y^*_1,\ y^*_2, \ldots, y^*_{n-1}$ de sus argumentos segundo, tercero, ..., n-ésimo, por lo que $f_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua sobre I, y dado que $y^*_{n+1} \in I$ e $y^*_n \in I$, se sigue que las aplicaciones:

$$\left.\begin{array}{l} «y_n \in I \to \displaystyle\int_{y_n}^{y^*_{n+1}} f_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(t)\, dt = \int_{y_n}^{y^*_{n+1}} f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt = \\ \qquad = F(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y^*_{n+1}) = F_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_{n+1})}(y_n) \in \mathbf{R}» \\ «y_{n+1} \in I \to \displaystyle\int_{y^*_n}^{y_{n+1}} f_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(t)\, dt = \int_{y^*_n}^{y_{n+1}} f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt = \\ \qquad = F(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n,\ y_{n+1}) = F_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n)}(y_{n+1}) \in \mathbf{R}» \end{array}\right\}$$

son derivables sobre I, verificándose además:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall y_n)\,(y_n \in I \Rightarrow F'_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_{n+1})}(y_n) = -f_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(y_n) = -f(y_n;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})» \\ \text{y} \\ «(\forall y_{n+1})\,(y_{n+1} \in I \Rightarrow F'_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y^*_n)}(y_{n+1}) = f_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(y_{n+1}) = \\ = f(y_{n+1};\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})» \end{array}\right\}$$

y en particular son válidas las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c}«F_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};y^*_{n+1})} \text{ es derivable en } y^*_n \text{ y } F'_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};y^*_{n+1})}(y^*_n) = \\ = -f(y^*_n;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})» \\ \text{y} \\ «F_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};y^*_n)} \text{ es derivable en } y^*_{n+1} \text{ y } F'_{(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})};y^*_n)}(y^*_{n+1}) = \\ = f(y^*_{n+1};\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})»\end{array}\right\}$$

las cuales son equivalentes, respectivamente, a las:

«F es derivable parcialmente en $\vec{y}^*$ respecto a su n-ésimo argumento y y $(D_n\ F)\ (y^*) = -f(y^*_n;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})$»

y

«F es derivable parcialmente en $\vec{y}^*$ respecto a su $(n+1)$-ésimo argumento y $(D_{n+1}\ F)\ (y^*) = f(y^*_{n+1};\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})$»

Como $\vec{y}^* \in A_\Omega$ es arbitrario, y además la continuidad supuesta de f sobre Ω entraña la continuidad sobre A_Ω de las compuestas $f \circ (pr_n \times pr_{(1,2,\dots,n-1)})$ y $f \circ (pr_{n+1} \times pr_{(1,2,\dots,n-1)})$, $[\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in A_\Omega \rightarrow (pr_n \times pr_{(1,2,\dots,n-1)})\ (\vec{y}) = (pr_n\ \vec{y},\ pr_{(1,2,\dots,n-1)}\ \vec{y}) = (y_n;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \Omega$; $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in A_\Omega \rightarrow (pr_{n+1} \times pr_{(1,2,\dots,n-1)})\ (\vec{y}) = (pr_{n+1}\ \vec{y},\ pr_{(1,2,\dots,n-1)}\ \vec{y}) = (y_{n+1};\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \Omega]$, se concluye, finalmente, que es válida la relación:

«F es continuamente derivable parcialmente sobre A_Ω respecto a su n-ésimo argumento y respecto a su $(n+1)$-ésimo argumento y $D_n\ F = -(f \circ (pr_n \times pr_{(1,2,\dots,n-1)})$ y $D_{n+1}\ F = f \circ (pr_{n+1} \times pr_{(1,2,\dots,n-1)})$».

Supongamos ahora que f además de ser continua sobre Ω, es asimismo, para un cierto $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su $(i+1)$-ésimo argumento, y sea $\vec{y}^* \in A_\Omega$. Se verificará:

$$«(\exists \eta_1)\ (\eta_1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*) = \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times [y^*_n - \eta_1,\ y^*_n + \eta_1] \times$$
$$\times [y^*_{n+1} - \eta_1,\ y^*_{n+1} + \eta_1] \subset A_\Omega)»$$

lo que en particular, entraña:

$$«\bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \times \{(y^*_n,\ y^*_{n+1})\} \subset A_\Omega»$$

o lo que es equivalente:

$$«[\text{mín } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{ máx } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \times \overline{Q}_{\eta_1} (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \subset \Omega» \quad (3^{**})$$

Pongamos $H = [\text{mín } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{ máx } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \times \overline{Q}_{\eta_1} (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})$; H es un compacto de $\mathbf{R}^n$ contenido en Ω, y en consecuencia $(D_{i+1} f)_{|H}$ es uniformemente continua sobre H, por lo que se verifica la relación:

$$«(\forall\ \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\ \eta_2)\ (\eta_2 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall\ ((t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), (t'; \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})))$$
$$(((t, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), (t', \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in H \times H \text{ y } \| (t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) -$$
$$- (t'; \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \|_{(\mathbf{R}^n)} < \eta_2 \Rightarrow | (D_{i+1} f)\ (t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - (D_{i+1} f)\ (t'; \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}) | <$$
$$< \frac{\varepsilon}{| y_{n+1}^* - y_n^* | + 1})))»$$

y en particular, se puede poner:

$$«(\forall t)\ (t \in [\text{mín } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{ máx } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\ (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \overline{Q}_{\eta_1} (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \text{ y } \| \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} - \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} \|_{(\mathbf{R}^{n-1})} <$$
$$< \eta_2 \Rightarrow | (D_{i+1} f)\ (t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - (D_{i+1} f)\ (t; \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) | <$$
$$< \frac{\varepsilon}{| y_{n+1}^* - y_n^* | + 1} \Big)\Big)» \quad (3^{***})$$

Por otra parte, denotando por $\vec{v}_i^{(n-1)}$ y por $\vec{v}_i^{(n+1)}$ a los i-ésimos vectores de las bases canónicas de $\mathbf{R}^{n-1}$ y de $\mathbf{R}^{n+1}$, respectivamente, puesto que:

$$«\lambda \in]- \eta_1, + \eta_1[\Rightarrow \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda \vec{v}_i^{(n-1)} \in Q_{\eta_1} (\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})»$$

es válida, por tanto, y en virtud de (3^{**}), la relación:

$$«(\forall t)\ (t \in [\text{mín } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{ máx } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \Rightarrow (\forall \lambda)\ (\lambda \in] - \eta_1, + \eta_1[\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t; \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda \vec{v}_i^{(n-1)}) = (t; y_1^*, \ldots, y_{i-1}^*, y_i^* +$$
$$+ \lambda, y_{i+1}^*, \ldots, y_{n-1}^*) \in \Omega))» \quad (4)$$

es decir, para todo $t \in [\text{mín } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{ máx } \{y_n^*, y_{n+1}^*\}]$, el intervalo abierto $]y_i^* - \eta_1, y_i^* + \eta_1[$ está contenido en el conjunto de definición de la aplicación parcial $f_{(t; y_1^*, \ldots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \ldots, y_{n-1}^*)}$ determinada por f relativamente a los valores $t, y_1^*, \ldots, y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, \ldots, y_{n-1}^*$ de los argumentos primero, segundo, ..., i-ésimo, (i + 2)-ésimo, ..., n-ésimo.

Como cualquiera que sea $t \in [\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}]$ y para todo $y_i \in]y_i^* - \eta_1, y_i^* + \eta_1[$ es f derivable parcialmente en $(t;\, y_1^*, ..., y_{i-1}^*, y_i, y_{i+1}^*, ..., y_{n-1}^*)$ respecto a su (i + 1)-ésimo argumento, y consecuentemente, $f_{(t;\, y_1^*, ..., y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, ..., y_{n-1}^*)|]y_i^* - \eta_1, y_i^* + \eta_1[}$ es derivable en y_i, lo que entraña que para todo $t \in [\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\},$ $, \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}]$ es $f_{(t;\, y_1^*, ..., y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, ..., y_{n-1}^*)}$ derivable sobre $]y_i^* - \eta_1,$ $, y_i^* + \eta_1[$, se sigue de todo ello, [habida cuenta, además, que se tiene: $(\forall \lambda)\, (\lambda \in]-\eta_1, +\eta_1[\Rightarrow y_i^* + \lambda \in]\, y_i^* - \eta_1, y_i^* + \eta_1\, [)]$, que cualquiera sea $t \in [\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}]$, la aplicación compuesta $\Phi^{(t)}:]-\eta_1, +\eta_1[\to \mathbf{R}$ definida por:

$$«\lambda \in]-\eta_1, +\eta_1[\to \Phi^{(t)}(\lambda) = f_{(t;\, y_1^*, ..., y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, ..., y_{n-1}^*)}(y_i^* + \lambda) = f(t;\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda \vec{v}_i^{(n-1)}) \in \mathbf{R}»$$

es derivable sobre $]-\eta_1, +\eta_1[$, verificando además, que:

$$«(\forall \lambda)\, (\lambda \in]-\eta_1, +\eta_1[\Rightarrow (\Phi^{(t)})'(\lambda) = f'_{(t;\, y_1^*, ..., y_{i-1}^*, y_{i+1}^*, ..., y_{n-1}^*)}(\lambda) = (D_{i+1} f)\, (t;\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda \vec{v}_i^{(n-1)}))»$$

deduciéndose, por tanto, que para todo $t \in [\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\},$ $, \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}]$, es válida la relación:

$$«(\forall \lambda)\, (\lambda \in \mathbf{R} \text{ y } 0 < |\lambda| < \eta_1 \Rightarrow (\exists\, \theta_{(t;\lambda)})\, (\theta_{(t;\lambda)} \in]\,0,1\,[\text{ y}$$

$$\text{y } \frac{\Phi^{(t)}(\lambda) - \Phi^{(t)}(0)}{\lambda} = \frac{f(t;\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda \vec{v}_i^{(n-1)}) - f(t;\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})}{\lambda} =$$

$$= (D_{i+1} f)\, (t;\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + (\theta_{(t;\lambda)} \cdot \lambda)\, \vec{v}_i^{(n-1)}) = (\Phi^{(t)})'\, (\theta_{(t;\lambda)} \cdot \lambda)))» \quad (4^*)$$

Sea $\eta = \text{mín}\,\{\eta_1, \eta_2\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$; se tiene para todo $(t, \lambda) \in$ $\in [\text{mín}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}, \text{máx}\,\{y_n^*, y_{n+1}^*\}] \times \mathbf{R}$, que la condición $0 < |\lambda| < \eta$, entraña:

$$«\|(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + (\theta_{(t;\lambda)} \cdot \lambda)\, \vec{v}_i^{(n-1)}) - \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\|_{(\mathbf{R}^{n-1})} = |\lambda| \cdot \theta_{(t;\lambda)} < |\lambda| < \eta_1 \text{ y}$$

$$\text{y } \|(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + (\theta_{(t;\lambda)} \cdot \lambda)\, \vec{v}_i^{(n-1)}) - \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\|_{(\mathbf{R}^{n-1})} < \eta_2»$$

y por tanto se verifica, que:

$$«\, \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + (\theta_{(t;\lambda)} \cdot \lambda)\, \vec{v}_i^{(n-1)} \in \bar{Q}_{\eta_1}(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \text{ y}$$

$$\text{y } \|(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + (\theta_{(t;\lambda)} \cdot \lambda) \cdot \vec{v}_i^{(n-1)}) - \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}\|_{(\mathbf{R}^{n-1})} < \eta_2»$$

y consecuentemente, habida cuenta además (3^{***}) y (4^*), es válida la relación:

$$«(\forall\lambda)\Bigl(\lambda\in\mathbf{R}\text{ y }0<|\lambda|<\eta\Rightarrow(\forall t)\Bigl(t\in[\text{mín}\,\{y_n^*,y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\,\{y_n^*,y_{n+1}^*\}]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}+\lambda\vec{v}_i^{(n-1)})-f(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})}{\lambda}-(D_{i+1}f)(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\right|=$$

$$=|(D_{i+1}f)(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}+(\theta_{(t;\lambda)}\cdot\lambda)\cdot\vec{v}_i^{(n-1)})-(D_{i+1}f)(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{|y_{n+1}^*-y_n^*|+1}\Bigr)\Bigr)»$$

de la cual se deduce:

$$«(\forall\lambda)\Bigl(\lambda\in\mathbf{R}\text{ y }0<|\lambda|<\eta\Rightarrow\left|\int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*}\left[\frac{f(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}+\lambda\vec{v}_i^{(n-1)})-f(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})}{\lambda}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(D_{i+1}f)(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\right]dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{|y_{n+1}^*-y_n^*|+1}\cdot|y_{n+1}^*-y_n^*|=\frac{|y_{n+1}^*-y_n^*|}{|y_{n+1}^*-y_n^*|+1}\cdot\varepsilon<\varepsilon\Bigr)»\quad(4^{**})$$

Ahora bien, la relación (4) es equivalente a la:

$$«(\forall\lambda)\ (\lambda\in\,]-\eta_1,+\eta_1[\,\Rightarrow(\forall t)\ (t\in[\text{mín}\,\{y_n^*,y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\,\{y_n^*,y_{n+1}^*]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(t;\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}+\lambda\vec{v}_i^{(n-1)})\in\Omega))»$$

o lo que es lo mismo:

$$«(\forall\lambda)\ (\lambda\in\,]-\eta_1,+\eta_1[\,\Rightarrow[\text{mín}\,\{y_n^*,y_{n+1}^*\},\ \text{máx}\,\{y_n^*,y_{n+1}^*\}]\times$$

$$\times\{\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}+\lambda\vec{v}_i^{(n-1)}\}\subset\Omega)»$$

y esta última relación es a su vez equivalente a la:

$$«(\forall\lambda)\ (\lambda\in\,]-\eta_1,+\eta_1[\,\Rightarrow(\vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}+\lambda\vec{v}_i^{(n-1)};y_n^*,y_{n+1}^*)=$$

$$=\vec{y}^*+\lambda\vec{v}_i^{(n+1)}\in A_\Omega)»$$

relación que entraña:

«$]y_i^*-\eta_1,y_i^*+\eta_1[$ está contenido en el conjunto de definición de la aplicación parcial $F_{(y_1^*,\ldots,y_{i-1}^*,y_{i+1}^*,\ldots,y_n^*,y_{n+1}^*)}$ determinada por F relativamente a los valores $y_1^*,\ldots,y_{i-1}^*,y_{i+1},\ldots,y_n^*,y_{n+1}^*$ del primero, segundo, ..., $(i-1)$-ésimo, $(i+1)$-ésimo, ..., n-ésimo y (n + 1)-ésimo argumento» por lo que tiene sentido poner:

$$«(\forall\lambda)\ (\lambda \in]-\eta_1, +\eta_1[- \{0\} \Rightarrow \frac{F(\vec{y}^* + \lambda\vec{v}_i^{(n+1)}) - F(\vec{y}^*)}{\lambda} =$$

$$= \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} \frac{f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda\vec{v}_i^{(n-1)}) - f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})}{\lambda}\, dt \Big)»$$

relación que junto con la (4**) entraña:

$$«(\forall\lambda)\Big(\lambda \in \mathbf{R} \text{ y } 0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow \Big| \frac{F(\vec{y}^* + \lambda\vec{v}_i^{(n+1)}) - F(\vec{y}^*)}{\lambda} -$$

$$- \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} (D_{i+1} f)\ (t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt \Big| =$$

$$= \Big| \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} \Big[\frac{f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})} + \lambda\vec{v}_i^{(n-1)}) - f(t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})}{\lambda} -$$

$$- (D_{i+1} f)\ (t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \Big]\, dt \Big| < \varepsilon \Big)»$$

es decir, se verifica:

$$»(\forall\varepsilon)\Big(\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\eta)\ (\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall\lambda)\ (\lambda \in \mathbf{R} \text{ y } 0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big| \frac{F(\vec{y}^* + \lambda\vec{v}_i^{(n+1)}) - F(\vec{y}^*)}{\lambda} - \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} (D_{i+1} f)\ (t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt \Big| < \varepsilon)) \Big)»$$

o lo que es equivalente:

$$«\text{Existe } \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(\vec{y}^* + \lambda\vec{v}_i^{(n+1)}) - F(\vec{y}^*)}{\lambda} \text{ y } \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(\vec{y}^* + \lambda\vec{v}_i^{(n+1)}) - F(\vec{y}^*)}{\lambda} =$$

$$= \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} (D_{i+1} f)\ (t;\ \vec{y}^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt»$$

relación que equivale a la:

«F es derivable parcialmente en $\vec{y}^*$ respecto a su i-ésimo argumento y

$$\text{y } (D_i F)\ (y^*) = \int_{y_n^*}^{y_{n+1}^*} (D_{i+1} f)\ (t;\ y^*_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt»$$

Finalmente, dada la arbitrariedad de $i \in \{1,2, ..., n-1\}$ y de $\vec{y}^* \in A_\Omega$, así como que la continuidad de $D_{i+1} f$ sobre Ω entraña la continuidad sobre A_Ω de la función $\mathcal{I}^{(\Omega)}(D_{i+1} f)$, se concluye que:

«$(\forall i)$ $(i \in \{1,2, ..., n-1\}$ y f es continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su $(i+1)$-ésimo argumento $\Rightarrow F = \mathcal{I}^{(\Omega)}(f)$ es continuamente derivable parcialmente sobre A_Ω respecto a su i-ésimo argumento y $D_i F = \mathcal{I}^{(\Omega)}(D_{i+1} f))$».

Resulta así demostrado el LEMA 2.º en todas sus partes.

OBSERVACION 2.ª. — Sea $\Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ un abierto de $\mathbf{R}^n$, $(n \geq 2)$ y sea $\bar{f}: \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ una función numérica definida y continua sobre la adherencia $\bar{\Omega}$ de Ω; sea $f = \bar{f}_{|\Omega}: \Omega \to \mathbf{R}$ la restricción de $\bar{f}$ a Ω, [y por tanto $\bar{f}$ prolonga con continuidad f a $\bar{\Omega}$].

Para todo $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y_n, y_{n+1}) \in \bar{A}_\Omega$, dado que, en virtud de (α^{***}), OBSERVACION 1.ª, es válida la relación:

$$«[\text{mín}\,\{y_n, y_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_n, y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \bar{\Omega}»$$

se puede, consecuentemente, considerar la restricción:

$$\bar{f}_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|[\text{mín}\,\{y_n, y_{n+1}\},\,\text{máx}\,\{y_n, y_{n+1}\}]}$$

al intervalo cerrado $[\text{mín}\,\{y_n, y_{n+1}\},\ \text{máx}\,\{y_n, y_{n+1}\}] = I$, de la aplicación parcial $\bar{f}_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})}$ determinada por $\bar{f}$, relativamente a los valores $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ de su segundo, tercero, ..., n-ésimo argumento. Dicha restricción $\bar{f}_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}$, por ser continua sobre I, es integrable-Riemann sobre I. Pongamos, como antes, para abreviar:

$$«\int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(t)\, dt = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt»$$

y consideremos la función numérica:

$$\bar{F}: \bar{A}_\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$$

así definida:

$$«\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; y_n, y_{n+1}) \in \bar{A}_\Omega \to \bar{F}(\vec{y}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}(t;\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt \in \mathbf{R}»$$

Si $\vec{y} = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})};\ y_n,\ y_{n+1}) \in A_\Omega$, puesto que entonces se tiene:

$$«I \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega»$$

y en consecuencia:

$$«\bar{f}_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I} = f_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}»$$

se verifica, por tanto, que:

$$«\bar{F}(\vec{y}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(t)\, dt = \int_{y_n}^{y_{n+1}} f_{(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|I}(t)\, dt = F(y)», [\text{con } F = \mathfrak{J}^{(\Omega)}(f)]$$

es decir, y dada la arbitrariedad de $y \in A_\Omega$, se puede poner:

$$«\bar{F}_{|A\Omega} = F»$$

Demostremos que $\bar{F}$ prolonga con continuidad F a $\bar{A}_\Omega$, para lo cual basta probar, que para todo $\vec{y} \in \bar{A}_\Omega$ y toda sucesión $(\vec{y}^{(i)})_{i \in N}$ de elementos de A_Ω convergente en $\mathbf{R}^{n+1}$ hacia $\vec{y}$, se verifica que la sucesión numérica $(F(\vec{y}^{(i)}))_{i \in N}$ converge en $\mathbf{R}$ hacia $\bar{F}(\vec{y})$.

Se tiene primeramente, en virtud de lo precedente:

$$\left.\begin{array}{c} «[\text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \bar{\Omega}» \\ \text{y} \\ «(\forall i)\ (i \in N \Rightarrow [\text{mín}\{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\},\ \text{máx}\{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\}] \times \\ \times \{\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega \subset \bar{\Omega})» \end{array}\right\} (\beta)$$

y por otra parte, las relaciones verdaderas:

$$\left.\begin{array}{c} «\text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\} - 1 < \text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\} \leq y_n = \lim_{i \to \infty} y_n^{(i)} \leq \\ \leq \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\} < \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\} + 1» \\ \text{y} \\ «\text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\} - 1 < \text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\} \leq y_{n+1} = \lim_{i \to \infty} y_{n+1}^{(i)} \leq \\ \leq \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\} < \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\} + 1» \end{array}\right\}$$

entrañan, como consecuencia:

$$«(\exists \nu_1)\ (\nu_1 \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu_1 \Rightarrow \text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\} - 1 < y_n^{(i)} <$$
$$< \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\} + 1 \text{ y } \text{mín}\{y_n,\ y_{n+1}\} - 1 < y_{n+1}^{(i)} < \text{máx}\{y_n,\ y_{n+1}\} + 1))»$$

verificándose, por tanto:

$$«(\exists \nu_1)\ (\nu_1 \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu_1 \Rightarrow \text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} - 1 < \\ < \text{mín}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\} \leq \text{máx}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\} < \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} + 1))»$$

es decir, poniendo $K^{(1)} = [\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} - 1,\ \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\} + 1]$:

$$\left.\begin{array}{c} «(\exists \nu_1)\ (\nu_1 \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow [\text{mín}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\},\ \text{máx}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\}] \subset K^{(1)}))» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}] \subset K^{(1)}» \end{array}\right\} (\beta^*)$$

$K^{(1)}$ es un compacto de $\mathbf{R}$, así como el conjunto $K^{(n-1)} = (\bigcup_{i \in N} \{\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\}) \cup \cup \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\}$, constituido por los términos de la sucesión convergente $(\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})_{i \in N}$ y por su límite $\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}$, es asimismo un compacto de $\mathbf{R}^{n-1}$, y consecuentemente, $K = (K^{(1)} \times K^{(n-1)}) \cap \bar{\Omega}$ es un compacto de $\mathbf{R}^n$ contenido en $\bar{\Omega}$.

Ahora bien, se verifica [teniendo en cuenta $(^{\beta *})$], que:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu_1 \Rightarrow [\text{mín}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\},\ \text{máx}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\}] \times \\ \times \{\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset K^{(1)} \times K^{(n-1)})» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset K^{(1)} \times K^{(n-1)}» \end{array}\right\}$$

que junto con las relaciones $(^\beta)$ establecen la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} (\exists \nu_1)\ (\nu_1 \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow [\text{mín}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\},\ \text{máx}\ \{y_n^{(i)},\ y_{n+1}^{(i)}\}] \times \{\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset K))» \\ \text{y} \\ «[\text{mín}\ \{y_n,\ y_{n+1}\},\ \text{máx}\ \{y_n,\ y_{n+1}\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset K» \end{array}\right\} (\beta^{**})$$

Sea $M = \sup_{(t;\,\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in K} |\bar{f}\,(t;\ y_{(\mathbf{R}^{n-1})})|$ $(^{\beta ***})$. Consideremos los dos casos, mutuamente excluyentes, [1⁰) $y_n = y_{n+1}$]; [2⁰) $y_n \neq y_{n+1}$].

1.⁰). — $y_n = y_{n+1}$. En este caso se tiene, que:

$$«\bar{F}\ (\vec{y}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}(t;\ \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\ dt = 0 \text{ y } \lim_{i \to \infty} (y_n^{(i)} - y_{n+1}^{(i)}) = y_n - y_{n+1} = 0»$$

por lo que, para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, es válida la relación:

$$«(\exists \nu_2)\,(\nu_2 \in N \text{ y } (\forall i)\,(i \in N \text{ y } i > \nu_2 \Rightarrow |y_{n+1}^{(i)} - y_n^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{M+1}))» \qquad (\gamma)$$

Poniendo $\nu = \text{máx}\,\{\nu_1, \nu_2\} \in N$, se tiene como consecuencia de (β^{**}), (β^{***}) y (γ):

$$«(\forall i)\left(i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow |F(\vec{y}^{(i)}) - \bar{F}(\vec{y})| = \left|\int_{y_n^{(i)}}^{y_{n+1}^{(i)}} f(t;\, \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt\right| \leq \right.$$

$$\left. \leq M\,|y_{n+1}^{(i)} - y_n^{(i)}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon\right)»$$

es decir, se verifica, que:

$$«(\forall \varepsilon)\,(\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu)\,(\nu \in N \text{ y } (\forall i)\,(i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow |F(\vec{y}^{(i)}) -$$

$$- \bar{F}(\vec{y})| < \varepsilon)))»$$

o lo que es equivalente:

$$«(F(\vec{y}^{(i)}))_{i \in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } \bar{F}(\vec{y})»$$

2.º). $- y_n \neq y_{n+1}$. Este caso se desdobla a su vez en los subcasos $(y_n < y_{n+1})$ y $(y_n > y_{n+1})$, que se demuestran de idéntica manera, por lo que sólo consideraremos, por ejemplo, el subcaso $y_n < y_{n+1}$.

Para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ pongamos $\varepsilon' = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{12(M+1)}, \frac{y_{n+1} - y_n}{2}\right\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$; se tiene: $y_n + \varepsilon' \leq y_{n+1} - \varepsilon'$. Puesto que $K \subset \bar{\Omega}$ es un compacto de $\mathbf{R}^n$ contenido en $\bar{\Omega}$ (sobre el cual, por hipótesis, es $\bar{f}$ continua), la restricción $\bar{f}_{|K}$ de $\bar{f}$ a K es uniformemente continua sobre K, por lo que es válida la relación:

$$«(\exists \eta)\left(\eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall ((t';\, \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}), (t'';\, \vec{y}''_{(\mathbf{R}^{n-1})})))\left(((t';\, \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}), (t'';\, \vec{y}''_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in \right.\right.$$

$$\in K \times K \text{ y } \|(t';\, \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - (t'';\, \vec{y}''_{(\mathbf{R}^{n-1})})\|_{(\mathbf{R}^n)} < \eta \Rightarrow \left|\bar{f}(t';\, \vec{y}'_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - \right.$$

$$\left.\left.\left. - \bar{f}(t'';\, \vec{y}''_{(\mathbf{R}^{n-1})})\right| < \frac{\varepsilon}{2\,(y_{n+1} - y_n)}\right)\right)» \qquad (\gamma^*)$$

Por otro lado, en virtud de la convergencia de $(\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})_{i\in N}$ hacia $\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}$, se puede poner:

$$«(\exists \nu_1')(\nu_1' \in N \text{ y } (\forall i)(i \in N \text{ y } i > \nu_1' \Rightarrow ||\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})} - \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}||_{(\mathbf{R}^{n-1})} < \eta))» \ (^{\gamma^{**}})$$

así como, en virtud de la convergencia de las sucesiones $(y^{(i)}_n)_{i\in N}$ y $(y^{(i)}_{n+1})_{i\in N}$ hacia y_n e y_{n+1}, respectivamente, es válida, consecuentemente, la relación:

$$«(\exists \nu_1'')(\nu_1'' \in N \text{ y } (\forall i)(i \in N \text{ y } i > \nu_1'' \Rightarrow y_n - \varepsilon' < y^{(i)}_n < y_n + \varepsilon' \leq$$
$$\leq y_{n+1} - \varepsilon' < y^{(i)}_{n+1} < y_{n+1} + \varepsilon'))» \ (^{0})$$

la cual entraña:

$$«(\exists \nu_1'')(\nu_1'' \in N \text{ y } (\forall i)(i \in N \text{ y } i > \nu_1'' \Rightarrow [\text{mín}\,\{y^{(i)}_n, y^{(i)}_{n+1}\},$$
$$,\text{máx}\,\{y^{(i)}_n, y^{(i)}_{n+1}\}] = [y^{(i)}_n, y^{(i)}_{n+1}] = [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \cup [y^{(i)}_n, y_n + \varepsilon'] \cup$$
$$\cup [y_{n+1} - \varepsilon', y^{(i)}_{n+1}] \text{ y } [\text{mín}\,\{y_n, y_{n+1}\}, \text{máx}\,\{y_n, y_{n+1}\}] = [y_n, y_{n+1}] =$$
$$= [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \cup [y_n, y_n + \varepsilon'] \cup [y_{n+1} - \varepsilon', y_{n+1}]))» \ (^{\gamma^{***}})$$

Sea $\nu = \text{máx}\,\{\nu_1, \nu_1', \nu_1''\} \in N$. Se tiene como consecuencia de $(^{\beta^{**}})$, $(^{\gamma^{**}})$ y $(^{\gamma^{***}})$, la validez de las relaciones:

$$\left.\begin{array}{c} «(\exists \nu)(\nu \in N \text{ y } (\forall i)(i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow ||\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})} - \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}||_{(\mathbf{R}^{n-1})} < \eta \text{ y} \\ \text{y } [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \times \{\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset K))» \\ \text{y} \\ «[y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset K» \end{array}\right\}$$

las cuales entrañan:

$$«(\exists \nu)(\nu \in N \text{ y } (\forall i)(i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow (\forall t)(t \in [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), (t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in K \times K \text{ y } ||(t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - (t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})||_{(\mathbf{R}^{n})} =$$
$$= ||\vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})} - \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}||_{(\mathbf{R}^{n-1})} < \eta)))»$$

relación de la cual y teniendo en cuenta además $(^{\gamma^{*}})$, se deduce la validez de la:

$$«(\exists \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow (\forall t)\ (t \in [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\bar{f}(t; \vec{y}^{(i)}{}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - \bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})| < \frac{\varepsilon}{2\,(y_{n+1} - y_n)})))» \quad (^{\delta})$$

Señalemos que, en virtud de $(^{\nu***})$ y dado que: $i \in N$ y $i > \nu \Rightarrow$ $\Rightarrow i \in N$ y $i > \nu_1''$, es válida, también, la relación:

$$«(\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow [y_n^{(i)}, y_{n+1}^{(i)}] = [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \cup$$

$$\cup [y_n^{(i)}, y_n + \varepsilon'] \cup [y_{n+1} - \varepsilon', y_{n+1}^{(i)}] \text{ y } [y_n, y_{n+1}] =$$

$$= [y_n + \varepsilon', y_{n+1} - \varepsilon'] \cup [y_n, y_n + \varepsilon'] \cup [y_{n+1} - \varepsilon', y_{n+1}])» \quad (^{\delta*})$$

la cual, y habida cuenta $(^{\beta**})$ y $(^{\beta***})$, entraña la:

$$\left.\begin{array}{l} «(\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow (\forall t)\ (t \in [y_n^{(i)}, y_n + \varepsilon'] \cup \\ \cup [y_{n+1} - \varepsilon', y_{n+1}^{(i)}] \Rightarrow |\bar{f}(t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})| \leq M))» \\ \qquad\qquad \text{y} \\ «(\forall t)\ (t \in [y_n, y_n + \varepsilon'] \cup [y_{n+1} - \varepsilon', y_{n+1}] \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow |\bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})| \leq M)» \end{array}\right\} (^{\delta**})$$

De $(^{0})$, $(^{\delta})$, $(^{\delta*})$ y $(^{\delta**})$, se sigue que, para todo $i \in N$ con $i > \nu$, se verifica la relación:

$$«|\bar{F}(\vec{y}^{(i)}) - \bar{F}(\vec{y})| = \left| \int_{y_n^{(i)}}^{y_{n+1}^{(i)}} \bar{f}(t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt - \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{y_n+\varepsilon'}^{y_{n+1}-\varepsilon'} |\bar{f}(t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) - \bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|\, dt + \int_{y_n^{(i)}}^{y_n+\varepsilon'} |\bar{f}(t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|\, dt +$$

$$+ \int_{y_{n+1}-\varepsilon'}^{y_{n+1}^{(i)}} |\bar{f}(t; \vec{y}^{(i)}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|\, dt + \int_{y_n}^{y_n+\varepsilon'} |\bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|\, dt +$$

$$+ \int_{y_{n+1}-\varepsilon'}^{y_{n+1}} |\bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (y_{n+1} - y_n)} \cdot (y_{n+1} - y_n - 2\varepsilon') +$$

$$+ M \cdot (y_n + \varepsilon' - y_n^{(i)}) + M \cdot (y_{(n+1)}^{(i)} - (y_{n+1} - \varepsilon')) + M \cdot \varepsilon' +$$

$$+ M \cdot \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2} + \cdot 6\, M \cdot \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2} + 6\, M \frac{\varepsilon}{12 \cdot (M + 1)} = \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \frac{M}{M + 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon »$$

es decir, es válida la relación:

$$\text{«}\ \varepsilon \in \mathbf{R}^{+} - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\, F(\vec{y}^{(i)}) - \bar{F}(\vec{y})\,| < \varepsilon))\ \text{»}$$

y puesto que $\varepsilon \in \mathbf{R}^{+} - \{0\}$ es arbitrario, se puede poner:

$$\text{«}\ (\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^{+} - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall i)\ (i \in N \text{ y } i > \nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\, F(\vec{y}^{(i)}) - \bar{F}(\vec{y})\,| < \varepsilon)))\ \text{»}$$

lo que prueba, que:

$$\text{«}\ (F(\vec{y}^{(i)}))_{i \in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } \bar{F}(\vec{y})\ \text{»}$$

Así pues, para todo $\vec{y} \in \bar{A}_{\Omega}$ y cualquiera que sea la sucesión $(\vec{y}^{(i)})_{i \in N}$ de elementos de A_{Ω} que converja en $\mathbf{R}^{n+1}$ hacia $\vec{y}$, se verifica que la sucesión correspondiente $(F(\vec{y}^{(i)}))_{i \in N}$ converge en $\mathbf{R}$ hacia $\bar{F}(\vec{y})$.

Este resultado demuestra que $\bar{F}$ prolonga con continuidad F a $\bar{A}_{\Omega}$, de acuerdo con lo afirmado más arriba.

Pondremos, para todo $\bar{f} \in C(\bar{\Omega}; \mathbf{R}) : \bar{\mathcal{J}}^{(\Omega)}(\bar{f}) = \bar{F}$, en la que $\bar{F} : \bar{A}_{\Omega} \to \mathbf{R}$ es la función definida por:

$$\vec{y} \in \bar{A}_{\Omega} \to \bar{F}(\vec{y}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt \in \mathbf{R},$$

acabada de considerar.

Del Lema 2.º y de la última Observacion, se deduce el siguiente:

Corolario. — «Sea $\bar{f} : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$, una función numérica definida y continua sobre la adherencia $\bar{\Omega}$ de un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^{n}$, cuya restricción $f = \bar{f}_{|\Omega}$ a Ω es continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su segundo, tercero, ..., n-ésimo argumento, con derivadas parciales $D_{i+1} f$, $(i = 1,2, ..., n-1)$, prolongables con continuidad a $\bar{\Omega}$. [Dichas prolongaciones continuas serán denotadas para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, por $D_{i+1} \bar{f}$]. En estas condiciones, la función $F = \mathcal{J}^{(\Omega)}(f)$ es continuamente diferenciable sobre A_{Ω}, y tal que ella y sus derivadas primeras son prolongables con continuidad a $\bar{A}_{\Omega}$, con prolongaciones respectivas $\bar{F}$, $D_r \bar{F}$, $(r = 1, 2, ..., n+1)$, que verifican:

$$(\forall \vec{y}) \, (\vec{y} \in \bar{A}_\Omega \Rightarrow \bar{F}(\vec{y}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} \bar{f}(t\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \, dt \text{ y } (D_n \bar{F})(\vec{y}) =$$

$$= -\bar{f}(y_n\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \text{ y } (D_{n+1} \bar{F})(\vec{y}) = \bar{f}(y_{n+1}\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \text{ y}$$

$$\text{y } (D_i \bar{F})(\vec{y}) = \int_{y_n}^{y_{n+1}} (D_{i+1} \bar{f})(t\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \, dt\,; \, (i = 1, 2, \ldots, n-1)) \text{»}.$$

Se tiene finalmente, el:

TEOREMA FUNDAMENTAL. — «Sean $\omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ y $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ abiertos de $\mathbf{R}^{n-1}$ y de $\mathbf{R}^n$, respectivamente, y $p : \omega \to \mathbf{R}$, $q : \omega \to \mathbf{R}$ dos funciones numéricas definidas y continuas sobre ω, tales que:

$$(\forall \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \, (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \Rightarrow [\text{mín}\,\{p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\},$$

$$, \text{máx}\,\{p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega),$$

[relación que equivale a la: $(\forall \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \, (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \Rightarrow (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,; q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),$ $, p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in A_\Omega)$] y sea $f : \Omega \to \mathbf{R}$ una función numérica definida y continua sobre Ω. Se verifica, en estas condiciones, que la función $\Phi : \omega \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$, así definida:

$$\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \to \Phi(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = \int_{q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})}^{p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})} f(t\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \, dt \in \mathbf{R},$$

es continua sobre ω.

Si además, se supone que p y q son diferenciables sobre ω (resp. continuamente diferenciables sobre ω) y f es continuamente derivable parcialmente sobre Ω, respecto a su segundo, terceio, ..., n-ésimo argumento, entonces Φ es diferenciable sobre ω (resp. continuamente diferenciable sobre ω), verificándose en los dos casos:

$$(\forall (i\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \, ((i\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \times \omega \Rightarrow (D_i \Phi)(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) =$$

$$= \int_{q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})}^{p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})} (D_{i+1} f)(t\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \, dt + f(p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \cdot (D_i p)(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) -$$

$$- f(q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\,; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \cdot (D_i q)(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \text{»}.$$

En efecto, consideremos la función vectorial, $\vec{g}: \omega \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ definida por:

$$«\, \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \to \vec{g}\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, q\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),\, p\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in \mathbf{R}^{n+1}\, »$$

la cual es, en los dos supuestos, continua sobre ω, y diferenciable sobre ω (resp. continuamente diferenciable sobre ω), en el segundo supuesto, verificando además, que:

$$«\, \vec{g}\,(\omega) \subset A_\Omega\, »$$

y por tanto, componible con $F = \mathfrak{J}^{(\Omega)}\,(f): A_\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, resultando:

$$«\, (\forall \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\; (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \Rightarrow \Phi\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = \int_{q\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})}^{p\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})} f\,(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt =$$

$$= F\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\,;\, q\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),\, p\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) = (F \circ \vec{g})\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}))\, »$$

por lo que:

$$«\, \Phi = F \circ \vec{g}\, »$$

El Teorema de las funciones compuestas permite afirmar que, en todos los casos es Φ continua sobre ω, y, en el supuesto de ser p, q diferenciables sobre ω (resp. continuamente diferenciables sobre ω), y f continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su segundo, tercero, ..., n-ésimo argumento (y consecuentemente, en virtud del LEMA 2.º, es $F = \mathfrak{J}^{(\Omega)}\,(f)$ continuamente diferenciable sobre A_Ω), es entonces Φ diferenciable sobre ω (resp. Φ es continuamente diferenciable sobre ω), verificándose:

$$«\, (\forall i)\; (i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \Rightarrow D_i\,\Phi = (D_i\,F) \circ \vec{g}\, +$$

$$+\, ((D_n\,F) \circ \vec{g}) \cdot (D_i\,q) + ((D_{n+1}\,F) \circ \vec{g}) \cdot (D_i\,p))\, »$$

Resulta así demostrado el TEOREMA en todas sus partes.

OBSERVACION 3.ª. — Sean $\omega \in \mathbf{R}^{n-1}$ y $\Omega \in \mathbf{R}^n$, abiertos de $\mathbf{R}^{n-1}$ y de $\mathbf{R}^n$, respectivamente, y $p: \overline{\omega} \to \mathbf{R}$, $q: \overline{\omega} \to \mathbf{R}$, funciones numéricas definidas y continuas sobre la adherencia $\overline{\omega}$ de ω, tales que:

$$«\, (\forall \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\; (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \Rightarrow [\text{mín}\,\{p\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),\, q\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\}\,,$$

$$,\, \text{máx}\,\{p\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}),\, q\,(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\}] \times \{\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}\} \subset \Omega\,)\, »$$

[o lo que es equivalente: $(\forall \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \omega \Rightarrow (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in A_\Omega)]$; y sea $\overline{f}: \overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una función numérica definida y continua sobre la adherencia $\overline{\Omega}$ de Ω. Puesto que la aplicación $\vec{\overline{g}}: \overline{\omega} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ definida por:

$$«\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \overline{\omega} \rightarrow \vec{\overline{g}}(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = (\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}; q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}), p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})) \in \mathbf{R}^{n+1}»$$

es continua sobre $\overline{\omega}$, y además, [dado que, por hipótesis, es $\vec{\overline{g}}(\omega) \subset A_\Omega$], se tiene:

$$«\vec{\overline{g}}(\overline{\omega}) \subset \overline{\vec{\overline{g}}(\omega)} \subset \overline{A}_\Omega»$$

será posible la composición $\overline{\Phi} = \overline{F} \circ \vec{\overline{g}}$ $(\overline{F} = \mathfrak{J}^{(\Omega)}(\overline{f}))$, la cual será una función definida y continua sobre $\overline{\omega}$. [En virtud de la propia definición de $\overline{\Phi} = \overline{F} \circ \vec{\overline{g}}$, se tendrá:

$$(\forall \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) \left(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})} \in \overline{\omega} \Rightarrow \overline{\Phi}(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})}) = \int_{q(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})}^{p(\vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})} \overline{f}(t; \vec{y}_{(\mathbf{R}^{n-1})})\, dt\right)\Big].$$

Si se supone, además, que $p_{|\omega}$, $q_{|\omega}$ son continuamente diferenciables sobre ω, con derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a $\overline{\omega}$, y que $\overline{f}_{|\Omega}$ es continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su segundo, tercero, ..., n-ésimo argumento, con derivadas parciales $D_{i+1} \overline{f}_{|\Omega}$, $(i = 1, 2, ..., n-1)$, prolongables con continuidad a $\overline{\Omega}$, en estas condiciones $\overline{\Phi}_{|\omega}$ es continuamente diferenciable sobre ω, con derivadas parciales primeras prolongables continuamente a $\overline{\omega}$.

En efecto, se tiene:

$$«\overline{\Phi}_{|\omega} = (\overline{F} \circ \vec{\overline{g}})_{|\omega} = \overline{F} \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega} = \overline{F}_{|A_\Omega} \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega} =$$

$$= (\mathfrak{J}^{(\overline{\Omega})}(\overline{f}))_{|A_\Omega} \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega} = \mathfrak{J}^{(\Omega)}(\overline{f}_{|\Omega}) \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega}»$$

por lo que $\overline{\Phi}_{|\omega}$ es continuamente diferenciable sobre ω, verificándose:

$$«(\forall i)\left(i \in \{1,2, ..., n-1\} \Rightarrow D_i \overline{\Phi}_{|\omega} = (D_i \overline{F}_{|A_\Omega}) \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega} +\right.$$

$$\left. + ((D_n \overline{F}_{|A_\Omega}) \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega}) \cdot (D_i q_{|\omega}) + ((D_{n+1} \overline{F}_{|A_\Omega}) \circ \vec{\overline{g}}_{|\omega}) \cdot (D_i p_{|\omega})\right)»$$

Ahora bien, $D_i \overline{F}_{|A_\Omega}$, $(i = 1,2, ..., n-1)$, $D_n \overline{F}_{|A_\Omega}$, $D_{n+1} \overline{F}_{|A_\Omega}$ son continuamente prolongables a $\overline{A}_\Omega$. [Las prolongaciones continuas de aquellas derivadas las denotaremos por $D_i \bar{F}$, $(i = 1,2, \ldots, n-1)$, $D_n \bar{F}$ y $D_{n+1} \bar{F}$], así como son $\vec{\bar{g}}_{|\omega}$ y $D_i p_{|\omega}$, $D_i q_{|\omega}$; $(i = 1,2, \ldots, n-1)$, prolongables continuamente a $\bar{\omega}$, [Indicamos por $D_i p$, $D_i q$ las prolongaciones continuas a $\bar{\omega}$ de $D_i p_{|\omega}$ y de $D_i q_{|\omega}$ $(i = 1,2, \ldots, n-1)$, respectivamente]. Se deduce que, para todo $i \in \{1,2, \ldots, n-1\}$, es $D_i \bar{\Phi}_{|\omega}$ continuamente prolongable a $\bar{\omega}$, y la prolongación continua $D_i \bar{\Phi}$, es igual a:

$$
\begin{aligned}
« (D_i \bar{F}) \circ \vec{\bar{g}} &+ ((D_n \bar{F}) \circ \vec{\bar{g}}) \cdot (D_i q) + ((D_{n+1} \bar{F}) \circ \vec{\bar{g}}) \cdot (D_i p) = \\
&= (\bar{\mathfrak{J}}^{(\Omega)} (D_i \bar{f})) \circ \vec{\bar{g}} + (\bar{f} \circ (pr_{(n+1)} \times pr_{(1,2,\ldots,n-1)}) \circ \vec{\bar{g}}) \cdot (D_i p) - \\
&- (\bar{f} \circ (pr_{(n)} \times pr_{(1,2,\ldots,n-1)}) \circ \vec{\bar{g}}) \cdot D_i q) »
\end{aligned}
$$

II

EL OPERADOR J

Consideremos la aplicación $\tau' = pr_1^{(\mathcal{A}')} \times \mu : \mathcal{A}' \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ [$\mathcal{A}'$ es el abierto sobre el cual está definida la integral general global μ en G' de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, que se considera en el n.º 11 de la INTRODUCCION; para todo $H \subset \mathbf{R}^3$ se denotará mediante $pr_1^{(H)}$ a la restricción $pr_{1|H}$ a H de la aplicación proyección primera de $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}$: $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \to pr_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \in \mathbf{R}$], es decir, τ' es la aplicación así definida:

$$«(t, y_1, y_2) \in \mathcal{A}' \to \tau'(t, y_1, y_2) = (pr_1^{(\mathcal{A}')}(t, y_1, y_2), \mu(t, y_1, y_2)) = \\ = (t, \mu(t, y_1, y_2)) \in \mathbf{R}^2»$$

Dicha aplicación τ' es continuamente diferenciable sobre $\mathcal{A}'$, por serlo sus componentes $pr_1^{(\mathcal{A}')}$ y μ. Puesto que $\mu_{|\mathcal{A}} = \lambda$ [Véase OBSERVACION 2.ª, n.º 6 de la INTRODUCCION] y $pr_{1|\mathcal{A}}^{(\mathcal{A}')} = pr_1^{(\mathcal{A})}$, la restricción $\tau = \tau'_{|\mathcal{A}}$ de τ' a $\mathcal{A}$, es precisamente la aplicación $pr_1^{(\mathcal{A})} \times \lambda : \mathcal{A} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, [o sea la definida por: $(t, y_1, y_2) \in \mathcal{A} \to \tau(t, y_1, y_2) = (t, \lambda(t, y_1, y_2)) \in \mathbf{R}^2$], la cual es asimismo continuamente diferenciable sobre el abierto $\mathcal{A}$ de $\mathbf{R}^3$. Denotemos, además, para todo $H \subset \mathbf{R}^3$, mediante $pr_{23}^{(H)}$ a la restricción $pr_{23|H}$ a H de la aplicación:

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \to pr_{23}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2$; en particular, $pr_{23}^{(\mathcal{A})}$ y $pr_{23}^{(\mathcal{A}')}$ serán las restricciones a $\mathcal{A}$ y a $\mathcal{A}'$, respectivamente, de pr_{23}, y se tiene, evidentemente, $pr_{23}^{(\mathcal{A})} = pr_{23|\mathcal{A}}^{(\mathcal{A}')}$.

Sea $A = \mathring{A} \subset \mathbf{R}^2$ un abierto de $\mathbf{R}^2$, tal que $\mathring{D}_c \subset A \subset \mathcal{E}_c^a$, y verificando además:

$$(\forall \vec{y})(\vec{y} \in A \Rightarrow (\forall t)(t \in [\text{mín}\,\{x_1(h_c(\vec{y})), y_1\},\ \text{máx}\,\{x_1(h_c(\vec{y})), y_1\}] \Rightarrow \\ \Rightarrow (t, y_1, y_2) \in \mathcal{A} \text{ y } (t, \lambda(t, y_1, y_2)) \in A)).$$

Pongamos:

$$«\Omega = \overset{-1}{\tau}(A) \cap \overset{-1}{pr}{}_{23}^{(\mathfrak{A})}(\mathcal{E}_c^a)»$$

Ω es un conjunto contenido en $\mathfrak{A}$ y abierto (en virtud de la continuidad de las aplicaciones τ y $pr_{23}^{(\mathfrak{A})}$) relativamente a la topología inducida sobre $\mathfrak{A}$ por la topología generada por la norma euclídea de $\mathbf{R}^3$, y, dado que $\mathfrak{A}$ es un abierto de $\mathbf{R}^3$ (n.º 4 de la INTRODUCCION), se sigue que Ω es asimismo un abierto de $\mathbf{R}^3$, el cual no es vacio, ya que si (y_1, y_2) es un punto de $\mathring{D}_c \subset A \subset \mathcal{E}_c^a \subset G$, [existente siempre, puesto que $\mathring{D}_c \neq \phi$ (n.º 10 de la INTRODUCCION)], se verifica:

$$«(y_1, y_1, y_2) \in \mathfrak{A} \text{ y } \tau(y_1, y_1, y_2) = (y_1, \lambda(y_1, y_1, y_2)) = (y_1, y_2) \in A \text{ y}$$
$$\text{y } pr_{23}^{(\mathfrak{A})}(y_1, y_1, y_2) = (y_1, y_2) \in \mathcal{E}_c^a»$$

y consecuentemente:

$$«(y_1, y_1, y_2) \in \overset{-1}{\tau}(A) \cap \overset{-1}{pr}{}_{23}^{(\mathfrak{A})}(\mathcal{E}_c^a) = \Omega»$$

Además, de la misma definición de Ω se tiene que:

$$«\tau(\Omega) = \tau'(\Omega) \subset A \text{ y } pr_{23}^{(\mathfrak{A})}(\Omega) = pr_{23}(\Omega) \subset \mathcal{E}_c^a» \quad (^0)$$

Por otra parte, la adherencia $\overline{\Omega}$ de Ω para la topología de $\mathbf{R}^3$ está contenida en $\mathfrak{A}'$, y, consecuentemente, $\overline{\Omega}$ coincide con la adherencia $\overline{\Omega}_{(\mathfrak{A}')}$ de Ω relativamente a la topología inducida sobre $\mathfrak{A}'$ por la topología de $\mathbf{R}^3$.

En efecto, si $(t^*, y_1^*, y_2^*) \in \overline{\Omega}$, existe, por tanto, una sucesión $((t^n, y_1^n, y_2^n))_{n \in N}$ de elementos de Ω y convergente en $\mathbf{R}^3$ hacia (t^*, y_1^*, y_2^*), por lo que se verifica, [habida cuenta además $(^0)$]:

$$«(\forall i)\,(i \in N \Rightarrow (t^i, y_1^i, y_2^i) \in \mathfrak{A} \text{ y } pr_{23}(t^i, y_1^i, y_2^i) = (y_1^i, y_2^i) = \vec{y}^i \in \mathcal{E}_c^a) \text{ y}$$
$$\text{y } (t^n)_{n \in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } t^* \text{ y } (\vec{y}^n)_{n \in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia}$$
$$\vec{y}^* = (y_1^*, y_2^*)»$$

Ahora bien, es válida la relación:

$$«(t^i, y_1^i, y_2^i) \in \mathfrak{A} \text{ y } \vec{y}^i \in \mathcal{E}_c^a \Rightarrow (t^i, y_1^i, y_2^i) \in \mathfrak{A} \text{ y } (x_1(h_c(\vec{y}^i)), y_1^i, y_2^i) \in \mathfrak{A} \text{ y}$$
$$\text{y } x_2(h_c(\vec{y}^i)) = \lambda(x_1(h_c(\vec{y}^i)), y_1^i, y_2^i)»$$

[Véase el n.º 7 de la INTRODUCCION; $x_1 : [r^A, r^B] \to \mathbf{R}$ y y $x_2 : [r^A, r^B] \to \mathbf{R}$ son las componentes de la aplicación $r \in [r^A, r^B] \to \to \vec{x}(r) = (x_1(r), x_2(r)) \in \mathbf{R}^2$ que define el arco C], así como lo es asimismo la:

$$«(\forall i)\,(i \in N \Rightarrow \vec{y}^i \in \mathcal{E}_c{}^a) \text{ y } (\vec{y}^n)_{n\in N} \text{ converge en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia } \vec{y}^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{y}^* \in \bar{\mathcal{E}}_c^a = \mathcal{E}_c» \;(^1)$$

y además, [teniendo en cuenta la OBSERVACION 1.ª del n.º 5 de la INTRODUCCION]:

$$«(t^i, y_2^i, y_1^i) \in \mathfrak{A} \text{ y } (x_1(h_c(\vec{y}^i)), y_1^i, y_2^i) \in \mathfrak{A} \text{ y}$$
$$\text{y } x_2(h_c(\vec{y}^i)) = \lambda(x_1(h_c(\vec{y})), y_1^i, y_2^i) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^i \in \,]x_1{}^{izq}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^i))),\; x_1{}^{der}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^i)))[\,»$$

relaciones que junto con la (1), entrañan:

$$«\vec{y}^* \in \mathcal{E}_c \text{ y } (\forall i)\,(i \in N \Rightarrow x_1{}^{izq}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^i))) < t^i < x_1{}^{der}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^i)))) \text{ y}$$
$$\text{y } (h_c(\vec{y}^n))_{n\in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } h_c(\vec{y}^*) \in [r^A, r^B] \text{ y } (t^n)_{n\in N}$$
$$\text{converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } t^*»$$

y puesto que:

$$«(\forall i)\,(i \in N \Rightarrow \vec{x}(h_c(\vec{y}^i)) \in G)»$$

así como:

$$«(h_c(\vec{y}^n))_{n\in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } h_c(\vec{y}^*) \in [r^A, r^B] \Rightarrow (\vec{x}(h_c(\vec{y}^n)))_{n\in N}$$
$$\text{converge en } \mathbf{R}^2 \text{ hacia } \vec{x}(h_c(\vec{y}^*)) \in G»$$

y consecuentemente, en virtud de la continuidad sobre G de las funciones $x_1{}^{izq}$, $x_1{}^{der}$, [n.º 8 de la INTRODUCCION], se verifica:

$$«(x_1{}^{izq}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^n))))_{n\in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } x_1{}^{izq}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^*))) \text{ y}$$
$$\text{y } (x_1{}^{der}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^n))))_{n\in N} \text{ converge en } \mathbf{R} \text{ hacia } x_1{}^{der}(\vec{x}(h_c(\vec{y}^*)))»$$

se sigue de todo ello que es válida la relación:

$$«\vec{y}^* \in \mathcal{E}_c \text{ y } \vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*)) \in G \subset G' \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_1^{izq}(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^n))) =$$
$$= x_1^{izq}(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*))) \leq t^* = \lim_{n\to\infty} t^n \leq x_1^{der}(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*))) = \lim_{n\to\infty} x_1^{der}(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^n)))»$$

es decir, [habida cuenta la OBSERVACION 2.ª del n.º 6 de la INTRODUCCION]:

$$«\vec{y}^* \in \mathcal{E}_c \text{ y } \vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*)) \in G' \text{ y } t^* \in [x_1^{izq}(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*))),\ x_1^{der}(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*)))] \subset$$
$$\subset\,]x'^{izq}_1(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*))),\ x'^{der}_1(\vec{x}\,(h_c(\vec{y}^*)))[»$$

relación que entraña:

$$«\vec{y}^* \in \mathcal{E}_c \text{ y } (t^*, x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ x_2(h_c(\vec{y}^*))) \in \mathcal{A}'» \quad (2)$$

Pero [(*) del n.º 9 de la INTRODUCCION], se tiene:

$$«\vec{y}^* \in \mathcal{E}_c \text{ y } (t^*, x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ x_2(h_c(\vec{y}^*))) \in \mathcal{A}' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ y_1^*,\ y_2^*) \in \mathcal{A}' \text{ y } x_2(h_c(\vec{y}^*)) = \mu\,(x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ y_1^*,\ y_2^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (t^*, x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ x_2(h_c(\vec{y}^*))) \in \mathcal{A}'»$$

y además [OBSERVACION 1.ª del n.º 5 de la INTRODUCCION]:

$$«(x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ y_1^*,\ y_2^*) \in \mathcal{A}' \text{ y } x_2(h_c(\vec{y}^*)) = \mu\,(x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ y_1^*,\ y_2^*) \text{ y}$$
$$\text{y } (t^*, x_1(h_c(\vec{y}^*)),\ x_2(h_c(\vec{y}^*))) \in \mathcal{A}' \Rightarrow (t^*, y_1^*, y_2^*) \in \mathcal{A}'»$$

y teniendo en cuenta que la premisa de la primera de estas implicaciones es por (2) una relación válida, se concluye que es asimismo válida la relación:

$$«(t^*, y_1^*, y_2^*) \in \mathcal{A}'»$$

Así pues, y dado que se ha partido del supuesto $(t^*, y_1^*, y_2^*) \in \overline{\Omega}$ y que $(t^*, y_1^*, y_2^*) \in \overline{\Omega}$ es arbitrario, se sigue finalmente que es válida la relación:

$$«(\forall\,(t^*, y_1^*, y_2^*)\ ((t^*, y_1^*, y_2^*) \in \overline{\Omega} \Rightarrow (t^*, y_1^*, y_2^*) \in \mathcal{A}')»$$

equivalente a la:

$$«\overline{\Omega} \subset \mathfrak{A}'»$$

lo que demuestra lo afirmado.

Sentado esto, volvamos de nuevo a la aplicación $\tau' : \mathfrak{A}' \to \mathbf{R}^2$ definida al principio. Como dicha aplicación τ' es continua sobre $\mathfrak{A}'$ (así como lo es pr_{23} sobre $\mathbf{R}^3$), y acaba de establecerse que $\overline{\Omega} \subset \mathfrak{A}'$ y por tanto $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_{(\mathfrak{A}')}$, se sigue [teniendo en cuenta además (^{0})], que es válida la relación:

$$«\tau'(\overline{\Omega}) = \tau'\left(\overline{\Omega}_{(\mathfrak{A}')}\right) \subset \overline{\tau'(\Omega)} \subset \overline{A} \text{ y } pr_{23}(\overline{\Omega}) = pr_{23}^{(\mathfrak{A}')}\left(\overline{\Omega}_{(\mathfrak{A}')}\right) \subset$$

$$\subset \overline{pr_{23}^{(\mathfrak{A}')}(\Omega)} \subset \overline{\mathcal{E}_c^a} = \mathcal{E}_c»$$

Consideremos, ahora, una función numérica $\Phi : \overline{A} \to \mathbf{R}$ definida y continua sobre $\overline{A}$, cuya restricción $\Phi_{|A}$ al abierto A es continuamente diferenciable sobre A, con derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a $\overline{A}$, y pongamos:

$$«f = \Phi \circ \tau'_{|\overline{\Omega}} : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}\,;\; p = x_1 \circ h_{c|\overline{A}} : \overline{A} \to \mathbf{R}\,;\; q = pr_1^{(\overline{A})} : \overline{A} \to \mathbf{R}»$$

Se tiene:

$$«f_{|\Omega} = \Phi \circ \tau'_{|\Omega} = \Phi \circ \tau_{|\Omega} = (\Phi_{|A}) \circ \tau_{|\Omega}» \qquad (\text{dado que } \tau(\Omega) \subset A)$$

por lo que f es continua sobre $\overline{\Omega}$ siendo su restricción $f_{|\Omega}$ a Ω continuamente diferenciable sobre Ω (y en particular continuamente derivable parcialmente sobre Ω respecto a su segundo y tercer argumento), con derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a $\overline{\Omega}$. Asimismo p y q son continuas sobre $\overline{A}$, con restricciones a A continuamente diferenciables sobre A, siendo sus derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a $\overline{A}$.

Además, en virtud de las hipótesis efectuadas, sobre A, se verifica:

$$«(\forall \vec{y})\,(\vec{y} \in A \Rightarrow (\forall t)\,(t \in [\text{mín}\,\{(x_1 \circ h_c)(\vec{y}),\ pr_1^{(\overline{A})}(\vec{y})\},$$

$$,\ \text{máx}\,\{(x_1 \circ h_c)(\vec{y}),\ pr_1^{(\overline{A})}(\vec{y})\}] \Rightarrow (t, y_1, y_2) \in \mathfrak{A} \text{ y}$$

$$\text{y } (t, \lambda(t, y_1, y_2)) = \tau(t, y_1, y_2) \in A))»$$

es decir:

$$«(\forall \vec{y})\,(\vec{y} \in A \Rightarrow (\forall t)\,(t \in [\text{mín}\,\{p(\vec{y}),\, q(\vec{y})\},\ \text{máx}\,\{p(\vec{y}),\, q(\vec{y})\}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t, y_1, y_2) \in \mathfrak{A} \ \text{ y } \ pr_{23}^{(\mathfrak{A})}\,(t, y_1, y_2) \in A \subset \mathcal{E}_c^a \ \text{y} \ \tau\,(t, y_1, y_2) \in A))$$

por lo que habida cuenta la definición de Ω es válida la relación:

$$«(\forall \vec{y})\,(\vec{y} \in A \Rightarrow [\text{mín}\,\{p(\vec{y}),\, q(\vec{y})\},\ \text{máx}\,\{p(\vec{y}),\, q(\vec{y})\}] \times \{\vec{y}\} \subset \Omega)»$$

Así pues, f, p y q verifican las condiciones requeridas en la OBSERVACION 3.ª (I, Teorema fundamental) para asegurar que la función $J^{(\bar{A})}(\Phi)$ definida por:

$$«\vec{y} \in \bar{A} \to (J^{(\bar{A})}(\Phi))\,(\vec{y}) = \int_{p(\vec{y})}^{q(\vec{y})} f(t;\, y)\,dt = \int_{p(\vec{y})}^{q(\vec{y})} (\Phi \circ \tau'_{|\bar{\Omega}})\,(t;\, \vec{y})\,dt =$$
$$= \int_{x_1(h_c(\vec{y}))}^{pr_1(\vec{y})} \Phi\,(t;\ \mu\,(t, y_1, y_2))\,dt \in \mathbf{R}»$$

es continua sobre $\bar{A}$ con restricción al abierto A continuamente diferenciable sobre A, siendo sus derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a $\bar{A}$.

Señalemos de paso, que para todo $\vec{y} \in \bar{A}$ es

$$(J^{(\bar{A})}(\Phi))\,(\vec{y}) = \int_{x_1(h_c(\vec{y}))}^{pr_1(\vec{y})} \Phi\,(t;\ \mu\,(t, y_1, y_2))\,dt,$$

el valor de la integral curvilinea $\int_{\mathcal{L}(\vec{y})} \Phi\,(\xi_1,\, \xi_2)\,d\xi_1$ de Φ extendida a lo largo de la porción $\mathcal{L}(\vec{y})$ de curva integral de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1,\, x_2)$ pasando por el punto $\vec{y}$ y limitada por dicho punto y el de intersección con el arco C.

Observacion. — Si $\Phi : D_c \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida y continua sobre el compacto D_c, con restricción $\Phi_{|\mathring{D}_c}$ al abierto $\mathring{D}_c$ continuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_c$ y cuyas derivadas parciales primeras son prolongables con continuidad a D_c, [y por tanto, de modo único ya que $\bar{\mathring{D}}_c = D_c$; las prolongaciones continuas a D_c de

$D_i\,(\Phi_{|\mathring{D}_c})$ serán denotadas por $D_i\,\Phi$], se verifica, en virtud de la compacidad de D_c, que $\sup\limits_{M \in D_c} |\Phi(M)| + \operatorname*{Máx}\limits_{(i=1\,2)} \{\sup\limits_{M \in D_c} |(D_i\,\Phi)(M)|\} < +\infty$. Sea $E^{(1)}_{D_c}$ el espacio vectorial constituido por las funciones numéricas definidas y continuas sobre D_c, cuyas restricciones a $\mathring{D}_c$ son continuamente diferenciables sobre $\mathring{D}_c$, con derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a D_c, supuesto dotado $E^{(1)}_{D_c}$ de la norma de la convergencia uniforme:

$$«\Phi \in E^{(1)}_{D_c} \to ||\Phi||_{(D_c)} = \sup_{M \in D_c} |\Phi(M)| + \operatorname*{Máx}_{(i=1,2)} \{\sup_{M \in D_c} |(D_i\,\Phi)(M)|\} \in \mathbf{R}»$$

$E^{(1)}_{D_c}$ es, como se sabe, un espacio de Banach, y por otra parte, en virtud de lo precedente, se verifica, que:

$$«(\forall\,\Phi)\,(\Phi \in E^{(1)}_{D_c} \Rightarrow J^{(\overline{\mathring{D}_c})}(\Phi) = J^{(D_c)}(\Phi) \in E^{(1)}_{D_c})»$$

por lo que se puede considerar la aplicación $J : E^{(1)}_{D_c} \to E^{(1)}_{D_c}$, definida por: $\Phi \in E^{(1)}_{D_c} \to J(\Phi) = J^{(D_c)}(\Phi) \in E^{(1)}_{D_c}$ siendo $J(\Phi) : D_c \to \mathbf{R}$, la función determinada por la relación:

$$\vec{y} \in D_c \to (J(\Phi))(\vec{y}) = \int_{x_1(h_c(\vec{y}))}^{pr_1(\vec{y})} \Phi(t\,;\,\mu(t, y_1, y_2))\,dt \in \mathbf{R},$$

aplicación J que es evidentemente lineal, es decir; J: $E^{(1)}_{D_c} \to E^{(1)}_{D_c}$ es un endomorfismo u operador lineal sobre $E^{(1)}_{D_c}$, el cual es continuo relativamente a la norma considerada sobre $E^{(1)}_{D_c}$, ya que, en primer lugar, y teniendo en cuenta las expresiones de los valores de las derivadas parciales de la integral general global μ en G' correspondientes a todo $(t, y_1, y_2) \in \mathcal{A}'$, (n.º 6 de la INTRODUCCION), así como el LEMA 2.º, [I, de este APÉNDICE], para cada $\Phi \in E^{(1)}_{D_c}$ y todo $M = (x_1, x_2) \in D_c$, se puede poner, [donde para abreviar se hace $r^{L_M} = h_c(M)$ y $L_M = (x_1(r^{L_M}), x_2(r^{L_M}))$]:

$$(J(\Phi))(M) = \int_{x_1(r^{L_M})}^{x_1} \Phi(t, \mu(t, x_1, x_2))\,dt$$

$$(D_1(J(\Phi)))(M) = -\varrho(x_1, x_2)\cdot\int_{x_1(r^{L_M})}^{x_1}(D_2\Phi)(t, \mu(t, x_1, x_2))\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{t}(D_2\varrho)(\xi, \mu(\xi, x_1, x_2))\,d\xi\right\}dt +$$

$$+\Phi(x_1, \mu(x_1, x_1, x_2)) - \Phi(x_1(r^{L_M}), \mu(x_1(r^{L_M}), x_1, x_2))\cdot$$

$$\cdot(D_1 h_c)(M)\cdot x'_1(r^{L_M}) = -\varrho(M)\cdot\int_{x_1(r^{L_M})}^{x_1}(D_2\Phi)(t, \mu(t, x_1, x_2))\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\int_{x_1(r^{L_M})}^{t}(D_2\varrho)(\xi, \mu(\xi, x_1, x_2))\,d\xi\right\}\cdot\exp\left\{-\int_{x_1(r^{L_M})}^{x_1}(D_2\varrho)(\xi, \mu(\xi, x_1, x_2))\,d\xi\right\}dt +$$

$$+\Phi(M) + \left(\Phi\cdot\frac{x'_1}{x'_2-\varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M) =$$

$$= -(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M)\cdot\int_{x_1(r^{L_M})}^{x_1}(D_2\Phi)(t, \mu(t, x_1, x_2))\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\int_{x_1(h_c(t,\mu(t,x_1,x_2)))}^{t}(D_2\varrho)(\xi, \mu(\xi, t, \mu(t, x_1, x_2)))\,d\xi\right\}dt +$$

$$+\Phi(M) + \left(\Phi\cdot\frac{x'_1}{x'_2-\varrho x'_1}\right)(L_M)\cdot(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M)\,(*) =$$

$$= -(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M)\cdot\int_{x_1(r^{L_M})}^{x_1}((D_2\Phi)\cdot\exp\{J(D_2\varrho)\})(t, \mu(t, x_1, x_2))\,dt +$$

$$+\Phi(M) + \left(\Phi\cdot\frac{x'_1}{x'_2-\varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M) =$$

$$= -(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\}\cdot J((D_2\Phi)\cdot\exp\{J(D_2\varrho)\}))(M) + \Phi(M) +$$

$$+\left(\Phi\cdot\frac{x'_1}{x'_2-\varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot(\varrho\cdot\exp\{-J(D_2\varrho)\})(M)$$

(*) Se ha tenido en cuenta, que como consecuencia de verificarse, [(11$^{\text{XIII}*}$), n.º 9 de la INTRODUCCION]: $(\forall M)(M = (x_1, x_2) \in \mathcal{E}_c \Rightarrow (D_1 h_c)(M) + \varrho(M)\cdot(D_2 h_c)(M) = 0)$, es válida, por tanto, la relación:

$$«(\forall t)(t \in]x_1'^{izq}(M), x_1'^{der}(M)[\Rightarrow h_c(t, \mu(t, x_1, x_2)) = h_c(x_1, \mu(x_1, x_1, x_2)) = h_c(x_1, x_2) = r^{L_M})»$$

y por otra parte, en virtud de lo establecido en la OBSERVACION 1.ª del n.º 5 de la INTRODUCCION, se tiene, asimismo:

$$«(\forall t)(t \in]x_1'^{izq}(M), x_1'^{der}(M)[\Rightarrow (\forall \xi)(\xi \in]x_1'^{izq}(M), x_1'^{der}(M)[\Rightarrow \mu(\xi, t, \mu(t, x_1, x_2)) = \mu(\xi, x_1, x_2)))»$$

y análogamente:

$$(D_2(J(\Phi)))(M) = \int_{x_1(rL_M)}^{x_1} (D_2\Phi)(t, \mu(t, x_1, x_2)) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\int_{x_1}^{t} (D_2\varrho)(\xi, \mu(\xi, x_1, x_2))\, d\xi\right\} dt -$$

$$-\left(\Phi \cdot \frac{x'_1}{x'_2 - \varrho x'_1}\right)(L_M) \cdot \exp\{-J(D_2\varrho)\}(M) =$$

$$= (\exp\{-J(D_2\varrho)\} \cdot J((D_2\Phi) \cdot \exp\{J(D_2\varrho)\}))(M) -$$

$$-\left(\Phi \cdot \frac{x'_1}{x'_2 - \varrho x'_1}\right)(L_M) \cdot \exp\{-J(D_2\varrho)\}(M)$$

expresiones de las cuales se deducen las siguientes desigualdades, válidas para todo $M \in D_c$:

$$|J(\Phi)|(M) \leq \alpha \cdot ||\Phi||_{(D_c)}$$

$$|D_1(J(\Phi))|(M) \leq L \cdot \alpha \cdot \exp\{L\alpha\} \cdot ||\Phi||_{(D_c)} +$$

$$+ ||\Phi||_{(D_c)} + LU \exp\{L\alpha\} \cdot ||\Phi||_{(D_c)} =$$

$$= [1 + L \cdot \exp\{L\alpha\}(\alpha + U)] \cdot ||\Phi||_{(D_c)}$$

$$|D_2(J(\Phi))|(M) \leq \alpha \cdot \exp\{L\alpha\} \cdot ||\Phi||_{(D_c)} + U \cdot \exp\{L\alpha\} \cdot ||\Phi||_{(D_c)} =$$

$$= \exp\{L\alpha\} \cdot (\alpha + U) \cdot ||\Phi||_{(D_c)}$$

y si k denota el máximo del conjunto constituido por los coeficientes de $||\Phi||_{(D_c)}$ que figuran en los segundos miembros de las desigualdades anteriores, resulta:

$$«||J(\Phi)||_{(D_c)} = \sup_{M \in D_c} |J(\Phi)|(M) +$$

$$+ \underset{(i=1,2)}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D_c} |D_i(J(\Phi))|(M)\} \leq 2k \cdot ||\Phi||_{(D_c)}»$$

relación que establece la continuidad del operador lineal $J : E^{(1)}_{D_c} \to E^{(1)}_{D_c}$, relativamente a la norma de la convergencia uniforme, sobre $E^{(1)}_{D_c}$, de acuerdo con lo afirmado más arriba.

Señalemos, además, que de las expresiones de $(D_1(J(\Phi)))(M)$ y de $(D_2(J(\Phi)))(M)$ precedentes, válidas para todo $M \in D_c$, se deduce la relación:

$$«(\forall M)\,(M \in D_c \Rightarrow (D_1(J(\Phi)))(M) + \varrho_{|D_c}(M) \cdot (D_2(J(\Phi)))(M) = \Phi(M))»$$

o lo que es equivalente:

$$«D_1(J(\Phi)) + \varrho_{|D_c} \cdot D_2(J(\Phi)) = \Phi»$$

Por otra parte se tiene que:

$$«(J(\Phi))_{|C} = O_{\mathcal{F}(C;\mathbf{R})}»$$

$[O_{\mathcal{F}(C;\mathbf{R})} : C \to \mathbf{R}$ es la función idénticamente nula sobre $C]$ por lo que $J(\Phi)$ es la solución al Problema de Cauchy de 1.er orden definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} D_1 u + \varrho_{|D_c} \cdot (D_2 u) = \Phi \\ u(M) = 0\}\ M \in C \end{array}\right\}$$

ANEXO

CORRIGENDA A LA DEFINICION DE ABIERTO REGULARMENTE CONVEXO

En el n.º 8 de la Introduccion [Fasc. 3.º Vol. XXII (1971), pág. 261], debe sustituirse el texto y fórmulas comprendidas entre la línea 17.ª (pág. 263) y la línea 9.ª (pág. 264), por lo siguiente:

"sea tal que verifique:

$$«(\forall \vec{x}^*)\,(\vec{x}^* \in \mathrm{Fr.}\, G \text{ y } (\exists \vec{x}^{0*})\,(\vec{x}^{0*} \in G \text{ y}$$

$$\text{y } [(\vec{x}^* = (x_1^{izq}(\vec{x}^{0*}),\ \mu(x_1^{izq}(\vec{x}^{0*}),\ x_1^{0*},\ x_2^{0*}))) \text{ ó}$$

$$\text{ó } (\vec{x}^* = (x_1^{der}(x^{0*}),\ \mu(x_1^{der}(x^{0*}),\ x_1^{0*},\ x_2^{0*})))])) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists_{(I^*,\tilde{p},\tilde{q})})\,(I^*, \widetilde{p}, \widetilde{q}) \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \times C^1(\mathring{I}^*;\ \mathbf{R}) \times C^1(\mathring{I}^*;\ \mathbf{R}) \text{ y}$$

$$\text{y } I^* = \mathring{I}^* \text{ es un intervalo abierto de } \mathbf{R} \text{ y } \vec{x}^* \in (\widetilde{p} \times \widetilde{q})(I^*) \subset \mathrm{Fr.}\, G \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall t)\,(t \in I^* \Rightarrow \widetilde{q}'(t) - \varrho(\widetilde{p}(t),\ \widetilde{q}(t)) \cdot \widetilde{p}'(t) \neq 0))» \quad (10')$$

es decir, para todo punto $\vec{x}^* \in \mathrm{Fr.}\, G$ perteneciente a la frontera de G, que sea, además, alcanzado por la solución global en G' de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ pasando por un cierto punto $\vec{x}^{0*} \in G$ del sub-abierto G de G', existe una aplicación vectorial $t \in I^* = \overset{\circ}{I}{}^* \subset \mathbf{R} \to (\widetilde{p}(t), \widetilde{q}(t)) \in \mathbf{R}^2$ definida y continuamente diferenciable sobre un intervalo abierto I^* de $\mathbf{R}$, tal que $\vec{x}^*$ pertenezca a la imagen $Im(\widetilde{p} \times \widetilde{q})$ de $\widetilde{p} \times \widetilde{q} : I^* \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, estando, por otra parte, dicha imagen $Im(\widetilde{p} \times \widetilde{q})$ contenida en la frontera Fr. G de G, y que para todo $t \in I^*$ se verifique la relación $\widetilde{q}'(t) - \varrho(\widetilde{p}(t), \widetilde{q}(t)) \cdot \widetilde{p}'(t) \neq 0$.

A un abierto G de $\mathbf{R}^2$ acotado, tal que $\overline{G} \subset G'$ (G' abierto de $\mathbf{R}^2$), y que sea convexo relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_1)$ [con $\varrho : G' \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, continua y continuamente derivable parcialmente respecto a su segundo argumento sobre G'], y cuya frontera Fr. G verifique la condición [10'), se le denominará «abierto regularmente convexo relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$»"

Asimismo, en lugar de la línea 14ª (pág. 264), ha de haber:

«por lo que, y en virtud de la propia definición de G, existe un $(I^*, \widetilde{p}, \widetilde{q}) \in \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \times C^1(\overset{\circ}{I}{}^*; \mathbf{R}) \times C^1(\overset{\circ}{I}{}^*; \mathbf{R})$, en el que $\overset{\circ}{I}{}^* = I^*$ es un intervalo abierto de $\mathbf{R}$, y existe además un $t^* \in I^*$, tal que:»

Finalmente, deben sustituirse las líneas 21.ª y 22.ª (pág. 264), por lo siguiente:

«y además, en virtud de la continuidad de $\widetilde{p} : I^* \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sobre $I^* = \overset{\circ}{I}{}^*$, se puede determinar un $\sigma \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, verificando $]t^* - \sigma, t^* + \sigma[\subset I^*$, y tal que:»

El resto del n.º 8 permanece sin modificar.

[En una próxima publicación, se proporcionará un ejemplo de abierto regularmente convexo respecto a una ecuación diferencial ordinaria, en el sentido que se acaba de precisar].

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] J. M.ª CASCANTE. — «Aproximaciones sucesivas de ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden» (Collectanea Mathematica, Vol. XIII, Fascículo 1.º y 2.º - Año 1961)

[2] J. M.ª CASCANTE. — «Solución al Problema de Cauchy relativo a una cierta familia de ecuaciones en derivadas parciales de 3er orden» (.Collectanea Mathematica, Vol. XIV, Fasc. 2.º Año 1962).

[3] J. M.ª CASCANTE. — «Solución por aproximaciones sucesivas del Problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden lineales de tipo hiperbólico con dos variables independientes» (Collectanea Mathematica, Vol. XVI, Fasc. 2.º y 3.º - Año 1964)

[4] G. SANSONE. — «Equazioni differenziali nel campo reale», Parte Prima, 2ª ed. (Nicola Zanichelli Editore. Bologna 1956)

[5] N. BOURBAKI. — «Théorie des ensembles», Chaps. I y II, Hermann & Cie. Editeurs. Paris (1954)

[6] N. BOURBAKI. — «Topologie générale», Chaps. I y II, Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1961)

[7] N. BOURBAKI. — «Topologie générale», Chap. X, Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1961)