Laboratori de Mecànica

Introducció a l'anàlisi d'incerteses experimentals

Daniel Arteaga*

Departament de Física Fonamental

Universitat de Barcelona

Octubre de 2007

Aquests són uns apunts d'anàlisi d'errors experimentals, corresponents a la introducció teòrica del Laboratori de Mecànica, assignatura de primer cicle de la llicenciatura de Física de la Universitat de Barcelona. Noteu que és una versió preliminar: *aquests apunts possiblement contenen errades i mancances, de les quals no em faig responsable. Feu servir els apunts sota el vostre propi risc!* Així mateix, la redacció de molts apartats és millorable. Us estaré agraït si em podeu fer arribar les errades, així com qualsevol altre suggeriment o indicació que considereu oportú.

Aquestes notes estan originalment basades en uns apunts de la Clara Saluenya, amb afegits de la Montse Garcia del Muro [3]. Al final podeu trobar un llistat d'algunes de les referències emprades en la preparació d'aquestes notes.

Agraïments. A la Montse Garcia del Muro per deixar-me els seus apunts de l'assignatura [3], al Ramon Ferrer i Cancho i a l'Eduard Fugarolas per la seva atenta revisió de les notes, a la Núria Castells per la correcció del català, i a totes aquelles persones que m'han fet arribar errades i suggeriments.

*Correu electrònic: darteaga@ub.edu

Índex

Indicacions al text

☞ Exemple pràctic

✍ Exercici proposat

( ) Nota avançada que va més enllà del temari del curs[1]

Pareu atenció!

[1] Algunes notes a peu de pàgina també contenen material avançat.

1 Error i mesura

1.1 Introducció

Tota mesura física porta sempre associada una **incertesa** *o* **error**, ja sigui de manera implícita o explícita. En aquest context **error no vol dir equivocació**. Encara que l'experiment estigui ben fet, la mesura que se'n derivi portarà associada un error o incertesa, a causa de factors diversos, entre els quals podem trobar:

- *Precisió limitada dels aparells de mesura.* Tot aparell de mesura té una precisió finita, indicada pel fabricant en les instruccions de l'aparell o, en el seu defecte, donada per la resolució de l'escala de l'aparell (ja sigui analògic o digital). Per exemple, un regle graduat en mil·límetres, una balança digital amb una resolució d'un gram,

- *Fluctuacions de les condicions de l'experiment.* Petites variacions de pressió, temperatura, humitat, corrents d'aire, rugositats, canvis en les condicions inicials, etc.

- *Variabilitat de les mostres* (en els experiments en què n'analitzem alguna).

- *Calibratge inexacte dels aparells de mesura* (Els "zeros" de l'escala dels aparells no estan mai fixats de forma exacta.).

- *Preparació imperfecta dels experiments.*

- *Valors inexactes de les constants i els paràmetres.* Qualsevol constant o paràmetre físic porta una incertesa associada, i les incerteses de les magnituds emprades en la mesura es propagaran a la quantitat que vulguem mesurar.

- *Habilitat limitada de l'experimentador.* Les capacitats sensorials i motrius dels experimentadors no són il·limitades. Això es posa de manifest, per exemple, en mesurar el temps amb un cronòmetre.

- *Processos físics no considerats a la teoria.* Les descripcions teòriques dels experiments sempre estan necessàriament simplificades, i hi ha generalment processos físics secundaris no tinguts en compte que fan que els resultats de les mesures no es corresponguin exactament amb la magnitud teòrica que volem mesurar. Sovint, el fregament és un d'aquests processos físics que no tenim en compte en les descripcions teòriques simplificades dels experiments.

- *Quantitat que volem mesurar relacionada amb una variable aleatòria.* A vegades la quantitat que s'ha de mesurar és intrínsecament aleatòria, i per tant porta una incertesa associada de manera natural. Exemples: el temps mitjà de desintegració d'un isòtop radioactiu, freqüència de pas del metro en hora punta.

- *Quantitat que volem mesurar mal definida a partir d'una certa precisió.* Més enllà d'una certa precisió, les quantitats que volem mesurar poden estar mal definides, perquè el model físic que fem servir per definir-les pot esdevenir inadequat o imprecís a partir d'una certa escala. Per exemple, la distància Barcelona-Madrid per carretera està aproximadament ben definida si la mesurem en quilòmetres, però no si la volem mesurar en mil·límetres (quin camí exacte seguim? de quin punt a quin punt? tenim en compte les ondulacions de la carretera?). L'alçada d'una porta està ben definida en centímetres, però no en micròmetres (rugositats a la porta, imperfeccions, etc.).

error = incertesa error $\neq$ equivocació

En aquest curs farem servir els mots *error* i *incertesa* indistintament.

L'*anàlisi d'errors* és l'estudi i avaluació de les incerteses associades a la mesura. En certs casos també pot servir de guia per minimitzar els errors de la mesura. Ara bé, una condició necessària perquè l'anàlisi d'errors doni una estimació correcta de les incerteses és que l'experiment s'hagi fet correctament, i que l'error de cadascuna de les fonts s'hagi estimat adequadament. *L'anàlisi d'errors no pot arreglar un experiment mal fet.*

Generalment, a partir dels resultats de les mesures, amb les seves corresponents incerteses, i a través d'un model físic simplificat (i per tant imperfecte), voldrem determinar el valor d'una o més magnituds físiques. Les incerteses associades a les mesures, així com les incerteses associades al model simplificat, es propagaran a les magnituds que volem calcular.[2] Per tant, sense excepció,[3]

Totes les magnituds físiques porten associades una incertesa o error (ja sigui implícitament o explícitament).

Una quantitat de la qual desconeixem l'error no té cap utilitat. Per exemple, si s'ens diu que la mida d'una habitació és de 40 m, però no ens diu si la incertesa d'aquesta afirmació és d'1 m, d'1 cm, o de 100 m, quina utilitat ens dóna aquesta informació?

1.2 Error sistemàtic i error aleatori

Com haurem pogut deduir, els errors es classifiquen en dos tipus:

- Els **errors aleatoris** són aquells que canvien cada cop que repetim l'experiment, i per tant es posen de manifest en repetir moltes vegades la mesura. Els errors aleatoris es poden analitzar i minimitzar mitjançant la repetició de la mesura i l'anàlisi estadística.

- Els **errors sistemàtics** són aquells que no canvien encara que repetim l'experiment.

[2] Estudiarem com fer aquesta propagació a l'apartat 2 del curs.

[3] Podria semblar que certes quantitats com la velocitat de la llum, que es defineix com $c \equiv 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s, no tenen una incertesa associada. Això no és realment així: el que succeeix és que la incertesa en c es tradueix en una incertesa en la definició del metre. Solament les constants matemàtiques com π o e no tenen error (la precisió està determinada per la capacitat de càlcul solament).

Tota mesura incorpora sempre els dos tipus d'error, encara que moltes vegades els uns dominen sobre els altres. En general, els errors sistemàtics són més delicats de tractar, perquè no es poden estimar ni reduir mitjançant una anàlisi estadística. L'avaluació dels errors sistemàtics depèn, doncs, del coneixement que tinguem del sistema i dels aparells de mesura.

Aprendrem com analitzar estadísticament els errors aleatoris als apartats 3 i 4 d'aquest curs.

De la llista de possibles fonts d'error que hem donat abans, alguns són sistemàtics i d'altres aleatoris. Acostumen a ser errors aleatoris:

- Fluctuacions de les condicions de l'experiment.
- Variabilitat de les mostres.
- Quantitat que volem mesurar relacionada amb una variable aleatòria.

Acostumen a ser errors sistemàtics:

- Calibratge inexacte dels aparells de mesura.
- Valors inexactes de les constants i els paràmetres.

Finalment, hi ha errors que poden ser sistemàtics o aleatoris depenent del cas:

- Precisió limitada dels aparells de mesura.
- Processos físics no considerats a la teoria.
- Preparació imperfecta de l'experiment.
- Habilitat limitada de l'experimentador.
- Quantitat que volem mesurar mal definida a partir d'una certa precisió.

Si no estem totalment segurs de la naturalesa d'un error el considerarem sistemàtic, per precaució. Per exemple, els errors associats a la precisió limitada dels aparells de mesura els considerarem sistemàtics en general.

A banda de ser sistemàtics o aleatoris, dos errors poden ser *independents*, si el fet que es doni l'un no influeix per res en el fet de que es doni l'altre, o bé poden estar *correlacionats*, si el fet que es doni l'un afavoreix que es doni l'altre. Per exemple, la incertesa en la mesura d'un temps amb un cronòmetre podem considerar-la independent de la incertesa en la mesura d'una longitud amb un regle, perquè els dos tipus d'incertesa no tenen res a veure i en principi no hi ha res que faci pensar que la incertesa d'un influeixi en la incertesa de l'altre. En canvi, l'error en la mesura d'una amplada i una longitud poden estar correlacionats si es fan amb la mateixa cinta mètrica, i aquesta té algun tipus d'error sistemàtic.

Veurem a l'apartat 2 que quan els errors són independents podem esperar una cancel·lació parcial dels errors. A l'apartat 3 estudiarem com quantificar el grau de correlació entre dues fonts d'error.

1.3 Determinació dels errors de la mesura

Una condició necessària per poder aplicar l'anàlisi d'errors és estimar les diverses fonts d'error associades a cadascuna de les mesures, tot distingint-ne les més importants. Sovint no hi ha receptes fixes, i una d'adequada de quines són les fonts d'error requereix sentit comú, coneixement del sistema que estem estudiant, i honestedat científica. La determinació exacta de les incerteses és impossible; moltes vegades serà suficient tenir una idea de l'ordre de magnitud de la incertesa en cada mesura, especialment en els experiments senzills. Hi ha però un parell de tècniques generals que val la pena esmentar.

Errors aleatoris. Com ja hem esmentat, atès que aquests errors canvien cada vegada, els podem estimar repetint l'experiment i fent-ne una anàlisi estadística. En efecte, la dispersió dels resultats ens donarà una idea de la magnitud de la incertesa associada. Aprendrem com fer-ho als l'apartats 3 i 4 del curs.

Errors sistemàtics associats a la resolució dels aparells de mesura. Si el fabricant de l'aparell no especifica una altra cosa, entendrem que l'error associat és, o bé la resolució de l'aparell, o bé la meitat de la resolució de l'aparell. La primera possibilitat és més conservadora, i la segona possibilitat és una mica més agosarada. Aquests criteris són vàlids tant per a aparells amb indicador analògic com digital.

☞ L'error associat a una cinta mètrica graduada en mil·límetres és d'1 mm, o bé de 0,5 mm si creiem que podem resoldre la marca més propera. L'error associat a una balança digital amb una resolució de 0,2 g és de 0,2 g, o de 0,1 g si confiem en què la indicació de la balança és sempre la més propera a la magnitud mesurada.

Errors sistemàtics: altres fonts. Hi ha multitud de fonts d'error de les quals és difícil donar regles generals: errors deguts a l'experimentador, al model físic simplificat, a la preparació imperfecta, etc. Com dèiem, no hi ha receptes fixes, i ens haurem de basar en la nostra experiència, una anàlisi cas per cas, la imaginació, el coneixement del sistema que estem analitzant, etc. Vegem un parell d'exemples.

☞ Sovint la precisió no ve determinada per la resolució de l'aparell de mesura, sinó per les capacitats de l'experimentador que fa servir l'aparell. L'error associat al temps mesurat per un cronòmetre graduat en cencentèsimes de segon vindrà generalment associat al temps de reacció de l'experimentador. Fent algunes proves podem veure que aquest temps pot ser tal vegada l'ordre de dues o tres dècimes de segon. Per tant una estimació de la incertesa associada a la mesurada amb un cronòmetre és de 0,3 s (i no pas de 0,01 s).

☞ El fregament és un exemple clàssic d'error associat al model físic simplificat: és una quantitat físicament rellevant però que sovint no és té en compte. Els efectes del fregament en un temps de caiguda d'una bola d'acer es poden estimar fent servir un model teòric simplificat del fregament, o bé repetint l'experiment amb boles de materials diferents.

A vegades una tècnica per poder avaluar els errors sistemàtics és intentar transformar-los en aleatoris.

☞ Volem comprovar la llei d'Ohm aplicant diferents voltatges a una resistència de $10\,\Omega$ nominals i mesurant-ne la intensitat que hi circula. L'error de la resistència serà una font d'error sistemàtic. Si no sabem com estimar aquest error sistemàtic, una possibilitat és fer moltes sèries de mesures amb resistències diferents, totes de $10\,\Omega$ nominals. D'aquesta manera hem aconseguit transformar l'error sistemàtic en un error aleatori, que podem estimar amb una anàlisi estadística.

Determinació de les fonts d'error principals. Un experiment sempre comporta multitud de fonts d'error. Tanmateix, generalment l'error final ve determinat per poques fonts d'error (una, dues, tres), que dominen sobre totes les altres. Sovint una tasca important és saber trobar quines són les fonts d'error que dominen. Insistirem sobre aquest punt a l'apartat 3.

1.4 Millor estimació, error, nivell de confiança

Com hem dit, tota mesura física ha d'anar acompanyada del seu error; si no és així, la mesura és incompleta. Així, l'especificació del resultat d'una mesura és:

$$\text{mesura} = \text{millor estimació} \pm \text{error}, \tag{1}$$

o, simbòlicament, si la mesura és x

$$x = x_\mathrm{m} \pm \delta x. \tag{2}$$

Això vol dir que afirmem que el resultat de la nostra mesura es troba situat entre $x_\mathrm{m} - \delta x$ i $x_\mathrm{m} + \delta x$. L'interval $[x_\mathrm{m} - \delta x, x_\mathrm{m} + \delta x]$ s'anomena **marge d'error**. L'error δx s'escull sempre positiu per conveni ($\delta x > 0$).

Recordem de passada la importància d'expressar totes les magnituds i els errors amb les seves unitats corresponents.

Ara bé, l'error que s'especifica no és gairebé mai l'error màxim, sinó que generalment es tracta de l'**error probable**. Això vol dir que el que afirmem és que el resultat de la mesura *probablement* es troba dins del marge d'error. L'especificació completa d'un error és doncs:

$$\boxed{x = x_\mathrm{m} \pm \delta x \quad \text{(nivell de confiança } p\text{)}}. \tag{3}$$

El *nivell de confiança p* és un nombre real comprès entre 0 i 1 (generalment expressat en tant per cent), que indica la probabilitat de que el valor real de la mesura estigui comprès dins del marge d'error. Així, un nivell de confiança del 90 % implica que el valor real de la quantitat mesurada es troba a l'interval comprès entre $x_\mathrm{m} - \delta x$ i $x_\mathrm{m} + \delta x$ amb una probabilitat del 90 %. Especificar l'error màxim correspondria a un nivell de confiança del 100 %.

Els nivells de confiança més habituals són

- Del 68 %, també anomenat *d'una desviació estàndard*, o d'1 σ. Aquest és l'interval de confiança més habitual a física.

- Del 95 %, de dues desviacions estàndard, o de $2\,\sigma$. Sovint l'error a aquest nivell de confiança correspon al doble de l'error a nivell de confiança del 68 %.
- Del 99,7 %, de tres desviacions estàndard, o de $3\,\sigma$. Sovint l'error correspon al triple de l'error a nivell de confiança del 68 %.

En cas de no especificar el nivell de confiança sobreentendrem que és del 68%. El perquè d'aquests noms i d'aquests valors exactes l'estudiarem més endavant en el curs.

En el cas en què no s'especifiqui l'error d'una mesura, se sobreentendrà que l'error és de més menys una unitat en la darrera xifra decimal. Així, si el resultat de la mesura d'una longitud és de 27,32 m, i no s'especifica res més, entendrem que l'error és ±0,01 m. Així, noteu que els zeros a la dreta de la coma decimal són importants: no és el mateix 40,4 m que 40,40 m. Aquesta no és però una pràctica recomanable: *és convenient que qualsevol mesura o dada vagi acompanyada explícitament de la seva incertesa.*

Algunes vegades els marges d'error poden no ser simètrics. En aquests casos els resultats de les mesures es poden especificar com $x = x_{\mathrm{m}}{}^{+\delta x_+}_{-\delta x_-}$. Per exemple: 23^{+3}_{-2} Gyr.

1.5 Xifres significatives

Dir que la distància de Barcelona a Madrid és de 612,147 375 km no té cap sentit, si l'error d'aquesta mesura és de 10 km. Tampoc no tindria sentit dir que l'error de la mesura és de 12,223 km, perquè l'error expressa una incertesa i la incertesa generalment pot ser estimada amb molt poca precisió. Pot ser que la calculadora doni totes aquestes xifres, però no tenen cap sentit. Així, veurem un criteri per determinar el nombre de xifres significatives adequat.

Donat un nombre expressat en forma decimal, les *xifres significatives* són totes les xifres de l'expressió decimal que no siguin un zero a l'esquerra. Per exemple, a 0,0145 les xifres significatives són $1, 4, 5$; a 0,2040 les xifres significatives són 2,0,4,0; a $34, 4$ les xifres significatives són $3, 4, 4$.

La norma general per donar les incerteses en experiments ordinaris és:

Els errors han d'arrodonir-se amb una sola xifra significativa (en general).

Només en el cas que aquesta xifra sigui 1, es pot considerar afegir també el dígit següent. En els experiments d'alta precisió sovint s'especifiquen dues xifres significatives a l'error.

☞

$$\begin{aligned}
\delta l &= 0{,}000324452\,\mathrm{cm} &\rightarrow\quad& \delta l = 0{,}0003\,\mathrm{cm}\\
\delta F &= 0{,}08920025\,\mathrm{N} &\rightarrow\quad& \delta F = 0{,}09\,\mathrm{N}\\
\delta a &= 3{,}7342520 &\rightarrow\quad& \delta a = 4\\
\delta m &= 353{,}556\,\mathrm{MeV}/c^2 &\rightarrow\quad& \delta m = 4\cdot 10^2\,\mathrm{MeV}/c^2 \text{ o } 400\,\mathrm{MeV}/c^2\\
\delta t &= 6{,}05256\cdot 10^{40}\,\mathrm{s} &\rightarrow\quad& \delta t = 6\cdot 10^{40}\,\mathrm{s}\\
\delta \nu &= 1{,}34873\,\mathrm{GHz} &\rightarrow\quad& \delta \nu = 1\,\mathrm{GHz} \text{ o } 1{,}3\,\mathrm{GHz}\\
\delta P &= 1{,}7689\cdot 10^2\,\mathrm{W} &\rightarrow\quad& \delta P = 2\cdot 10^2\,\mathrm{W} \text{ o } 1{,}8\cdot 10^2\,\mathrm{W}
\end{aligned}$$

I per al millor resultat?

El millor resultat s'ha de presentar amb el mateix nombre de xifres decimals que la seva incertesa.

☞

$$\begin{array}{rcl}
l = 1{,}38000382 \pm 0{,}000324452\,\mathrm{cm} & \rightarrow & 1{,}3800 \pm 0{,}0003\,\mathrm{cm} \\
F = 0{,}02923373 \pm 0{,}08920025\,\mathrm{N} & \rightarrow & 0{,}03 \pm 0{,}09\,\mathrm{N} \\
a = 27{,}5564 \pm 3{,}7342520 & \rightarrow & 28 \pm 4 \\
m = 635{,}4635 \pm 353{,}556\,\mathrm{MeV}/c^2 & \rightarrow & (6 \pm 4)\cdot 10^2\,\mathrm{MeV}/c^2 \text{ o } 600 \pm 400\,\mathrm{MeV}/c^2 \\
t = (1256{,}2903 \pm 6{,}05256)\cdot 10^{40}\,\mathrm{s} & \rightarrow & (1256 \pm 6)\cdot 10^{40}\,\mathrm{s} \\
\nu = 303{,}0034 \pm 1{,}34873\,\mathrm{GHz} & \rightarrow & 303 \pm 1\,\mathrm{GHz} \text{ o } 303{,}0 \pm 1{,}3\,\mathrm{GHz} \\
P = (12{,}0389 \pm 1{,}7689)\cdot 10^2\,\mathrm{W} & \rightarrow & (12 \pm 2)\cdot 10^2\,\mathrm{W} \text{ o } (12{,}0 \pm 1{,}8)\cdot 10^2\,\mathrm{W}
\end{array}$$

Fixeu-vos que els zeros a la dreta de la coma decimal són significatius.[4] Recordeu també la utilitat de la notació científica; en cas d'emprar-la, és convenient que la potència de 10 surti com a factor comú.

Per evitar l'acumulació d'errors, *en els nostres càlculs intermedis farem servir com a mínim una xifra significativa més de les que presentarem en els resultats.* Si volem, opcionalment, podem emprar totes les xifres que ens dóna la calculadora.

En els experiments de precisió, on les incerteses són molt petites per comparació de la mesura, per abreujar a vegades les incerteses en les últimes xifres significatives s'expressen entre parèntesis. Per exemple, $h = 6{,}626\,068\,76(52)\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ és una forma abreujada d'escriure $h = (6{,}626\,068\,76 \pm 0{,}000\,000\,52)\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$.

Arrodoniment

Per arrodonir un número cal fixar-se en la xifra a la dreta de la xifra que volem arrodonir.

- Si la xifra següent és 0, 1, 2, 3 ó 4 llavors arrodonim a la baixa.
- Si la xifra següentés 5, 6, 7, 8 ó 9 llavors arrodonim a l'alça.

Vegeu els exemples anteriors.

1.6 Error relatiu

A partir de la incertesa o error, definim l'**error relatiu** (també anomenat *incertesa relativa* o *precisió*) associat a una variable com

$$\text{error relatiu} = \frac{\text{error absolut}}{|\text{millor estimació}|}, \tag{4}$$

[4]L'excepció serien les expressions, estrictament impròpies, del tipus $600 \pm 400\,\mathrm{MeV}/c^2$: en aquest cas els zeros a la dreta no serien significatius. Encara que aquest tipus d'expressions són habituals, per ser estrictes caldria fer-hi servir la notació científica.

o, simbòlicament, si ε_x és l'error relatiu associat a la variable x,

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\delta x}{|x_{\mathrm{m}}|}}. \tag{5}$$

Anomenarem l'error que hem emprat fins ara *error absolut* quan sigui important distingir-lo del relatiu.

A diferència de l'error absolut, que té dimensions, l'error relatiu és adimensional. Acostuma a mesurar-se en tants per cent, i s'expressa també normalment amb una sola xifra significativa. Així, parlarem d'incerteses relatives del 10 %, del 3 %, del 0,04 % o del 300 %.

1.7 Discrepància

La **discrepància** (absoluta) entre dos valors mesurats d'una mateixa quantitat és el valor absolut de la diferència dels dos valors.

$$\text{discrepància} = |\text{primera mesura} - \text{segona mesura}| \tag{6}$$

La discrepància té les mateixes unitats que la quantitat mesurada. Així mateix la **discrepància relativa** es defineix com el quocient de la discrepància i una de les dues mesures, generalment aquella amb menor incertesa:

$$\text{discrepància relativa} = \frac{\text{discrepància}}{|\text{mesura amb menor incertesa}|}. \tag{7}$$

La discrepància relativa és adimensional, i s'acostuma a expressar en tant per cent.

Tenim dues mesures diferents d'una mateixa resistència:

$$R_1 = 40 \pm 8\,\Omega \quad R_1 = 42 \pm 2\,\Omega$$

La discrepància absoluta és de $(42 - 40)\,\Omega = 2\,\Omega$, i la discrepància relativa és de $2/42 = 5\,\%$.

La millor mesura de la constant de la gravitació és de $G = (6{,}673 \pm 0{,}010) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$, i una mesura d'aquesta mateixa constant al laboratori dóna $G = (4{,}3 \pm 0{,}8) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$. La discrepància absoluta és $(6{,}7 - 4{,}3) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} = 2{,}4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$, i la discrepància relativa és $2{,}4/6{,}7 = 36\,\%$

A vegades es fa servir *error* en el sentit de *discrepància* i no en el sentit d'*incertesa*. Independentment del nom, cal no confondre els dos conceptes. En aquest curs *error* serà sempre sinònim d'*incertesa*, i *discrepància* serà un concepte diferent.

1.8 Comparació entre dues mesures diferents d'un mateix valor

1r cas: una de les mesures té un error molt més petit que l'altra

És el cas que es dóna quan comparem el valor mesurat al laboratori amb el valor acceptat a la literatura. Generalment, la segona dada tindrà una incertesa molt més petita, i per tant podem tractar-la *com si* no tingués error. El criteri que s'emprarà en aquests casos és:

- Si la discrepància entre els dos valors és menor que aproximadament *dues vegades* la incertesa del valor mesurat, és a dir, si el valor acceptat cau a dins del doble del marge d'error, llavors direm que la nostra mesura és *compatible* amb el valor mesurat, i que *la discrepància és poc significativa.*

- Si la discrepància entre els dos valors és major que *dues vegades* la incertesa del valor mesurat, és a dir, si el valor acceptat està bastant allunyat del marge d'error del valor mesurat, llavors direm que la nostra mesura és *probablement incompatible* amb el valor mesurat, i que la *discrepància és significativa.* Això vol dir que l'experiment ha estat probablement mal fet, o bé que els errors no s'han estimat adequadament. (O arribat el cas, que hem descobert un nou fenomen físic, o que el valor acceptat és incorrecte, però això succeirà molt poques vegades!)

- En el cas en què la discrepància sigui superior a *tres vegades* la incertesa del valor mesurat, llavors la mesura és *incompatible* amb gairebé total seguretat, i *la discrepància és molt significativa.*

Això és així perquè —recordem-ho— l'error és probable, i treballem amb nivells de confiança del 68 %, i per tant hi ha una probabilitat del 32 % de que la mesura caigui a fora del marge d'error. Resumint,

	Compatible?	Discrepància
discrepància $<$ 2 error	Sí	No/poc significativa
discrepància $\geq$ 2 error	Probablement no	Significativa
discrepància $\geq$ 3 error	No	Molt significativa

☞ La millor mesura de la constant de la gravitació és de $G = (6{,}673 \pm 0{,}010) \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, i una mesura d'aquesta mateixa constant al laboratori dóna $G = (4{,}3 \pm 0{,}8) \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}. La discrepància absoluta és $2{,}4 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}. Veiem que la discrepància (2,4) és molt significativa en aquest cas, perquè és de tres vegades l'error de la mesura (0,8).

Estrictament no hi ha fronteres clares i el que hi ha de fet és un continu, on la probabilitat que les mesures siguin compatibles disminueix a mesura que la discrepància es fa més i més gran per comparació de l'error. Per tant, el criteri exposat és arbitrari fins a un cert punt, i pot estar subjecte a variacions depenent de la font consultada, el tipus d'experiment, el criteri de l'experimentador, la precisió requerida, etc. Per exemple, la frontera per considerar que dues mesures són incompatibles acostuma a agafar-se entre 2 i 3 vegades l'error, però pot arribar fins a 5 vegades l'error en determinats casos (nosaltres prenem la frontera a 3 vegades l'error).

( ) Una anàlisi més acurada farà referència a la probabilitat d'obtenir una discrepància tan alta com la que hem obtingut a conseqüència de fluctuacions aleatòries degudes als errors.

2n cas: comparació de dues mesures amb errors comparables

Aquest és el cas de dues mesures diferents al laboratori. Aplicarem un criteri qualitatiu semblant i direm que si els dos marges d'error se superposen, o gairebé se superposen, les dues mesures són *compatibles*. Si els dos marges d'error estan clarament allunyats, les mesures són *incompatibles*. Trobem aquí un cas intermedi en el què l'aigua no és prou clara, i és difícil pronunciar-se clarament sense tenir un criteri més precís.

☞ En les dues mesures diferents d'una mateixa resistència, $R_1 = 40 \pm 8\,\Omega$, $R_2 = 42 \pm 2\,\Omega$, els marges d'error estan clarament superposats, i per tant les dues mesures són compatibles entre si.

Segons dues mesures diferents, l'alçada mitjana de la població femenina és d'$1{,}67 \pm 0{,}03$ m i $1{,}60 \pm 0{,}02$ m. Aquestes marges d'error no es superposen, però estan prou allunyats com per a considerar les mesures incompatibles?[5]

Per trobar un criteri més precís, podem aplicar la següent tècnica. Adonem-nos que si les dues mesures corresponent a la mateixa quantitat, la diferència entre elles hauria de ser zero, o com a mínim, *compatible amb zero.* Així, si $x_1 = x_{\mathrm{m}1} \pm \delta x_1$ i $x_2 = x_{\mathrm{m}2} \pm \delta x_2$ són les dues mesures diferents de la mateixa quantitat física, mitjançant les tècniques que veurem a l'apartat 2 podem calcular la diferència $z = x_1 - x_2$, incloent l'error δz i a continuació comprovar si z és compatible amb zero (0), tot aplicant el criteri exposat en el 1r cas.

☞ Reconsiderem l'exemple anterior de les dues mesures de l'alçada mitjana de la població femenina, $1{,}67 \pm 0{,}03$ m i $1{,}60 \pm 0{,}02$ m. Amb les expressions que veurem a l'apartat 2, la diferència entre les dues mesures és $0{,}7 \pm 0{,}4$ m, D'acord amb el criteri expressat en el primer cas $0{,}7 \pm 0{,}4$ m és compatible amb 0 i per tant les dues mesures les hem de considerar compatibles sota aquest criteri.

1.9 Representacions gràfiques

Les diverses mesures d'un experiment sovint es poden representar gràficament en una representació x–y. En els gràfics cal sempre indicar el valor de la mesura juntament amb les **barres d'error**, que són una representació gràfica dels intervals d'error d'aquella mesura. A vegades pot succeir que les barres d'error en algun dels eixos siguin més petites que la mida dels punts del gràfic; llavors cal indicar-ho.

A les representacions gràfiques és important:

- Dibuixar cada mesura amb les seves corresponents barres d'error en els dos eixos.
- Especificar en cada eix la magnitud que s'està representant.
- Indicar junt a cada magnitud les unitats corresponents entre parèntesi. També es possible incloure les potències de 10, si n'hi ha.
- Escollir una escala adient en els dos eixos.

[5] Suposem, com sempre, que el nivell de confiança és del 68 %. Si el nivell de confiança fos del 95 %, tal com és habitual en estadística, les dues mesures serien clarament incompatibles.

- Escollir un origen adient. Sovint no és necessari que els eixos comencin en el zero (altres vegades sí). Si els eixos no comencen en el zero, cal indicar-ho amb una discontinuïtat en les abscisses o ordenades.

Moltes vegades són útils les representacions logarítmiques o doblement logarítmiques. Les primeres acostumen a ser útils per representar lleis de tipus exponencial. Les segones són adients per representar lleis potencials (perquè així les lleis potencials es transformen en rectes), o bé per representar diferents mesures que varien en molts ordres de magnitud.

Sovint a les representacions gràfiques s'hi pot ajustar alguna llei, que moltes vegades és del tipus lineal, $y = ax + b$. Els punts no estaran alineats al voltant de la recta, sinó que hi haurà una certa dispersió. Això fa que la determinació dels valors del pendent i l'origen sigui necessàriament estadístic, i que per tant tinguin un error associat δa i δb. Encara que la llei que es vulgui estudiar no sigui lineal, sovint es pot convertir en una llei lineal fent un canvi de variables adient. Estudiarem en detall l'ajust de funcions lineals a l'apartat 4 del curs.

2 Propagació d'errors

Sovint allò que ens interessa d'una mesura no és la mesura directa, sinó una determinada funció d'aquesta mesura, possiblement combinada amb altres dades. Per exemple, suposem que volem mesurar la velocitat mitjana d'un mòbil, $v = s/t$, i hem mesurat l'espai recorregut s, amb la seva incertesa δs, i el temps t, també amb la seva incertesa δt. És clar com calcular el millor valor de v, però quina és la seva incertesa associada?

En general la magnitud que voldrem calcular es podrà expressar com

$$z = f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

on les variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$ són el resultat d'una o més mesures, i per tant tenen una certa incertesa δx_i. La pregunta que ens fem és: quina és la incertesa δz associada a la variable z?

Com veurem, normalment no és necessari considerar totes i cadascuna de les fonts d'error associades a totes les mesures $x_1,x_2,\ldots,x_n$, sinó que n'hi ha prou de considerar la font o les fonts d'error principals.

Començarem per estudiar els casos més senzills de multiplicació, suma, resta, etc., per acabar donant el resultat en el cas més general possible.

2.1 Errors de la suma i diferència

Considerem que tenim dues mesures $x = x_\mathrm{m} \pm \delta x$ i $y = y_\mathrm{m} \pm \delta y$ i que volem quantificar l'error de la suma $z = x + y$, i suposem per un moment que treballem amb errors màxims, és a dir, amb nivells de confiança del 100 %. Calculem els valors màxim i mínim de z:

$$\begin{aligned} z_{\text{màxim}} &= x_\mathrm{m} + y_\mathrm{m} + \delta x + \delta y, \\ z_{\text{mínim}} &= x_\mathrm{m} + y_\mathrm{m} - \delta x - \delta y. \end{aligned}$$

Per tant el marge d'error de z va de $z_{\text{mínim}}$ a $z_{\text{màxim}}$ i, com que $z_m = x_m + y_m$, tenim que l'error de la suma és la suma dels errors

$$\delta z = \delta x + \delta y.$$

De manera semblant per a la diferència $w = x - y$,

$$w_{\text{màxim}} = x_{\text{m}} - y_{\text{m}} + \delta x + \delta y$$
$$w_{\text{mínim}} = x_{\text{m}} - y_{\text{m}} - \delta x - \delta y,$$

i per tant tenim que l'error de la diferència és la suma dels errors:

$$\delta w = \delta x + \delta y.$$

Això que hem trobat és estrictament cert per als errors màxims. Ara bé, els errors amb què treballem són errors probables (nivells de confiança inferiors al 100 %) i, si aquests errors són independents, cal esperar una cancel·lació parcial entre ells: és improbable que els errors "conspirin" per portar-nos a l'extrem del marge d'error. Per tant les fórmules anteriors donen una *sobreestimació* de l'error. Es pot veure que quan els errors són independents, sovint una estimació més acurada de l'error probable la dóna la **suma quadràtica**:

$$\boxed{\delta(x + y) = \delta(x - y) = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}} \tag{8}$$

En paraules:

Quan els errors són independents, l'error absolut de la suma o diferència és la suma quadràtica dels errors absoluts.

La suma quadràtica és sempre més petita que la suma ordinària. Justificarem l'ús de la suma quadràtica a l'apartat 3.

☞ Suposant que tots els errors siguin independents:

$$(102 \pm 10\,\text{m}) + (12 \pm 2\,\text{m}) = 114 \pm 10\,\text{m},$$
$$(200 \pm 10\,\text{Hz}) + (33 \pm 12\,\text{Hz}) = 233 \pm 16\,\text{Hz},$$
$$(64 \pm 3\,\text{km}) - (50 \pm 2\,\text{km}) = 14 \pm 4\,\text{km},$$
$$(13{,}44 \pm 0{,}03\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}) - (12{,}64 \pm 0{,}03\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}) = 1{,}20 \pm 0{,}04\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1},$$
$$(13{,}55 \pm 0{,}03\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}) - (13{,}54 \pm 0{,}03\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}) = 0{,}01 \pm 0{,}04\,\text{kg}\,\text{ms}^{-1},$$
$$(14 \pm 5) + (12{,}02 \pm 0{,}02) - (1{,}03 \pm 0{,}01) = 25 \pm 5.$$

Fixem-nos que l'error relatiu de la diferència pot ser molt gran.

Fixem-nos també que en la suma quadràtica dominen els errors grans sobre els petits. Això fa que sovint sigui molt fàcil estimar el resultat de la suma quadràtica, sobretot tenint en compte que treballem amb una sola xifra significativa. És a dir, sempre que una de les fonts d'error domini sobre l'altra

$$\delta(x + y) = \delta(x - y) = \delta y \quad \text{si } \delta y \gg \delta x. \tag{9}$$

Si els errors no són independents, llavors la suma quadràtica no es pot aplicar, i l'únic que podem dir de moment és que la suma ordinària dóna una estimació a l'error (de fet, una fita superior):

$$\delta(x+y) = \delta(x-y) \leq \delta x + \delta y. \tag{10}$$

2.2 Producte per una constant sense error

Suposem que volem calcular $z = \lambda x$, on x és una mesura amb error i λ és un nombre sense error (per exemple $4\pi/3$), o bé una constant l'error de la qual és molt més petit que no pas l'error de x (per exemple la constant de Planck h). Emprant el mateix mètode que a l'apartat anterior veiem immediatament que l'error absolut queda també multiplicat per la constant λ, $\delta z = \lambda \delta x$, i que l'error relatiu no canvia, $\varepsilon_z = \varepsilon_x$.

$$\boxed{\delta(\lambda x) = |\lambda|\, \delta x, \quad \varepsilon_{\lambda x} = \varepsilon_x}. \tag{11}$$

2.3 Error del producte i la divisió

Si tenim un quocient, $z = x/y$, l'error del producte el podem estimar calculant també els valors màxims i mínims de z, suposant d'entrada que treballem amb errors màxims. Suposant també que els dos nombres x i y siguin positius:

$$\begin{aligned} z_{\text{màxim}} &= \frac{x_{\text{m}} + \delta x}{y_{\text{m}} - \delta y} = \frac{x_{\text{m}}}{y_{\text{m}}} \left(\frac{1+\varepsilon_x}{1-\varepsilon_y} \right) \approx \frac{x_{\text{m}}}{y_{\text{m}}} (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ z_{\text{mínim}} &\approx \frac{x_{\text{m}}}{y_{\text{m}}} (1 - \varepsilon_x - \varepsilon_y), \end{aligned}$$

on ε_x i ε_y són els errors relatius. Hem fet la hipòtesi que els errors relatius de les variables x i y són petits ($\delta x, \delta y \ll 1$). Aquesta és la situació habitual; tanmateix si aquesta condició no es compleix, veurem més endavant quina tècnica podem emprar. Per tant,

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

És a dir, els errors relatius del producte són la suma dels errors relatius. Trobem un resultat anàleg per al cas de la multiplicació, és a dir, els errors relatius de la divisió són la suma dels errors relatius (la demostració es deixa com a exercici).

Novament en el cas de la multiplicació i la divisió s'aplica la discussió en el cas de la suma i resta: l'error que considerem habitulment és error probable, i no error màxim, i per tant cal esperar una cancel·lació parcial dels errors. També en aquest cas es pot demostrar que

> Si els errors són independents i petits, l'error relatiu del producte o la divisió és la suma quadràtica dels errors relatius de cada factor.

Simbòlicament $\varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$, o bé

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{x/y} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}}. \tag{12}$$

☞ Suposant errors independents ,

$$
\begin{aligned}
(2{,}3 \pm 0{,}3\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}8 \pm 0{,}4\,\mathrm{m/s^2}) &= 2{,}3\,\mathrm{kg}(1 \pm 13\,\%) \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}(1 \pm 4\,\%) \\
&= 22{,}6\,\mathrm{N}(1 \pm 14\,\%) = 23 \pm 3\,\mathrm{N}, \\
(8{,}4 \pm 0{,}4\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}8 \pm 0{,}4\,\mathrm{m/s^2}) &= 8{,}4\,\mathrm{kg}(1 \pm 5\,\%) \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}(1 \pm 4\,\%) \\
&= 82{,}4\,\mathrm{N}(1 \pm 6\,\%) = 82 \pm 5\,\mathrm{N}, \\
(2{,}3 \pm 0{,}3\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}81 \pm 0{,}02\,\mathrm{m/s^2}) &= 2{,}3\,\mathrm{kg}(1 \pm 13\,\%) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}(1 \pm 0{,}2\,\%) \\
&= 22{,}6\,\mathrm{N}(1 \pm 13\,\%) = 23 \pm 3\,\mathrm{N}, \\
(8{,}4 \pm 0{,}4\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}81 \pm 0{,}02\,\mathrm{m/s^2}) &= 8{,}4\,\mathrm{kg}(1 \pm 5\,\%) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}(1 \pm 0{,}2\,\%) \\
&= 82{,}4\,\mathrm{N}(1 \pm 5\,\%) = 82 \pm 4\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Noteu que els errors relatius són petits, i per tant està justificat sumar-los en quadratura.

Tornem a veure que a la suma quadràtica la contribució que domina és la que té major error relatiu. Així doncs només és necessari considerar els factors amb major error relatiu:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{x/y} = \varepsilon_{y/x} = \varepsilon_y \quad \text{si } \varepsilon_y \gg \varepsilon_x. \tag{13}$$

Si els errors no són independents, la suma ordinària dels errors relatius dóna una fita superior de l'error relatiu del producte o quocient:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{x/y} = \varepsilon_{y/x} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y. \tag{14}$$

Cas particular: error d'una potència

Si volem calcular l'error d'una potència $z = x^n$, on n és un nombre enter positiu, entenem que $z = \overbrace{x \cdots x}^{n}$, i apliquem les fórmules anteriors, tenint en compte que hem d'aplicar la suma ordinària i no la suma quadràtica perquè els errors de x estan totalment correlacionats amb ells mateixos. Així trobem que,

$$\varepsilon_{x^n} = n\varepsilon_x, \quad n = 1,2,3\ldots.$$

És a dir, l'error relatiu de la potència n-èsima d'una variable és n vegades l'error relatiu d'aquesta variable. Amb les expressions del següent apartat podrem demostrar que aquesta fórmula és de fet general, vàlida per a qualsevol n, si introduïm un valor absolut:

$$\boxed{\varepsilon_{x^n} = |n|\varepsilon_x}. \tag{15}$$

En particular, noteu que l'error relatiu de la inversa no canvia:

$$\varepsilon_{1/x} = \varepsilon_x. \tag{16}$$

2.4 Fórmula general: cas d'una variable

Suposem que volem calcular l'error de la variable z, on $z = f(x)$, i x és una variable amb error: $x = x_{\mathrm{m}} + \delta x$. Per simplicitat suposarem que la funció f és monòtona creixent en l'interval definit pel marge d'error de la variable z, que vindrà donat per

$$\text{marge error } z = [z_{\mathrm{m}} - \delta z, z_{\mathrm{m}} + \delta z] = [f(x_{\mathrm{m}} - \delta x), f(x_{\mathrm{m}} + \delta x)].$$

El valor de z_{m} serà $z_{\mathrm{m}} = f(x_{\mathrm{m}})$. Els errors no seran en general simètrics i els podem estimar com:

$$\delta z_{+} = f(x_{\mathrm{m}} + \delta x) - f(x_{\mathrm{m}}), \qquad \delta z_{-} = f(x_{\mathrm{m}}) - f(x_{\mathrm{m}} - \delta x) \tag{17}$$

El resultat l'expressarem com $z = z_{\mathrm{m}}{}^{+\delta z_{+}}_{-\delta z_{-}}$. És molt fàcil generalitzar les expressions per al cas que la funció sigui monòtona decreixent.[6]

Si l'error δx és petit per comparació de x_m, $\delta x \ll |x|$, llavors podem expandir en sèrie de Taylor, i trobem:

$$\delta z = \delta z_{+} = \delta z_{-} \approx \left| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_{\mathrm{m}}} \delta x.$$

De manera una mica més abreujada podem escriure:

$$\boxed{\delta f(x) = \left| \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right| \delta x \quad \text{si } \delta x \ll x_{\mathrm{m}}}. \tag{18}$$

Aquesta equació és vàlida per a totes les funcions, sempre que els errors siguin petits i la derivada no s'anul·li.

☞ Si els errors són petits per comparació de la funció,

$$\begin{aligned} \delta \sin x &= |\cos x| \delta x, \\ \delta e^{x} &= e^{x} \delta x, \\ \delta \log(x^2 + 4) &= \frac{2|x|}{x^2 + 4} \delta x, \\ \delta x^2 &= 2|x| \delta x = x^2 2 \frac{\delta x}{|x|}, \\ \delta(\lambda x) &= |\lambda| \delta x. \end{aligned}$$

Amb la fórmula general d'una variable reproduïm l'error del producte per una constant i l'error de la potència.

[6] Però què succeeix si la funció no és monòtona en aquest interval? Invitem els lectors a reflexionar sobre aquest cas. Cal advertir que aquest càlcul no és gaire rigorós des del punt de vista estadístic.

2.5 Fórmula general: cas de múltiples variables

Suposem que volem calcular l'error de la variable z, on z es relaciona amb les variables $x_1,\ldots,x_n$ mitjançant $z = f(x_1,\ldots,x_n)$, i $x_1,\ldots,x_n$ són variables amb error. Per simplicitat suposarem que la funció f és monòtona creixent en totes les n direccions, en l'interval definit pel marge d'error de la variable z, que vindrà donat per:

$$\begin{aligned}\text{marge error } z &= [z_{\mathrm{m}} - \delta z, z_{\mathrm{m}} + \delta z] \\ &= [f(x_{\mathrm{m}1} - \delta x_1,\ldots,x_{\mathrm{m}n} - \delta x_n), f(x_{\mathrm{m}1} + \delta x_1,\ldots,x_{\mathrm{m}n} + \delta x_n)].\end{aligned}$$

El valor de z_{m} serà $z_{\mathrm{m}} = f(x_{\mathrm{m}})$. Els errors no seran en general simètrics i els podem estimar com:

$$\begin{aligned}\delta z_+ &= f(x_{\mathrm{m}1} + \delta x_1,\ldots,x_{\mathrm{m}n} + \delta x_n) - f(x_{\mathrm{m}1},\ldots,x_{\mathrm{m}n}), \\ \delta z_- &= f(x_{\mathrm{m}1},\ldots,x_{\mathrm{m}n}) - f(x_{\mathrm{m}1} - \delta x_1,\ldots,x_{\mathrm{m}n} - \delta x_n).\end{aligned} \tag{19}$$

El resultat l'expressarem com $z = z_{\mathrm{m}}{}^{+\delta z_+}_{-\delta z_-}$. És fàcil, però pesat, generalitzar aquestes expressions per al cas en què la funció f sigui creixent en algunes direccions i decreixent en unes altres.

Si l'error δx és petit per comparació a x_m, $\delta x \ll |x|$, llavors podem expandir en sèrie de Taylor, i trobem:

$$\delta z = \delta z_+ = \delta z_- \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_{\mathrm{m}1}} \delta x_1 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x=x_{\mathrm{m}n}} \delta x_n,$$

o abreujadament

$$\delta f(x_1,\ldots,x_n) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \delta x_1 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \delta x_n \quad \text{si } \delta x_i \ll x_{\mathrm{m}i}.$$

Repetim aquí l'argument de la cancel·lació parcial d'errors. Si els errors δx_i són aleatoris i mútuament independents, l'equació anterior proporcionarà una sobreestimació de l'error. Novament, en aquest cas cal aplicar la suma quadràtica dels errors:

$$\boxed{\delta f(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\right)^2}}. \tag{20}$$

Si els errors estan correlacionats la suma ordinària ens dóna una fita superior per a l'error:

$$\delta f(x_1,\ldots,x_n) \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \delta x_1 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \delta x_n. \tag{21}$$

Amb la fórmula general recuperem totes les expressions particulars calculades anteriorment.

☞ Volem calcular el valor de z juntament amb el seu error, on

$$z = \log{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)},$$

i $x_1 = 122 \pm 3$, $x_2 = 14 \pm 3$, $x_3 = 18 \pm 3$, $x_4 = 1{,}3 \pm 0{,}2$. Comencem calculant el valor de $z_{\mathrm{m}} = \log 15402{,}31 \approx 9{,}64$. Ara calculem l'error de z:

$$\begin{aligned}\delta z &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{2x_i \delta x_i}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^4} \right)^2} \\ &= \sqrt{(0{,}05)^2 + (0{,}006)^2 + (0{,}007)^2 + (0{,}0004)^2} = 0{,}05.\end{aligned}$$

Per tant el resultat final és $z = 9{,}64 \pm 0{,}05$. Fixem-nos que l'última suma quadràtica la podem estimar fàcilment sense fer cap càlcul: només hi intervé la font principal d'error.

Val la pena tornar a fer èmfasi en la importància de saber estimar les fonts d'error principals de cada problema. *En la suma quadràtica només les fonts d'error principals donen una contribució significativa*:

$$\boxed{\delta f(x_1, \ldots, x_n) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta x_1 \qquad \text{si} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta x_1 \gg \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta x_i,\ i > 1}. \tag{22}$$

La majoria de les vegades no és necessari fer càlculs complicats per a poder estimar l'error.

2.6 Estimació ràpida d'errors

En física sovint és convenient tenir una estimació de l'ordre de magnitud de les quantitats involucrades abans de fer un càlcul més detallat. Amb la propagació d'incerteses succeeix el mateix: molts cops és convenient saber l'ordre de magnitud de les incerteses, per saber quina és la precisió aproximada amb què treballem i per poder comprovar els resultats d'un càlcul més explícit. Fins i tot alguns cops, en els quals l'estimació dels errors amb les fórmules donades pot ser un càlcul llarg i farragós, una estimació de l'ordre de magnitud de l'error pot resultar suficient.

Vegem què s'hi pot fer. A l'apartat anterior hem vist que sovint l'error ve dominat per la font principal x_1

$$\delta f \sim \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta x_1.$$

Dividint a esquerra i dreta per f, i prenent valors absoluts, trobem

$$\varepsilon_f = \frac{\delta f}{|f|} \sim \left| \frac{x_1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \frac{\delta x_1}{|x_1|} = \left| \frac{x_1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \varepsilon_{x_1}.$$

Molts cops, per a funcions ben comportades i suaus tenim $\left| \frac{x_1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \sim 1$. Llavors, sota aquestes condicions

$$\varepsilon_f \sim \varepsilon_{x_1} \quad \text{on } x_1 \text{ és la font principal d'error.} \tag{23}$$

És a dir, *en molts casos, l'error relatiu del resultat final és del mateix ordre de magnitud que l'error relatiu de la font d'error principal.*

Com que l'ordre de magnitud l'error relatiu determina el nombre de xifres significatives amb què s'expressa el resultat, també podem dir que *sovint el resultat final s'expressa amb el mateix nombre de xifres significatives que la font principal d'error (o un nombre semblant).*

Aquesta norma general no es verifica en tots els casos. En particular, l'error relatiu d'una diferència de nombres semblants pot ser molt més gran que no pas l'error relatiu de cada terme. Les funcions amb creixements molt ràpids, com les exponencials, o molt suaus, com els logaritmes, també es poden desviar d'aquesta norma.

☞ Donada la propagació d'errors,

$$f = \frac{xy}{x+y}, \qquad x = 5{,}0 \pm 0{,}1, \quad y = 12{,}0 \pm 0{,}1,$$

podem veure que $f_\mathrm{m} = 3{,}529\ldots$. La font principal d'error és x amb un error relatiu $\varepsilon_x = 2\,\%$. L'error relatiu de f també serà de l'ordre del $2\,\%$. Per tant $\delta f = \varepsilon_f f_\mathrm{m} \sim \varepsilon_x f_\mathrm{m}$ o sigui $\delta f \sim 0{,}07$. Si fem la propagació d'errors aplicant les fórmules de l'apartat anterior trobem $\delta f = 0{,}04$ i $f = 3{,}53 \pm 0{,}04$. Per tant l'estimació ràpida dóna un valor prou acurat.

☞ En l'exemple de l'apartat anterior, aparentment les fonts d'error principals són x_2 i x_4 amb errors relatius d'un $5\,\%$ aproximadament. L'error relatiu del resultat final també hauria de ser d'un 5%. Fixem-nos que en canvi l'error relatiu real és d'un 0,5%. En aquest cas la causa de les discrepància és deguda a (1) la presència de sumes i restes, i (2) la funció logaritme.

Quan tinguem el resultat d'una propagació d'errors, és convenient comprovar si l'error relatiu és del mateix ordre que l'error relatiu de la font principal d'error. Si no ho és, això no vol dir que el resultat sigui necessàriament incorrecte, però en aquest cas convé repassar els càlculs.

3 Anàlisi estadística dels errors

Suposem que repetim N vegades una mesura x en condicions idèntiques i obtenim els resultats $x_1, \ldots, x_N$. Les preguntes que ens fem són: (1) quina és la millor estimació x_m per a la quantitat x?, (2) quin és l'error aleatori associat a la nostra mesura? i (3) és possible minimitzar l'error aleatori? Aquestes són les tres preguntes que intentarem respondre en aquesta secció.

En el que segueix, suposarem que el valor *real* de la quantitat x és μ. La quantitat μ és un valor teòric, desconegut, i serà la quantitat a la qual ens voldrem aproximar amb la nostra mesura.

En aquesta secció ens ocuparem, doncs, de l'anàlisi estadística dels errors aleatoris. *Ens oblidarem de moment dels errors sistemàtics; en tot el que segueix suposarem que són zero*: ja hem dit que no es poden avaluar estadísticament. De totes maneres, en un dels darrers subapartats veurem com incorporar-los en els resultats finals.

Per manca de temps, no entrarem en els conceptes de teoria de la probabilitat i estadística que hi ha al darrere dels resultats que trobarem. Ens limitarem a donar justificacions intuïtives.

3.1 La mitjana

La primera pregunta de les que fèiem a dalt té una resposta intuïtiva fàcil: una bona estimació x_{m} per a la quantitat x és la **mitjana** de tots els valors mesurats:

$$\boxed{x_{\mathrm{m}} = \bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}\,. \tag{24}$$

( ) La mitjana és un bon estimador, però no és l'únic: la mediana i la moda també poden ser estimadors per a x_{m}, i ens certs casos pot ser avantatjos fer-los servir en comptes de la mitjana. A física, però, es fa servir la mitjana de forma habitual.

Fem un aclariment sobre la notació:

- μ és el valor *real* de la variable aleatòria x. Correspon al valor autèntic de la quantitat que volem mesurar. És una quantitat generalment desconeguda, que té una utilitat exclusivament teòrica.
- $\bar{x} = \langle x \rangle$ és el valor mitjà de les nostres mesures. Es tracta del valor *calculat.*

Allò que afirmem és que $\bar{x} \approx \mu$. A més a més esperem que l'aproximació $\bar{x}$ s'acosti més i més al valor real μ a mesura que augmentem el nombre de mesures.

☞ Repetim l'experiment del pla inclinat descrit a l'apartat anterior diverses vegades, i obtenim els següents valors de l'acceleració de la gravetat g:

$g\,(\mathrm{m/s^2})$	9,1	8,7	8,8	8,2	8,9	9,3

La mitjana d'aquests valors és $\bar{g} = \frac{1}{6}\sum_i g_i = 8{,}833$. Per tant el millor valor del resultat és $g_{\mathrm{m}} = \bar{g} = 8{,}833$. Quin és l'error aleatori associat?

☞ Diversos grups de voluntaris mesuren l'alçada de l'edifici d'industrials mitjançant una cinta mètrica molt llarga. Cadascun dels grups fa servir una cinta diferent. Els resultats que obtenen són:

$h\,(\mathrm{m})$	44,25	43,91	44,78	44,05	44,90

La mitjana d'aquests valors és $\bar{h} = \frac{1}{5}\sum_i h_i = 44{,}38$. Per tant el millor valor del resultat és $h_{\mathrm{m}} = \bar{h} = 44{,}38$. Quin és l'error aleatori associat?

( ) Des del punt de vista de teoria de la probabilitat, la mesura x constitueix una variable aleatòria. La mitjana real de la variable aleatòria correspon al valor exacte de la mesura, i s'anomena μ, i és la quantitat desconeguda. La mitjana de les nostres mesures és $\bar{x}$. Es pot demostrar que $\bar{x}$ és el millor estimador de μ. També es pot demostrar que quan N tendeix a infinit, llavors $\bar{x}$ tendeix a μ.

Ja sabem quin és el millor valor de la nostra mesura. Quin és l'error associat? Respondrem aquesta segona pregunta en dos passos.

3.2 La desviació estàndard

Per respondre a la segona pregunta (quin és l'error aleatori associat a la mesura de la quantitat x?) busquem una quantitat que ens doni una mesura de la dispersió respecte al valor central.

- Una mesura de l'interval d'error ens la donaria la *diferència màxima* $\max |x_i - \mu|$. Aquesta seria, però, una quantificació de l'error *màxim*, i el que busquem és una quantificació de l'error probable.
- Una altra possibilitat seria mesurar la *diferència mitjana* respecte al valor central:

  $$\text{error} \stackrel{?}{=} \langle x_i - \mu \rangle = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \mu).$$

  Aquesta definició no és adequada perquè les diferències per la dreta es compensen amb les diferències per l'esquerra. Podríem introduir valors absoluts per mesurar la diferència, però llavors perdríem l'analiticitat.
- Una tercera possibilitat és treballar amb *la diferència quadrada mitjana*, és a dir amb la **variància**:

  $$\sigma_x^2 = \left\langle (x_i - \mu)^2 \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \mu)^2. \tag{25}$$

  Llavors $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$, anomenada **desviació estàndard**, dóna una estimació de l'error. Arguments estadístics més rigorosos mostren que aquesta és l'elecció més adequada.

Observem que a la fórmula anterior hi intervé la mitjana real μ, mitjana que és desconeguda per a nosaltres. Si substituïm la mitjana real μ per la mitjana aproximada $\bar{x}$,

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2, \tag{26}$$

estem *infraestimant* la magnitud de la variància, perquè $\bar{x}$ està calculada a partir de les nostres mesures, i per tant s'aproxima més a les mesures que no pas el valor real μ. Es pot mostrar que la *millor estimació* per a la variància ve donada per la fórmula

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}. \tag{27}$$

Fixem-nos que hem canviat N per $N-1$; això fa que la desviació estàndard augmenti lleugerament i compensi el canvi de μ per $\bar{x}$. El nombre $N-1$ té una interpretació de nombre de graus de llibertat independents: en efecte, teníem N mesures, i hem estimat un paràmetre ($\bar{x}$). La variància també es pot expressar com a:

$$\sigma_x^2 = \frac{N}{N-1} \left\langle (x - \bar{x})^2 \right\rangle = \frac{N}{N-1} \left(\left\langle x^2 \right\rangle - \bar{x}^2 \right). \tag{28}$$

A vegades es fa servir la desviació estàndard calculada amb N i a vegades calculada amb $N-1$; cal parar atenció i saber quin és el criteri que s'ha fet servir en cada cas. De totes maneres, la diferència entre la desviació estàndard calculada amb N i la calculada amb $N-1$ serà mínima en la majoria dels casos; la diferència és un factor $\sqrt{1-1/N}$.

Aclarim la notació:

- σ_x^2, calculada d'acord amb l'equació (27), s'anomena *variància de la mostra* o simplement *variància*
- $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ és la *desviació estàndard de la mostra*, o senzillament *desviació estàndard.*

Interpretació de la desviació estàndard

La desviació estàndard dóna una mesura de la desviació quadràtica mitjana de cada mesura respecte al valor real de la mesura μ. Per tant representa una estimació de la incertesa associada a cadascuna de les mesures:

> La desviació estàndard dóna una mesura de la incertesa aleatòria associada a *cadascuna* de les mesures: $\delta x_i = \sigma_x$.

Podríem pensar que la desviació estàndard també dóna una mesura de la incertesa associada al valor mitjà $\bar{x}$. Ara bé, la desviació estàndard és aproximadament constant amb N, no disminueix en augmentar el nombre de mesures, al contrari del que nosaltres esperaríem. Veurem que l'error associat a la mitjana $\bar{x}$ és lleugerament inferior i que decreix amb el nombre de mesures N.

☞ En l'experiment de la mesura de g:

$$g\,(\mathrm{m/s^2}) \;\Big|\; 9{,}1 \quad 8{,}7 \quad 8{,}8 \quad 8{,}2 \quad 8{,}9 \quad 9{,}3$$

La desviació estàndard la calculem com a ($\bar{g} = 8{,}833$)

$$\sigma_g^{(N)} = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_i (g_i - \bar{g})^2} = 0{,}34\,\mathrm{m/s^2}, \qquad \sigma_g^{(N-1)} = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_i (g_i - \bar{g})^2} = 0{,}38\,\mathrm{m/s^2}.$$

Per tant la incertesa aleatòria de cadascun dels resultats de la taula és de $\delta g_i = 0{,}4\,\mathrm{m/s^2}$ agafant l'estimació de $N-1$ (o bé de $\delta g_i = 0{,}3\,\mathrm{m/s^2}$ si agaféssim l'estimació de N)

$$g\,(\mathrm{m/s^2}) \;\Big|\; 9{,}1 \quad 8{,}7 \quad 8{,}8 \quad 8{,}2 \quad 8{,}9 \quad 9{,}3 \;\Big|\; \pm 0{,}4$$

☞ En l'experiment de la mesura de l'alçada h de l'edifici d'industrials,

$$h\,(\mathrm{m}) \;\Big|\; 44{,}25 \quad 43{,}91 \quad 44{,}78 \quad 44{,}05 \quad 44{,}90\;.$$

calculem l'estimació de la desviació estàndard, aquesta vegada només amb la millor estimació $(N-1)$. Recordem que $\bar{h} = 44{,}38$.

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_i (h_i - \bar{h})^2} = 0{,}44\,\mathrm{m}$$

Així doncs la incertesa aleatòria de cadascun dels resultats de la taula és de $\delta h_i = 0{,}4\,\mathrm{m}$. Per tant en la taula de resultats podem eliminar un dels decimals:

$h\,(\mathrm{m})$	44,3	43,9	44,8	44,1	44,9	$\pm 0{,}4$.

( ) Fent referència a conceptes de teoria de la probabilitat, les mesures es distribueixen d'acord amb la variable aleatòria x, que sovint segueix una llei gaussiana (distribució normal). La desviació estàndard σ constitueix un dels paràmetres de la distribució:

$$p(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Es pot mostrar que la probabilitat que una mesura estigui compresa entre $\mu - \sigma$ i $\mu + \sigma$ és d'aproximadament un 68 %. Això justifica l'ús del 68 % com a nivell de confiança. La probabilitat de que estigui compresa entre $\mu - 2\sigma$ i $\mu + 2\sigma$ és d'un 95 %, i la probabilitat de què estigui compresa entre $\mu - 3\sigma$ i $\mu + 3\sigma$ és d'un 99,7 %.

3.3 Desviació estàndard de la mitjana

La **desviació estàndard de la mitjana**, $\sigma_{\bar{x}}$, es defineix com

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}. \tag{29}$$

La desviació estàndard de la mitjana dóna l'error associat a la mitjana $\bar{x}$. Així doncs, ja tenim contestada la segona pregunta: la millor estimació per a la variable x serà $\bar{x}$, i el seu error serà $\sigma_{\bar{x}}$:

> Donada una sèrie de N mesures d'una magnitud x amb un cert error aleatori, el resultat de la mesura l'expressarem com
>
> $$x = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}.$$

Fixem-nos que, tal com és d'esperar, l'error de la mitjana és més petit que no pas l'error de cadascuna de les mesures individuals. Això era el que esperàvem: l'error aleatori disminueix a mesura que augmentem el nombre de mesures. Tanmateix, fixeu-vos que tan sols disminueix en un factor $\sqrt{N}$: en passar de 10 mesures a 1000 mesures l'error aleatori disminuirà tan sols un factor de 10.

Recordeu que ens estem oblidant totalment dels errors sistemàtics; aquests no disminueixen encara que augmentem el nombre de mesures.

✍ Demostreu que la desviació estàndard de la mitjana és l'error associat a la mitjana $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i x_i$, si l'error de cada mesura és $\delta x_i = \sigma_x$. Feu-ho a partir de la propagació d'errors.

☞ En l'experiment de la mesura de g la desviació estàndard de la mitjana és $\sigma_{\bar{g}} = \sigma_g^{(N-1)}/\sqrt{6} = 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$. Per tant el resultat que donarem de l'experiment és

$$g = \bar{g} \pm \sigma_{\bar{g}} = 8{,}83 \pm 0{,}15\,\mathrm{m/s^2}.$$

Recordeu que aquest error és exclusivament aleatori. Fixeu-vos que aquest resultat és clarament discrepant amb el valor acceptat $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Això pot ser indicatiu de dues coses: (1) que l'experiment estigui mal fet, (2) que els errors sistemàtics siguin importants i dominin en aquest problema.

☞ En l'experiment de la mesura de l'alçada de l'edifici d'industrials la desviació estàndard de la mitjana és $\sigma_{\bar{h}} = \sigma_h/\sqrt{5} = 0{,}20$. Per tant direm que l'alçada de l'edifici d'industrials és:

$$h = \bar{h} \pm \sigma_{\bar{h}} = 44{,}4 \pm 0{,}2\,\mathrm{m},$$

suposant que no hi ha errors sistemàtics.

3.4 Covariància i correlació

Considerem la situació en què tenim una variable en funció de dues altres variables aleatòries: $z = f(x,y)$. Repetim N vegades un experiment, i obtenim N valors de z per a cada parella (x_i,y_i). Cadascuna de les variables x i y té un valor mitjà $\bar{x}$ i $\bar{y}$ i unes desviacions estàndard σ_x i σ_y. Les dues mesures es presenten per tant com $x = \bar{x} \pm \sigma_x/\sqrt{N}$ i $y = \bar{y} \pm \sigma_y/\sqrt{N}$. La pregunta és: quina és la mitjana $\bar{z}$ de z i la seva desviació estàndard σ_z?

Suposem que els valors teòrics (desconeguts) de les variables x, y i z són μ_x, μ_y i μ_z respectivament. Òbviament $\mu_z = f(\mu_x,\mu_y)$. També suposarem que les incerteses són petites per comparació als valors mitjans (o els valors exactes).

Per respondre a la primera pregunta (mitjana de $\bar{z}$), simplement calculem els valors de z_i a partir de les parelles (x_i,y_i), i expandim al voltant del valor mitjà $(\bar{x},\bar{y})$.

$$z_i = f(x_i,y_i) \approx f(\bar{x},\bar{y}) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}(x_i - \bar{x}) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})}(y_i - \bar{y}).$$

Si ara fem la mitjana a banda i banda, els termes addicionals a la banda dreta són zero i trobem el resultat esperat:

$$\bar{z} = f(\bar{x},\bar{y}). \tag{30}$$

És a dir, el valor mitjà d'una funció és la funció del valor mitjà.

Quant a la variància,

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N}\sum_i (z_i - \mu_z)^2, \tag{31}$$

fent el mateix desenvolupament que a l'apartat anterior, però aquest cop al voltant de μ_z enlloc de $\bar{z}$, trobem:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N}\sum_i \left[\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(\mu_x,\mu_y)} (x_i - \mu_x) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(\mu_x,\mu_y)} (y_i - \mu_y) \right]^2 .$$

Desenvolupant i fent servir una notació abreujada,

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 = & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \mu_x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{N}\sum_i (y_i - \mu_y)^2 \\ & + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{N}\sum_i (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y). \end{aligned}$$

L'equació anterior la podem reescriure com

$$\boxed{\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_{xy}}, \tag{32}$$

on σ_{xy} és la **covariància**:

$$\sigma_{xy} = \langle (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \rangle = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y). \tag{33}$$

La covariància és un nombre amb les dimensions del producte xy, que pot ser negativa o positiva, i que satisfà la *desigualtat de Schwarz*:

$$|\sigma_{xy}| \le \sigma_x \sigma_y, \qquad -\sigma_x\sigma_y \le \sigma_{xy} \le \sigma_x\sigma_y. \tag{34}$$

La covariància ens dóna una mesura del grau de relació entre les dues fonts d'error x i y. Si les dues fonts d'error són independents, llavors $|\sigma_{xy}| \ll \sigma_x\sigma_y$ quan $N \gg 1$. Així, quan les dues fonts d'error són independents recuperem la fórmula de la suma quadràtica en la propagació d'errors:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2. \tag{35}$$

En tot cas, l'equació (32) dóna la fórmula general, i la suma ordinària dóna una fita superior, per la desigualtat de Schwarz (34):

$$\sigma_z \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \sigma_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \sigma_y. \tag{36}$$

✍ Demostreu que quan les dues variables estan relacionades amb una llei lineal $y = ax + b$, llavors la desigualtat de Schwarz se satura i $|\sigma_{xy}| = \sigma_x\sigma_y$, i la propagació d'errors ve donada per la suma ordinària $\sigma_z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \sigma_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \sigma_y$.

Novament, fixem-nos que l'equació (33) no es pot fer servir a la pràctica perquè els valors de μ_x i μ_y són desconeguts. Una bona estimació de la covariància és:

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})} \tag{37}$$

Sovint es fa servir simplement N en lloc de $N-1$. La diferència és petita quan N és gran. Una expressió alternativa de la covariància, adequada per a l'ús amb calculadora, és:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N-1}\left(\sum_i x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}\right). \tag{38}$$

☞ Fem la mesura simultània de la longitud i l'amplada de sis mostres rectangulars. Els resultats obtinguts són:

l (cm)	13,2	13,3	14,2	14,3	13,9	13,9
a (cm)	1,5	1,6	1,7	2,0	1,9	1,8.

Els resultats obtinguts per a les mitjanes i variàncies:

$$\bar{l} = 13{,}80\,\text{cm},\ \ \bar{a} = 1{,}75\,\text{cm},\quad \sigma_l = 0{,}46\,\text{cm},\ \sigma_a = 0{,}18\,\text{cm},\quad \sigma_{la} = 0{,}07\,\text{cm}^2.$$

Per tant el valor mitjà de la longitud és $13{,}80 \pm 0{,}46/\sqrt{6}\,\text{cm} = 13{,}8 \pm 0{,}2\,\text{cm}$ i el valor mitjà de l'amplada és $1{,}75 \pm 0{,}18/\sqrt{6}\,\text{cm} = 1{,}8 \pm 0{,}1\,\text{cm}$. Si volem calcular l'àrea mitjana:

$$\bar{A} = \bar{a}\bar{l} = 24{,}15\,\text{cm}^2.$$

El valor de la variància de l'àrea σ_A^2 el calcularem com

$$\sigma_A^2 = l^2\sigma_a^2 + a^2\sigma_l^2 + 2al\sigma_{al} = (6{,}2 + 0{,}6 + 1{,}7)\,\text{cm}^4 = 8{,}5\,\text{cm}^4.$$

Per tant el valor de la desviació estàndard és $\sigma_A = 3\,\text{cm}^2$ i el valor de la desviació estàndard de la mitjana és $\sigma_{\bar{A}} = \sigma_A/\sqrt{6} = 1{,}2\,\text{cm}^2$. Per tant el valor mitjà de l'àrea l'expressarem com $\bar{A} = 24{,}2 \pm 1{,}3\,\text{cm}^2$.

Deixem com a exercici comprovar que s'obtenen els mateixos resultats calculant cadascun dels valors de l'àrea A i després fent-ne la mitjana.

Els conceptes de *covariància* i *correlació*, que fins ara hem aplicat a les fonts d'error aleatori, són obviament més generals, i es poden aplicar a qualsevol parell de variables aleatòries, sense que necessàriament corresponguin a errors. A partir d'ara farem un tractament més general, que podrem aprofitar a l'apartat 4 d'aquest curs.

Coeficient de correlació

La covariància té les dimensions del producte de x per y. Per adimensionalitzar-la, introduïm el **coeficient de correlació** r:

$$\boxed{r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}}. \tag{39}$$

El coeficient de correlació es pot calcular directament com

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_j (x_j - \bar{x})^2 \sum_k (y_k - \bar{y})^2}} \tag{40}$$

o bé amb l'expressió següent, adequada per a l'ús amb calculadora:

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_j x_j^2 - N\bar{x}^2\right)\left(\sum_k x_k^2 - N\bar{y}^2\right)}} \tag{41}$$

El coeficient de correlació mesura el grau de correlació entre les dues variables:

- Si $r = 1, -1$ llavors les dues variables x i y estan relacionades entre si per una llei lineal exacta.
- Si $-1 \ll r \ll 1$, i a més a més r es fa més petit a mesura que augmentem el nombre de mesures, és a dir,
$$\lim_{N\to\infty} r = 0,$$
llavors les dues variables x i y són independents entre si.
- En els altres casos intermedis, direm que les dues variables estan parcialment correlacionades.

El signe de r ens indica el tipus de correlació: $r > 0$ ens indica correlació positiva, i $r < 0$ ens indica anticorrelació.

( ) En un cas general, encara que el coeficient de correlació fos proper a zero encara seria possible que les dues variables estiguéssin correlacionades amb una relació no lineal. Aquesta possibilitat és pot rellevant però en l'anàlisi d'incerteses, atès que si les incerteses són petites comparades amb el valor esperat, com és habitual, l'anàlisi lineal és sempre adequada.

☞ En l'exemple anterior de la mesura de la longitud i l'amplada,

l (cm)	13,2	13,3	14,2	14,3	13,9	13,9
a (cm)	1,5	1,6	1,7	2,0	1,9	1,8

el coeficient de correlació és $r = \sigma_{al}/(\sigma_a \sigma_l) = 0{,}85$, cosa que indica que les dues variables estan parcialment correlacionades: les mostres més llargues tendeixen també a ser més amples.

Correlació i causalitat

El fet que dues variables estiguin correlacionades no implica que l'una sigui la causa de l'altra. Creure que correlació implica causalitat és una fal·làcia lògica (per als amants del llatí *cum hoc, ergo propter hoc*). La correlació pot ser fruit d'una tercera causa, o bé simplement d'una coincidència de circumstàncies diverses.

☞ Segurament hi ha una correlació entre el nombre de gelats venuts i el nombre d'ingressos a l'hospital per cops de calor, però això no vol dir que menjar gelats provoqui cops de calor: el que succeeix és que menjar gelats i tenir cops de calor són dos efectes d'una tercera causa, l'estiu.

☞ El fet que observem una anticorrelació entre la quantitat d'hores de televisió vistes per un nen i el seu rendiment escolar no vol dir necessàriament que la televisió perjudiqui el desenvolupament escolar. Pot ser que els nens que miren la televisió creixin majoritàriament en entorns socioculturals més difícils i que sigui això, i no el fet de veure la televisió, allò que els provoca majors dificultats escolars.

3.5 Errors sistemàtics

En aquesta secció estudiarem què hem de fer quan tenim una combinació d'errors sistemàtics i errors aleatoris. Suposem que hem mesurat una quantitat x i que, per mètodes estadístics, hem determinat que l'error aleatori és $\delta x_{\mathrm{aleat}}$, i que hem fet una valoració de l'error sistemàtic, δx_{sist}. Quin és l'error final δx?

Una estimació de l'error conjunt del resultat serà la suma quadràtica de l'error sistemàtic i l'error aleatori:

$$\boxed{\delta x \approx \sqrt{\delta x_{\mathrm{sist}}^2 + \delta x_{\mathrm{aleat}}^2}}. \tag{42}$$

Fixem-nos que en la suma quadràtica només hi intervé la font principal d'error. És a dir, si $\delta x_{\mathrm{sist}} \gg \delta x_{\mathrm{aleat}}$ llavors $\delta x \approx \delta x_{\mathrm{sist}}$, i a la inversa.

( ) A vegades, com que la natura dels errors sistemàtics i estadístics és diferent, aquests es donen separadament, en la forma

$$x = x_{\mathrm{m}} \pm \delta x_{\mathrm{aleat}} \pm \delta x_{\mathrm{sist}}.$$

☞ Els valors d'una sèrie de mesures d'una intensitat són

I (A)	15,1	15,2	14,9	15,0	15,0	15,0	15,0	14,9	14,9	15,1

amb una incertesa sistemàtica ±0,1 que correspon a la resolució de l'aparell. Considerarem aquest tipus d'incertesa sistemàtica: $\delta I_{\mathrm{sist}} = 0{,}1\,\mathrm{A}$. Calculem la mitjana, la desviació estàndard, i la desviació estàndard de la mitjana: $\bar{I} = 15{,}01\,\mathrm{A}$, $\sigma_I = 0{,}099\,\mathrm{A}$, $\sigma_{\bar{I}} = 0{,}031\,\mathrm{A}$. Potser estaríem temptats de dir $I \stackrel{?}{=} 15{,}01 \pm 0{,}03\,\mathrm{A}$. Ara bé, això no té cap sentit: l'error total no pot ser més petit que l'error sistemàtic. Per tant haurem d'escriure: $I = 15{,}0 \pm 0{,}1\,\mathrm{A}$, ja que l'error sistemàtic és molt més gran que no pas l'aleatori.

3.6 Mitjana ponderada

La **mitjana ponderada** de dues quantitats x_1 i x_2, amb pesos relatius p i q es defineix per:

$$x = px_1 + qx_2, \tag{43}$$

on els pesos p i q verifiquen $0 \le p, q \le 1$ i $p{+}q = 1$. Quan $p = q = 1/2$ la mitjana ponderada esdevé la mitjana ordinària. Si les dues mesures són independents, l'error associat serà

$$\delta x = \sqrt{p^2 \delta x_1^2 + q^2 \delta x_2^2} = \sqrt{p^2 \delta x_1^2 + (1-p)^2 \delta x_2^2}. \tag{44}$$

En general l'error de la mitjana ponderada és més petit que cadascun dels dos errors: $\delta x \le \delta x_1, \delta x_2$.

Suposem ara que x_1 i x_2 corresponen a dues mesures independents d'una mateixa quantitat física, cadascuna amb incerteses diferents. Podem pensar obtenir una mesura conjunta millor donant més pes a la mesura amb menor incertesa. Efectivament, això es pot fer sempre que:

- les dues mesures corresponguin a experiments fets correctament, i
- les dues mesures siguin compatibles entre si.

Si es donen aquestes dues circumstàncies, es pot mostrar que el procediment adequat és agafar els pesos proporcionals a l'invers dels quadrats dels errors de cada mesura:

$$p = \frac{\delta x_1^{-2}}{\delta x_1^{-2} + \delta x_2^{-2}}, \quad q = \frac{\delta x_2^{-2}}{\delta x_1^{-2} + \delta x_2^{-2}}. \tag{45}$$

En aquest cas, la incertesa es pot expressar com:

$$\delta x = \left(\delta x_1^{-2} + \delta x_2^{-2}\right)^{-1/2}. \tag{46}$$

✍ Demostreu aquesta darrera expressió. Generalitzeu aquestes expressions per al cas de tenir més de dues mesures

☞ Dues mesures independents d'una mateixa longitud d'ona són 503 ± 4 nm i 509 ± 3 nm. Veiem que les dues mesures són compatibles. Els pesos de cadascuna de les mesures són $p = 0{,}36$ i $q = 0{,}64444$. Per tant la mitjana ponderada serà $\lambda = 506{,}8$ nm i l'error $\delta\lambda = 2{,}4$ nm. Per tant el resultat final el podem expressar com a $\lambda = 507 \pm 2$ nm.

Quan l'error d'una mesura és molt més gran que l'error de l'altra, la mesura amb error més gran no val la pena tenir-lo en compte: el resultat final és la mesura amb menor error.

☞ Dues mesures independents d'una altra longitud d'ona són 651 ± 1 nm i 659 ± 12 nm. Els pesos de cadascuna de les mesures són $p = 0{,}993$ i $q = 0{,}007$. La mitjana ponderada correspon simplement amb la millor mesura $\lambda = 651{,}1$ nm i l'error també $\delta\lambda = 0{,}98$ nm. Per tant el resultat final coincideix simplement amb la millor mesura $\lambda = 651 \pm 1$ nm.

4 Ajust a models lineals

A l'apartat anterior hem estudiat els errors aleatoris en el cas en què repetim l'experiment moltes vegades en les mateixes condicions. Sovint, però, no repetim l'experiment en condicions idèntiques, sinó que el repetim variant algun paràmetre, i volem comprovar una llei que relaciona el resultat de la mesura amb el paràmetre variat. Per exemple, mesurem l'estirament d'una molla variant la força que exercim sobre ella, i volem comprovar la relació $F = kl$. Els errors (aleatoris i sistemàtics) faran que la relació entre la mesura i el paràmetre variat no segueixi exactament la llei, sinó que hi hauran fluctuacions petites. Com determinar llavors la recta que millor ajusta tots els punts? Com determinar-ne l'error aleatori associat a la recta?

El cas més important és el de l'ajust a una llei lineal del tipus $y = ax + b$. Moltes lleis s'ajusten a aquest tipus de relacions, i les que no ho fan s'hi poden transformar mitjançant un canvi de variables. Per exemple, la llei $y = B \exp(Ax)$ es pot transformar en lineal prenent logaritmes: $y' = \log y = Ax + \log B$.

Comencem estudiant primer, però, el cas general.

4.1 Mètode dels mínims quadrats

En general, considerarem el problema següent: fem la mesura simultània de diverses parelles de magnituds físiques diferents $(x_1,y_1), \ldots ,(x_N,y_N)$, i volem relacionar les dues mesures per una funció del tipus $y = f(x; c_1, \ldots ,c_n)$, on $c_1, \ldots ,c_n$ són constants que volem ajustar per tal que la distància entre la funció teòrica i les dades sigui la menor possible. Generalment x es tractarà d'un paràmetre de control que nosaltres ajustem, i y és el resultat de la resposta del sistema. Volem determinar, primer, els millors valors per a les constants i, segon, els errors associats a aquestes constants.

Farem dues hipòtesis:

1. Que la incertesa de les mesures x_i és negligible davant la incertesa de les mesures y_i. Si és al contrari, intercanviem els papers de x i y.

2. Que la incertesa de cadascuna de les mesures y_i és sempre la mateixa, i ve donada per δy.

Aquestes hipòtesis es poden relaxar si és necessari [1, 2].

Hem vist que la distància quadràtica mitjana dóna una idea de la incertesa. El que farem serà *minimitzar la distància quadràtica de les nostres dades a la funció teòrica.* Portem-ho a la pràctica.

Definim la funció khi (o chi) quadrat:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_i - f(x_i; c_1, \ldots ,c_n)]^2}{\delta y^2}. \tag{47}$$

Veiem que aquesta funció ens dóna la suma de la distància quadràtica de cadascuna de les mesures a la funció. El denominador δy^2 s'ha introduït solament per adimensionalitzar la funció, i aquí no tindrà rellevància. Imposarem que la funció khi quadrat sigui *mínima* buscant-ne els extrems:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \ldots ,n, \tag{48}$$

d'on trobem

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(x_i; c_1, \ldots, c_n)}{\partial c_k} [y_i - f(x_i; c_1, \ldots, c_n)] = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{49}$$

Ara hem de resoldre aquest conjunt d'equacions i aïllar $c_1, \ldots, c_n$.

4.2 Regressió lineal $y = ax + b$

Apliquem els resultats anteriors al cas en què $y = ax + b$ i els paràmetres que es vol estimar són a i b:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\delta y^2}. \tag{50}$$

Derivant respecte de a i b trobem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} &= \frac{-2}{\delta y^2} \sum_i x_i (y_i - ax_i - b) = 0, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} &= \frac{-2}{\delta y^2} \sum_i (y_i - ax_i - b) = 0. \end{aligned}$$

Aquestes dues equacions es poden reescriure com

$$\begin{aligned} b \textstyle\sum_i x_i + a \sum_i x_i^2 &= \textstyle\sum_i x_i y_i \\ bN + a \textstyle\sum_i x_i &= \textstyle\sum_i y_i \end{aligned}$$

Aïllant a i b d'aquest sistema d'equacions trobem:

$$\boxed{a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_j y_j}{\Delta}}, \tag{51a}$$

$$\boxed{b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_j x_j y_j}{\Delta}}, \tag{51b}$$

i

$$\boxed{\Delta = N \textstyle\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}. \tag{51c}$$

Moltes calculadores tenen ja programades aquestes fórmules per a a i b.

Una observació interessant a fer és que la recta passa per $(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{y} = a\bar{x} + b$.

En aquest context $\bar{x}$ i $\bar{y}$ tenen la definició habitual,

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i y_i,$$

però no tenen cap significat físic rellevant: en aquest context, només s'han de considerar eines de càlcul.

☞ [1] Sabem que la relació entre la pressió P i la temperatura absoluta d'un gas és $PV = nRT$. Reexpressem aquesta equació com a $t = T_0 + KP$, on t és la temperatura en graus Celsius i T_0 és la temperatura absoluta corresponent a 0°C. Volem determinar els valor del pendent (K) i de la temperatura absoluta dels 0°C. Les dades experimentals són:

P (mmHg)	65	75	85	95	105	± 1
t (°C)	-20	17	42	94	127	± 1

L'aplicació de les fórmules anteriors dóna $T_0 = -255{,}15$°C i $K = 3{,}63\,$°C/mmHg.

4.3 Incerteses en la recta de regressió

Incertesa aleatòria en y

Una mesura de la incertesa aleatòria en y ens la dóna la desviació quadràtica mitjana dels punts mesurats respecte al valor de la funció calculada, dividida entre el nombre de mesures:

$$\delta y_{\mathrm{reg}} \approx \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (y_i - a x_i - b)^2}. \tag{52}$$

Ara bé, això seria estrictament cert si a i b fossin els valors exactes. Com que el que coneixerem no són els valors exactes, sinó els valors estimats, el que tindrem és que la fórmula anterior produirà una subestimació de l'error. Es pot veure que una versió millorada de l'equació anterior és

$$\boxed{\delta y_{\mathrm{reg}} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_i (y_i - a x_i - b)^2}}. \tag{53}$$

Aquí $N - 2$ té la interpretació de *nombre de graus de llibertat*: tenim N mesures, i hem estimat 2 paràmetres.

☞ En l'exemple anterior, la incertesa en la mesura de la temperatura δt és $\delta t_{\mathrm{reg}} = 7$°C, superior a l'error sistemàtic consignat a la taula de 1°C.

Coeficient de correlació

El coeficient de correlació l'havíem emprat en el tema anterior per estudiar la dependència o independència entre dues fonts d'error. Tanmateix, també es pot emprar per mesurar el grau de correlació entre les dues variables x i y. Recordem que quan les dues variables estan correlacionades linealment de manera exacta, el coeficient de correlació és 1 o -1 (segons si el pendent de la recta de regressió és positiu o negatiu). En aquest cas, com que esperem que les dues variables estiguin molt correlacionades, trobarem coeficients de correlació propers a 1. Recordem que el coeficient de correlació és:

$$\boxed{r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_j (x_j - \bar{x})^2 \sum_k (y_k - \bar{y})^2}}}. \tag{54}$$

Aquí σ_x i σ_y tenen la definició habitual

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2}, \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i (y_i - \bar{y})^2},$$

però *no tenen cap interpretació física rellevant* en aquest tipus de problema. En particular fixeu-vos que $\delta x \neq \sigma_x$ i que $\delta y_{\mathrm{reg}} \neq \sigma_y$. Cal considerar-los simples eines de càlcul.

☞ En l'exemple, el coeficient de correlació és $r = 0{,}995$. Qualitativament això ens indica que l'ajust a una recta és prou bo.

Amb l'ajut del coeficient de correlació la incertesa en y es pot expressar de manera una mica més abreujada:

$$\boxed{\delta y_{\mathrm{reg}} = \sigma_y \sqrt{\frac{N-1}{N-2}}\sqrt{1-r^2}}. \tag{55}$$

Aquesta expressió és adequada per a l'ús amb calculadora, perquè les calculadores acostumen a donar directament els valors de r i σ_y.

Incertesa aleatòria en el pendent a i el punt de tall b

Per trobar la incertesa en a i b cal aplicar propagació d'errors sobre les equacions (51), considerant que l'error de les y_i és δy_{reg} (igual per a totes les mesures) i que les x_i no tenen error (en realitat el que passarà és que $\delta x \ll \delta y_{\mathrm{reg}}$):

$$\delta a = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2} \delta y_{\mathrm{reg}}, \qquad \delta b = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2} \delta y_{\mathrm{reg}}.$$

El càlcul no té gaire misteri (solsament cal derivar el numerador de les expressions (51)). El resultat és:

$$\boxed{\delta a = \delta y_{\mathrm{reg}} \sqrt{\frac{N}{\Delta}}}, \qquad \boxed{\delta b = \delta y_{\mathrm{reg}} \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{\Delta}}}, \tag{56}$$

on recordem que

$$\Delta = N {\textstyle\sum_i} x_i^2 - ({\textstyle\sum_i} x_i)^2.$$

Versions equivalents de les expressions anteriors són:

$$\delta a = \delta y_{\mathrm{reg}} \frac{1}{\sqrt{(N-1)\sigma_x^2}}, \tag{57a}$$

$$\delta b = \delta y_{\mathrm{reg}} \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{N(N-1)\sigma_x^2}} = \delta y_{\mathrm{reg}} \sqrt{\frac{1}{N} - \frac{\bar{x}^2}{(N-1)\sigma_x^2}}. \tag{57b}$$

Qualsevol d'aquestes expressions és adeqüada per a l'ús amb calculadora.

D'aquestes expressions podem trobar diverses formes equivalents segons les fonts que consultem. Pareu atenció al fet que les nostres definicions de σ_x^2 incorporen un factor $N-1$ enlloc de N al denominador.

☞ Fent servir les fórmules anteriors trobem que la incertesa en els valors de T_0 i K són $\delta T_0 = 18°\mathrm{C}$ i $\delta K = 0{,}21\,°\mathrm{C/mmHg}$. Per tant podrem dir que $K = 3{,}7 \pm 0{,}2\,°\mathrm{C/mmHg}$ i que $T_0 = -260 \pm 20°\mathrm{C}$. Fixem-nos que el valor mesurat de T_0 és consistent amb el valor acceptat $T_0 = -273{,}15°\mathrm{C}$.

Error sistemàtic

Ara considerem el cas en què, a banda de l'error aleatori δy_{reg}, que calculem amb els mètodes anteriors, tenim un error sistemàtic δy_{sist}. Considerarem aquí que l'error sistemàtic no depèn del paràmetre de control x. Òbviament podem trobar-nos amb errors sistemàtics més generals, com ara per exemple un error que creixi amb les x. Aquests són casos més delicats que no tractarem aquí.

Si l'error sistemàtic no depèn de x, afectarà igualment totes les mesures, i per tant no modificarà la pendent de la recta; tant sols afectarà el punt de tall. Com que l'error sistemàtic és independent de l'aleatori, podem sumar-los en quadratura:

$$\delta a_{\mathrm{total}} = \delta a, \qquad \delta b_{\mathrm{total}} = \sqrt{\delta b^2 + \delta y_{\mathrm{sist}}^2}. \tag{58}$$

☞ En aquest cas la incertesa sistemàtica en la mesura de t és, en principi, d'1°C. Per tant això no afegeix cap incertesa a la mesura de T_0 atès que $\delta T_0 = 20°\mathrm{C} \gg 1°\mathrm{C}$. El pendent no es veu afectat per aquesta incertesa.

Suposem ara que el resultat de la regressió hagués estat $T_0 = 274{,}1 \pm 0{,}2°\mathrm{C}$. Llavors la incertesa que dominaria en T_0 seria la sistemàtica, i escriuríem $T_0 = 274 \pm 1°\mathrm{C}$.

4.4 Regressió lineal $y = kx$

Estudiem ara aquest altre cas. Cal fer èmfasi que la recta de regressió sense terme independent és una hipòtesi diferent de l'anterior, és a dir, *no* n'és un cas particular amb $k = a$ i $b = 0$. Són dues hipòtesis diferents que, en general, donaran resultats diferents.

En el cas en què la regressió lineal no tingui terme independent, $y = kx$, el càlcul és molt senzill. El valor del pendent que minimitza χ^2 és:

$$k = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_j x_j^2}. \tag{59}$$

La millor estimació de la incertesa vindrà donada per:

$$\delta y_{\mathrm{reg}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i (y_i - kx_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\sum_i y_i^2 - 2k\sum_i x_i y_i + k^2 \sum_i x_i^2\right)}. \tag{60}$$

Novament aquí $N-1$ és el nombre de graus de llibertat independents. La incertesa en el pendent ve donada per:

$$\delta k = \frac{\delta y_{\text{reg}}}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}. \tag{61}$$

✍ Demostreu totes les expressions d'aquest apartat, corresponents a la regressió lineal sense terme independent.

Fixem-nos que en aquest cas els errors sistemàtics sí que afectarien el pendent. Davant un experiment que s'hauria d'ajustar mitjançant una recta sense terme independent, a vegades es fa servir, tot i així, la regressió amb terme independent. D'aquesta manera s'interpreta el valor de la funció a l'origen, que hauria de ser zero, com una possible estimació dels errors sistemàtics, i s'espera obtenir un valor del pendent més acurat, ja que, com hem vist, en la regressió amb terme independent els errors sistemàtics no afecten el valor del pendent. En tot cas, la tècnica pot tenir els seus riscos, ja que estem introduint graus de llibertat addicionals al problema, que en certa manera són arbitraris. Si s'opta per aquest mètode, cal verificar que el valor del terme independent b és petit, de l'ordre de magnitud dels errors sistemàtics que s'esperen.

☞ Volem comprovar la llei de Hooke amb l'expressió $F = kl$, on l és l'estirament. Tenim una sèrie de mesures simultànies de l i F. Suposem que l'error relatiu de l és més gran que no pas el de F. Llavors escrivim $l = CF$, on $C = 1/k$. Tenim dues possibilitats

1. Emprar la regressió tipus $l = CF$.
2. Emprar la regressió tipus $l = CF + l_0$, intentant buscar errors sistemàtics de la determinació de l'origen de l.

4.5 El test χ^2

Suposem ara que fem un ajust per mínims quadrats a una certa funció $f(x)$. L'ajust que hem obtingut, es pot considerar acceptable? Aquesta pregunta solament la podem contestar si coneixem els marges d'error *abans* de fer l'ajust. Llavors tindrem un criteri:

- Si la recta de regressió talla la majoria de les barres d'error, i passa a prop de les altres, llavors l'ajust entre les dades i el model lineal és *acceptable*.
- Si la recta de regressió no talla la majoria de les barres d'error, i/o passa molt lluny de les altres, llavors la discrepància entre les dades i el model lineal és *significativa*.

Novament, hi ha un cas intermedi sobre el qual és difícil pronunciar-se. Recordem que això només té sentit si els marges d'error *no* estan calculats a partir de la regressió, sinó que són coneguts *a priori*.

De manera equivalent, el problema el podem expressar com una prova χ^2. Vegem-ho. La quantitat que hem volgut minimitzar és:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{\delta y^2}. \tag{62}$$

Com és de petita aquesta quantitat? A partir de les equacions (53) i (60) veiem que la podem expressar com :

$$\boxed{\chi^2 = \nu\left(\frac{\delta y_{\text{reg}}}{\delta y}\right)^2}, \tag{63}$$

on ν és el *nombre de graus de llibertat independents*, i en general és igual a

$$\nu = N - (\text{nombre de paràmetres estimats}) = \begin{cases} N-2 & \text{regressió } y = ax+b \\ N-1 & \text{regressió } y = kx \end{cases} \tag{64}$$

Si l'ajust a les dades és bo, esperarem que els errors calculats a partir de la regressió siguin més petits, o semblants, als errors coneguts d'entrada. Per tant esperarem que $\delta y_{\text{reg}} \lesssim \delta y$, i per tant $\chi^2 \lesssim \nu$. En aquest cas direm que l'ajust al model lineal és acceptable. En canvi, si trobem que $\delta y_{\text{reg}} \gg \delta y$, i per tant $\chi^2 \gg \nu$, els errors calculats a partir de la regressió són molt més grans que no pas els coneguts a priori. Això indica que la recta de regressió està massa allunyada dels punts experimentals: les dades no s'ajusten adequadament al model lineal. Pot ser, o bé que el model lineal no descriu adequadament les nostres dades (i per tant l'ajust no és acceptable), o bé que hem infraestimat l'error δy (està mal calculat). Finalment, si trobem que $\delta y_{\text{reg}} \ll \delta y$, i que per tant $\chi^2 \ll \nu$, llavors l'ajust és "massa" bo; això sol indicar, o bé que l'error δy està sobreestimat (no està ben calculat), o bé que és de tipus sistemàtic.

Resumim-ho en una taula:

Gràfica	Errors	χ^2	Acceptable?
Recta talla totes barres error δy	$\delta y_{\text{reg}} \ll \delta y$	$\chi^2 \ll \nu$	Ajust acceptable (δy sobreestimat o sistemàtic)
Recta talla majoria barres error δy, i passa a prop les altres	$\delta y_{\text{reg}} \lesssim \delta y$	$\chi^2 \lesssim \nu$	Ajust acceptable
Recta no talla majoria barres error δy i/o passa lluny les altres	$\delta y_{\text{reg}} \gg \delta y$	$\chi^2 \gg \nu$	Ajust *no* acceptable (o bé δy infraestimat)

☞ Tornem a l'exemple de la regressió que hem anat analitzant. Suposem ara que ens asseguren que $\delta t = 1°\text{C}$ no és només l'error sistemàtic, sinó que és l'error total en la temperatura (el termòmetre no pot cometre errors majors d'1°C, no hi ha fluctuacions en la temperatura, la pressió està mesurada dins del marge d'error, etc.). Nosaltres hem obtingut, en canvi $\delta t_{\text{reg}} = 7°\text{C}$. El nombre de graus de llibertat és $\nu = N - 2 = 5 - 2 = 3$, i el valor de $\chi^2 = 147$.

Veiem per tant que l'error de la regressió és molt més gran que no pas l'error conegut a priori, i que $\chi^2 \gg 3$. Per tant, això ens indica que l'ajust al model dels gasos ideals *no* és acceptable dins del marge d'error: hi ha correccions degudes a la interacció entre les molècules del gas que no podem ignorar (es tracta d'un gas real).

Si dibuixem els punts experimentals amb el marge d'error veurem que la recta *no* talla la majoria de barres d'error.

Referències

[1] John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis.* University Science Books (1982).

[2] J. R. Barlow, *Statistics.* John Wiley & Sons (1989).

[3] Clara Saluenya i Montse Garcia del Muro. Apunts no publicats.