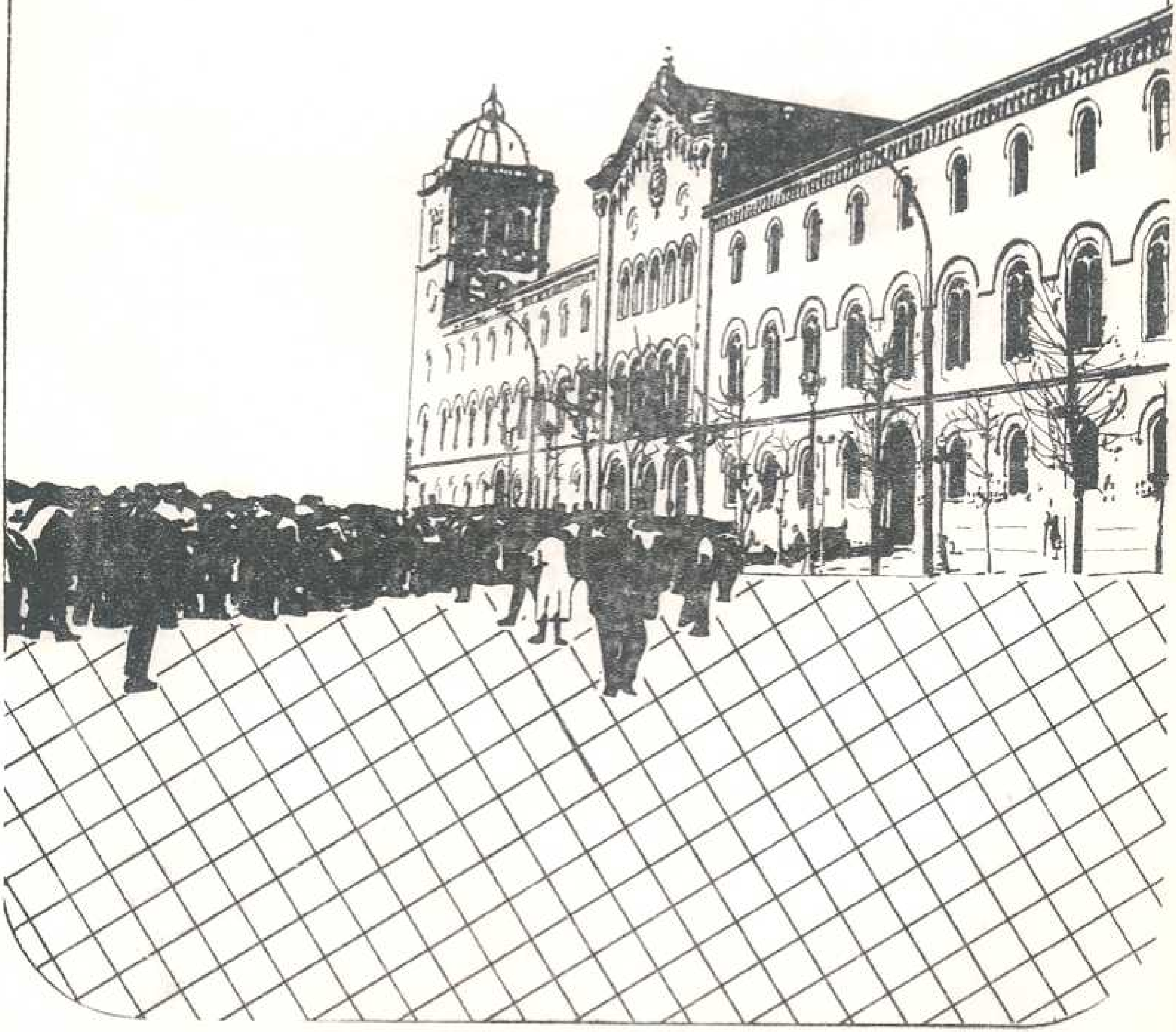
ALEPH

revista dels estudiants de matemàtiques

núm. 2

DESEMBRE 80



EDITORIAL

SUMARIO:

Editorial...........3
Una llista d'objectius...............4
Comisión docente y plan de estudios....5
Pero...¿había nacido la concordia?.......9
Geometries euclidianes i no euclidianes...10
ENTRETENIMIENTOS:
Nuevos entretenimientos...............19
Donuts a la topològica...............20
Soluciones a los anteriores...........22
Humor...............24

EQUIPO TECNICO Y REDACTOR:

J. Coch, E. Comas, C. Cortés, F. Cucker, T. Pòrtulas, M. Ralló, A. Vinacua.

COLABORADORES:

J.M.Font, Quino, M. Sueiro, S.Zarzuela.

Quizás mucha gente se asombre de ver "nº2" en la portada de este Aleph. Sí, hubo un número 1 e incluso un número 0. Sin embargo el año pasado no hubo nada. La explicación del porqué de esta ausencia escapa al fin de esta editorial.

Los motivos de la publicación de los números anteriores siguen hoy presentes, y pueden resumirse en:

1. La posibilidad de discusión de los problemas del estudiantado y de la Facultad en general.

2. La comunicación de inquietudes de todo tipo que pueda haber entre nosotros.

3. La divulgación de aspectos de las Matemáticas inusuales en nuestras aulas: historia, anécdotas, juegos, etc.

Los que sí conocieron el Aleph 1 y recuerdan la existencia de seciones se extrañarán seguramente por su desaparición en este ejemplar. Y es que la gente que aquí trabaja se sucede de un año a otro, lo que imposibilita la existencia de secciones fijas. Necesariamente ésta es una revista plástica, cambiante, en constante ebullición.

Este número se ha realizado mayoritariamente con material confeccionado desde la aparición del nº 1.

Confiamos en recibir vuestras sugerencias para el nº 3.

א

Una llista d'objectius

En l'Aleph nº 1 la Vera Sacristán deia: "... nuestro error ha sido siempre el de discutir las formas y nunca los contenidos" i afegia: "... ¿Cuándo llegaremos a discutir cuáles son las cosas que queremos que hagan los delegados, cuáles los problemas a solucionar, cuáles las imposiciones que no queremos tolerar, cuáles las conquistas a obtener...?

La Vera Sacristán ens plantejava en aquestes ratlles un dels problemes més importants i que cal resoldre ràpidament i efectivament. Tots ens hem de plantejar els nostres objectius (els relatius a la universitat i la facultat) els quals hem d'intentar que siguin assolits. El camí per a aquest intent és la participació directa dels estudiants en els organismes decisoris i assessors de la facultat i aquesta participació és realitzable via els representants dels estudiants. Voldria apuntar algunes de les fites que, durant la meva estada a la facultat, han tingut més ressó:

- Millorament dels mètodes didactics emprats.
- Racionalització dels temaris de les assignatures.
- Coordinació de les assignatures
- Control anual del temari vist i dels resultats obtinguts en cada assignatura.
- Control del professorat,
- Elaboració d'un calendari de la facultat on es precisin dates d'exàmens, de vacances,etc...
- Informació periòdica de les decisions preses per la facultat.
- Previsió d'hores i aules per tal que els estudiants puguin fer assemblees.
- Millorament del funcionament de la biblioteca.
- Ampliació del nombre de representants dels estudiants en els organismes decisoris i assessors de la facultat.

Si aconseguim plantejar-nos i assumir tota una colla d'objectius entre els quals han d'entrar els anteriors, ja tindrem una gran part de la feina feta.

Miquel Ralló.

COMISION DOCENTE Y PLAN DE ESTUDIOS

Si bien hace mucho tiempo se oye hablar a profesores y alumnos de la conveniencia de una reforma del plan de estudios, creemos que la creación de la Comisión Docente transporta ahora esas opiniones al plano de lo posible. Por tanto es el momento de discutir a fondo las necesidades de la Facultad, y desbrozar entre las soluciones planteadas, la más conveniente.

Creemos que antes de encarar el estudio del problema, es necesario dejar claras dos cuestiones fundamentales:

1. La formación anterior del estudiantado que ingresa a Facultad.

Se puede decir que en general el alumno que termina COU no tiene un método de estudio apropiado para las ciencias exactas ya que su nivel informativo es amplio pero superficial, y desconoce los mecanismos deductivos de las matemáticas.

2. La idónea formación del estudiante que egresa de la Facultad.

En todo caso es necesaria una serie de informaciones generales sobre las ramas más importantes de las matemáticas. Pero sobre todo es imprescindible que el egresado no tenga la idea de que la Matemática es un corpus de conocimiento estático; más bien por el contrario como consecuencia de su carácter de ciencia, es un saber en continuo cambio. Por lo tanto su tarea no debe consistir en la mera asimilación de un bloque de conocimientos sino que debe supeditar esos conocimientos a su labor creativa, ya como investigador, ya como docente. A propósito de esto notemos que un alto porcentaje de los egresados tendrán como ocupación la docencia en bachillerato. Ellos deberán por tanto recibir una educación acorde con esa ocupación, educación que sin duda debe tener amplias diferencias con la necesaria a un investigador y profesor de nivel universitario. Examinémoslas por separado.

2.1. El profesor de bachillerato debe poder motivar a sus alumnos. Para ésto, además de tener un panorama general de la teoría matemática, él debe disponer de una serie de conocimientos que faciliten al alumno la comprensión de ciertos conceptos importantes, y le eviten la idea de que esos conceptos son caprichosos, idea causada entre otras cosas por el aislamiento - en la exposición de esos conceptos - de su génesis material e histórica. Esta génesis se encuentra en la Historia de las Matemáticas y en sus relaciones con otras ciencias. Pero también es necesario relacionar esos conceptos, introduciendo al alumno en los métodos matemáticos propiamente dichos. Las demostraciones tampoco deben parecer caprichosas; por eso el profesor ha de hacer participar al alumno en esa demostración, en ese razonamiento. Esto pone de manifiesto la necesidad de un gran conocimiento de Pedagogía por parte de estos docentes.

2.2. Respecto a la formación del investigador y profesor universitario valen unas cuantas afirmaciones del párrafo 2.1. Esto es claro teniendo en cuenta que casi todos los de orientación universitaria efectuarán además de la investigación, tareas docentes, lo que lleva nuevamente a las consideraciones anteriores.

Evidentemente los partícipes de esta orientación deben estar especialmente preparados para la investigación.

Por último, cabe señalar que el egresado debe tener fuerte conocimiento de la especialización que ha elegido. Aunque es claro que esta elección debe ser completamente libre, sólo se puede dar esa libertad al alumno si previamente se lo forma al respecto suficientemente.

Veamos ahora en un plano más concreto, cuáles son las conclusiones que se desprenden de lo anterior.

Como quedo claro en el apartado 2. ha de haber una bifurcación en la carrera si se quiere satisfacer las distintas necesidades de cada alumno. Esa bifurcación debe ser profunda. Pero la existencia de materias básicas y necesarias para todo licenciado impide que sea total. Por otra parte el alumno debe estar bien preparado para la elección, como antes comentábamos. Esto implica: primero, que es necesario que el alumno posea una idea firme respecto a las distintas ramas de las matemáticas, sus métodos y sus aplicaciones, así como algunas ideas respecto al estado actual de las investigaciones; segundo, que es conveniente una orientación no de golpe, no total sino gradual. Al alumno se le da a elegir en la medida de sus posibilidades. Para los que sean profesores de bachillerato, debe disponerse de materias optativas acordes con esa opción, ya desde el primer ciclo. En particular, parece importantísima la existencia de una materia de Pedagogía de las matemáticas. Otros puntos de esta opción (ya en primer ciclo) pueden ser Historia de las matemáticas, Matemáticas Clásicas a nivel elemental, Lógica, etc.

Respecto a lo que decíamos en el apartado 1., ¿cómo se puede enseñar a estudiar? Creemos que a los profesores de 1° de carrera les cabe una gran responsabilidad al respecto. Pero también podemos decir algunas cosas de índole general, enlazadas con lo que en 2.1. decíamos de los alumnos de bachillerato. El alumno (ahora hablamos del universitario), debe participar, debe trabajar. El profesor debe en cada momento hacerle pensar, dejarle en duda, plantearle trabajos a la medida de su conocimiento (el del alumno). Y está claro que esto facilitaría a su vez la posterior tarea docente del licenciado. Por otra parte, la realización cada vez más frecuente de seminarios y trabajos parece ser muy formativa para aquellos que elijan la investigación.

Sabemos que el problema es difícil, y será imprescindible la colaboración de todos los departamentos para llevar a cabo una reforma efectiva. En todo caso hemos pensado un programa más que nada para ilustrar las ideas expuestas. Puede tener fallas a nivel de previedad de materias, pero lo que importa es la imagen general. El plan es vacío si se piensa que las materias citadas se dictan académicamente, fríamente, sin participación del alumno, sin referencia a los orígenes de cada idea.

Dicho programa (que, repetimos, presentamos sólo para ilustrar las ideas anteriores) es el siguiente:

Primer Curso	Segundo Curso	Tercer Curso
Introducción a las matemáticas y aplicaciones.	Geometría	Algebra
Teoría intuitiva de conjuntos y Topología Gral.	Probabilidad y estadística.	Análisis
Algebra lineal.	Una optativa.	Una optativa
Análisis real.		Otra optativa.

Las asignaturas optativas de segundo y tercero podrían ser:

- Cálculo numérico.
- Análisis
- Física.
- Lógica.
- Introducción a las matemáticas clásicas.
- Topología algebraica.
- Pedagogía de las matemáticas.
- Introducción a la Informática.
- Historia de las matemáticas.

En "Introducción a las matemáticas y sus aplicaciones" deberán colaborar personas de los diferentes departamentos, probablemente en forma de seminarios.

La redacción del Aleph lanza esta propuesta como primera aproximación, que sirva para iniciar un debate amplio entre el estudiantado, que defina nuestra posición sobre el tema y nuestra actuación en la Comisión Docente.

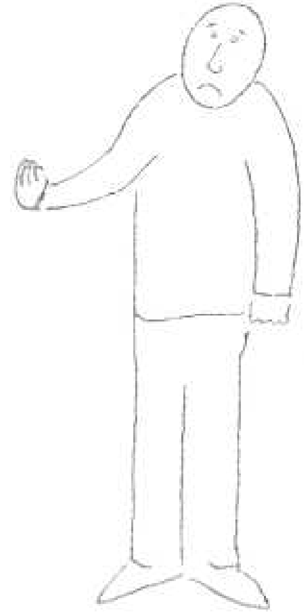
PERO... ¿HABIA NACIDO LA CONCORDIA?

Parecía que este curso comenzaba bajo el signo del consenso,o al menos esto se nos dio a entender cuando se sintió la necesidad de un apoyo estudiantil. Pero...

Hemos oido que el día martes 2 de diciembre hubo una reunión de profesores para tratar el tema de las vacaciones.

Según las mismas fuentes, en ésta reunión se acordó que las vacaciones comenzarían el día 19 de diciembre y acabarían el 12 de enero. Así, los profesores asumían una responsabilidad que siempre había tocado a los estudiantes: violar el calendario oficial, si bien con mayor timidez.

De todas formas, no es eso lo preocupante, sino que si los profesores discuten ésto a posteriori de que muchos grupos hayan tomado decisiones no concordantes, debe entenderse como un reforzamiento de la 'línea dura', la de los profesores que pregonan que lo que habrían podido explicar en aquellos días en que no vengamos 'está dado'; aquellos que entienden el enseñar, no como una actividad (no digo siquiera importante), sino como un aspecto formal de su compromiso con la Universidad; aquellos, en definitiva, que nos usan como materia prima de su explotación de los recursos de esta casa para desarrollar sus intereses personales, los que más enaltecen su ego.



GEOMETRIES EUCLIDIANES I NO EUCLIDIANES.

Els "Elements" d'Euclides constitueixen una obra de importància fonamental en la història de la matemàtica. En ells, Euclides (segle III a.C.) fa una exposició sistemàtica dels coneixements geomètrics a què havien arribat els matemàtics grecs després de segles d'investigació. L'admiració que produeix aquesta obra prové, sobre tot, del rigor lògic amb què està construida: comença amb unes definicions i uns postulats o axiomes, dels quals dedueix lògicament totes les proposicions o teoremes.

A nosaltres ens interessen ara els cinc postulats, base de tot el que es demostrarà després. Aquests semblen força evidents, i es podrien formular així:

1. Des d'un punt qualsevol es pot traçar una recta a qualsevol altre punt.

2. Un segment rectilini pot ser sempre prolongat.

3. Amb qualsevol centre i amb qualsevol radi es pot descriure un cercle.

4. Tots els angles rectes són iguals.

5. Si una recta talla a altres dues rectes, i la suma dels angles interns d'un costat és menor que dos rectes, aleshores les dues rectes suficientment prolongades es tallen en aquest mateix costat.

Aquest últim postulat, que Euclides va formular així per tal d'evitar la noció d'infinit implícita en el concepte de paral-lelisme, es pot entendre, de manera equivalent, com: "per un punt exterior a una recte passa una i només una paral-lela a la recta donada".

El cinquè postulat ocupava un lloc especial en el conjunt d'ells, a causa de la seva complicació formal i conceptual, que feia que no fos tan evident com els altres quatre. Una prova d'això és que el mateix Euclides demostrà les primeres vint-i-vuit proposicions dels "Elements" sense fer ús d'aquest postulat, el qual és emprat per primera vegada en la proposició 29.

No és estrany, doncs, que d'ençà l'època d'Euclides molts matemàtics hagin intentat de demostrar el cinquè postulat a partir dels restants (és a dir: que deixés de ser-ho). Al llarg de vint segles es donaren moltes "demostracions", però totes incorrectes, car sempre s'havien basat en alguna proposició no deduïda lògicament dels altres postulats. La primera demostració de la que es tenen notícies es deu a Tolomeu (segle II a.C.). Procle (segle V d.C.), que és qui ens dóna notícies d'aquest intent, assenyalà la seva insuficiència al mateix temps que donava una altra demostració, tampoc vàlida, doncs utilitzava el fet de què una recta que talli una de dues paral·leles també talla l'altra, la qual cosa és equivalent al cinquè postulat. Fins el segle XVIII el problema fou abordat per diversos matemàtics sense èxit definitiu. Entre ells cal citar el persa Nasîr-Eddîn (1201-1272) i l'anglès J. Wallis (1616-1703).

Però és l'italià Saccheri (1667-1733) el primer que dóna un pas important vers la solució del problema. El mateix any de la seva mort publicà el llibre "Euclides ab omni naevo vindicatus", on exposà el seu punt de vista. Al llarg de les trenta-tres proposicions que ocupa la seva argumentació, dóna una sèrie de resultats deduïts de la negació del cinquè postulat, i quan arriba a punts que li semblen inimaginables creu haver trobat una demostració del postulat per reducció a l'absurd. En realitat, va escriure, sense saber-ho, el primer tractat de geometries no euclidianes. L'error de Saccheri fou la seva confusió entre contradicció intuitiva i contradicció lògica: ell va obtenir resultats contraris a la intuïció, però es tractava de demostrar la necessitat lògica del postulat, car la intuïtiva és prou evident.

Donem ara una idea de les investigacions de Saccheri. Parteix d'un segment AB, traça les perpendiculars en els extrems, i pren sobre elles longituds iguals AD i BC (fig. 1); d'aquesta manera obté un quadrilàter i demostra fàcilment que els angles C i D són iguals. Tres casos són possibles: ambdós angles són rectes, ambdós són aguts, ambdós són obtusos. Saccheri desenvolupa les conseqüències de les hipòtesis "de l'angle agut" i "de l'angle obtús", i creu arribar a un absurd; dedueix que és vàlida la hipòtesi de l'angle recte, que equival al cinquè postulat.

Figura 1

Cal remarcar, també, que les hipòtesis de l'angle recte, de l'angle agut i de l'angle obtús equivalen, respectivament, a que la suma dels angles d'un triangle sigui igual, menor o major que dos rectes (180°).

L'alemany Lambert (1728-1777) trobà que la negació del postulat no conduïa a cap contradicció, però no va caure en l'error de Saccheri, i és possible que arribés a intuir l'existència d'una geometria en la qual no fos vàlid el postulat d'Euclides.

A començaments del segle XIX el problema segueix sense solució: tots els intents havien estat inútils. Es doncs normal que el punt de vista canviés radicalment. En aquest camí, l'alemany Gauss (1777-1855), un dels més grans matemàtics de tots els temps, fou el primer que va veure clarament la possibilitat de construir una geometria no euclidiana, és a dir, una geometria independent del cinquè postulat d'Euclides. Tanmateix, Gauss no publicà les seves idees, doncs temia no ser comprès, i es limità a la correspondència privada amb alguns matemàtics amics; en algunes cartes de Gauss trobem ja notables resultats de geometria no euclidiana. Resultats semblants foren trobats, alguns anys més tard, pels juristes alemanys Schweikart (1780-1857) i Taurinus (1794-1874); el primer tampoc publicà res, mentre que el segon sense gaire convenciment per part d'ell mateix, donà a conèixer els elements d'una tal geometria.

Per fi, el rus N. I. Lobachevski (1793-1856) troba la solució i l'exposa amb convicció, en una memòria llegida l'any 1826 a la Universitat de Kazan. Era essencialment la mateixa que Gauss havia trobat anys endarrera, però sembla que Lobachevski hi arribà de manera independent. La seva geometria parteix de la suposició que per un punt exterior a una recta passen almenys dues paral·leles a aquesta, i dedueix una sèrie de teoremes sense cap contradicció interna, encara que contraris a les idees intuïtives. Conclou que el cinquè postulat no es pot demostrar, i que sobre la base de la seva negació es pot construir un sistema geomètric lògicament coherent, que ell anomenà "geometria imaginària", ja que no en trobà cap model real.

Per tant, des d'un punt de vista lògic, existeix més d'una geometria. Però, quina és la que descriu correctament la realitat? Això, d'acord amb Lobachevski, només es pot comprovar experimentalment, i ell mateix realitzà càlculs basats en observacions astronòmiques per tal de comprovar la validesa de la geometria d'Euclides; els càlculs demostraren que aquesta és correcta dins dels marges d'error de les observacions. És important de fer notar que, si l'espai físic real és euclidià, mai no podrem saber-ho amb certesa total, a causa dels errors presents en tota mesura experimental. Val a dir, a més, que la geometria euclidiana

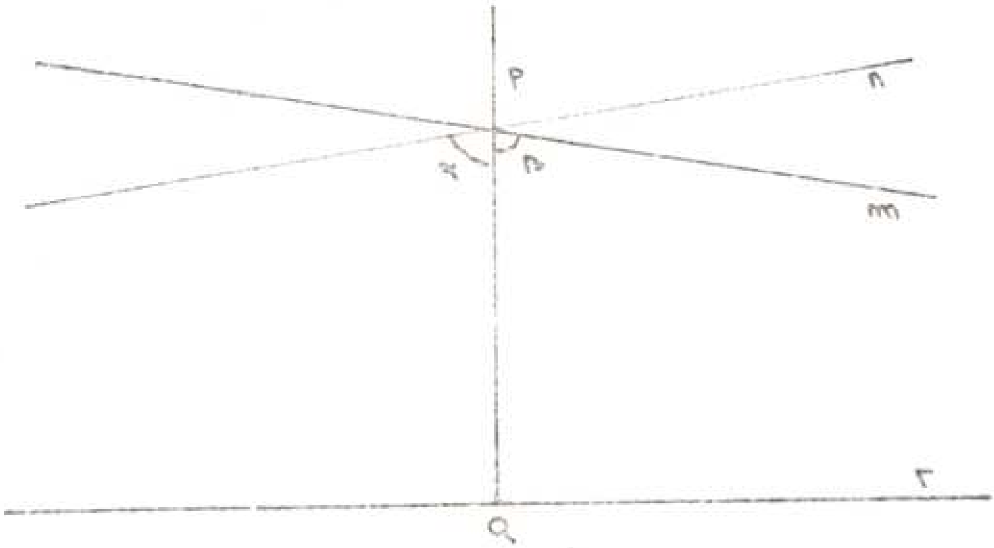


figura 2

és un cas límit de la geometria de Lobachevski i, per tant, aquesta es pot considerar com més general.

Donarem ara alguns resultats de la geometria imaginària que són, com veurem, força sorprenents. Suposem que P és un punt exterior a una recta r, i PQ és la perpendicular a r traçada des de P (fig. 2). Aleshores, les rectes que passan per P i no tallen r són totes les compreses entre dues rectes m i n, que Lobachevski anomena paral-leles a dreta i esquerra, respectivament; m i n tampoc tallen r i representen les posicions límit de les rectes per P que no tallen a r. Els angles α i β de la figura són iguals, i el seu valor és l'angle de paral-lelisme, que és menor que un recte. Si un punt es mou sobre r vers la dreta, la seva distància a r tendeix a zero, i si es mou en sentit contrari tendeix a infinit. En canvi, en la geometria euclidiana aquesta distància, com tothom sap, és constant. També, en aquesta última, l'angle de paral-lelisme és sempre recte, ja que m i n coincideixen. En la geometria de Lobachevski, però, aquest angle depèn de la distància h de P a r: si h tendeix a infinit, l'angle tendeix a zero, i si h tendeix a zero, l'angle a 90°. La suma dels angles d'un triangle és menor que dos rectes (per tant, la geometria de Lobachevski correspon a la hipòtesi de l'angle agut de Saccheri); si els tres costats d'un triangle creixen indefinidament, els tres angles tendeixen, aleshores, a zero. Dos triangles són iguals (congruents, en llenguatge modern) quan ho són llurs angles: no té sentit, doncs, parlar de triangles semblants, ni de figures semblants; en particular, no s'hi poden dibuixar mapes a escala,

La longitud l d'una circumferència de radi r ve donada per

$$l = \pi k(e^{r/k} - e^{-r/k})$$

on k és una constant. Observem que:

1) si k tendeix a infinit, la fórmula anterior esdevé $l = 2\ r$, com es veu per la regla de L'Hôpital;

2) si r és petit, l s'aproxima a $2\ r$; això es pot veure mitjançan la sèrie de Taylor de l'exponencial.

Veiem, doncs, en aquest exemple concret, com la geometria d'Euclides és un cas límit de la de Lobachevski, i que aquesta difereix poc d'aquella en dominis de petites dimensions. Això recorda, per exemple, el que succeeix amb la teoria de la relativitat d'Einstein: quan les velocitats són petites en comparació amb la de la llum, la mecànica clàssica s'aproxima molt a la mecànica relativista.

Resultats semblants als de Lobachevski foren trobats al mateix temps que ell, per l'hongarès J.Bolyai (1802-1860). La descoberta de la geometria no euclidiana fou, doncs, obra simultània de Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobachevski i Bolyai, però va ser Lobachevski qui impulsà amb més convicció la difusió de les noves idees (al menys, això diuen els russos).

Un pas important en l'acceptació de les geometries no euclidianes fou la interpretació donada per l'italià Beltrami (1835-1900). Aquest va veure que la geometria sobre una part de la pseudoesfera, prenent com a segments de recta les geodèsiques, coincideix amb la geometria sobre el pla de Lobachevski (la pseudoesfera és una superfície de revolució, amb forma de trompeta, i que és engendrada per la corba anomenada tractriu; les geodèsiques d'una superfície són les línies de longitud mínima).

Un altre model de la geometria hiperbòlica, com també s'anomena la geometria de Lobachevski-Bolyai, va ser donat en 1870 per l'alemany Klein (1849-1925) sobre el cercle. En aquest model, el "pla" és l'interior del cercle, i les "rectes" són les cordes d'aquest, exclosos els extrems; dues rectes són paral·leles si no tenen cap punt comú (si no es tallen dins del cercle), i secants en el cas contrari (fig. 3). Amb aquestes definicions es comprova que la geometria així definida compleix els postulats sobre els que està fonamentada la hiperbòlica. Aquí podem veure clarament com per un punt exterior a una recta hi passen infinites paral·leles a aquesta.

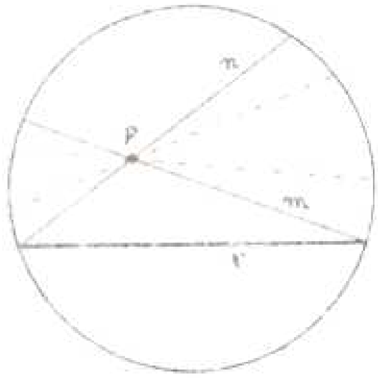


figura 3

Hem vist, doncs, com la negació del cinquè postulat d'Euclides no és inconvenient per a construir geometries lògicament coherents. De totes formes, aquesta negació es pot efectuar de diverses maneres: si abans hem dit "per un punt exterior...hi passen al menys dues paral·leles", també podem exigir que en passi cap, i veure si obtenim alguna cosa. I així és: d'aquesta manera es construeixen les anomenades geometries el·líptiques, que corresponen a la hipòtesi de l'angle obtús de Saccheri; en elles, la suma dels angles d'un triangle és major que dos rectes. Si prenem la superfície d'una esfera com a pla, cada parell de punts antagònics (diametralment oposats) com a punt, i com a rectes els cercles màxims de l'esfera, obtenim un model de geometria el-líptica plana: dues rectes tenen sempre un punt comú i, per tant, no hi han paral-leles.

El desenvolupament de les geometries no euclidianes posà de manifest la necessitat de fonamentar la geometria sobre bases més sòlides que les que Euclides li havia donat. I aquesta obra li va correspondre a l'alemany Hilbert (1862-1943) de realitzar-la. En el seu llibre "Grundlagen der Geometrie" (Fonaments de la Geometria), publicat en 1899, va dividir els postulats bàsics de les geometries elementals en cinc grups: axiomes d'incidència, d'ordre, de congruència, de paral-leles i de continuïtat. L'axioma de les paral-leles es pot enunciar així: "per un punt exterior a una recta es pot traçar només una paral-lela". Hilbert construeix l'única geometria que compleix els cinc grups d'axiomes, que és l'euclidiana; aquesta queda, així, definitivament fonamentada, ja que a l'obra d'Euclides hi havien deficiencies no cobertes fins aleshores. Fet això, Hilbert, per tal de comprovar la independència dels grups d'axiomes, construeix geometries que no compleixen alguns dels axiomes; obté, d'aquesta manera, les geometries hiperbòliques i el-líptiques (no compleixen l'axioma de les paral-leles), les no arquimedianes (hi fallen els de continuïtat), etc. A través del "Grundlagen " queda definitivament tancada la vella discussió que durà més de vint segles.

Finalment, cal parlar de la significació que tot el desenvolupament i discussió de les geometries no euclidianes ha tingut en el món del pensament matemàtic. Es clar el caràcter revolucionari que van tenir a la seva època totes aquestes qüestions, i que en aquest canvi s'hi van veure involucrats tots els grans matemàtics del temps. En realitat és una lluita vers el deslligament de les matemàtiques de la realitat física, un lliurament de la intuició respecta de la realitat, i un camí obert vers l'abstracció total. L'estudi de les matemàtiques deixa de ser una interpretació més del món físic per a convertir-se en una possibilitat de creació. A partir d'uns axiomes (com poden ser els que presenta la teoria de conjunts) i d'unes definicions, es construeixen teories que, com ja ha passat en diverses ocasions, troben models reals encara que hagin estat concebuts de forma independent. Tot això ha permès el naixement de noves branques de la matemàtica que han pogut solucionar molts dels problemes plantejats anys endarrera, tant per part de les ciències físiques com per part de la mateixa matemàtica. Per contra, la necessitat de donar una coherència lògica als nous models s'ha fet més imperiosa. L'aparició de paradoxes i de contradiccions internes he fet remoure tots els fonaments de la matemàtica, al mateix temps que la unia als corrents del pensament humà i la feia motiu de discussió ideològica.

Juan-Miquel Sueiro

Santiago Zarzuela

BIBLIOGRAFIA

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev i d'altres: "La matemática: su contenido, métodos i significado", vol.3. Alianza Universidad (nº 70).

Roberto Bonola: " Geometrías no euclidianas". Calpe.

Luigi Campedelli: " Fantasía y lógica en la matemática". Ed. Labor.

Ettore Carruccio: "Corso di Storia delle Matematiche". Ed. Gheroni.

Alberto Dou: "Fundamentos de la matemática". Ed. Labor.

David Hilbert: "Les fondements de la géométrie". Dunod.

i) ¿COMO PUEDE RIP VAN WINKLE GANAR EL JUEGO?

El viejo juego holandés "Kugelspiel" del que deriva el moderno juego de los bolos, acostumbraba jugarse con 13 bolos colocados en hileras. Sólo podían voltearse uno o dos a la vez pero los jugadores se colocaban tan cerca de los bolos que no era necesario tener gran pericia para voltear el o los bolos que se quisieran; los jugadores tiraban alternativamente una bola por vez y el objetivo era voltear el último bolo. El pequeño-hombre-de-la-montaña con quien Rip van Winkle está jugando a los bolos (ver figura) acaba de tumbar el bolo nº 2. Rip tiene una elección entre 22 juegos diferentes: cada uno de los bolos que quedan, o bien cada uno de los espacios abiertos (caso en que voltee dos bolos).

¿Cuál es el mejor tiro de Rip para ganar el juego? Se supone que ambos jugadores pueden voltear aquel o aquellos bolos que deseen y que se juega de manera óptima por ambas partes.

ii) Demostrar que dada una mesa cuadrada y un jardín (no importa de que forma, mientras no tenga escalones), se puede encontrar una posición en la que las cuatro patas tocan tierra.

DONUTS "A LA TOPOLÒGICA"

D'ençà de les primeres setmanes del febrer passat al Bar de la Universitat, el nostre estimat Bar, confeixen una nova especialitat culinària: el donut "a la topològica".

Els lectors interessats en qüestions de cuina sabran que la gran diversitat de plats que existeix, i principalment les més refinades especialitats, tenen el seu secret, no pas en la cocció o preparació pròpiament dita del menjar base del plat (que no té gaires variants, i només l'art de l'experiència) sinó en la presentació global que es dóna al plat, la quantitat, la qualitat i selecció dels acompanyament salses, guarnicions, espècies i additius de tota mena que si poden afegir, i que al capdevall són els que li donen caràcter i el distingeixen

El donut "a la topològica" n'és un exemple clar.

Tothom sap què és un donut. Tinc entès que, de fet, és un nom comercial enregistrat, que prové d'Amèrica (concretament dels USA, on la gent els compra a pes i els guarda a la nevera) i que com tants d'altres ha esdevingut mot corrent per a designar un objecte matemàtic. En efecte, si tothom sap què és un donut, els matemàtics en sabem més: sabem que és un tor. I...què és un tor? Si ho preguntem a un matemàtic, és probable que, si vol que l'entengueu ràpidament, us digui "Tothom sap què és un donut, oi? Doncs això és un tor: una cosa en forma de donut".

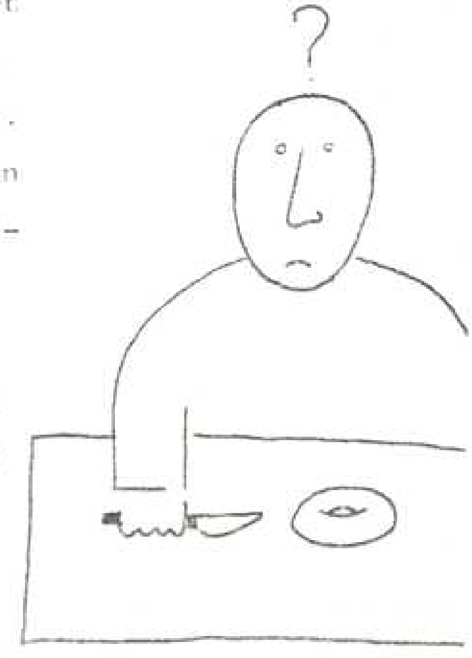
El tor és un dels objectes d'estudi de la topologia algebràica, principalment, que el considera en general un complex simplicial amb identificacions en dimensió qualsevol. Considerant-lo com "la superfície engendrada per una circumferència en girar entorn d'un eix coplanari i exterior a ella", es pot estudiar geomètricament, en R^3.

Això és el que suposo que pretenia aquell problema que el darrer número de Aleph ens proposava: tallar un tor per un pla de forma que resultin dues circumferències secants. Un examen superficial de la qüestió em va convèncer de l'absoluta indigència dels meus coneixements de geometria i topologia per a enfrontar-me amb una empresa de tal volada. Vaig deixar de banda, d'entrada, les equacions en coordenades cartesianes o paramètriques, implícites o explícites; no vaig pas repassar els grups d'homologia que en altres temps havia calculat; i ni em vaig molestar en obrir cap llibre de geometría diferencial. Tot hauria estat en va.

Però com que molt sovint, quan no sé què fer, baixo els tres pisos que em separen del bar per a beure un tallat i menjar-me un donut vaig decidir d'enfrontar-me a la qüestió per la via gastronòmica. Al bar hom hi ha resolt més d'un problema, així que durant alguns dies en arribar-hi, jo demanava "un donut con un cuchillo", que el Paco em servia amatent amb algun dels seus habituals comentaris. Mentre anava esmorzant m'ho pensava i m'ho imaginava, i acabava tallant el tendre donut per un (aproximadament) pla, comprovant el meu fracàs.

Era clar que el problema tenia solució, des del moment que ens l'havien proposat. També era molt clar que cap pla vertical o horitzontal no servia: o sortien dues el.lipses exteriors, o dues circumferències concèntriques... Provant desprès amb plans inclinats, o esbiaixats que dirien alguns, tampoc semblava fàcil: obteniem també el.lipses o l una mena de mitjes llunes amb les banyes arrodonides...

Finalment, és clar, vam trobar la solució que algú altre us explic en aquest mateix número, només perquè era l'única solució possible, a menys de girs entorn de l'eix vertical. Però mentrestant, en Paco, l'a i principal "animador" del bar, havia descobert que els donuts tallats en biaix erem més bons, i anava pregonant les seves altíssimes virtuts. D'aleshores ençà podeu anar al bar i demanar un donut "a la topològica"; si no us entenen demaneu un donut i un ganivet i feu-vos-el vosaltres mateixos; és un plat d'alt rendiment, ja que és de fàcil preparació i dóna una gran satisfacció, perquè els donuts, sabeu?, són molt bons! bons de debó.



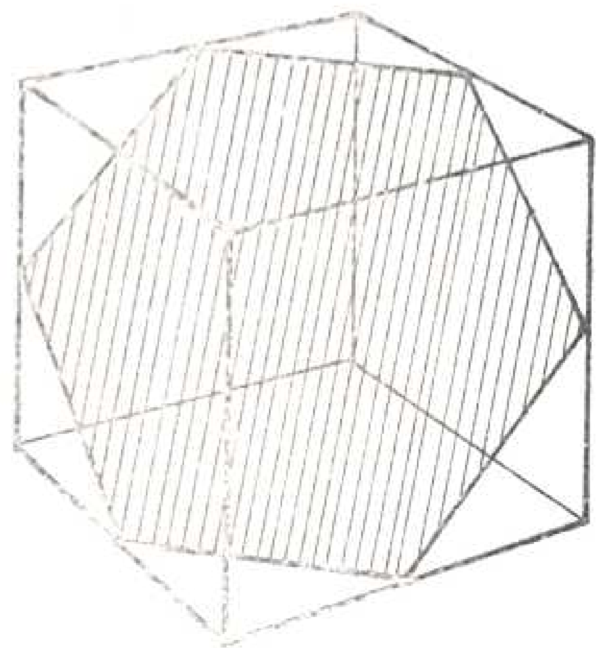
Per cert, algú em pot fer arribar la recepta original del "donut"?

J.M.F.

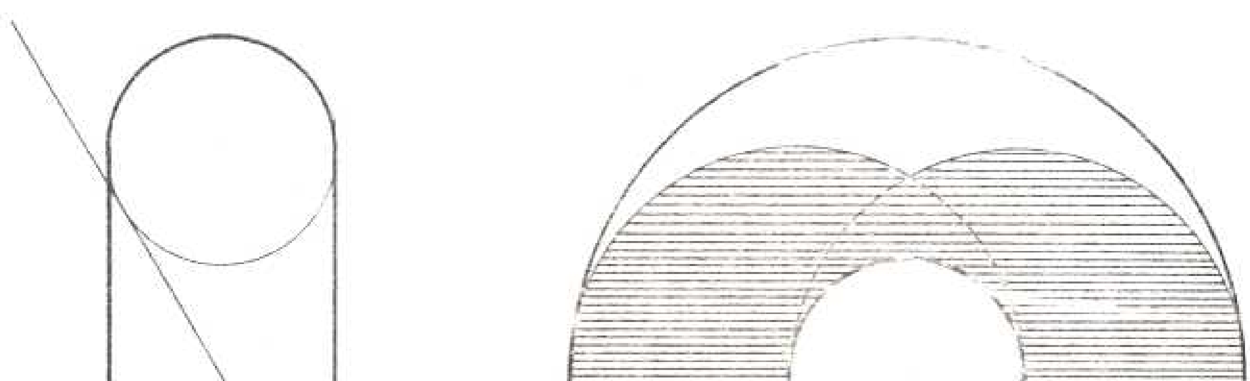
A pesar de el largo tiempo pasado desde la publicación del Aleph 1, creemos conveniente la aparición de las soluciones de los juegos allí planteados, para responder de una manera positiva a la posibilidad de dudas no extintas sobre la solución de los tales juegos.

SOLUCION AL PROBLEMA 2.-

Para indicar la posición de los planos cuyas secciones con el cubo y el toro sean un hexágono y dos circunferencias respectivamente, hemos optado por el método gráfico. La verificación de que las circunferencias son tales queda como un bonito ejercicio para el lector.



N. de la R. El autor del dibujo inferior ha cometido un obvio error de descriptiva; ¿cuál es?.

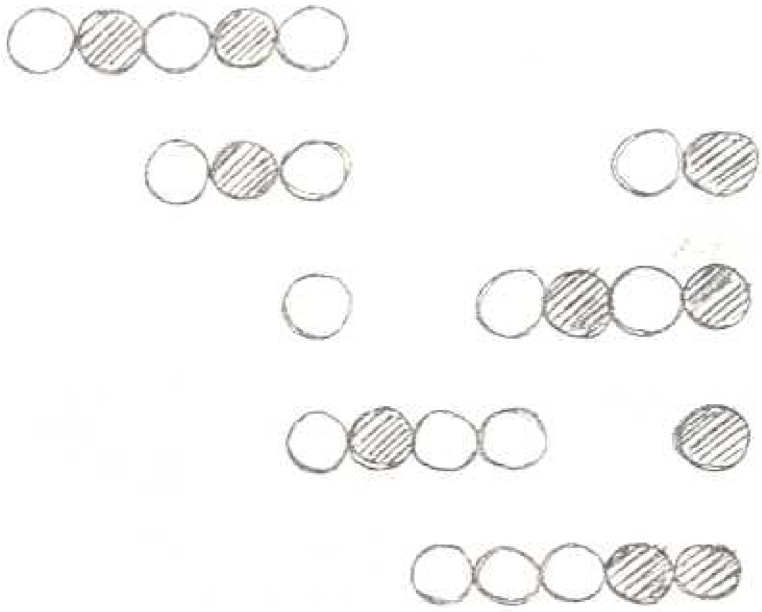


SOLUCIÓ AL PROBLEMA 1.-

Es pinten els cubets en blanc i en negre alternativament de manera que un cubet d'un color té contacte cara a cara amb cubets de l'altre color. Així, la termita passarà d'un cubet blanc a un de negre i d'un de negre a un de blanc. Si el cubet central és blanc, n'hi haurà 13 de blancs i 14 de negres. Caldria doncs, construir un camí amb 27 cubets, 14 dels quals són negres i 13 blancs, del tipus ...un negre, un blanc, un negre, un blanc... i com que l'últim haurà de ser blanc (el cubet central), això és impossible.

SOLUCIÓ AL PROBLEMA 3.-

Una solució és la següent:



La direcció ha trobat aquesta solució, però desconeix si és la millor en el sentit de que és la més curta. Esperem possibles suggerències ja sigui demostrant-ho o bé donant un contraexemple que millori aquesta solució.

HUMOR por QUINO