ALEPH

revista dels estudiants de matemàtiques

núm. 3 mars 81

EN ESTE NUMERO:

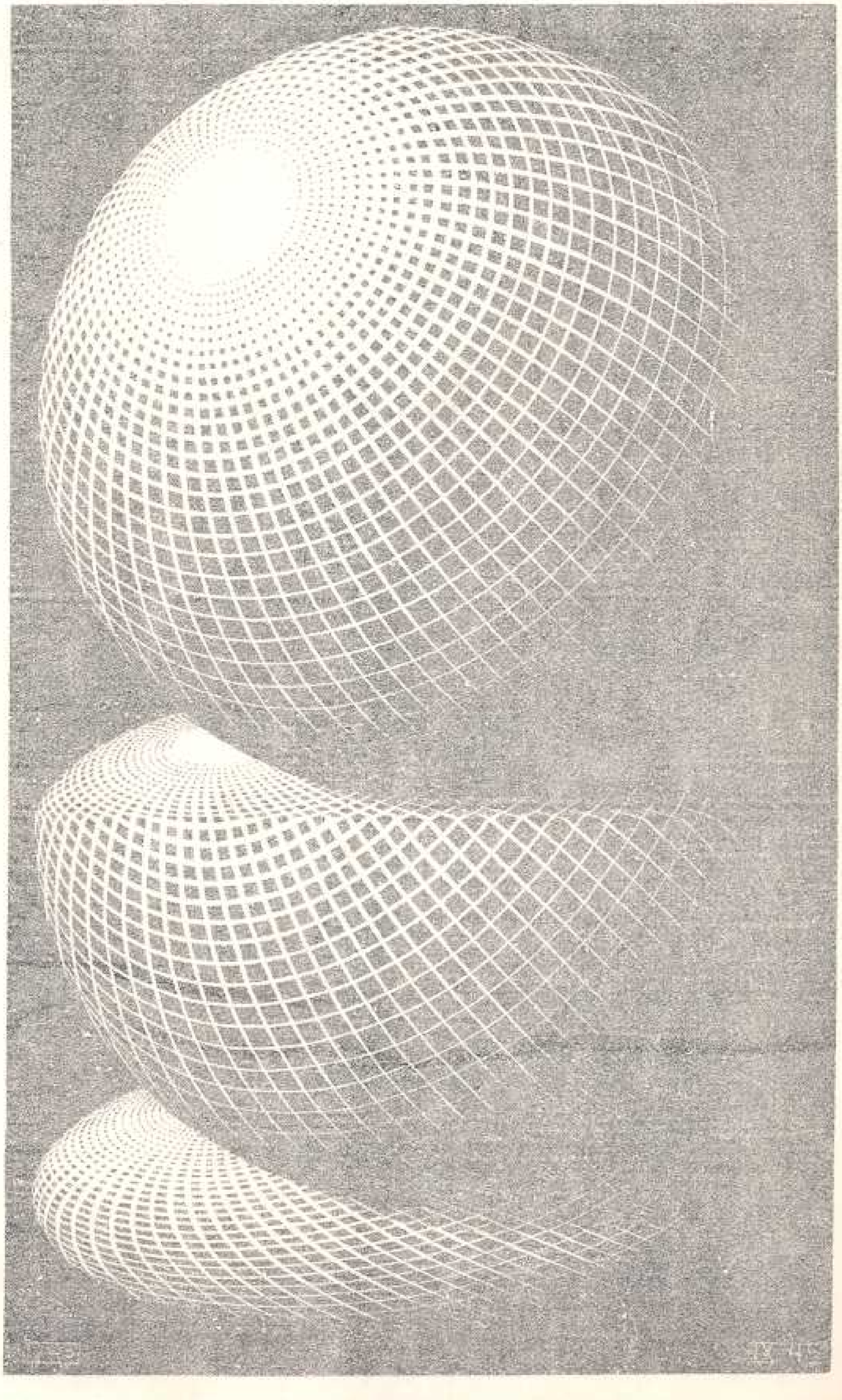
o) ELECCIONES PARA EL RECTORADO

o) COMISION DOCENTE

o) COLABORAN LOS PROFESORES: NUALART, AGUADE, LLORENTE

o) HALMOS: EL CORAZON DE LAS MATEMATICAS

o) JUEGOS Y ENTRETENIMIENTOS



SUMARIO

EQUIPO TECNICO Y REDACTOR:

J. Coch, E. Comas, G. Cortés, F. Cucker, T. Pórtulas, M. Ralló, A. Vinscus.

COLABORADORES:

Dr. J. Aguadé,
Dr. P. Halmos,
Dr. P. Llorente,
Dr. D. Nualart.

EDITORIAL

En el intento de cumplir con una mínima periodicidad, editamos ahora el número 3 de ALEPH. Algunos detalles de presentación han cambiado, en particular hamos tenido dificultad en la obtención de material gráfico.

También han habido cambios respecto al contenido. La idea original de abrir la revista a gente del ámbito matemático ajena al equipo redactor se ve más realizada en este número. Hemos solicitado a algunos profesores de la facultad su colaboración. En particular, con ánimo de informar acerca del segundo ciclo, hemos pedido a los profesores Dr. Nualart y Dr. Simó, artículos sobre sus respectivas opciones. El artículo del primero, se puede leer en este número y confiamos que para el próximo tengámos en nuestras manos el del Dr. Simó. Nos ha parecido interesante además que gente de la Universidad Autónoma colabore. Así, hemos incluido un trabajo del Dr. Aguadé y otro del Dr. Llorente comentando una publicación de Halmos.

Para el próximo número intentaremos ampliar el panorama sobre las diferentes opciones. Por otra parte esperamos tener más colaboración del alumnado. א

EL FULL D'EN M. RALLÓ.

INFORMACIONS

ELECCIONS DE RECTOR A FINALS D' ABRIL

LA JUNTA DE GOVERN DECIDEIX ELEGIR RECTOR PEL MATEIX PROCEDIMENT USAT L'ANY 1977 QUAN EL DR. BADIA VA PUJAR AL CARREC.

El dia 24 de Febrer es va reunir la Junta de Govern en sessió extraordinària amb el següent ordre del dia: elecció de rector: procediment i calendari. Va ser aprovada la proposta del Dr. Badia per 28 vots a favor, 19 en contra i 5 abstencions. Aquesta proposta consisteix essencialment en considerar com a cos de votants tot el P.N. (actualment n'hi ha 439), el mateix nombre de P.N.N., també el mateix nombre d'estudiants i una dècima part del total del P.N.D.

P.N.N., P.N.D. i estudiants haurien d'elegir compromissaris per aquestes eleccions. El calendari aprovat és el següent:

Presentació de candidats. (Mitjançant comunicació a Secretaria General).	16 de març a 6 d'abril.
Termini màxim per a elecció de compromisaris.	31 de març.
Termini màxim per a lliurament d'actes d'aquesta elecció.	3 d'abril.
Reunió de la Junta electoral per conèixer impugnacions o incidències.	6 d'abril.
Junta Extraordinària que:	7 d'abril.

1) Proclamarà oficialment candidats.
2) Ratificarà (o rectificarà) els acords de la Junta electoral.
3) Determinarà l'ordre del dia del Claustre electoral.
4) Designació de la Mesa Electoral.

Lliurament de credencials als Claustrals electors.	Fins el 21 d'abril.
Elecció.	28 d'abril.

COMISSIO DOCENT

Fou creada amb l'intenció de revisar els actuals plans d'estudi i estudiar-ne una possible reforma; fins ara no ha arribat a cap conclusió. Aquesta comi ió té la seguent composició: un professor de cada deapartament, un estudiant de cada cicle i està presidida pel degà. Per tal d'elaborar una proposta dels estudiants se'n està reunint una colla, majoritàriament de quart i cinquè. Fins al moment s'han tractat els seguents temes:

- L'actual exposició, excesivament abstracta de les matèries només aconsegueix impedir la total comprensió i participació del estudiant en allò que se li ensenya. A més oblida els problemes que les teories resolen.

- L'optativitat gradual a primer cicle.

- La redmcció del número d'hores de classe a 15 setmanals limitant-se a 5 hores per assignatura.

- La necessitat del canvi del sistema d'avaluació (serà tractada el propvinent dimarts 24 de Març).

Molts aspectes d'aquests temes encara s'han de pulir en pròximes reunions. Aquestes reunions tenen lloc tots els dimarts i divendres a les 6 de la tarda al "Txiringuito" (Càtedra d'Astronomia).

L'OPCIO D'ESTADISTICA

Hom reconeix una manca d'informació dels estudiants a l'hora de decidir entre les diverses opcions i especialitats que ofereix el segon cicle. Per aquest motiu voldria descriure aquí els temes i els objectius que es proposen en les assignatures de l'opció d'estadística.

En primer lloc caldria analitzar les línies de recerca del Departament d'Estadística, ja que en certa forma condicionen i limiten l'orientació que es dóna a l'ensenyament. Hi ha un equip de professors que treballa en problemes relacionats amb la lògica matemàtica i les estructures ordenades, mentre que un altre equip més reduït de professors es dedica als processos estocàstics. El fet que no hi hagi cap professor interessat a nivell de recerca en temes d'estadística matemàtica, en els seus aspectes teòrics o aplicats, comporta una certa limitació en el planteig de les assignatures relacionades amb aquesta matèria, al no poder tenir un coneixement profund dels temes.

En la descripció de les matèries que s'estudien a l'opció cal esmentar primer la teoria de la probabilitat i els processos estocàstics que corresponen a les assignatures "Càlcul de Probabilitats i Introducció als Processos Estocàstics" i "Estadística" (una primera part del curs) de quart i "Processos Estocàstics" de cinquè. Encara que a vegades hom relaciona el càlcul de probabilitats només amb els jocs d'atzar convé aclarir que la teoria de la probabilitat es pot considerar com una part molt especialitzada de l'anàlisi matemàtica, concretament de la teoria de la mesura i la integració, amb una intuició i una semàntica pròpies que provenen de la idea d'experiència aleatòria. Els temes específics de la teoria de la probabilitat comencen amb la noció d'esperança i probabilitat condicionades i inclouen l'estudi de la convergència feble de probabilitats en espais mètrics (teorema central del límit).

Els processos estocàstics consisteixen bàsicament en l'estudi de probabilitats en els espais funcionals. Es a dir, l'experiència aleatòria és aquí l'obtenció d'una successió de nombres reals (processos discrets) o una funció real (processos a temps continu). Cada tipus particular de procés utilitza tècniques concretes de l'anàlisi matemàtica. Per exemple:

L'estudi dels processos estacionaris de segon ordre es relaciona molt estretament amb l'anàlisi harmònica (transformació de Fourier), i amb la teoria dels operadors normals entre espais de Hilbert.D'altra banda encara que cada tipus de procés està motivat per un problema real, els processos estacionaris, com a model matemàtic de les sèries temporals, constitueixen la part més relacionada amb aplicacions a altres ciències com l'economia o l'automàtica.

Els processos amb increments independents es basen en els diferents tipus de semigrups continus de probabilitats sobre la recta, respecte l'operació convolució. Els processos de Markov donen lloc a semigrups d'operadors entre espais funcionals.

Altres temes que es poden tractar en el marc de la teoria dels processos estocàstics són les cadenes de Markov, les martingales, i la teoria ergòdica.

Els diversos temes de l'estadística matemàtica estan inclosos en les assignatures "Estadística" de quart curs i "Teoria de la Decisió" de cinquè. Els objectes d'estudi de l'estadística matemàtica són les famílies de probabilitats definides en un mateix espai mesurable. Per tal d'abordar els problemes teòrics que presenta l'estadística hom empra una gran varietat de tècniques matemàtiques i molt especialment, la teoria de la probabilitat i els processos estocàstics.

D'altra banda, el model teòric de l'estadística està motivat i s'orienta clarament a resoldre problemes concrets d'inferència estadística. Es a dir, es tracta, a partir d'unes dades numèriques, de fer determinades prediccions o estimacions, o bé de prendre certes decisions. D'aquesta forma hom pot diferenciar dos temes bàsics: la teoria de l'estimació i els contrastos d'hipòtesis estadístiques.

La teoria de la decisió unifica i generalitza aquests dos aspectes clàssics de l'estadística, de manera que tant l'estimació d'un paràmetre com la construcció d'un test d'hipòtesi es poden considerar com casos particulars d'un problema de decisió estadística. Aquesta teoria té també relació amb la teoria de jocs.

Des d'un punt de vista matemàtic la teoria de la decisió planteja problemes relatius a l'estudi dels punts extremals en conjunts convexos.

Aquestes quatre assignatures que hem esmentat inclouen els aspectes fonamentals de la teoria de la probabilitat i de l'estadística. Per part del Departament d'Estadística, es donen dues assignatures més:

La "Teoria de Mostres" de caracter essencialment empíric i descrptiu, on s'estudien les diferents tècniques de mostratge i que es pot agafar com assignatura optativa tant a quart com a cinquè curs.

La "Teoria de la Informació" on es presenta el model matemàtic associat al concepte d'informació. Aquesta assignatura té una orientació netament teòrica i utilitza diversos temes de la teoria de la mesura. S'aconsella agafar-la, en tot cas, a cinquè curs.

Als estudiants interessats en l'aplicació de l'estadística a problemes concrets d'altres disciplines, el Departament, tenint en compte les limitacions que hem esmentat, els recomana algunes assignatures que es donen a altres facultats, com:

1."Anàlisi de la Variància", assignatura que es dóna conjuntament amb "Ampliació de Bioestadística" (de cinquè curs de la Facultat de Biologia), i que està a càrrec de professors del Departament de Bioestadística d'aquesta facultat. L'objectiu de l'anàlisi de la variància és el contrast d'hipòtesis de tipus lineal i es relaciona amb l'estudi dels models lineals. Per tant, aquesta part de l'estadística utilitza tècniques d'àlgebra lineal (projeccions, formes quadratiques,...). En aquesta assignatura es presenten les tècniques estadístiques de l'anàlisi de la variància i les seves extensions (anàlisi multivariat) orientades a l'aplicació a problemes concrets de la biologia.

2."Econometria", assignatura de la Facultat d'Econòmiques, on s'analitza l'aplicació de tècniques estadístiques (com les sèries temporals) a problemes d'economia.

Aquestes assignatures, al no necessitar un bagatge teòric previ es poden prendre tant a cinquè com a quart curs, encara que hom recomana escollir-les a cinquè per tal que l'estudiant tingui ja uns coneixements bàsics de probabilitat i d'estadística.

D'altra banda hom recomana l'assignatura "Funcions Analítiques", escollida com optativa a quart curs (o eventualment a cinquè) en tant que proporciona una base sòlida de la teoria de les funcions de variable complexa, que és útil en l'estudi de les probabilitats.

Pels qui vulguin profunditzar en l'estudi teòric de la probabilitat i l'estadística, és interessant l'assignatura "Anàlisi Harmònica", de cinquè curs, que té relació amb els processos estocàstics.

Pels qui vulguin profunditzar en l'estudi teòric de la probabilitat i l'estadística , és interessant l'assignatura "Anàlisi Harmònica", de cinquè curs, que té relació amb els processos estocàstics.

Indiquem també l'interès que tenen les assignatures de l'opció de matemàtica aplicada, com "Anàlisi Numèrica I" (escollida com optativa a quart curs) o d'altres, ja que proporcionen tècniques de càlcul que són d'utilitat a l'hora de resoldre problemes concrets d'estadística.

Finalment caldria dir que si algú desitja completar aquesta informació pot adreçar-se als professors del Departament d'Estadística.

D. NUALART

EL CORAZON DE LAS MATEMATICAS.

P.R. Halmos

INTRODUCCION

¿En qué consisten realmente las matemáticas? ¿En Axiomas (como el postulado de las paralelas)? ¿Teoremas (como el teorema fundamental del Algebra)? ¿Pruebas (como la demostración de indecidibilidad de Gödel)? ¿Conceptos (como conjuntos y clases)? ¿Definiciones (como la de dimensión de Mayer)? ¿Teorías (como la de categorías)? ¿Fórmulas (como la fórmula integral de Cauchy)? ¿Métodos (como el de aproximaciones sucesivas)?

Las matemáticas no podrían existir, seguramente, sin estos ingredientes; todos son esenciales. Sin embargo, puede sostenerse que ninguno de ellos está en el corazón de las matemáticas; que la principal razón de existir del matemático es el resolver problemas, y que, por lo tanto, en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones.

"Teorema" es una palabra respetada en el vocabulario de la mayoría de los matemáticos, pero "Problema" no siempre lo es. Los "problemas", tal como los profesionales usan a veces el término, son ejercicios sencillos que se dan a los estudiantes que más tarde aprenderán a demostrar teoremas. Sin embargo, estas matizaciones emocionales no siempre son correctas.

La conmutatividad de la suma de números naturales y la resolubilidad de ecuaciones polinomiales en el cuerpo complejo son teoremas, pero uno de ellos es contemplado como trivial (próximo a las definiciones básicas, fácil de entender, fácil de demostrar), y el otro como profundo (la afirmación no es obvia, la demostración proviene de conceptos aparentemente distantes, el resultado tiene muchas aplicaciones sorprendentes). Encontrar una estrategia ganadora para el tres en raya y localizar todos los ceros de la función zeta de Riemann son problemas, pero uno de ellos es trivial (cualquiera que pueda entender las definiciones puede encontrar la respuesta rápidamente sin esfuerzo intelectual prácticamente, sin ninguna sensación de logro intelectual, y la respuesta no tiene consecuencias de interés) y el otro profundo (nadie ha encontrado la respuesta, aunque muchos la han buscado, las soluciones parciales conocidas requieren gran esfuerzo y gran penetración en el tema, y una respuesta implicaría varios corolarios no triviales). Moraleja: los teoremas pueden ser triviales y los problemas profundos. Quienes creen que el corazón de las matemáticas son los problemas no necesariamente se equivocan.

LIBROS DE PROBLEMAS

Si uno quisiese contribuir a las matemáticas escribiendo un artículo o un libro sobre problemas matemáticos, ¿cómo debería hacerlo? ¿Deberían ser problemas elementales (pre-calculus) al nivel de estudiantes de primer o segundo ciclo [graduate and undergraduate] o deberían ser problemas de investigación de los que no se conoce la respuesta? Si se conocen las soluciones, ¿deberían incluirse o no? ¿Convendría organizar los problemas de manera sistemática (en cuyo caso la propia ubicación del problema es una indicación para su solución) o debieran disponerse de alguna manera "aleatoria"? ¿Qué debiera esperarse que obtuviese el lector; diversión, técnicas o hechos (o algo de cada)?

Todas las respuestas posibles a estas preguntas han sido ya dadas. Los problemas matemáticos cuentan con una extensa literatura que aún crece y florece. Una visita a parte de los estantes rotulados QA43 (clasificación de la Biblioteca del Congreso) puede ser una revelación excitante y memorable, y hay también ricas fuentes de problemas desparramadas en otros estantes. (...)

[A continuación el autor pasa revista a algunos libros de problemas explicando su contenido e interés. Remitimos al lector particularmente interesado al original; aquí nos limitaremos a reproducir los puntos de vista generales sobre la cuestión]

CURSOS DE PROBLEMAS

¿Cómo podemos los profesores de hoy usar la literatura sobre problemas? Nos está asignada la tarea de pasar la antorcha del conocimiento matemático a los técnicos, ingenieros, científicos, humanistas, profesores, y, no menos, investigadores matemáticos de mañana: ¿Pueden ayudar los problemas?.

Sí que pueden. La mayor parte de cualquier vida significativa se invierte en resolver problemas; parte considerable de la vida profesional de los técnicos, ingenieros, científicos, etc. se invierte en la solución de problemas matemáticos. Es el deber de todos los profesores, y de los de matemáticas en particular, el exponer a sus estudiantes muchos más problemas que hechos.

Probablemente, satisface más entrar a un aula y dar una clase pulida y elegante sobre el test M de Weierstrass que conducir una sesión que a trancas y barrancas <u>termina</u> formulando la pregunta "¿Es necesaria la hipótesis de acotación del test?". Afirmo, no obstante, que esa torpe sesión, con la intención de motivar al alumno para que busque un contraejemplo, es infinitamente más valiosa.

He dado cursos cuyo único contenido eran problemas resueltos por los estudiantes (y explicados luego a la clase). El número de teoremas expuestos a los estudiantes a lo largo de esos cursos fué aproximadamente la mitad de los que se podrían haber expuesto en una serie de clases regulares. Sin embargo, en un curso de problemas, exponer significa la adquisición de una actitud cuestionadora inteligente y de algunas técnicas para superar las fisuras que tienden a brotar en las demostraciones; en un curso de clases regulares, la exposición no significa a veces mucho más que el aprendizaje del nombre de un teorema, la intimidación por su compleja demostración, y la preocupación por su eventual aparición en el examen.

CUBRIR TODOS LOS TEMAS

Muchos profesores se preocupan por la cantidad de material que deben cubrir en un curso. Un cínico sugirió una fórmula: puesto que los estudiantes recuerdan, en promedio, sólo un 40% de lo que se les explica, lo que debe hacerse es incluir en cada curso el 250% de lo que uno espera que quede. Por elocuente que parezca, probablemente no funciona.

Los cursos de problemas sí funcionan. Los estudiantes que habían asistido a mis cursos de problemas han sido elogiados con frecuencia por sus profesores posteriores. Los elogios eran por su actitud alerta, su habilidad para llegar al corazón de la cuestión rápidamente y por sus inteligentes preguntas que mostraban que entendían lo que estaba pasando en clase. Todo esto en más de un nivel, en cálculo, álgebra lineal, teoría de conjuntos, y, por supuesto, en cursos para graduados de teoría de la medida y análisis funcional.

¿Porqué tenemos que cubrir todo lo que esperamos que los estudiantes aprendan en última instancia? Incluso si, para mantener el ejemplo anterior, pensamos que el test M de Weierstrass es de importancia suprema y que todo estudiante de matemáticas debe saber que existe y debe entender cómo aplicarlo, incluso así un curso en la rama pertinente de análisis podría ser mejor omitiéndolo. Supongamos que hay 40 de estos importantes temas que deben exponerse al estudiante en un curso, ¿ Se deduce que debemos dar 40 clases completas y esperar que todas se asimilen? ¿No sería mejor mencionar 20 de estos temas en diez minutos (el nombre, la afirmación, y una indicación de algunas de las direcciones en que puede aplicarse) y tratar los otros 20 en profundidad mediante problemas resueltos por los alumnos, contraejemplos construidos por los alumnos y aplicaciones descubiertas por los alumnos? Creo firmemente que este último método enseña más y enseña mejor. Parte del material no se cubre, pero gran parte de él se descubre (un viejo dicho que merece revivir), y por ende el método abre puertas cuya existencia podría no haber sido ni sospechada, escondidas detrás de la sólida estructura de los hechos establecidos. En cuanto al test M de Weierstrass, o lo que fuese que se hubiera mencionado sólo brevemente en clase,....bueno, existen libros y revistas, y se ha sabido que los estudiantes los leen en caso de necesidad.

SEMINARIOS DE PROBLEMAS

Así como un curso de problemas puede estar centrado en un tema perfectamente predefinido, puede también no estarlo; puede estar dedicado a fomentar la actitud cuestionadora y mejorar la técnica discutiendo problemas desparramados ampliamente en varios campos. Estos cursos técnicos, llamados a veces Seminarios de Problemas pueden existir a todos los niveles (principiantes, candidatos a doctores y grupos intermedios).

La mejor manera de conducir un seminario de problemas es, por supuesto, presentar problemas. pero es tan malo para un profesor omnisciente hacer todas las preguntas en un Seminario de Problemas como lo es el acaparar la exposición en un ciclo de clases estándar. Recomiendo vivamente que los estudiantes de un Seminario de Problemas sean estimulados para descubrir problemas por ellos mismos (probablemente en un principio vía ligeras modificaciones de problemas que han aprendido de otros), y que se los elogie públicamente (y calificación) por estos descubrimientos. Así como no se debería dar a los estudiantes todas las respuestas, tampoco debería dárseles todas las preguntas. Una de las partes más difíciles de la resolución de problemas es formular las preguntas adecuadas, y la única manera de aprender a hacerlo es practicando. A nivel de investigación ,especialmente, si propongo a un candidato un problema concreto de tesis no estoy haciendo mi trabajo de enseñarle a investigar. ¿Cómo encontrará su siguiente problema cuando ya no lo esté supervisando?

No hay manera sencilla de enseñar a alguien a hacer buenas preguntas, así como no hay manera fácil de enseñar a alguien a nadar o tocar el violoncello, pero eso no es excusa para rendirse. Uno no puede nadar por otro; lo mejor que puede hacer es supervisarlo con simpatía y potenciar las tentativas correctas con aprobación. Pueden darse consejos que a veces ayudan a extraer buenas preguntas de otras pocas, pero no existe substituto de los repetidos intentos y la prática.

Una sugerencia obvia es: generalice; otra algo menos obvia es: particularice; una algo sofisticado es: busque una particularización no trivial de una generalización. Otro consejo bien conocido es debido a Pólya: hágalo más fácil (El aforismo de Pólya merece ser difundido sin descanso. Con más detalle dice: Si no puedes resolver un problema, entonces hay otro problema más fácil que no puedes resolver, ¡y la tarea es encontrarlo!). El consejo al que tengo más afecto es: hágalo definido. Con esto quiero decir: no insista enseguida en hacer la pregunta natural ("¿Qué es... ?", "¿Cuándo es... ?", "¿Cuánto es... ?") sino que enfoque primero una alternativa sencilla (pero no trivial) que pueda contestarse por si-no ("¿Es un...?").

EPILOGO

Realmente creo que los problemas estan en el corazón de las matemáticas, y espero que como profesrores, en aulas, seminarios y libros y artículos que escribamos los enfatizaremos más y más, y entrenaremos a nuestros estudiantes para que sean mejores propositores de problemas y resolvedores de problemas que lo que somos nosotros.

* Extracto de un artículo publicado en el American Mathematical Monthly agosto-setiembre 1980 pp 519-524.

* Sobre el autor: Recibió su doctorado en la Universidad de Illinois; ha ocupado consecutivamente cargos en Illinois, Siracusa, Chicago, Michigan, Hawai, Indiana, Santa Bárbara e Indiana, y como visitante, durante varios periodos, al Institute for Advanced Study, Montevideo, Miami, Harvard, Tulane, Universidad de Washington (Seattle), Berkeley, Edimburgo y Perth. Ha publicado varios libros y artículos; ha recibido una beca Gunggenheim y es miembro de la Real Sociedad de Edimburgo y la Academia Húngara de Ciencias.
La MAA (Mathematics American Association) le ha otorgado el premio Chauvenet y dos premios Ford. Es miembro activo del MAA y de la AMS (American Mathematical Society), y será el editor del Americal Mathematical Monthly a partir de enero del 82.
Sus intereses en matemáticas se centran en la teoría de la medida, la tería ergódica, la lógica algebraica y operadores en espacios de Hilbert, con incursiones en probabilidad, estadística, grupos topológicos y álgebras de Boole.

SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS. REFLEXIONES A PARTIR DE UN ARTICULO DE P. HALMOS [1]

PASCUAL LLORENTE

INTRODUCCION

Recientemente, el profesor P.R. Halmos ha publicado un interesante artículo bajo el sugestivo título: "El corazón de las matemáticas".[2] Allí sostiene la tesis de que la principal razón de la existencia de los matemáticos es la necesidad de resolver problemas y que, en consecuencia, el corazón de las matemáticas (de lo que las matemáticas realmente consisten) son los problemas y las soluciones. Después de referirse a los libros de problemas y de presentar algunos de ellos, se dedica a extraer algunas consecuencias pedagógicas de su tesis. Considera algunos problemas de los cursos tradicionales (muy especialmente el derivado del excesivo material que se debe cubrir), propone métodos alternativos para desarrollarlos y analiza la conveniencia de introducir un nuevo tipo de cursos que él llama: "Seminarios de problemas".

El profesor Halmos es bien conocido por las últimas generaciones de matemáticos, [3] tanto por sus trabajos de investigación como por su larga labor docente. Lo que hace más valioso el artículo que mencionamos es que sus conclusiones e indicaciones pedagógicas no son el fruto de una abstracta elaboración racional, puramente teórica, sino de su amplia y rica experiencia de maestro.

Uno de los objetivos de esta nota (que, según creo, por sí sóla la justifica) es el de llamar la atención de mis colegas, profesores y estudiantes, sobre este artículo del profesor Halmos

(1) Estas reflexiones, si bien son una consecuencia de las meditaciones y discusiones mantenidas durante muchos años, han sido redactadas con la urgencia que imponía el deseo de incluirlas en este Nº 3 de Aleph. Por tal motivo, quisiera que se consideraran como lo que son: una redacción previa que pueda ser utilizada como punto de partida para una discusión amplia de estos temas.

(2) P. R. Halmos, The heart of mathematics, American Mathematical Monthly 87, 7 (1980), pág. 519-524.

(3) En particular por su famoso libro: Measure Theory, Van Nostrand Reinhold, New York, 1950, que casi todos hemos tenido que estudiar en su momento.

en estos momentos en que los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas han cobrado nueva fuerza y actualidad en nuestro medio.

Pero creo que también puede ser interesante tratar de sumar, al trabajo del profesor Halmos, algunas consideraciones extraídas de mi experiencia como profesor en diversas universidades de América Latina y, ahora, en la Universidad Autónoma de Barcelona. Y esto por dos motivos principales: primero, para dejar constancia de que las conclusiones y recomendaciones del profesor Halmos (que, básicamente, suscribo) no son válidas y aplicables sólo en un medio "científicamente desarrollado", sino también en medios más modestos como los nuestros. Segundo, porque pienso que es conveniente matizar algunos de los temas tratados por el profesor Halmos e incluir otros que él no ha considerado en su artículo.

Muchas de las consideraciones que siguen pueden ser aplicables a la enseñanza de las matemáticas en otros niveles, sin embargo en esta nota me referiré sólo a la enseñanza universitaria.

¿QUE SON LAS MATEMATICAS?

Parece necesario dar una respuesta a esta pregunta antes de comenzar a considerar la problemática propia de la enseñanza de las matemáticas:¿qué enseñar, cómo enseñar, etc.? No voy a analizar aquí las dificultades que se suelen presentar al tratar de dar una respuesta a esta pregunta, ni las diversas respuestas posibles, ni las implicaciones pedagógicas de cada una de ellas;[4] simplemente me limitaré a ofrecer un ejemplo: Si las matemáticas son una ciencia deductiva, formalizada, constituída por un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables; entonces su enseñanza deberá realizarse según el "estilo deductivista" (del que nos ocuparemos más adelante). Felizmente ya son pocos los que defienden un enfoque semejante (personalmente no creo que nunca haya sido defendido seriamente por ningún matemático creativo), aunque todavía son muchos los

(4) Considero que estas cuestiones son de gran importancia y espero poder ocuparme de ellas en otra oportunidad. Pienso que, en general, nos manejamos con nociones vagas que aceptamos de manera acrítica. Lamentablemente y con frecuencia, estas nociones corresponden, aproximadamente, al enfoque deductivista presentado en el ejemplo ofrecido en el texto.

estudiantes que tienen que sufrir las consecuencias pedagógicas correspondientes.

También Halmos comienza su artículo tratando, de alguna manera, de dar una respuesta a esta pregunta. El sostiene que si bien las matemáticas consisten de axiomas, teoremas, demostraciones, conceptos, definiciones, teorías, fórmulas y métodos, ninguno de ellos es "el corazón de las matemáticas" y, como ya adelantara, su respuesta final es: "las matemáticas realmente consisten de problemas y soluciones".

Las implicaciones pedagógicas de esta respuesta son claras e inmediatas: "la obligación de todos los enseñantes, y de los profesores de matemáticas en particualr, es mostrar a sus estudiantes los problemas, mucho más que los resultados" y, por supuesto, adistrarlos para que sean capaces de plantearlos correctamente y resolverlos.

Como he dicho antes, no me ocuparé aquí de dar una respuesta propia a la pregunta: ¿qué son las matemáticas? En principio aceptaré la respuesta dada por Halmos. Sin embargo, creo que es conveniente matizarla y, en cierto modo, completarla con un par de observaciones.

Por una parte, quiero insistir en algo que, según me parece, está implícito en el artículo de Halmos. Los axiomas, teoremas, conceptos y demás "ingredientes esenciales" de las matemáticas, tienen su origen y su razón de ser como parte de la actividad de plantear y resolver problemas. Esto también tiene sus consecuencias pedagógicas. Por ejemplo, si aceptamos que todo teorema corresponde a la resolución de un problema, sería un error pedagógico enunciar y demostrar teoremas sin mostrar los problemas que los originaron y los problemas que resuelven.

Por otra parte, al aceptar que las matemáticas son una actividad humana que consiste en plantear y resolver determinados problemas, debemos aceptar también que esa actividad tiene su historia y que no es posible comprender el proceso de producción de los conocimientos matemáticos separado de su historia. Pienso que el profesor Halmos estará de acuerdo en este punto, pero es un hecho que este aspecto está descuidado en su artículo.

Tampoco me ocuparé aquí de las relaciones entre la historia de las matemáticas y su enseñanza. Sólo quiero destacar que la respuesta de Halmos matizada con el aspecto histórico, tiene como implicación pedagógica, no sólo la de centrar la enseñanza en los problemas sino, más generalmente, la de considerar toda la heurística, es decir: la metodología real de la producción de los conocimientos matemáticos.(5)

LOS CURSOS TRADICIONALES

Tradicionalmente, los cursos de matemáticas en nuestras universidades se desarrollan según el "estilo deductivista" y con una metodología de exposición de "tipo euclídeo".(6) Halmos, un poco de pasada, caracteriza y critica este tipo de curso y sus resultados: "En un curso tradicional (lecture course) algunas veces lo que se consigue no es mucho más que aprender el nombre de un teorema, quedar intimidado por su complicada demostración y vivir en zozobra ante la posibilidad de que pueda aparecer en el examen".

Un problema, que Halmos considera con más detenimiento, es el de la casi permanente preocupación que tienen muchos profesores por la gran cantidad de material que deben cubrir en un curso. Este problema es una consecuencia directa del enfoque deductivista que es aceptado tácita o conscientemente.(7) Otra consecuencia de este enfoque es el problema (que Halmos no men-

(5) Este "enfoque heurístico" ya fue presentado por el Profesor Polya hace más de 25 años. Ver: George Polya, Matemáticas y razonamiento plausible, Editorial Tecnos, S.A., Madrid, 1966 (traducido del original: "Mathematics and Plausible Reasoning", vols. 1 y 2, Princeton University Press, 1954).

(6) Supongo que la mayoría de los lectores tiene una mínima experiencia universitaria que le permitirá comprender el significado de esta afirmación. Para más detalles me remito al libro de G. Polya, ya citado, o el excelente libro de Imre Lakatos, Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1978 (traducido del original: "Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery", Cambridge University Press, 1976), pág. 165.

(7) Si las matemáticas son los teoremas, las teorías, etc., hay que tratar de enseñar todos los que sea posible (cuanto más, mejor). En muchas oportunidades he tenido que participar en la elaboración de programas y he comprobado que "de manera natural" el problema se plantea, más o menos, en estos términos: ¿Cuáles son los resultados que un licenciado en matemáticas "no puede dejar de conocer"? Después de atender las opiniones de cada uno de los especialistas presentes, se suelen presentar unos programas tan densos que, como dice Halmos, ningún profesor es capaz de desarrollar convenientemente y ningún alumno es capaz de asimilar en su totalidad.

ciona) de la compartimentación de la enseñanza.[8]

Halmos ofrece soluciones concretas para estos problemas. Soluciones que, por otra parte, él ha utilizado con éxito. En realidad lo que propone es un cambio de enfoque de la enseñanza, basado en la formulación y resolución de problemas. Esta propuesta me parece interesante y valiosa, pero, en cierto sentido, insuficiente.

Antes de extender la propuesta de Halmos, quiero señalar un aspecto vinculado a lo que él propone: <u>las clases de problemas en los cursos tradicionales</u>. No creo necesario insistir en las deficiencias que dichas clases padecen habitualmente y que son "sufridas" tanto por los estudiantes como por los profesores encargados de dictarlas.[9] Sólo diré que su comparación con las clases teóricas (tiempo dedicado a unas y otras, importancia relativa que se les asigna, etc.), muestra que la tendencia y el enfoque de los cursos tradicionales suele ser bastante diferente del recomendado por Halmos.[10]

(8) Una idea propia del enfoque deductivista es la de que las matemáticas se construyen y se aprenden "ladrillo sobre ladrillo". Cada curso se presenta, muchas veces, en forma aislada y desconectado de los demás. Cada tema debe ser desarrollado, en general, de manera exhaustiva, pues ya no se volverá a tratar y, en adelante, "se dará por sabido".

Esto origina varios problemas. Uno de ellos es la manifiesta incapacidad, por parte de los estudiantes, para tener visiones globales que le permitan relacionar los diversos conocimientos. Otro es la dificultad, que con frecuencia encuentran los profesores, para dictar los cursos, debida a la insuficiente preparación previa de los alumnos. (Dentro de este enfoque, aparentemente la única solución que existe es la de exigir más y suspender más).

(9) Con frecuencia estas clases son "masivas" (la relación docente/alumno puede llegar a ser de 1/100 o aún menor). En esas condiciones poco y nada es lo que se puede hacer de provechoso. Quizá el profesor explica en la pizarra cómo se resuelven algunos problemas (que él mismo propone) y los estudiantes "copian" esas resoluciones. No parece que alguien pueda aprender a plantear y resolver problemas con estos métodos. Es cierto que la situación "mejora" en los años superiores (siempre que las clases de problemas no se deban "eliminar" por falta de personal docente), pero normalmente los "vicios" continúan y los estudiantes no abandonan fácilmente su actitud pasiva y expectante.

(10) Otro aspecto que merece ser destacado es el de la excesiva subordinación de los problemas a la teoría (otra característica habitual del estilo deductivista). Problemas destinados a "ilustrar" un teorema demostrado en la clase no son, en general, problemas en el sentido de Halmos. Menos aún pueden considerarse como tales a las listas de ejercicios.

Como ya he dicho, creo que la propuesta de Halmos debe ser ampliada hasta la de adoptar un enfoque heurístico[11] para la enseñanza de las matemáticas.

En definitiva, quizá se trate de cambiar la pregunta tradicional (ver nota 7): "¿Qué es lo que tiene que conocer un graduado?" por esta otra: "¿Qué es lo tiene que saber hacer un graduado?". Halmos responde: un graduado debe saber plantear correctamente los problemas y resolverlos. Yo propongo una respuesta más amplia: un graduado debe saber cómo se han producido y cómo se producen los conocimientos matemáticos.

Por supuesto que el "motor" de esta producción han sido y seguirán siendo los problemas. Pero hay una serie de aspectos fundamentales en ese proceso de producción que una respuesta como la de Halmos no incluye necesariamente. Por ejemplo, el origen y la evolución de los problemas, los procesos de abstracción y de formalización, la elaboración de los conceptos, etc.

Este proceso de producción no ha sido creciente y rectilíneo, como pretende hacer aparecer el estilo deductivista, sino lleno de marchas y contramarchas, de intentos fallidos, de conjeturas equivocadas y demostraciones falsas. El estilo deductivista trata de ocultar todo vestigio de error[12] pero, como señala Feyerabend, "...el científico que trabaja en una situación histórica particular debe aprender a reconocer el error y convivir con él..."[13] La consecuencia pedagógica es clara. En los cursos, los profesores deberíamos mostrar algunos de los errores cometidos, reivindicar el derecho de equivocarnos (dejando de lado esa molesta apariencia de infalibilidad que ni las matemáticas ni nosotros tenemos), permitir que los es-

(11) Este enfoque heurístico se encuentra desarrollado, tanto teóricamente como a través de numerosos ejemplos concretos, en los libros citados de G. Polya y, sobre todo, de I. Lakatos. Sin embargo es necesario seguir trabajando en esta dirección mediante experiencias docentes reales.

(12) "El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada". (Lakatos, op. cit., pág. 166).

(13) Paul K. Feyerabend, Contra el Método, Editorial Ariel, Barcelona, 1975 (traducción del original: "Against method", University of Minnesota, 1970), pág. 9.

tudiantes se equivoquen y tratar de aprender entre todos aquello que esos errores nos enseñan. Quizás, como propone Feyerabend, sería interesante desarrollar una "teoría del error".(14)

De todas maneras creo como Halmos, que las tradicionales clases magistrales (especie de monólogos, más o menos "pulidos y elegantes", dictados desde la pizarra) son menos útiles que una "fumble-and-blunder session"(15) en la que, con la participación de todos, se trate el tema que corresponda tal y como los matemáticos de carne y hueso tratan sus problemas. En este sentido pienso que nuestras actividades docentes deberían ser cada vez más similares a nuestras actividades de investigación. No, por supuesto, en cuanto al nivel o a los temas tratados, sino por la forma particular que toma dicha actividad.

EL ENFOQUE DEDUCTIVISTA Y EL ENFOQUE HEURISTICO

Un resumen de las diferencias entre ambos enfoques se encuentra en las siguientes palabras de Lakatos: "Como ya se ha mencionado, el estilo deductivista desgaja las definiciones generadas por la prueba de sus "pruebas-antepasadas" y las presenta aisladamente de un modo artificial y autoritario. Oculta los contraejemplos globales que han llevado a su descubrimiento. Por el contrario, el estilo heurístico pone en el candelero esos factores y hace hincapié en la situación problemática: hace hincapié en la "lógica" que ha dado a luz al nuevo concepto."(16)

Ya he hecho ciertas críticas al enfoque deductivista. Ahora me parece justo analizar algunos de los argumentos que suelen presentarse a su favor y en contra del enfoque heurístico. Estos son de dos tipos: teóricos y prácticos.

Entre los teóricos, hay dos que se refieren directamente a

(14) "El propio error es un fenómeno histórico. Una teoría del error habrá de contener por ello reglas basadas en la experiencia y la práctica, indicaciones útiles, sugerencias heurísticas mejor que leyes generales, y habrá de relacionar estas indicaciones y estas sugerencias con episodios históricos para que se vea en detalle cómo algunas de ellas han llevado al éxito a algunas personas en algunas ocasiones. Desarrollará la imaginación del estudiante sin proveerle de prescripciones y procedimientos ya preparados e inalterables." (Feyerabend, op. cit., pág. 9).

(15) Prefiero no traducir esta acertada expresión de Halmos (fumble = = ir a tientas, blunder = equivocarse, meter la pata).

(16) I. Lakatos, op. cit., pág. 168.

la heurística: "Así pues, hoy en día, disponemos de dos argumentos en favor del estilo deductivista. Uno de ellos se basa en la idea de que la heurística es racional y deductivista. El segundo argumento se basa en la idea de que la heurística no es deductivista, aunque tampoco racional.../luego/, si queremos que nuestra presentación de los descubrimientos matemáticos se realice racionalmente, habrá que proceder al estilo deductivista. "(17)

La primera posición, que asegura que la deducción es el patrón heurístico de las matemáticas, me parece francamente insostenible. En cuanto a la segunda, me consta por experiencia propia que la heurística (expresable o no, en una metodología racionalizada) permite presentar racionalmente los descubrimientos matemáticos.

Otro posible argumento teórico es el de la modernidad.(18) Se deben enseñar las matemáticas actuales, con todo el grado de abstracción y de formalización al que han llegado y que les son propios. Algunos matemáticos suponen o temen que el "largo y lento" estilo heurístico no permite alcanzar estas metas y, por tal motivo lo rechazan. Como mostraré más adelante, estas suposiciones o temores, son infundados.

Los argumentos prác ticos son, fundamentalmente los de brevedad y tradición. Como dice Lakatos: "Algunos matemáticos profesionales... dicen frecuentemente que la introducción del estilo heurístico exigiría escribir de nuevo los libros de texto y los haría tan largos que nunca se podrían leer hasta el final. También los artículos se alargarían mucho. (Si bien hay que admitir que serían también muchos menos, puesto que la enunciación de la situación problemática mostraría de un modo

(17) I. Lakatos, op. cit., pág. 167.

(18) Pero "modernidad" en serio, no lo que frecuentemente esgrimen algunos defensores de la "matemática moderna" que con la excusa de que no se pueden seguir enseñando las matemáticas de dos o tres siglos atrás, pretenden, por ejemplo, que se les enseñe a los niños una "teoría de conjuntos" que, en definitiva, no es más que una representación de la lógica de los griegos. Después se suman algunos "didactas", con sus "usos" de los colores, de los trabajos de Piaget, etc. Todo lo cual termina con la dramática pregunta: "¿Por qué Juanito no sabe sumar?". Para más datos ver: Morris Kline, El Fracaso de la Matemática Moderna, Siglo XXI de España Editores, S.A., Madrid, 1976/78 (traducido del original: "Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math", St. Martin's Press, Nueva York, 1973).

demasiado obvio la inanidad de bastantes de ellos). La respuesta a este argumento pedestre es: intentémoslo."[19]

En cuanto a la brevedad, estoy dispuesto a admitir que el estilo deductivista (que presenta la "última versión" ya "depurada") es más eficiente, si de lo que se trata es de "pasar" la mayor cantidad de materia en el menor tiempo posible.[20] Si además se pretende que los alumnos asimilen los conocimientos, entonces la situación es otra.

Estos argumentos de brevedad se relacionan con dos cuestiones que ya he mencionado. Una de ellas es la vinculada al excesivo material que se debe o quiere cubrir en cada curso. La otra es la que se refiere a la suposición de que el estilo heurístico es tan largo y lento que no permite llegar, en un tiempo razonable, hasta los temas y métodos de las matemáticas actuales.

La primera ya ha sido contestada en este artículo y en el de Halmos. En cuanto a la segunda, sólo puedo decir que las experiencias concretas que he realizado me demuestran lo contrario.[21]

El argumento de la tradición se puede enunciar aproximadamente así: puesto que los libros y los artículos de matemáticas estan escritos en estilo deductivista, ésto es lo que se debe enseñar a los estudiantes.Además, siempre se ha procedido de este modo y los resultados están a la vista.

(19) I. Lakatos, op. cit., pág. 167.

(20) Hace unos años, conversando sobre estos temas, mi buen amigo Norberto Kerzman me decía que a aquellos colegas que presentan estos argumentos de brevedad se les podría sugerir un método más eficiente aún: Grabar su clase en una cinta magnética y luego pasarla en el aula a alta velocidad. De esta manera podrá pasar mucha más materia y hasta es posible que sus alumnos no observen una gran diferencia.

(21) Es verdad que la mayoría de los cursos que he dictado con un enfoque heurístico han sido muy "lentos" al comienzo (aunque creo que ésto se debía más a las deformaciones e inhibiciones que el estilo deductivista había producido en los estudiantes, que a una característica propia del estilo heurístico). Pero ese "tiempo perdido" siempre fue recuperado con creces después. Es increíble el ritmo de trabajo que se puede alcanzar en una clase donde los estudiantes están motivados y participan activamente. Algunas veces, la cantidad de materia vista fue equivalente (si no superior) a la de un curso tradicional. Por otra parte, si se ven menos temas pero más profundamente, se llega más fácilmente a los desarrollos actuales.

Como se ve, el argumento tiene varios aspectos que exigen respuestas separadas.

Lo primero que quiero destacar es que si bien el estilo deductivista se inicia con Euclides, su adopción como "estilo habitual" es relativamente reciente. Por el contrario, es el estilo heurístico el que se entronca con la tradición de los grandes matemáticos.[22]

Acepto que gran parte de la literatura matemática actual utiliza el estilo deductivista,[23] lo que no entiendo es cómo este hecho pueda implicar que la enseñanza deba realizarse en dicho estilo. Si lo que se pretende es que los estudiantes aprendan a utilizar esta literatura, me inclino a pensar que el enfoque heurístico puede resultar más adecuado.[24]

La última parte del argumento corresponde a una actitud conservadora según la cuál ningun cambio es necesario puesto que todo funciona bien. Aunque pienso que la realidad cotidiana nos indica lo contrario, no presentaré más argumentos en este sentido.

Por último quiero referirme al carácter autoritario señalado en la cita de Lakatos al comienzo de esta sección. En su libro (ver nota 6), Lakatos desarrolla una serie de interesantes ejemplos concretos, a los que me remito. Pero "auto-

(22) " [Euler] pensaba no haber hecho bastante por la ciencia si no hubiese añadido, a los descubrimientos con que la enriqueció, la íntegra exposición de las ideas que le llevaron a esos descubrimientos". Condorcet. (La cita está tomada de Polya, op. cit., pág. 133).

(23) Felizmente no se trata de <u>toda</u> la literatura matemática. Hace unos 25 años, el Profesor González Domínguez (uno de mis maestros en Buenos Aires) nos decía: "Tal libro es bueno, está <u>escrito a la rusa</u>". Para él había dos clases de libros de matemáticas: los que fueron escritos pensando en las críticas de los colegas y los que fueron escritos pensando en los lectores que debían estudiarlos. Decía que estos últimos estaban "escritos a la rusa" porque, en general, los autores rusos no son tan amigos del estilo deductivista. Actualmente, algunos matemáticos rusos han adoptado este estilo (quizá por exigencias de algunas editoriales comerciales) pero, en todo el mundo, se observa el comienzo de una tendencia de signo contrario.

(24) En efecto, actualmente estoy constatando el hecho de que la mayoría de los estudiantes se gradúan habiendo leído muy pocos libros y ninguna revista científica. El enfoque heurístico, al tratar en profundidad algunos temas, permite (sobre todo en los últimos años) entrenar a los estudiantes en el uso crítico de la literatura matemática.

ritario" es un adjetivo calificativo que, en general, no resulta particularmente agradable. Por eso insisto en aclarar que está aplicado al estilo deductivista y no a los profesores que adoptan tal estilo (cada uno de los cuales puede tener o no, una actitud autoritaria). Por otra parte, este carácter autoritario parece ser común a toda la enseñanza científica actual.(25)

Es un hecho que el enfoque deductivista transmite una visión falsa de las matemáticas. Estas se presentan como una construcción inamovible, casi perfecta, llena de verdades eternas y misterios insondables, cuyas fronteras se pierden en el infinito. Es como una diosa lejana e inaccesible que se respeta y admira, que se adora y se teme. No es de extrañar que muchos jóvenes estudiantes se sientan desilusionados o convencidos de su incapacidad para practicar tan complejo sacerdocio. Menos aún nos debe extrañar que los niños, un poco más espontáneos, huyan con frecuencia de las matemáticas como de la peste.

El enfoque heurístico permite quebrar esta mistificación. Presenta a las matemáticas como una actividad humana accesible, viva, cambiante e imperfecta, llena de problemas interesantes, muchas veces impre visible y sorprendente, capaz de atraernos y de despertar nuestra pasión.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Somos muchos los que pensamos que la enseñanza de las matemáticas, en todos los niveles, requiere cambios profundos. Esos cambios no se refieren tanto a los programas como al estilo. Es el enfoque de la enseñanza lo que debe cambiar.

Un tal cambio de enfoque no puede realizarse "por decreto", de una vez, sino de manera paulatina y debe comenzar por la formación de los profesores. Actualmente, en España, los profesores de matemáticas de enseñanza media se forman en las universidades, junto con los matemáticos. Las experiencias realizadas en otros paises me demuestran que ésto es lo más adecuado.

(25) "Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente. Mientras que en matemáticas este autoritarismo sigue el patrón deductivista que se acaba de describir, en la ciencia opera mediante el patrón inductivista." (Lakatos, op. cit., pág. 166, nota 39).

Pero cada Departamento de Matemáticas debe tomar conciencia de la responsabilidad social que ello significa y actuar en consecuencia.[26]

No creo mucho en los cursos de pedagogía y de didáctica que <u>dicen</u> como se <u>debe</u> enseñar. La experiencia me muestra que a dar clase se aprende, fundamentalmente, <u>por imitación</u>. Es necesario mostrar en la <u>práctica</u> cómo se debe enseñar. Los futuros profesores (de enseñanza media y de Universidad) darán sus clases de manera muy similar a como ellos las han recibido y transmitirán a sus alumnos la visión de las matemáticas que sus profesores les han transmitido.[27]

Un cambio de enfoque de la enseñanza implica cambios en los programas (lo recíproco no es necesariamente cierto). Estos cambios deben tratar de evitar los problemas que habitualmente generan los cursos tradicionales: exceso de materia, compartimentación de la enseñanza, visión equívocada de las matemáticas, etc.[28]

(26) Utilizo la expresión "Departamento de Matemáticas" por ser, tal vez, la más generalizada. En cada caso deberá entenderse como "Facultad de Matemáticas", "Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias", etc.

En algunos Departamentos, tal vez por falta de personal docente, toda la enseñanza parece programada en función de los futuros matemáticos, descuidando la formación de los futuros profesores de enseñanza media. Si el enfoque de la enseñanza fuera más heurístico que deductivista, ésto no sería tan grave.

(27) Si ésto es así, parece claro que cualquier cambio profundo en la enseñanza de las matemáticas debe comenzar en los Departamentos de Matemáticas de las Universidades. Todo crítica y/o cambio que se haga en la enseñanza media es insuficiente (y hasta utópico) si no está acompañado de una crítica y/o cambio en la formación universitaria de los profesores.

(28) "Tal como hoy se concibe, la educación científica tiene este propósito, que consiste en llevar a cabo una simplificación racionalista del proceso "ciencia" mediante una simplificación de los que participan en ella. Para ello se procede del siguiente modo. Primeramente, se define un dominio de investigación. A continuación, el dominio se separa del resto de la historia y recibe una "lógica" propia. Después, un entrenamiento completo en esa lógica condiciona a aquellos que trabajan en el dominio en cuestión para que no puedan enturbiar involuntariamente la pureza (léase la esterilidad) que se ha conseguido. En el entrenamiento, una parte esencial es la inhibición de las intuiciones que pudieran llevar a hacer borrosas las fronteras. [...] Su imaginación queda restringida e incluso su lenguaje deja de ser el que le es propio. Es obvio que tal educación, tal compartimentación, tanto de los dominios del conocimiento como de la consciencia, no pueden reconciliarse fácilmente con una actitud humanita-

Es necesario reconocer que un cambio como el propuesto no es fácil. Para un profesor formado (y tal vez veterano) en el estilo deductivista, no es nada trivial cambiar de enfoque y de actitud. Esto, además de una buena exposición, requiere trabajo, tiempo y esfuerzo. Pero sería injusto y erróneo pensar que todo depende de los profesores. También los estudiantes tendrán que hacer un esfuerzo importante para cambiar su actitud de receptores pasivos y comprometerse activamente en el proceso de su propia formación y educación.

Estos cambios de enfoque y de actitudes significan una nueva relación docente-alumno (no sólo numérica sino también humana) que conlleva, entre otras cosas, a la necesidad de modificar el ámbito físico donde se desenvuelve la enseñanza. [29]

cio." (Feyerabend, op. cit., pág. 12. Sobre algunas consecuencias de la especialización, puede verse la extensa Nota 12, pág. 143-150).

Esta crítica de Feyerabend me parece muy justa y me lleva a plantear la cuestión de si no tiene más sentido formar "profesores de ciencias" para la enseñanza media que formar, como hasta ahora, profesores de matemáticas, profesores de física, profesores de química, etc. Por lo menos parece una aberración formar profesores de matemáticas prácticamente ignorantes de las ciencias naturales. (Lo mismo puede decirse de la formación de "matemáticos"). De todas maneras, con un enfoque heurístico de la enseñanza de las matemáticas (y de las ciencias) parece menos probable que se produzca este fenómeno de compartimentación.

(29) Actualmente, la mayoría de las aulas están preparadas para las exposiciones magistrales. Al frente una larga pizarra y un escritorio sobre una tarima, más allá una serie de filas de bancos para los oyentes. La mayor parte de los estudiantes se encuentran en lugares inaccesibles al profesor. Las posibilidades de establecer un diálogo o un trabajo en conjunto quedan reducidas al mínimo. Estas limitaciones, producidas por el ámbito físico, no son tales para las clases tradicionales. El profesor dicta (este verbo resulta sumamente adecuado en esta oportunidad) su clase mientras los alumnos se limitan a "tomar apuntes". En tales condiciones, las relaciones humanas que se establecen entre los individuos reunidos en el aula son prácticamente nulas.

Lo anterior se ve agravado por el hecho habitual de que los alumnos "están atrasados" y copian lo que el profesor les dicta sin comprender casi nada de lo que están escribiendo. ¿Cuál puede ser la utilidad real de estas clases? ¿No sería más eficiente que el profesor redactara los apuntes y se eliminaran las clases?

Parece natural que este tipo de actividad deje un sabor amargo. Para muchos profesores la "carga docente" (¿no es sorprendente y significativa esta expresión, incorporada ya en los medios docentes?) es una pesada tarea que deben realizar para poder dedicarse luego a actividades más inte-

Son muchas las tareas concretas que se deben realizar[30] y será necesario contar con el compromiso y el trabajo de todos: profesores, estudiantes y graduados.

Tradicionalmente, las grandes dificultades no han detenido a los científicos, ni les han servido de excusa para no abordar los problemas; por el contrario, les han servido de estímulo. Propongo que seamos fieles a esta tradición al considerar el problema de cambiar el enfoque de la enseñanza de las matemáticas y que, dispuestos a utilizar al máximo nuestras capacidades creativas, comencemos.

resantes . Para los estudiantes las clases se transforman, muchas veces, en una especie de tortura que es conveniente soportar si se desean aprobar los exámenes.

Creo que bien vale la pena intentar un cambio que, además de sus posibles ventajas técnicas, humanice nuestra actividad, nuestras relaciones, nuestras aulas y nos permita disfrutar de lo que hacemos.

(30) Algunas de estas tareas, según yo las entiendo, son auténticos trabajos de investigación sobre la historia, la heurística, la pedagogía y la didáctica de las matemáticas.

Com distingir una taronja d'un dònut*
(Mètode pràctic a l'abast de tothom)

J. Aguadé

Una taronja i un dònut no s'assemblen de res i tothom que no tingui pa a l'ull és capaç de distingir-los sense cap dificultat. Aquesta veritat tan evident deixa de ser-ho si pretenem donar-ne una fonamentació rigorosa. No ens n'hem d'estranyar: d'ençà de fa 2500 anys sabem que les coses que semblen fàcils deixen de ser-ho quan s'exigeix que siguin demostrades. En què ens podem basar per a distingir la forma d'una taronja de la d'un dònut?. Millor dit: quin criteri absolutament rigorós i infal.lible podríem donar per tal d'esbrinar sense possibilitat d'error si un objecte desconegut té la forma d'un dònut o bé la d'una taronja?. Per tal de veure que la resposta a aquesta pregunta no és gens trivial, podem citar un diàleg socràtic, possiblement apòcrif, que ens parla d'aquest tema:

Sòcrates: No has observat, amic Glaucó, aquests pastissos anomenats dònuts que tenen una forma ben curiosa?

Glaucó: Sí, certament els he vistos.

S.: I creus que la forma que presenten podria confondre's, diguem, amb la d'una taronja?

G.: Penso que no, donat que ambdues formes són ben diferents.

S.: Penso el mateix, bon amic meu. Malgrat això, creus que podries donar a un foraster que mai no hagués vist aquests objectes ni cap de semblant, un mètode per a distingir-los sense error?

G.: Li diria que les taronges són rodones i els dònuts tenen un forat al mig. Crec que així ho entendria.

S.: Molt possible fora que t'entengués, però el teu mètode no està lliure d'error.

G.: Com és això?

S.: En primer lloc, no és segur que el nostre foraster inculte conegui el sentit de la paraula "rodó" i en cas de conèixe'l, bé podria ser que l'apliqués al dònut, donades les seves formes arrodonides i al fet de que és ben apte per a rodolar per un pendent. Tampoc no és cert que les taronges siguin totes rodones. N'he vist d'allargassades com un ou i fins de banyudes i de formes ben irregulars.

G.: Indiscutiblement, hem de convenir en el criteri sobre l'arrodoniment no és pas de la mena dels que ens convenen. Però hi ha també el criteri del forat.

S.: I com explicaries al nostre foraster el que és un forat?

---

* Aquest article, de manera premeditada, està escrit com si el lector no sabés ni un mot sobre Topologia Algebraica, tot i que en general això no serà cert. El motiu és que es tracta de veure que certs conceptes de Topologia Algebraica poden motivar-se fàcilment, àdhuc als estudiants més joves.

G.: Diria que el forat que té el dònut és una part del dònut on no hi ha dònut.

S.: T'has ben embolicat, amic Glaucó! Si el forat és on no hi ha dònut, com pot ser una part del dònut? I si tu vols explicar què és un dònut, com ho pots fer basant-te en el no-dònut?. D'altra banda, podria molt bé ésser que a l'interior de la taronja hi hagués un tros buit. Seria també un forat i no per això canviaria la forma exterior de la taronja.

G.: Certament ara veig, oh mestre!, que no és pas fàcil descriure la forma dels objectes que hom pot veure a la natura i conèixer quins són els trets que les diferencien. També veig que la ciència de la Geometria, tal com la coneixem, no basta per a resoldre aquest problema...

El diàleg continua, però aquest era el tros que ens interessava. Avui dia disposem d'una Geometria que els grecs no van conèixer i que està més ben adaptada a "descriure la forma dels objectes". Es tracta de la Topologia Algebraica, una branca de la Matemàtica que ha conegut durant el segle XX un desenvolupament immens i que a l'actualitat ocupa un lloc preeminent per la seva vitalitat i per les nombroses interrelacions amb altres camps de la Matemàtica. L'objectiu d'aquest article és posar de manifest que certes idees bàsiques de Topologia Algebraica es basen en conceptes extremadament senzills i intuïtius. Ho farem resolent el problema de distingir la forma d'una taronja de la forma d'un dònut per diversos mètodes i veient que cada un d'ells duu a conceptes importants a Topologia Algebraica. Com ja Plató ens diu que hi pot haver taronges i dònuts molt deformats, ens cal prendre una postura radical: anomenarem taronja a tot objecte que pugui obtenir-se a partir d'un objecte esfèric deformant-lo tan com vulguem, sense trencar-lo (per exemple, un ou, un plàtan, una botifarra, etc.) i anomenarem dònut a tot objecte que pugui obtenir-se a partir d'un objecte de forma de dònut, deformant-lo tan com vulguem sense trencar-lo (per exemple, un tortell, una tassa, una pipa, etc.)

Heus aquí diversos mètodes per a distinguir una taronja d'un dònut:

Mètode 1: amb un cordill

"Prengui's un cordill elàstic i faci's un llaç al voltant de l'objecte en qüestió. Si, de qualsevol manera que es faci el llaç, aquest pot fer-se lliscar fins a deixar anar l'objecte, es tracta d'una taronja. Si, per contra, som capaços de fer un llaç al voltant de l'objecte, del qual aquest no es pugui despendre, és que es tracta d'un dònut".

Dit breument: un dònut pot penjar-se d'un fil sense que caigui (passant el fil pel forat del mig) mentre que una taronja no es pot penjar d'un fil sense que pugui escórrer-se i caure.

Quina és la propietat topològica de les dues figures que s'amaga darrera aquesta construcció del cordill? Es tracta d'un invariant topològic de gran importància, anomenat grup fonamental. Anem-ho a veure: Un llaç al voltant d'una taronja o d'un dònut no és res més que una corva tancada dibuixada sobre la superfície. Dir que el cordill és elàstic vol dir que considerem equivalents dues corves que puguin transformar-se una en l'altra per una deformació contínua, pel que se'n diu una homotopia. El mètode anterior es basa en què, sobre l'esfera, tota corva tancada pot contraure's fins a un punt, mentre que sobre el dònut hi ha corves tancades que no poden contraure's fins esdevenir un punt. A Topologia es diu que l'esfera és un espai simplement connex mentre que el dònut és un espai no simplement connex.

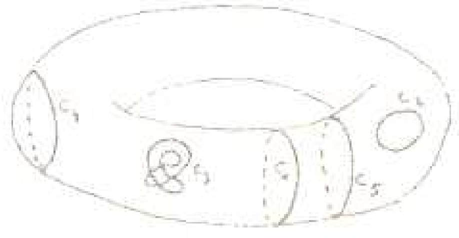
El mètode del cordill distingeix entre una taronja i un dònut perquè ambdós objectes tenen grups fonamentals diferents.

<u>Mètode 3</u>: amb un ganivet.

"Faci's un tall de banda a banda de l'objecte en qüestió. Si no queda dividit en dues parts és que es tracta d'un dònut. Si, de qualsevol manera que es faci el tall, sempre queden dos trossos separats, és que es tracta d'una taronja".

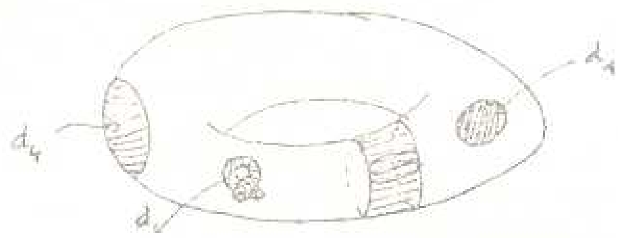
Dit breument, sempre que donem un tall a una taronja la partim en dues parts, però segons com tallem un tortell, cal fer dos talls per a separar-ne un tros.

Anem ara a veure com també aquest mètode d'aspecte poc científic es basa en un invariant topològic de gran importància: es tracta d'un cas particular dels anomenats grups d'homologia. Pensem, per exemple, en la superfície d'un dònut. Podem dibuixar-hi corves tancades, per exemple les corves c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Podem també considerar famílies finites de



corves tancades. Així, per exemple, podem considerar les cinc corves tancades anteriors que formen una família c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Designarem aquesta família per $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$. Si considerem el conjunt de totes aquestes famílies, veiem que es tracta d'un grup abelià perquè podem definir la suma de dues famílies com la unió, eliminant els termes repetits. Per exemple, la suma de la família $c_1 + c_2 + c_3$ + i la família $c_3 + c_4 + c_5$ serà la família $c_1 + c_2 + c_4 + c_5$. Tenim, doncs, un grup abelià que s'anomena grup dels cicles.

D'altra banda, podem considerar sobre la superfície del dònut zones que puguin recobrir-se amb un disc de material elàstic, per exemple, les zones d_1, d_2, d_3, d_4.



Fixem-nos ara en què cada una d'aquestes zones presenta una vora que pot descriure's com una unió de corves tancades. Per exemple, podem dir que la vora de d_1 és c_2, la vora de d_2 és c_3, la vora de d_4 és c_4 i la vora de d_3 és $c_1 + c_5$. Això ens diu que tenim uns certs cicles que són vora de zones planes. De fet, aquests cicles que són vores formen un subgrup del grup dels cicles, anomenat el subgrup de les vores. Podem ara definir un grup H que sigui elquocient del grup dels cicles pel subgrup de les vores. Aquest grup H és el que s'anomena "primer grup d'homologia a coeficients mòdul 2". Quant val? Com pot calcular-se? Aquí és on intervé la Topologia Algebraica i estudia propietats d'aquests grups que ens permeten de calcular-los. El resultat és aquest: per a l'esfera el grup val zero, per a la superfície del dònut el grup val $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Quina relació hi ha entre aquests grups d'homologia i el nostre mètode del ganivet? Molt senzill: si el grup de l'esfera val zero, això vol dir que tot cicle és vora, és a dir, que tota corva tancada limita una zona de la superfície. Per tant, si tallem seguint qualsevol corva tancada sempre obtindrem dos trossos. En canvi, al dònut hi ha cicles que no són vores (perquè el grup d'homologia és diferent de zero), és a dir, hi ha corves tancades que no limiten cap zona de la superfície, és a dir, que no separen el dònut en dues parts. Si tallem per una d'aquestes corves (per exemple, la corva c_1 n'és una) no obtenim pas dos trossos, sinó un de sol.

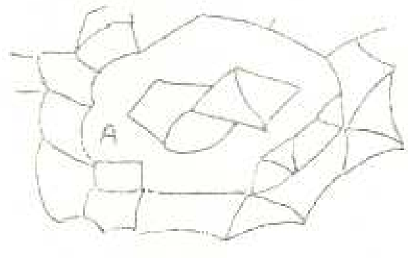
El mètode del ganivet distingeix una taronja d'un dònut perquè ambdós objectes tenen grups d'homologia diferents.

Mètode 3 o de les parcel.les

"Imagini's que la superfície de l'objecte en qüestió és un terreny a parcel.lar i faci's una parcel.lació ben feta amb parcel.les de forma i mida arbitrària, separades entre si per línies. Anomenem plaça al lloc on es troben tres o més d'aquestes línies i carrer als segments entre dues places. Sumi's el nombre de parcel.les amb el de places i resti's el nombre de carrers. Si dóna 2, es tracta d'una taronja, si dóna zero, és un dònut".

Aquest mètode gairebé màgic es basa en l'invariant topològic més antic que es coneix, anomenat "característica d'Euler". Es tracta d'un enter que es pot definir a partir dels grups d'homologia de què hem parlat al tractar el mètode del ganivet. Val 2 pel cas d'una esfera i val zero pel cas de la superfície d'un dònut. Un dels teoremes més bonics de la Topologia Algebraica diu que si sumem les parcel.les i les places i restem els carrers obtenim la característica d'Euler de l'objecte en qüestió i això independentment de com haguem fet la parcel.lació! No és meravellós?

Cal dir unes paraules sobre l'observació de què la parcel.lació ha de ser "ben feta". No donaré una definició rigorosa del que és una parcel.lació ben feta, però es refereix, per exemple, a que les parcel.les han de tenir forma més o menys poligonal, és a dir, una parcel.lació com la següent



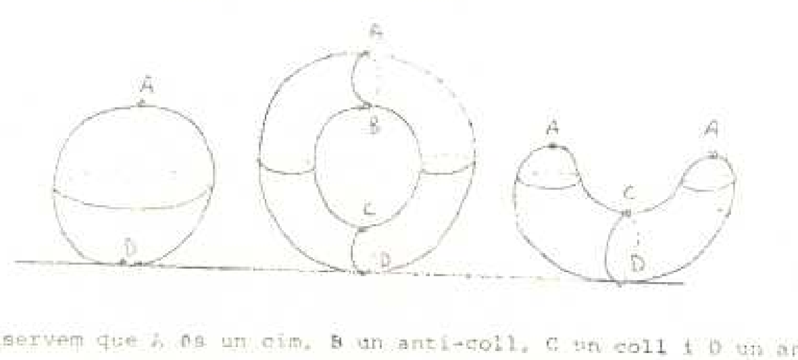
no s'admet perquè la parcel.la A té una forma no permesa.

El mètode de les parcel.les distingeix una taronja d'un dònut perquè ambdós objectes tenen característiques d'Euler diferents.

<u>Mètode 4</u> o dels colls i muntanyes

"Col.loqui's l'objecte en qüestió dret sobre una taula i miri's com si fos una zona de terreny. Presentarà cims i colls. També presentarà anti-cims, és a dir, cims cap per avall i anti-colls, és a dir, colls cap per avall. Si presenta carenes horitzontals o zones planes, les deformem una mica (o inclinem una mica la taula) per tal de què deixin de ser horitzontals. Sumi's el nombre de cims i anticims i resti's el de colls i el d'anti-colls. Si dóna 2, és una taronja, si dóna zero, és un dònut".

Posem un exemple: Si posem la taronja, el dònut i una taronja deformada en la forma següent:



observem que A és un cim, B un anti-coll, C un coll i D un anti-cim.

Darrera aquest mètode s'amaga la part més elemental de l'anomenada "teoria de Morse" que estudia funcions reals definides sobre varietats. En el nostre cas, sobre la taronja i el dònut posats sobre la taula tenim la funció "alçada" que associa a cada punt de l'objecte la seva alçada referida a la taula. Què són els cims, anticims, colls i anti-colls? Són, simplement, els màxims, mínims i punts d'inflexió de la funció alçada, és a dir, els punts en què la derivada s'anu.la, els punts anomenats crítics. Per tant, quan comptem els "accidents del terreny" estem de fet comptant els punts crítics d'una certa funció real definida sobre l'objecte. El primer teorema de la teoria de Morse diu que la suma (algebraica) dels punts crítics de qualsevol funció definida sobre una superfície coincideix amb la característica d'Euler de la superfície, de la qual hem parlat al mètode de les parcel.les. I això independentment de la funció que prenguem (sempre que tingui només un nombre finit de punts crítics)!

El mètode dels colls i muntanyes distingeix una taronja d'un dònut perquè ambdós objectes admeten funcions reals amb diferent nombre de punts crítics (compats amb el seu signe).

Podriem encara citar altres mètodes, però ja n'hi ha prou. Hem vist com conceptes que hom podria considerar "superiors" com ara el grup fonamental, l'homologia, triangulacions d'una superfície, característica d'Euler, teoria de Morse, punts crítics de funcions, etc. són, en el fons, senzills i intuitius. També hem vist que la "geometria que s'ocupa de "descriure les formes dels objectes" com l'anomenava Plató, la Topologia Algebraica, com és ara coneguda, és un camp d'una importància pedagògica considerable, injustament inexplorada.

Exercici: Modificar l'article anterior allà on calgui i convertir-lo en un titulat: Com distingir un dònut d'un càntir.

(Nota: Al llarg del text anterior utilitrem els mots "Topologia Algebraica" en un sentit no tècnic. De fet ens referim a una sèrie de disciplines que avui dia estan més o menys individualitzades: Topologia Algebraica propiament dita, Topologia Diferencial, Toplogia Geomètrica, Geometria Diferencial Global, etc. Normalment hom es refereix a totes aquestes disciplines amb el nom comú de Topologia, però nosaltres ho hem fet per a evitar la confusió amb la Topologia General que és una branca independent que pràcticament no té res a veure amb tot això.)

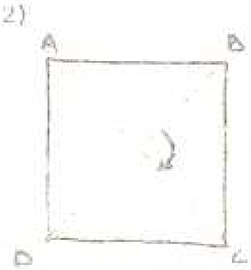
N.R.: aquest article procedeix del "Butlletí de la Secció de Matematiques de la Societat Catalana de Ciencies".

juegos y entretenimientos

Solución a los problemas del nº2

1) Rip debe tumbar el bolo nº6 o el nº10, dejando los bolos separados en grupos de 1, 3 y 7 bolos, con lo que tiene asegurado el partido. Si el pequeño-hombre-de-la-montaño hubiese tumbado en su primera jugada el bolo nº7, habría ganado el partido ya que los bolos quedaban separados en dos grupos idénticos, y a partir de entonces podía contestar cada jugada de Rip con su simétrica.

2)



Como tres puntos siempre están en un plano, si ponemos la mesa en el jardín, por fuerza deberán tocar el suelo tres patas como mínimo (como se observa también en la experiencia cotidiana). Sean por ejemplo en la figura las A,B y C. Si ahora giramos la mesa 90° en el sentido de las agujas del reloj como indica la flecha, la pata D pasará a ocupar el lugar de la A, la A el de la B, la B el de la C y la C el de la D.En resumen, en algún punto intermedio del giro la pata C se ha separado del terreno, y en algún punto intermedio del giro la pata D se ha apoyado. Pero esto último debe haber pasado antes de que la pata C se separase del suelo, puesto que en caso contrario habría un trozo de giro en que sólo se podrían apoyar dos patas. Luego, en algún punto intermedio del giro las cuatro patas tocan el suelo.

En cuanto a la nota sobre el dibujo que mostraba la solución al corte del donut, puesto que las dos circunferencias no están en el plano de las circunferencias del perfil del donut, unas u otras deberían haberse dibujado como elipses.

Problema:

Una dama se encuentra en un bote en el centro de un estanque circular, en el borde del cual hay un sátiro que la acecha. El sátiro corre cuatro veces más rápido de lo que rema la dama pero nada más lento. Una vez en tierra la dama corre más rápido, así que para evadirlo ésta sólo necesita llegar a la costa sin que el sátiro la alcance a su llegada. Por fortuna, la dama es matemáticay en seguida encuentra la trayectoria a seguir para burlar al sátiro. ¿Cuál es?