



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

**GRAU DE MATEMÀTIQUES**

**Treball final de grau**

---

**DIDÀCTICA CON  
ANAMORFISMOS  
CILÍNDRICOS**

---

**Autor: Landman Brignoni, Pol**

**Director: Font González, Jordi**

**Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica. UB**

**Barcelona, 21 de juny de 2020**

## Abstract

Cylindrical anamorphisms consist on the deformation of an image in such a way that, when looked at from a certain point of view and reflexed on a cylindrical mirror, the image is restored. This phenomenon gathers together a number of different disciplines (from arts to physics and mathematics) which will be studied, though putting the focus in mathematics. The final goal is to create a didactic sequel based on cylindrical anamorphisms and suitable to be implemented in a Baccalaureate classroom in Catalonia.

## Resumen

Los anamorfismos cilíndricos consisten en la deformación de una imagen de tal manera que al ser observada desde un cierto punto de vista y reflejada en un espejo cilíndrico, la imagen se recupera. Este fenómeno reúne una variedad de disciplinas (desde el arte hasta la física y las matemáticas) que serán estudiadas, aunque poniendo el foco en las matemáticas. El objetivo final es crear una secuencia didáctica basada en los anamorfismos cilíndricos que sea apta para ser implementada en una clase de bachillerato en Cataluña.

## Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Jordi Font, quien ha sido un excelente tutor para mi trabajo. Siempre ha confiado en mí, me ha apoyado en mis decisiones y asesorado en mis dudas. Ha sido una voz muy tranquilizante y, sobre todo, compañera.

En segundo lugar quiero agradecer a Sergi Múria, quien junto a Jordi Font, fue mi profesor en la asignatura de didáctica. Juntos lograron hacer de esta asignatura un espacio de explosión imaginativa y libertad que me motivó enormemente a hacer este trabajo.

Doy las gracias a mi hermana Rita y sus amigas Ariane, Carla, Laia y Maria por acceder con tanta ilusión a llevar a cabo toda la secuencia didáctica pese a tener que hacerlo con tantas medidas de seguridad debido al estado de alarma por la COVID-19. Sin ellas hubiera sido imposible poner a prueba mi trabajo.

Agradezco a mis padres y de nuevo a mi hermana por el continuo apoyo durante todo el proceso y hasta el final de la carrera.

También agradezco a mi prima Malena y a mis amigos de la universidad con quienes he compartido varias conversaciones que me ayudaron a superar obstáculos en el desarrollo de mi investigación.

Un muy encarecido agradecimiento a Anton Aubanell por las horas dedicadas a conversar conmigo sobre anamorfismos y sobre didáctica de las matemáticas y por todas sus formaciones. Ha sido un referente.

Finalmente quiero dar gracias al Esplai Boix y a la Asociación Explorium por despertar y hacer crecer en mí la pasión por la educación y la transmisión de valores y conocimientos. Sin duda, dos de mis mayores fuentes de aprendizaje.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El proyecto . . . . .	1
1.2. Estructura de la Memoria . . . . .	1
<b>2. Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>3. Los anamorfismos</b>	<b>4</b>
<b>4. Fundamentos de física</b>	<b>6</b>
4.1. El Principio de Fermat y las leyes de reflexión . . . . .	6
4.2. La cáustica . . . . .	9
<b>5. Fundamentos matemáticos</b>	<b>10</b>
5.1. Elementos básicos para la construcción del anamorfismo cilíndrico . . . . .	10
5.2. Región para la que se realiza el anamorfismo . . . . .	10
5.3. Construcción geométrica y analítica del anamorfismo cilíndrico . . . . .	13
5.4. Anamorfismo cilíndrico en la secuencia didáctica . . . . .	16
5.4.1. Segmentos verticales en un anamorfismo cilíndrico . . . . .	17
5.4.2. La nefroide . . . . .	19
5.4.3. Segmentos horizontales en un anamorfismo cilíndrico . . . . .	25
<b>6. Fundamentos didácticos</b>	<b>29</b>
<b>7. Secuencia didáctica</b>	<b>36</b>
7.1. Primera sesión . . . . .	36
7.1.1. Actividad 1.1: ¿Qué es un anamorfismo? . . . . .	36
7.1.2. Actividad 1.2: La luz . . . . .	37
7.1.3. Actividad 1.3: El espejo mágico . . . . .	38
7.1.4. Actividad 1.4: El plano tangente . . . . .	40
7.2. Segunda sesión . . . . .	42
7.2.1. Actividad 2.1: Conjeturando y experimentando con anamorfismos cilíndricos . . . . .	42
7.2.2. Actividad 2.2: Anamorfismo cilíndrico con geometría dinámica . . . . .	43
7.2.3. Actividad 2.3: La nefroide . . . . .	44
7.2.4. Actividad 2.4: Museo . . . . .	46
<b>8. Conclusiones</b>	<b>48</b>

8.1. Conclusiones matemáticas . . . . .	48
8.2. Conclusiones didácticas . . . . .	48
8.3. Conclusiones interdisciplinarias . . . . .	49
<b>9. Anexos</b>	<b>52</b>
9.1. Imágenes correspondientes a las obras comentadas en la sección 3 . . . . .	52
9.2. Desarrollo de las ecuaciones para ver segmentos horizontales . . . . .	55
9.3. Instrucciones para el experimento del espejo mágico en la actividad 1.3 . .	56

# 1. Introducción

## 1.1. El proyecto

Nada genera más intriga que aquello que sorprende. La intriga es deseo de saber. Y el deseo de saber hace cambiar y crecer a las personas. Es por eso que mi vocación es la educación y que creo que la mejor manera de llevarla a cabo es a través de actividades que sorprendan. El anamorfismo cilíndrico es algo que me sorprende. Con este trabajo de final de grado quiero crear y llevar al aula una secuencia didáctica que tome el anamorfismo cilíndrico como elemento que puede sorprender al alumnado y estimular su deseo de saber.

Los anamorfismos forman parte del mundo de las ilusiones ópticas. Un anamorfismo es, en palabras sencillas, un montaje tal que, en general muestra una imagen deformada y confusa, pero desde un punto de vista concreto o mediante un procedimiento matemático u óptico, la imagen cobra sentido. En el anamorfismo cilíndrico se tiene una imagen deformada que al mirarla reflejada en un espejo cilíndrico desde un cierto punto de vista, cobra sentido.

El estudio matemático de los anamorfismos cilíndricos se deriva de las leyes ópticas de reflexión y el método que se seguirá para crear anamorfismos se basa en un método usado por Albrecht Dürer a principios del siglo XVI. Es por eso que en este trabajo se estudian los anamorfismos cilíndricos desde una perspectiva interdisciplinaria, centrándose principalmente en las matemáticas y su didáctica, para crear una secuencia didáctica basada en el material manipulativo y con perspectiva *STEAM* (*Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics*) en torno a estos anamorfismos.

En cuanto a la didáctica, se ha fundamentado en las palabras y voces de grandes maestros de la didáctica de las matemáticas con materiales manipulativos como son Anton Aubanell o Pere Puig Adam entre otros. Se debe mencionar también todo lo aprendido en las clases de didáctica de las matemáticas del grado, así como la experiencia en trabajo con adolescentes en entidades de educación en el ocio, en concreto en la asociación de ocio científico *Explorium*, y las prácticas en empresa realizadas en *Innovamat*, una empresa dedicada a la educación matemática para niños.

Los dos grandes didactas de las matemáticas recién mencionados, también son grandes conocedores de las matemáticas, y eso no es casualidad. En mis experiencias vitales y laborales he podido comprobar la necesidad de tener un conocimiento profundo de aquello en lo que se educa, para poder transmitir lo que se desea. En este trabajo se dan fundamentos matemáticos y didácticos profundos, para mostrar así la necesidad de especialización del profesorado.

La secuencia didáctica propuesta hace trabajar al alumnado con unas matemáticas contextualizadas que puedan llegar a modelizar. En el proceso aprenderán nuevos contenidos de la mano de su desarrollo como personas competentes matemáticamente. Se trabaja con materiales manipulables y el programario de geometría dinámica GeoGebra, ya que se estiman la mejor manera de que las matemáticas entren, como dice Anton Aubanell, "por los ojos y por las manos".

## 1.2. Estructura de la Memoria

La memoria se estructura en secciones que siguen el proceso de construcción de la secuencia didáctica. Como se explica en la sección de fundamentos didácticos, un profesor

que va a dirigir una clase, debe tener un conocimiento sobre aquello que va a tratar más profundo que lo que va a enseñar. Es por eso que la memoria se estructura así: empieza definiendo el concepto de anamorfismo cilíndrico y contextualizándolo históricamente y en la actualidad. Sigue estudiando los fundamentos a nivel físico necesarios para poder abordar el problema de los anamorfismos cilíndricos desde las matemáticas. Entonces se estudian matemáticamente los anamorfismos cilíndricos. Luego, ya con todos los conocimientos científicos necesarios, se desarrollan los fundamentos didácticos en los que se basará la secuencia didáctica. Finalmente se describe la secuencia didáctica diseñada y modificada tras la experiencia de llevarla al aula.

## 2. Objetivos

Se han planteado una serie de objetivos que se quieren lograr mediante el proceso de realización de este trabajo. Son los que siguen:

- Despertar en el alumnado la pasión por el saber y una mirada científica y matemática de la realidad.
- Proponer y llevar a cabo una secuencia didáctica dentro del marco *STEAM* (*Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics*) para contribuir a la divulgación y desarrollo de este modelo de educación.
- Crear una secuencia didáctica que adecuada al currículum de bachillerato catalán para poder llevarla al aula de una escuela catalana.
- Estudiar las matemáticas que explican y permiten crear el fenómeno artístico de los anamorfismos cilíndricos.
- Estudiar áreas de las matemáticas que no se han desarrollado en el grado, pero que son de especial belleza y portables a la escuela.
- Desarrollarme como docente de matemáticas en educación secundaria.
- Mostrar la necesidad de especialistas en matemáticas y su didáctica para educar en matemáticas.



### 3. Los anamorfismos

Un anamorfismo es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos. La palabra anamorfismo proviene de un neologismo del siglo XVII traducible como “dar una nueva forma a una figura” o “realizar una forma al contrario”. Los anamorfismos se pueden dividir, principalmente en tres categorías:

- Anamorfismos oblicuos: son aquellos en los que la imagen “emerge” al ser observada desde un punto de vista concreto no central.
- Anamorfismos catóptricos: (del griego *κατοπτρον*, que significa espejo) son aquellos que usan un espejo para rectificar la deformación anamorfica.
- Anamorfismos de superficies compuestas: son aquellos que se basan en descomponer la imagen original en porciones dispuestas en distintas superficies.

Los anamorfismos cilíndricos son un caso especial de los catóptricos en los que el espejo tiene forma de cilindro.

La perspectiva es aquello que permite recrear la tercera dimensión en la superficie bidimensional. La fascinación por este fenómeno es el motor que ha empujado a su estudio, trayendo de su mano a los anamorfismos.

El primer ejemplo histórico en el que se puede verificar la presencia de un punto de fuga es el cuadro “*L’annunciazione*” de Ambrogio Lorenzetti, de 1344, pero no es hasta 1420 que Filippo Brunelleschi inventa el “*método legítimo*” para la construcción perspectiva de un paralelepípedo, iniciando así el concepto moderno de perspectiva basado en las matemáticas. En Brunelleschi se basó Leon Battista Alberti para hacer el compendio de la técnica perspectiva “*De Pictura*”, en 1435, en el que describe la mecánica del plano del cuadro en perspectiva cónica. Alberto Durero hace un uso práctico de la propuesta de Alberti de proyectar una cuadrícula en la imagen que se desea ver (ver imagen 1)<sup>2</sup>.

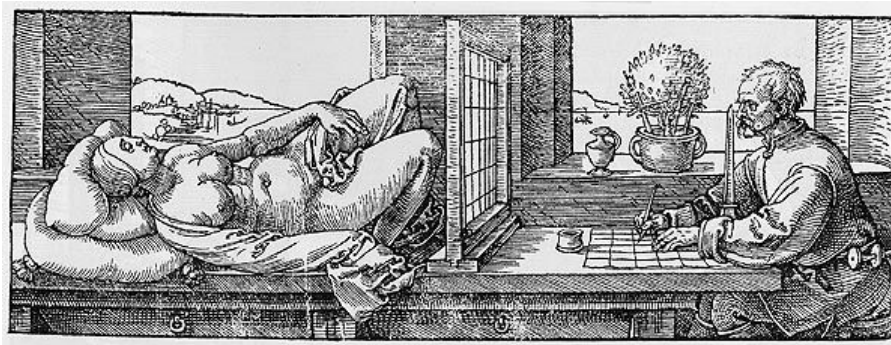


Figura 1: Método de Durero para las perspectivas

Paralelamente a estas técnicas de perspectiva central, se empezaron a desarrollar técnicas para crear imágenes que resultarán realistas al ser observadas desde un punto de vista excéntrico. Los primeros ejemplos se encuentran en el *Quattrocento* y los brindan Piero della Francesca (en la *Pala Montefeltro*, 1474) y Leonardo da Vinci (en el *Codice Atlantico*).

<sup>2</sup>En este método se basará el estudio del anamorfismo cilíndrico en la secuencia didáctica.

Estos diseños que, como decía Leonardo da Vinci deben observarse desde una “perspectiva accidental”, son el origen de los anamorfismos.

En el *Cinquecento* diversos artistas europeos siguen trabajando con los anamorfismos oblicuos, siendo la obra conocida como *Los embajadores* de Hans Holbein su principal ejemplo. En esta se representa a Jean de Dinteville, embajador de Francia en Inglaterra, y al obispo Georges de Selve. Sin embargo al observar el cuadro desde una perspectiva concreta, se ve una calavera. Se está usando el anamorfismo para transmitir un mensaje secreto.

El primer anamorfismo catóptrico del que se tiene constancia en occidente es de tipo cilíndrico, data de principios del siglo XVII y pertenece a Simon Vouet. En él se ve a un elefante. En 1630, Vaulezard define por primera vez los métodos geométricos para realizar anamorfismos cilíndricos y cónicos. Cabe comentar que en Oriente se tiene constancia de anamorfismos catóptricos desde 1573. Se hacían sobre papel y seda y con espejos cilíndricos. Lo hacían de manera directa, sin desarrollar métodos geométricos.

Los tratados escritos durante el siglo XVI y principios del XVII tratan los anamorfismos como una curiosidad. Eso es así hasta que en 1638 Jean François Nicéron escribe un tratado casi enteramente dedicado a los anamorfismos (a los que él llamaba “*perspective curieuse*”). Este tratado consta de cuatro tomos. El primero lo dedica a las leyes de la perspectiva, el segundo y el tercero los dedica a los tres tipos de anamorfismos que se han comentado y el cuarto tomo lo dedica a la dioptría y la refracción óptica. Esta se convierte en la obra de referencia para los artistas interesados en los anamorfismos.

Desde entonces hasta la actualidad el arte de los anamorfismos se ha seguido desarrollando a un ritmo irregular. En cuanto a los anamorfismos cilíndricos se sabe que durante los siglos XVII y XVIII se acrecentó el interés por los anamorfismos cónicos y cilíndricos por parte de muchos artistas ingleses, franceses, alemanes y holandeses. En concreto, en 1646 Athanasio Kircher desarrolló un instrumento perspectivo llamado *Mesóptico* inspirado en los métodos de Durero y Alberti. En el siglo XVIII no hay novedades en los métodos geométricos, pero se realizan varias obras nuevas, destaca Henry Kettle. En el siglo XIX el desarrollo de la fotografía induce a nuevos experimentos en el campo de los anamorfismos. En el siglo XX, la combinación de la informática y la fotografía agiliza el proceso de creación de los anamorfismos, permitiendo grandes proyectos como la propuesta arquitectónica de la *Torre de Melbourne* por J. Démeraux.

Para dar un último toque local, en el campo de los anamorfismos cilíndricos se destaca el artista Salvador Dalí. Él realizaba los anamorfismos cilíndricos usando botellas de ponche plateadas. En honor a él, en Figueras se puede encontrar un gran anamorfismo cilíndrico que refleja su retrato.

## 4. Fundamentos de física

Los fundamentos físicos de los anamorfismos cilíndricos, y en general de los anamorfismos catóptricos, se hayan en la óptica. La óptica es la ciencia que estudia los orígenes, la propagación y la detección de la luz. En esta sección se asentarán los conocimientos básicos necesarios para entender cómo se propaga la luz en el aire, cómo se refleja en un espejo y, por lo tanto, qué vemos y dónde lo vemos. También se hará una breve explicación del concepto de cáustica.

### 4.1. El Principio de Fermat y las leyes de reflexión

**Definición 4.1.** *La **óptica geométrica** es la rama de la óptica que estudia la propagación de la luz usando el concepto de rayo luminoso.*

**Definición 4.2.** *Un **rayo de luz** representa la dirección en la que se propaga la energía de una onda de luz.*

**Definición 4.3.** *Un medio transparente es **isotrópico** si la luz viaja con la misma velocidad en cualquier dirección de propagación dentro del medio. Un medio transparente que no es isotrópico es un medio **anisotrópico**.*

**Definición 4.4.** *Un **medio homogéneo** es aquel en el que la la velocidad de la luz no depende del punto del medio en el que se halle. Si la velocidad de la luz varía según el punto en el que se encuentra, se le llama **medio inhomogéneo**.*

En este trabajo la luz siempre se moverá por el aire. El aire es un medio isotrópico y inhomogéneo en función de la altura. Sin embargo, dado que se trabajará con un cambio de altura mínimo, se considerará homogéneo.

**Definición 4.5.** *La **velocidad de la luz en el vacío** es  $c \approx 300000km/s$ .*

En cualquier medio transparente que no sea el vacío, la velocidad de la luz,  $v$ , es menor que  $c$ .

**Definición 4.6.** *Dado un material, el **índice de refracción**  $n$  de un material se define como:*

$$n = \frac{c}{v}$$

En el aire la velocidad de la luz es muy cercana a  $c$  y se puede considerar que su índice de refracción es  $n = 1$ .

Si un rayo de luz va de  $A$  a  $B$  en un medio con índice de refracción  $n$  (puede ser variable), el tiempo  $t$  de viaje se define por:

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n ds$$

donde  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

**Definición 4.7.** *El **camino óptico** del caso recién expuesto es el espacio que recorrería la luz en el vacío en el tiempo  $t$ . Se define por:*

$$L = \int_A^B n ds$$

Si el rayo de luz está en un medio homogéneo y isotrópico con índice de refracción  $n$ , el camino óptico se puede definir como  $L = n \cdot s$ .

Se considera que el camino óptico es positivo si se mide en el sentido del avance de la luz y negativo en sentido contrario. Por lo tanto, si la luz sale de un punto, se refleja en un espejo y vuelve al punto inicial, el camino óptico no es nulo. Es la suma del camino óptico desde el punto inicial al espejo más el camino óptico desde el espejo hasta el punto inicial.

La óptica geométrica se basa en el Principio de Fermat.

**Principio 4.8.** *El Principio de Fermat plantea que la trayectoria de un rayo de luz que va de un punto a otro debe corresponder a un camino óptico extremo o estacionario con respecto a las otras trayectorias posibles. Es decir:*

$$\partial L = d \int_A^B n(s) ds = 0$$

**Teorema 4.9.** *En un medio isotrópico y homogéneo, los rayos de luz siguen trayectorias rectas*

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  en un medio isotrópico y homogéneo, por tanto con índice de refracción  $n$  constante, se ha visto que  $L = n \cdot s$ . Por el Principio de Fermat, la trayectoria del rayo de luz debe ser un extremo.  $n$  es constante, por lo tanto se debe buscar un extremo para  $s$ . No se puede hallar un máximo, por lo tanto se debe de hallar un mínimo. El recorrido que se traduce en la mínima distancia de  $A$  a  $B$  es el segmento recto de  $A$  a  $B$ .

Hasta aquí se ha estudiado como se mueve la luz en un medio isotrópico y homogéneo como el que se tendrá en los experimentos de la secuencia didáctica. Ahora bien, ¿qué pasa cuando se incorpora un espejo?

**Definición 4.10.** *La reflexión de la luz es el cambio de dirección que sufre la luz cuando incide sobre una superficie.*

**Problema 4.11.** Sean  $A$  y  $B$  puntos del espacio y sea  $E$  un plano. Se quiere saber qué trayectoria tiene el rayo de luz que sale de  $A$ , se refleja en el espejo  $E$  y llega a  $B$ . (Todo en un medio isotrópico y homogéneo)

Por el Principio de Fermat, se sabe que la trayectoria corresponderá a un extremal de la distancia recorrida por la luz en las diferentes trayectorias posibles. También se sabe que seguirá una trayectoria recta desde  $A$  hasta el punto en que se refleje, al que se llamará  $P$ , y una trayectoria recta desde  $P$  hasta  $B$ . La situación se representa en la figura 2.

Sin pérdida de generalidad se puede establecer  $A = (0, 0, a_z)$  y  $B = (b_x, 0, b_z)$  y  $E : z = 0$ . Se buscan los valores de  $x$  e  $y$  que anulan las derivadas parciales de la función  $s(x, y)$  que determina el tiempo de la luz en hacer todo el recorrido en función del punto  $P = (x, y, 0)$ .

Esta es la función:

$$s(x, y) = d(A, P) + d(P, B) = \sqrt{x^2 + y^2 + a_z^2} + \sqrt{(b_x - x)^2 + y^2 + b_z^2}$$

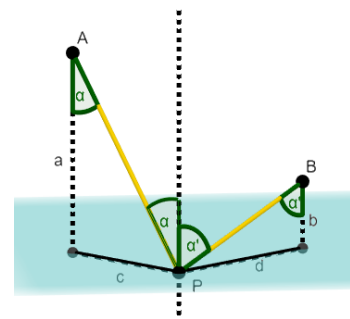


Figura 2: Visualización del problema

Sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + a_z^2}} + \frac{x - b_x}{\sqrt{(x - b_x)^2 + y^2 + b_z^2}} \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a_z^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x - b_x)^2 + y^2 + b_z^2}}\end{aligned}$$

Se iguala a 0 la derivada respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial s}{\partial y} = 0 \iff y = 0 \text{ ó bien } \sqrt{x^2 + y^2 + a_z^2} = -\sqrt{(x - b_x)^2 + y^2 + b_z^2}$$

La segunda opción no es posible, ya que el resultado de las raíces cuadradas es mayor o igual a 0, lo que implica que para que se de la igualdad, ambas tienen que ser 0. Eso no puede ser, ya que todos los sumandos de los radicandos son mayores o iguales a 0 (por estar elevados al cuadrado) y al menos  $a_z$  y  $b_z$  son mayores que 0. Por lo tanto,  $y = 0$ .

La consecuencia de  $y = 0$  es la segunda ley de reflexión.

**Ley 4.12. 2ª ley de reflexión:** *el rayo incidente, el vector normal al plano de reflexión y el rayo reflejado están contenidos en un mismo plano.*

Siguiendo con el problema, se substituye  $y$  por 0 en la derivada respecto a  $x$  de  $s(x, y)$  y se iguala a 0:

$$\frac{\partial s(x, 0)}{\partial x} = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{x^2 + a_z^2}} = \frac{b_x - x}{\sqrt{(x - b_x)^2 + b_z^2}} \quad (4.1)$$

Observando la representación visual del problema se ve que:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a_z^2}} &= \sin(\alpha) \\ \frac{b_x - x}{\sqrt{(x - b_x)^2 + b_z^2}} &= \sin(\alpha')\end{aligned} \quad (4.2)$$

Por lo tanto, juntando las ecuaciones 4.1 y 4.2, se obtiene que  $\sin(\alpha) = \sin(\alpha')$  y, dado que ambos ángulos se hallan en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$  y la función seno es inyectiva en este intervalo,

$$\alpha = \alpha'$$

La consecuencia de  $\alpha = \alpha'$  es la primera ley de reflexión.

**Ley 4.13. 1ª ley de reflexión:** *el ángulo de incidencia  $\alpha$ , formado por el rayo incidente y la recta normal  $N$  al espejo, es igual al ángulo de reflexión  $\alpha'$ , formado por el rayo reflejado y dicha normal.*

Así pues, se concluye que  $P$  se halla en el punto de  $E$  que cumple las dos leyes de reflexión.<sup>3</sup>

Finalmente, cabe decir que la reflexión es un fenómeno local. Por tanto, cuando se trate con un espejo cilíndrico, la recta normal a tomar es la que es perpendicular al plano tangente al cilindro por el punto en el que se produce el reflejo.

<sup>3</sup>En este GeoGebra se puede jugar con unos puntos para comprobar las leyes de reflexión <https://www.geogebra.org/m/heznqadp>

## 4.2. La cáustica

**Definición 4.14.** *Un sistema óptico es una superficie que modifica la dirección de propagación de la luz.*

**Definición 4.15.** *Un sistema catóptrico es un sistema óptico que refleja los rayos luminosos que recibe.*

Los espejos son sistemas catóptricos.

**Teorema 4.16. Teorema de Malus-Dupin:** *Si sobre cada rayo que sale de un foco emisor de luz tomamos caminos ópticos iguales, los puntos que limitan estos caminos generan una superficie que es normal a todos los rayos.*

Los rayos luminosos salidos de una misma fuente puntual que atraviesan un sistema óptico cualquiera, son todos ortogonales a una misma familia de superficies (por el teorema de Malus-Dupin). En consecuencia son tangentes a una superficie envolvente.

**Definición 4.17.** *La superficie cáustica es la superficie envolvente a la que son tangentes los rayos luminosos tras atravesar el sistema óptico. La superficie cáustica es una zona de fuerte acumulación de energía luminosa.*

La superficie cáustica generada por rayos que se propagan paralelamente y que se reflejan en una taza de café al intersecar la base de la taza de café, genera regiones con distinta intensidad de luz. Aquellas con mayor intensidad generan la curva que se aprecia en la figura 15 (en la sección de la secuencia didáctica). Este fenómeno se llama catástrofe y es estudiado por la teoría de catástrofes.

## 5. Fundamentos matemáticos

En un anamorfismo cilíndrico se producen fenómenos físicos que requieren de conocimientos matemáticos para poder ponerlos en común con sentido. En esta sección se quieren trabajar las matemáticas que nos permitirán por un lado entender qué está sucediendo en un anamorfismo cilíndrico y por otro lado ser capaces de crear nuestros propios anamorfismos. Es por eso que esta sección se estructura en torno al proceso de construcción de un anamorfismo cilíndrico.

### 5.1. Elementos básicos para la construcción del anamorfismo cilíndrico

Se empezarán definiendo los diferentes elementos necesarios para la composición del anamorfismo:

- Se define un punto de observación desde el que se debe mirar para ver el anamorfismo correctamente. Sin pérdida de generalidad, se halla en el plano  $x = 0$  y en la región en que  $y > R$ , donde  $R$  es el radio del cilindro que se definirá a continuación (para que se encuentre fuera del cilindro). El punto es  $O = (0, y_0, z_0)$ , con  $y_0 > R$  y  $z_0 > 0$ . Si se quiere hacer desde otro punto de vista, tan solo habrá que rotar las coordenadas de todos los puntos respecto al eje  $Z$  el mismo ángulo que se rota el *punto de observación*.
- Se define un cilindro que es el espejo del anamorfismo. El eje del cilindro es el eje vertical  $x = 0, y = 0$  y por tanto está definido por la ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$  y  $0 \leq z < z_0$ , donde  $R$  es el radio del cilindro.
- El dibujo se hace sobre un plano que se denominará *plano real*. El *plano real* es perpendicular al eje del cilindro y está a altura  $z = 0$ . Por tanto, la ecuación del plano es  $z = 0$ .
- Un dibujo está formado por un conjunto de puntos. Se llamará *punto virtual*, y se denominará con la letra  $V$ , a un punto que queremos ver y a su punto asociado en el *plano real* (es decir, aquel que hay que dibujar para que se vea el dibujo deseado en el espejo) se le llamará *punto real*. Un *punto virtual* tiene coordenadas  $V = (x_1, y_1, z_1)$ . El *punto real*, al que se llamará  $P$ , depende del *punto de observación*, el radio  $R$  del cilindro y del *punto virtual*, pero al estar en el *plano real*, sabemos que tiene coordenadas  $P = (x_f, y_f, 0)$ .

### 5.2. Región para la que se realiza el anamorfismo

Para empezar, se definirá la región de  $R^3$  en la que se puede hallar  $V$ . A esta región se la denominará *región virtual*. Lateralmente, la *región virtual* queda limitada por los planos tangentes al cilindro desde  $O$ . Superiormente, queda limitado por el plano  $z = z_0$  (no incluido), ya que cualquier *punto virtual* que quede por encima de  $O$  será reflejo de algo que está más arriba, y por tanto, no en el *plano real*. Inferiormente, la *región virtual* queda delimitada por las rectas que unen la parte visible de la base del cilindro con  $O$ . Además, el *punto virtual* debe tener la segunda componente menor que la de  $O$ . En las siguientes líneas, se detallará esta región.

Se comenzará por los **límites laterales**. Dado que el cilindro es una superficie reglada con todas sus generatrices verticales, los planos tangentes al cilindro desde  $O$  contienen a  $O$  y a una de estas generatrices. Se puede considerar el problema haciendo una proyección ortogonal del cilindro y de  $O$  a  $z = 0$  y buscando, por tanto, la recta que pasa por  $O_p = (0, y_0)$  y es tangente a la circunferencia base del cilindro, que tiene ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ . Para ello se ha decidido usar el teorema de la potencia de un punto, ya que es un teorema poco conocido a nivel escolar, pero que el autor considera que, por su belleza y relativamente simple demostración, sería propicio para trabajar en clase.

**Teorema** (Potencia de un punto). *Si dos rectas que pasan por un punto  $P$ , cortan a una circunferencia fija en los puntos  $A, B$  y  $C, D$  respectivamente, entonces  $d(P, A) \cdot d(P, B) = d(P, C) \cdot d(P, D)$ .*

Un caso especial de este teorema es cuando una de las rectas es tangente a la circunferencia, ya que entonces tan solo la interseca en un punto. Por la continuidad en el cambio de la distancia del punto a las intersecciones de la recta con la circunferencia y por la continuidad de la función producto, se ve que la potencia de una circunferencia es igual al cuadrado de la distancia del punto a la intersección de la recta que pasa por el punto y es tangente a la circunferencia.

La recta que pasa por  $O_p$  y  $(0, 0)$  interseca la circunferencia en  $(0, R)$  y en  $(0, -R)$ . Por tanto, la potencia de  $O_p$  respecto a la circunferencia es

$$d(O_p, (0, R)) \cdot d(O_p, (0, -R)) = (y_0 - R) \cdot (y_0 + R) = y_0^2 - R^2$$

Se sabe ahora que la distancia de  $O_p$  al los puntos de intersección de la recta que pasa por  $O_p$  y es tangente a la circunferencia (a los que se llamara  $T_1$  y  $T_2$ ) es  $\sqrt{y_0^2 - R^2}$ . El conjunto de los puntos que se hallan a esta distancia de  $O_p$  son los de la circunferencia con centro en  $O_p$  y radio  $\sqrt{y_0^2 - R^2}$ .  $T_1$  y  $T_2$  son por tanto las intersecciones de las dos circunferencias descritas hasta ahora. Se resolverá el problema con un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ x^2 + (y - y_0)^2 &= y_0^2 - R^2 \end{aligned} \right\}$$

Y por tanto:

$$y = \frac{R^2}{y_0}$$

$$x = \pm \sqrt{\left(R^2 - \frac{R^4}{y_0^2}\right)}$$

Entonces,  $T_1 = \left(\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{y_0^2}}, \frac{R^2}{y_0}\right)$  y  $T_2 = \left(-\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{y_0^2}}, \frac{R^2}{y_0}\right)$  y los planos que ejercen de límites laterales de la *región virtual* son los que contienen las rectas que unen a  $T_1$  y  $T_2$  con  $O_p$  y son perpendiculares al plano  $z = 0$ . Por lo tanto, los planos que limitan lateralmente son:

$$\left(\frac{R^2}{y_0} - y_0\right) \cdot x \pm \left(\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{y_0^2}}\right) \cdot (y - y_0) = 0$$

$$d(P, A) \cdot d(P, B) = d(P, C) \cdot d(P, D)$$

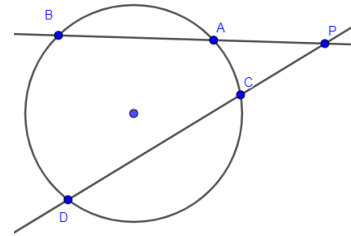


Figura 3: Visualización del teorema de la potencia de un punto



Generan las siguientes regiones:

$$\left(\frac{R^2}{y_0} - y_0\right) \cdot x + \left(\sqrt{R - \frac{R^4}{y_0^2}}\right) \cdot (y - y_0) < 0 \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{R^2}{y_0} - y_0\right) \cdot x - \left(\sqrt{R - \frac{R^4}{y_0^2}}\right) \cdot (y - y_0) > 0 \quad (5.2)$$

Ahora se quiere encontrar el **límite inferior** de la *región virtual*. Se ha dicho que se debe buscar la superficie generada por las rectas que unen la parte visible de la base del cilindro con  $O$ . Esto será una superficie reglada.

**Definición 5.1.** Una *superficie reglada* es una superficie regular parametrizada por una expresión cualquiera de la forma

$$X : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(t, s) = \alpha(t) + s \cdot w(t),$$

donde las funciones

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$w : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

son diferenciables. A la curva  $\alpha(t)$  se le llama *directriz* y a cada recta  $\beta_t(s) := X(t, s)$  *generatriz*.

En el caso que se está trabajando, la directriz es el punto  $O$  y las generatrices son las rectas que van de  $O$  a la parte visible desde  $O$  de la base del cilindro.

La parte visible de la base del cilindro es el arco de circunferencia con centro en  $(0, 0, 0)$  que va de  $T_1$  a  $T_2$  (ambos con tercera coordenada 0) y que no pasa por la región en que la segunda coordenada es negativa. Esto es:

$$(R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t), 0), \quad \arccos(T_{1x}) < t < \pi - \arccos(T_{1x})$$

Siendo  $T_{1x}$  la primera componente de  $T_1$ .

Por lo tanto, usando los vectores que van de  $O$  a cada punto de esta curva, la superficie queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X(t, s) &= (0, y_0, z_0) + s \cdot (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t) - y_0, -z_0) \\ &= (s \cdot R \cdot \cos(t), y_0 + s \cdot (R \cdot \sin(t) - y_0), (1 - s) \cdot z_0), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$s \in \mathbb{R}, t \in (\arccos(\frac{T_{1x}}{R}), \pi - \arccos(\frac{T_{1x}}{R}))$$

Se quiere definir la región sobre  $X$ , para ello se debe poder definir la tercera componente de  $X$  en función de las dos primeras. La tercera componente de  $X(t, s)$  únicamente depende de  $s$ . Por tanto, se debe encontrar el valor  $s_V$  para  $s$  en función de las dos primeras componentes de  $V$ .

Dado un *punto virtual*  $V$  que respete todas las restricciones impuestas hasta ahora (inecuaciones 5.1, 5.2,  $z < z_0$  y  $y > y_0$ ), de la familia de rectas que generan la superficie, tan solo hay una recta que pase exactamente por debajo o por encima de este punto.

Dado que  $X(1, t)$  es el conjunto de puntos de  $X(s, t)$  que también están en el cilindro, si se halla la relación entre la distancia de  $O$  a  $V$  y la distancia de  $O$  a la intersección de la recta de  $O$  a  $V$  con el cilindro, se tendrá el valor de  $s_V$ .

La recta que une  $O$  y  $V$  es  $l := (t' \cdot x_1, (1 - t') \cdot y_0 + t' \cdot y_1, t' \cdot z_1 + (1 - t) \cdot z_0)$ . Se ha usado la notación  $t'$  para diferenciarla de  $t$ . Esta interseca el cilindro donde cumple la ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ . Se quiere la solución más pequeña para  $t$ , ya que se busca la primera intersección con el cilindro, así que se tomará la solución con el signo negativo delante de la raíz cuadrada. A este valor se le llamará  $t'_{int}$ . Por tanto:

$$(t'_{int} \cdot x_1)^2 + ((1 - t'_{int}) \cdot y_0 + t'_{int} \cdot y_1)^2 = R^2$$

$$t'_{int}(x_1, y_1) = \frac{y_0^2 - y_1 \cdot y_0 - \sqrt{x_1^2 \cdot (R^2 - y_0^2) + R^2 \cdot (y_0 - y_1)^2}}{x_1^2 + (y_0 - y_1)^2} \quad (5.4)$$

Así se tiene que  $s_V = \frac{1}{t'_{int}(x_1, y_1)}$

Se consigue así que el último límite que se buscaba para la *región virtual* es:

$$z_1 > \left( z_0 - \frac{z_0}{t'_{int}(x_1, y_1)} \right) \quad (5.5)$$

En conclusión, la *región virtual* está formada por todos los puntos  $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  que cumplen las ecuaciones:

$$\begin{cases} z_1 < z_0 \\ y_1 > y_0 \\ \left( \frac{R^2}{y_0} - y_0 \right) \cdot x_1 + \left( \sqrt{R - \frac{R^4}{y_0^2}} \right) \cdot (y_1 - y_0) < 0 \\ \left( \frac{R^2}{y_0} - y_0 \right) \cdot x_1 - \left( \sqrt{R - \frac{R^4}{y_0^2}} \right) \cdot (y_1 - y_0) > 0 \\ z_1 > \left( z_0 - \frac{z_0}{t'_{int}(x_1, y_1)} \right) \end{cases} \quad (5.6)$$

Donde  $t'_{int}(x_1, y_1)$  se corresponde a la función 5.4.

### 5.3. Construcción geométrica y analítica del anamorfismo cilíndrico

En toda esta sección se asumirá que el *punto virtual* pertenece a la región definida por las ecuaciones 5.6 y por tanto, si se define una función que va del *punto virtual* al *punto real*, claramente su dominio es un espacio continuo, diferenciable y convexo.

A continuación se hará la construcción geométrica del anamorfismo en paralelo con la construcción analítica. A nivel físico la luz viene del *punto real*, se refleja en el espejo y llega al *punto de observación*, relacionando un *punto real* con un *punto virtual*. Sin embargo, para hacer la construcción del anamorfismo se hará el proceso a la inversa, ya que lo que ocurre en estos es que se tiene un *punto virtual* y la incógnita es el *punto real*.

Se define la recta que pasa por  $O$  y por  $V$  como  $(t \cdot x_1, t \cdot (y_1 - y_0) + y_0, t \cdot (z_1 - z_0) + z_0)$ .

Se quiere reparametrizar la recta para que para  $t = 1$  se tenga el punto de intersección de la recta en cuestión con el *plano real*. Para ello, primeramente se halla este punto de

intersección. Se iguala la tercera componente de la recta a 0 y se obtiene:

$$t \cdot (z_1 - z_0) + z_0 = 0$$

$$t = \frac{z_0}{z_0 - z_1}$$

Así pues, se define  $\alpha = \frac{z_0}{z_0 - z_1}$  y se define la recta  $r$  que pasa por  $O$ ,  $V$  y interseca el *plano real* cuando  $t = 1$

$$r := (\alpha t \cdot x_1, \alpha t \cdot (y_1 - y_0) + y_0, \alpha t \cdot (z_1 - z_0) + z_0)$$

Ya se tiene el rayo de luz que va del ojo al *punto virtual*, ahora se quiere encontrar el punto de intersección con el cilindro,  $C$  (ya que es donde se reflejará).  $C$  será solución tanto a la ecuación del cilindro, como a la de la recta  $r$ . Por tanto:

$$(\alpha t \cdot x_1)^2 + (\alpha t \cdot (y_1 - y_0) + y_0)^2 = R^2 \quad (5.7)$$

$$(x_1^2 + (y_1 - y_0)^2) \cdot \alpha^2 \cdot t^2 + 2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_0) \cdot \alpha \cdot t + y_0^2 - R^2 = 0 \quad (5.8)$$

$$t = \frac{-2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_0) \pm \sqrt{(2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_0))^2 - 4 \cdot (x_1^2 + (y_1 - y_0)^2) \cdot \alpha^2 \cdot (y_0^2 - R^2)}}{2 \cdot (x_1^2 + (y_1 - y_0)^2) \cdot \alpha} \quad (5.9)$$

Ahora bien, para la recta hay 3 opciones: 1. no tener intersección con el cilindro, 2. intersecarlo una vez (si es tangente a este) o 3. intersecarlo dos veces. Habiendo escogido como dominio la *región virtual* especificada en la sección anterior, sabemos que  $r$  tendrá una o dos intersecciones con el cilindro. Se debe escoger la más pequeña de las soluciones, ya que a menor  $t$ , más cercano al *punto de observación* es la intersección con el cilindro y se está buscando la primera intersección, pues se trata de un espejo. El denominador es positivo, ya que es una combinación de sumas y productos de números reales elevados al cuadrado multiplicados por 2. En el numerador, la raíz cuadrada da un número positivo por definición y el primer sumando también es positivo porque al ser  $(y_1) < (y_0)$  y  $y_0 > 0$ ,  $-2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_0)$ . Por tanto, para escoger la solución más pequeña, hay que escoger la que tiene un negativo delante de la raíz cuadrada. Por lo tanto el valor  $t_{int}$  para el que el rayo de luz interseca el cilindro es:

$$t_{int} = \frac{-2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_0) - \sqrt{(2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_0))^2 - 4 \cdot (x_1^2 + (y_1 - y_0)^2) \cdot \alpha^2 \cdot (y_0^2 - R^2)}}{2 \cdot (x_1^2 + (y_1 - y_0)^2) \cdot \alpha}$$

Así pues, el punto de intersección de  $r$  con el cilindro es

$$C = (\alpha \cdot t_{int} \cdot x_1, \alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0, \alpha \cdot t_{int} \cdot (z_1 - z_0) + z_0)$$

Se quiere encontrar la recta que es el reflejo de  $r$  en el espejo cilíndrico. Para ello, primero hay que encontrar el eje de simetría de la reflexión, al que se denominará  $S$ . La recta se refleja en el plano tangente al cilindro por  $C$  y este plano tiene, trivialmente, como vector perpendicular por  $C$  el radio del cilindro por  $C$ . Así pues, la recta que contiene a este radio es el eje de simetría para el reflejo que se busca. Este pasa por el eje del cilindro a la altura de  $C$ , es decir por  $(0, 0, \alpha t_{int} \cdot z_1 + (1 - \alpha t_{int}) \cdot z_0)$ , y por  $C$ . Por tanto la ecuación de  $S$  es

$$s := (t \cdot \alpha \cdot t_{int} \cdot x_1, t \cdot (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0), \alpha \cdot t_{int} \cdot (z_1 - z_0) + z_0)$$

Para encontrar la reflexión de  $r$ , se buscará la reflexión de un punto de  $r$  para hallar la recta que pasa por este punto y por  $C$ . Como se puede hacer con cualquier punto de  $r$ , se hará con el punto que al reflejarse está a altura  $z = 0$ . De esta manera, el resultado será  $P$ , el *punto real*.

La parametrización que se ha hecho de  $r$  equivale a un punto moviéndose por  $r$  a velocidad constante. La recta se refleja en un plano paralelo al eje  $Z$  y, como al reflejarse, el ángulo de reflexión es el mismo que el de incidencia, la velocidad del punto en el sentido del eje  $Z$ , se mantiene. Se sabe que la intersección de la recta con el *plano real* se encuentra substituyendo  $t$  por 1 en  $r$  y por lo tanto, el punto que quedará reflejado en  $z = 0$ , es  $r(t_{int} - (1 - t_{int})) = r(2 \cdot t_{int} - 1)$ , se le llamará  $Q$ .

Ahora se necesita la proyección ortogonal de  $Q$  sobre el eje de simetría  $s$ . Para ello se interseca el plano perpendicular a  $s$  que pasa por  $Q$  con la recta  $s$ . El vector director de  $s$  es  $(\alpha \cdot t_{int} \cdot x_1, (\alpha \cdot t_{int} \cdot y_1 + (1 - \alpha \cdot t_{int}) \cdot y_0), 0)$  y por tanto la ecuación del plano perpendicular es

$$\begin{aligned} \alpha \cdot t_{int} \cdot x_1 \cdot (x - (\alpha \cdot (2 \cdot t_{int} - 1) \cdot x_1)) \\ + (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0) \cdot (y - (\alpha \cdot (2 \cdot t_{int} - 1) \cdot (y_1 - y_0) + y_0)) = 0 \end{aligned}$$

Se busca el punto  $S$ , intersección de  $s$  con el plano que se acaba de encontrar, es decir, que se deben cumplir las ecuaciones de ambas variedades. Por tanto, se quiere saber para que valor  $t_p$  tenemos que  $r(t_p)$  pertenece al plano:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot t_{int} \cdot x_1 \cdot ((t_p \cdot \alpha \cdot t_{int} \cdot x_1) - (\alpha \cdot (2 \cdot t_{int} - 1) \cdot x_1)) \\ + (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0) \cdot ((t_p \cdot (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0)) - (\alpha \cdot (2 \cdot t_{int} - 1) \cdot (y_1 - y_0) + y_0)) = 0 \end{aligned}$$

Se aísla  $t_p$ :

$$\begin{aligned} t_p = \frac{\alpha^2 \cdot t_{int} \cdot x_1 \cdot ((2 \cdot t_{int} - 1) \cdot x_1)}{(\alpha \cdot t_{int} \cdot x_1)^2 + (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0)^2} \\ + \frac{(\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0) \cdot (\alpha \cdot (2 \cdot t_{int} - 1) \cdot (y_1 - y_0) + y_0)}{(\alpha \cdot t_{int} \cdot x_1)^2 + (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0)^2} \end{aligned}$$

Se obtiene  $S = s(t_p)$ . Finalmente, haciendo la simetría central de  $Q$  respecto a  $S$  se obtendrá el *punto real*,  $P$ . Por lo tanto, la función  $p(x_1, y_1, z_1)$  que para todo *punto virtual*  $V$ , fijado un *punto de observación*  $O$ , un cilindro y un *plano real*, da su correspondiente *punto real* es:

$$\begin{aligned} p(x_1, y_1, z_1) &= Q + 2 \cdot \overrightarrow{QS} \\ &= (\alpha \cdot x_1 \cdot (2 \cdot t_{int} \cdot (t_p - 1) + 1), \\ &\quad (y_1 - y_0) \cdot \alpha \cdot (2 \cdot t_{int} \cdot (t_p - 1) + 1) + (2 \cdot t_p - 1) \cdot y_0, 0) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Con esto ya se tiene el *punto real* buscado. Pero antes de pasar al siguiente tema, se buscará la recta parametrizada  $r'$  tal que  $r'(t_{int}) = C$  y  $r'(1) = P$ , ya que con esta, se podrá definir una función que muestre el movimiento de la luz en el anamorfismo.  $r'$  se define así:

$$r' := C \cdot \frac{1 - t}{1 - t_{int}} + P \cdot \frac{t - t'}{1 - t_{int}}$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned}
 r' := & ((\alpha \cdot t_{int} \cdot x_1) \cdot \frac{1-t}{1-t_{int}} + (\alpha \cdot x_1 \cdot (2 \cdot t_{int} \cdot (t_p - 1) + 1)) \cdot \frac{t-t_{int}}{1-t_{int}}, \\
 & (\alpha \cdot t_{int} \cdot (y_1 - y_0) + y_0) \cdot \frac{1-t}{1-t_{int}} + ((y_1 - y_0) \cdot \alpha \cdot (2 \cdot t_{int} \cdot (t_p - 1) + 1) + (2 \cdot t_p - 1) \cdot y_0) \cdot \frac{t-t_{int}}{1-t_{int}}, \\
 & (\alpha \cdot t_{int} \cdot (z_1 - z_0) + z_0) \cdot \frac{1-t}{1-t_{int}})
 \end{aligned}$$

En conclusión, el camino completo de la luz en sentido inverso desde  $O$  hasta  $P$  es:

$$f(t) = \begin{cases} r(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_{int} \\ r'(t) & \text{si } t_{int} < t \leq 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Siendo  $f(1) = p(x_1, y_1, z_1)$  la solución final al problema: el punto que hay que dibujar para ver la imagen deseada.

Todo este desarrollo se ha hecho también en GeoGebra y se puede consultar para entender cada paso.

Versión hecha con ecuaciones: <https://www.geogebra.org/m/rmggptc3>

Versión hecha geoméricamente: <https://www.geogebra.org/classic/krxtvyxy>

#### 5.4. Anamorfismo cilíndrico en la secuencia didáctica

Siguiendo los fundamentos didácticos que se exponen más adelante, se debe encontrar la manera de adaptar las situaciones reales que se quieren modelar a situaciones que permitan al alumnado hacer un trabajo interesante sin perderse en la complejidad de la realidad. Es por eso que se ha decidido trabajar con el anamorfismo poniendo los puntos virtuales sobre un plano vertical perpendicular al eje  $Y$ , como si lo que se quisiera ver fuese un cuadro colgado en una pared. Esta decisión abre las puertas a una serie de problemas que, en lo que sigue, se van a tratar.

La primera observación es que este cambio respecto a la sección anterior provoca que todos los puntos que se podían tener en el espacio tridimensional anteriormente, queden ahora proyectados desde  $O$  en el plano  $y = y_1$ , que se denominará *plano virtual*. Es decir que todo punto  $(x, y, z)$  que se tenga en la *región virtual*, se convierte en  $(x \cdot \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y}, y_1, (z - z_0) \cdot \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y} + z_0)$  por la proyección. Se asumirá que todos los *puntos virtuales* pertenecen a la intersección del *plano virtual* con la *región virtual*. De ahora en adelante, la *región virtual* será la intersección recién mencionada. El lector puede visualizarla en GeoGebra<sup>4</sup>.

Con el alumnado, se seguirá el método de Durero para hacer anamorfismos. Es decir: se quiere dibujar en el *plano real* el dibujo tal que en el espejo se vea una cuadrícula, para luego ir llenándolo cuadrado a cuadrado. Para ello será necesario descubrir como dibujar segmentos verticales y horizontales.

Se han encontrado varios documentos de experiencias previas en el campo de la didáctica matemática y todas usan circunferencias concéntricas con radios crecientes con su centro en el centro de la base del cilindro para hacer los segmentos horizontales y rectas que

<sup>4</sup><https://www.geogebra.org/m/rueewnhp>

pasan por el centro de la base del cilindro para hacer las verticales (como en la Figura 7). Este modelo es una gran simplificación de la plantilla de la cuadrícula que realmente se necesita en el anamorfismo cilíndrico. Si se quiere construir un modelo exacto, se pueden tomar las ecuaciones encontradas en la sección anterior (ecuación 5.10) y aplicarlas a una cuadrícula (ver GeoGebra<sup>5</sup>). En lo que sigue, se trabajará en generar un modelo que no solo aproxima la realidad mejor que el usado comúnmente, sino que, sobretodo, le da un gran interés didáctico.

#### 5.4.1. Segmentos verticales en un anamorfismo cilíndrico

Se empezará trabajando las verticales. Si se quiere dibujar un **segmento vertical** que vaya desde algún punto en el límite inferior de la *región virtual* hasta un punto del límite superior, ¿qué habrá que dibujar?

Sea  $\Lambda$  el conjunto de rectas que unen  $O$  con cada punto del segmento vertical, la intersección de  $\Lambda$  con el cilindro es lo que ve el observador. Dado que las rectas pasan por un mismo segmento vertical y por un mismo punto, están contenidas en un plano  $\gamma$  y además uno de los vectores directores del plano puede ser  $(0, 0, 1)$ . El cilindro es una superficie reglada, cuyas generatrices son rectas también con vector director  $(0, 0, 1)$ , por tanto,  $\gamma$  interseca el cilindro en una generatriz, es decir en una recta vertical. El conjunto de segmentos que van de  $O$  a cada punto del segmento vertical de la *región virtual* definen un triángulo lleno, que está contenido en  $\gamma$ . Por lo tanto, la intersección de  $\Lambda$  con el cilindro es un segmento vertical. Se ha visto que el eje de simetría para la reflexión de una recta que va de  $O$  hasta el cilindro es la que contiene un radio del cilindro a la altura en que la recta interseca el cilindro y que pase por la intersección de la recta y el cilindro. Los radios van desde el eje del cilindro al punto de intersección y por tanto están todos contenidos en el plano definido por el eje del cilindro y la generatriz en cuestión del cilindro. En consecuencia los ejes de simetría para cada recta de  $\Lambda$ , quedan todos en un mismo plano vertical. Esto implica que hacer la simetría axial de cada una de las rectas de  $\Lambda$  respecto a los ejes de simetría que están contenidos en este nuevo plano, se obtiene un nuevo conjunto de rectas, también contenidas en un plano. Esta simetría se puede entender como una rotación del plano  $\gamma$  y de las rectas de  $\Lambda$  respecto al eje vertical que contiene el segmento vertical intersección de  $\Lambda$  con el cilindro. Por lo tanto, cada recta de la reflexión de  $\Lambda$  intersecará el *plano real* a la misma distancia de la intersección del *plano real* con la generatriz del cilindro con la que se está trabajando y además, será sobre una misma recta en el *plano real*, la que es intersección de la reflexión de  $\gamma$  con este. De hecho, será una semirrecta que empieza en la intersección del *plano real* con la generatriz del cilindro con la que se ha estado trabajando. Ahora falta saber a qué punto del segmento vertical le corresponde cada punto de esta recta y en qué dirección se debe dibujar la recta.

La situación que se plantea al alumnado es:

**Problema 5.2.** Dado un espejo plano perpendicular al suelo y un punto de observación situado a una distancia  $D$  del espejo y a una altura  $H$ . Si se quiere ver un punto en el espejo a una altura  $h$ , ¿a qué distancia  $d$  del espejo se debe dibujar el punto en el suelo?

**Solución.** La situación se ilustra en la figura 12 (en la sección 7.1.3). Trivialmente (a nivel universitario), se ve que por la simetría, el triángulo rectángulo de base  $d$  y altura

<sup>5</sup><https://www.geogebra.org/m/yd2kaam3>

$h$  es semejante al de base  $D$  y altura  $H - h$  y por tanto:

$$\frac{d}{D} = \frac{h}{H - h} \implies d = \frac{D \cdot h}{H - h}$$

La solución hallada es de gran interés, tanto a nivel didáctico, como matemático. Su importancia a nivel didáctico se desarrolla en la sección 7.1.3 y se basa en gran parte en el desarrollo matemático que se hace a continuación<sup>6</sup>. Sea la función  $d(h) = \frac{D \cdot h}{H - h}$  (se suponen  $D > 0$  y  $H > 0$ ):

- $d(h)$  es continua para  $h \in (0, H)$ : la función es la composición de un producto, una resta y una división en la que el denominador nunca es 0. Todas ellas son funciones continuas y por tanto, su composición también. La continuidad de la función implica que el dibujo para ver un segmento vertical es continuo.
- $d'(h) > 0, h \in (0, H)$ : La derivada de  $d(h)$  es  $d'(h) = \frac{D \cdot H}{(H - h)^2}$  que siempre es positiva para  $h \in (0, H)$ . Eso implica que no habrá dos puntos de un segmento vertical cuyo *punto real* sea el mismo y que como más arriba se vea, más alejado del cilindro habrá que dibujarlo.
- $d''(h) > 0, h \in (0, H)$ : La segunda derivada de  $d(h)$  es  $d''(h) = \frac{2 \cdot D \cdot H}{(H - h)^3}$ , que siempre es positiva para  $h \in (0, H)$ . Eso implica que la distancia entre el dibujo de dos puntos crece cuanto más arriba se ven.
- $d(0) = 0$ : Para un *punto virtual* que se ve en la base del cilindro, su *punto real* correspondiente también está en la base del cilindro.
- $\lim_{h \rightarrow H^-} d(h) = \infty$ : Cuando  $h$  tiende a  $H$ , el denominador de la función tiende a 0 y por tanto, la función tiende a  $\infty$ . Esto justo con lo visto hasta ahora, implica que para ver un segmento vertical que en el cilindro va de la base hasta la altura del *punto de observación*, se debe dibujar una semirrecta cuyo origen está en la base del cilindro.

Llegado este punto, solo falta saber qué dirección tendrá esta semirrecta. Primero se buscará la dirección exacta, luego se verá una aproximación con más interés didáctico.

Sea un segmento vertical que en el cilindro empieza en  $Q = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t), 0)$  para una  $t$  cualquiera tal que  $Q$  pertenezca a la *región virtual*. Sea  $O_p$  la proyección ortogonal de  $O$  sobre el *plano real*  $z = 0$ . Se ve que la semirrecta a dibujar es la simetría respecto a la recta  $\Psi = (0, 0, 0) + \lambda(\cos(t), \sin(t), 0), \lambda \in \mathbb{R}$  de la semirrecta con extremo en  $Q$  que pasa por  $O_p$ . Para hallar la semirrecta a dibujar, se buscará el punto  $O_s$ , simetría de  $O_p$  respecto a  $\Psi$ , para luego definir la recta que pasa por  $Q$  y  $O_s$ .

La proyección ortogonal de  $\vec{O}_p = (0, y_0)$  en  $(\cos(t), \sin(t))$  usando el producto escalar es<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\Psi} O_p &= \frac{(0, y_0) \cdot (\cos(t), \sin(t))}{\|(\cos(t), \sin(t))\|} \cdot (\cos(t), \sin(t)) \\ &= (y_0 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t), y_0 \cdot \sin^2(t)) \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Todo este desarrollo matemático es asequible en bachillerato, pero no se considera oportuno dedicarle demasiado tiempo en esta secuencia didáctica

<sup>7</sup>Dado que se trabaja en la proyección sobre el plano  $z = 0$ , se restringe la notación a 2 coordenadas.

La simetría de  $O_p$  respecto a  $\Psi$  es  $O_p$  más dos veces el vector que va de  $O_p$  a su proyección en  $\Psi$ . Por tanto se tiene:

$$\begin{aligned} O_s &= (0, y_0) + 2 \cdot (y_0 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t), y_0 \cdot \sin^2(t) - y_0) \\ &= (2 \cdot y_0 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t), y_0 \cdot (2 \cdot \sin^2(t) - 1)) \end{aligned}$$

En conclusión, la semirrecta a dibujar es la que sale de  $Q$  y pasa por  $O_s$ .

La solución recién hallada es exacta. Sin embargo, si no se tiene la necesidad de la solución exacta, se puede hacer una aproximación que a nivel didáctico resulta muy interesante y abre un nuevo campo. Dado que la observación del cilindro en la realidad se suele hacer desde una distancia bastante grande en relación a, por ejemplo, el radio del cilindro, se puede considerar que las rectas que van desde el *punto de observación* hasta el cilindro son casi paralelas, ya que ocupan un ángulo de visión muy pequeño. Esto se acentúa aun más al considerar que las personas miran el cilindro con los dos ojos abiertos. Esto hace que realmente no se pueda decir que se observa desde un solo *punto de observación*, sino que la imagen se compone a partir de la observación desde dos *puntos de observación* que, además, se hallan ambos a la misma distancia del cilindro y entre ambos ojos la distancia se asemeja al diámetro de los cilindros con los que se trabaja en la secuencia didáctica (latas de conserva). A ello se le puede sumar la función autocorrectora de la vista humana, que siempre busca percibir elementos conocidos (es la base de muchas ilusiones ópticas y, en general, de que se pueda comprender lo que se ve). Todo junto permite pensar que para modelizar el anamorfismo, se puede considerar que lo que ahora llega a lo que se podría llamar *zona de observación* reflejado desde el cilindro es un haz de rectas paralelas. La experiencia muestra que funciona. Esto es lo que se hará en la secuencia didáctica y lleva a estudiar la curva nefroide.

#### 5.4.2. La nefroide

**Definición 5.3.** Las *epicicloides* forman la familia de curvas descritas por la traza de un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre el exterior de otra circunferencia.<sup>8</sup>

Diferentes medidas de circunferencias definen diferentes epicicloides. Sea  $R$  el radio de la circunferencia fija y  $r$  el radio de la circunferencia que rueda, a la que se llamará circunferencia exterior, la forma de la epicicloide depende de el ratio  $\frac{R}{r}$ .

Se busca la función paramétrica de la epicicloide.

El centro de la circunferencia exterior gira a velocidad constante alrededor del centro de la circunferencia fija, siempre a distancia  $R + r$ .

La relación del perímetro de la circunferencia exterior respecto al de la circunferencia fija es

$$\frac{Per(C_r)}{Per(C_f)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{r}{R}$$

Por lo tanto, la circunferencia exterior da  $\frac{R}{r}$  vueltas al dar una vuelta a la circunferencia fija. En consecuencia, su velocidad de giro debe ser  $\frac{R}{r}$  veces la del centro de la circunferencia exterior.

---

<sup>8</sup>La misma definición pero rodando en el interior de una circunferencia (en vez de en el exterior) define a las hipocicloides.



Como que la circunferencia exterior rueda sin resbalar, al ángulo respecto al centro de la circunferencia exterior del punto que traza la epicycloide se le debe añadir el cambio de inclinación de la superficie sobre la que rueda. De esta manera, sea  $\theta$  el ángulo de giro de el centro de la circunferencia exterior, entonces, el ángulo de giro de la circunferencia exterior respecto a su centro es  $\frac{R}{r} \cdot \theta + \theta = \frac{R+r}{r} \cdot \theta$ .

Con todo lo dicho, se puede definir el punto que traza la curva epicycloide en función del ángulo de giro de la circunferencia exterior, como la suma del vector que va del origen de coordenadas hasta el centro de la circunferencia exterior,  $((R+r) \cdot \cos(\theta), (R+r) \cdot \sin(\theta))$ , más el vector con origen en el centro de la circunferencia exterior y final en el punto que traza la curva,  $(r \cdot \cos(\frac{R+r}{r} \cdot \theta), r \cdot \sin(\frac{R+r}{r} \cdot \theta))$ . De esta manera, la parametrización de la curva, fijados los radios de las circunferencias, queda como sigue:

$$f(\theta) = ((R+r) \cdot \cos(\theta) + r \cdot \cos(\frac{R+r}{r} \cdot \theta), (R+r) \cdot \sin(\theta) + r \cdot \sin(\frac{R+r}{r} \cdot \theta)) \quad (5.12)$$

Se ha construido un GeoGebra<sup>9</sup> en el que experimentar con el proceso de creación de las epicycloides y las hipocicloides y sus diferentes formas (ver anexo). Es un tema que da para un estudio mucho más profundo (y resultaría ideal para una nueva secuencia didáctica, dada su belleza y las preguntas y posibilidades de experimentación que genera), sin embargo, el trabajo se ceñirá a la curva nefroide.

**Definición 5.4.** *La curva nefroide<sup>10</sup> es un caso especial de las epicycloides. Se define como la epicycloide en la que el radio de la circunferencia exterior es la mitad de el de la circunferencia fija*

Eso quiere decir que  $R = 2 \cdot r$ , y por tanto, su ecuación parametrizada, siguiendo la ecuación 5.12, es:

$$g(\theta) = (3 \cdot r \cdot \cos(\theta) + r \cdot \cos(3 \cdot \theta), 3 \cdot r \cdot \sin(\theta) + r \cdot \sin(3 \cdot \theta)) \quad (5.13)$$

Pero, ¿por qué se va a hablar de la nefroide en este trabajo?

En el nuevo modelo de generación de anamorfismos cilíndricos, cuando se quiere ver un conjunto de rectas verticales en el anamorfismo, se tiene un haz de planos paralelos entre sí y perpendiculares al *plano real*, al que llamaremos  $H$ , que se refleja en el cilindro. Con todo lo visto hasta ahora se puede decir que cuando este haz de planos se refleja en un cilindro, su reflexión consiste en un conjunto de planos no paralelos, pero sí perpendiculares al *plano real*. La intersección con el *plano real* de este conjunto de planos reflejados es un haz de rectas.

**Definición 5.5.** *Un haz de curvas planas es una familia uniparamétrica  $C_\theta$  de curvas planas de la forma  $f(x, y, \theta) = 0$ ,  $\theta \subset \mathbb{R}$  tal que  $f$  varía diferenciablemente con  $\theta$ .*

En el caso en cuestión, se tiene un haz de rectas. Este haz de rectas es, trivialmente, la reflexión en la circunferencia base del cilindro de las rectas que son intersección de los planos de  $H$  con el *plano real*. Por lo tanto, para ver segmentos verticales habrá que dibujar semirrectas contenidas en las rectas del haz de rectas hallado, con origen en la circunferencia base del cilindro y que se extiendan hacia el exterior de la circunferencia.

<sup>9</sup><https://www.geogebra.org/m/e65ujkyu>

<sup>10</sup>La nefroide fue estudiada por primera vez por Huygens y Tschirnhausen hacia 1679 en relación a la teoría de cáusticas.

Tómese el mismo haz de planos  $H$ , pero piénsese como si la *zona de observación* estuviera del otro lado del cilindro y solo se tuviera medio cilindro, de manera que los planos se reflejan en el interior del cilindro (en vez de en el exterior, como hasta ahora). Entonces cada plano se reflejaría especularmente en el mismo plano tangente que los planos que “vienen” del lado original, ya que intersectarían el cilindro en las mismas generatrices y por lo tanto, evidentemente, la intersección con el *plano real* de los planos reflejados serían las mismas rectas que en el caso original. Por lo tanto, para ver una vertical en el espejo, siguiendo el mismo procedimiento que antes, se deberían dibujar las semirrectas contenidas en las mismas rectas que en el caso original, que parten de la circunferencia base del cilindro (también como en el caso original), pero que se extienden hacia el interior de la circunferencia.

Volviendo a la pregunta de por qué se trata la nefroide en este trabajo: se quiere demostrar que la curva nefroide es la envolvente de este haz de rectas.

**Definición 5.6.** Sean dos curvas  $f(x, y, \lambda_0) = 0$  y  $f(x, y, \lambda_0 + d\lambda) = 0$  de la familia de curvas  $f(x, y, \lambda) = 0$ . Sea un punto  $P = (x_0, y_0)$  de la curva  $f(x, y, \lambda_0) = 0$ . El **orden de aproximación** del punto  $P$  a la curva  $f(x, y, \lambda_0 + d\lambda) = 0$  es el orden de  $f(x_0, y_0, \lambda_0 + d\lambda)$  con respecto a  $d\lambda$ .

Como  $f(x_0, y_0, \lambda_0 + d\lambda) = f_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0)d\lambda + \frac{1}{2!} \cdot f_{\lambda\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0)d\lambda^2 + \dots$ , el orden de aproximación de  $P$  a la curva  $f(x, y, \lambda_0 + d\lambda) = 0$  es el orden de la primera derivada que no se anula en  $(x_0, y_0, \lambda_0)$ .

**Definición 5.7.** Sea la familia de curvas  $f(x, y, \lambda) = 0$ . Un **punto de aproximación** es un punto para el que el orden de aproximación a es mayor que 1. Vendrá dado por las soluciones al sistema

$$\begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0 \\ f_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

**Definición 5.8.** Los **puntos de aproximación aislados** son aquellos puntos de aproximación para los que existe un entorno que no contiene ningún otro punto de aproximación de la misma curva.

**Definición 5.9.** Un **punto singular** de una curva es un punto en el que la curva no admite una tangente única.

**Definición 5.10.** Un **punto característico** de una curva de un haz de curvas planas es un punto de aproximación aislado que no es singular.

**Definición 5.11.** La **envolvente** de un haz de curvas planas es una curva regular (que admite una parametrización) tal que corta tangencialmente a cada curva del haz. Es, por tanto, el lugar geométrico de todos los puntos característicos del haz.

Se enuncia un teorema que será necesario.

**Teorema 5.12. Teorema de la función implícita** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^k$  en  $A$  y  $p = (a, b) \in A$  tal que  $f(a, b) = 0$ .

Si  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(a, b) = \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(a, b) \right)_{1,j} \neq 0$ , entonces:

- existen dos entornos,  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $a$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  de  $b$ , tales que  $U \times V \subset A$ .

- existe una función  $g : U \rightarrow V$ , de clase  $C^k(U)$ , tal que para cada  $x \in U$ ,  $y = g(x)$  es el único punto de  $V$  que cumple  $f(x, y) = 0$ .

Es decir, la ecuación  $f(x, y) = 0$  define implícitamente una función  $y = g(x)$  de clase  $C^k$  en un entorno  $U$  de  $a$ , que cumple  $g(a) = b$ .

**Teorema 5.13.** La envolvente de la familia de curvas  $x = x(\lambda, t)$ ,  $y = y(\lambda, t)$  viene dada por

$$\begin{cases} x = x(\lambda, t) \\ y = y(\lambda, t) \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Las ecuaciones  $x = x(\lambda, t)$  y  $y = y(\lambda, t)$  definen una expresión de la forma  $f(x, y, \lambda) = 0$  si  $\frac{\partial x}{\partial t} \neq 0$  o  $\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0$ .

Supongase que  $\frac{\partial x}{\partial t} \neq 0$ . Entonces, por el teorema de la función implícita aplicado a la función  $h(x, \lambda, t) = x - x(\lambda, t)$ , existirá una función  $\lambda = F(x, \lambda)$  tal que  $x - x(\lambda, F(x, \lambda)) = 0$ .

Al derivar esta expresión respecto a  $\lambda$  se obtiene  $-\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$  y por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{-\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial t}}. \quad (5.14)$$

Sustituyendo  $t = F(x, \lambda)$  en  $y = y(\lambda, t)$  se obtiene  $y - y(\lambda, F(x, \lambda)) = 0$ .

Se define la familia  $f(\lambda) = y - y(\lambda, F(x, \lambda))$ .

La envolvente viene definida por  $f(\lambda) = 0$ ,  $f_\lambda = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ .

La primera ecuación equivale a  $x = x(\lambda, t)$ ,  $y = y(\lambda, t)$  y la segunda, teniendo en cuenta 5.14, puede expresarse en la forma

$$0 = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

□

Llegado este punto, es necesario definir el haz de rectas que resulta de reflejar una vez un haz de rectas paralelas en el interior de una circunferencia. Para facilitar la visualización, se resolverá el problema para rectas paralelas al eje  $Y$ . Se sabe que la recta reflejada interseca dos veces la circunferencia. Los puntos de la circunferencia se caracterizarán por el ángulo en sentido antihorario entre el eje horizontal y el radio que pasa por el punto en cuestión.

Para definir el haz de rectas, se quiere encontrar la relación entre el punto de intersección con la circunferencia correspondiente al punto en el que se refleja la recta y el segundo punto de intersección con la circunferencia. Este es el problema que se planteará en la secuencia didáctica.

**Problema 5.14.** Dada una recta vertical que se refleja en una circunferencia en un punto  $A$ , ¿cuál es el punto  $B$  (diferente de  $A$ ) intersección de la recta reflejada con la circunferencia?

El problema se resolverá con herramientas de geometría analítica.

Se supondrá que la circunferencia tiene el centro en el origen de coordenadas.

El punto de intersección diferente de  $A$  de la recta vertical con la circunferencia se llamará  $C$ .

En primer lugar, tanto la recta vertical como la circunferencia son invariantes respecto a la simetría axial con eje el eje  $X$ . Por lo tanto, los ángulos entre el eje  $X$  y los radios que pasan por las dos intersecciones de la recta vertical con la circunferencia son los mismos. A estos ángulos se les llamará  $\lambda$ . El ángulo entre los radios que pasan por  $A$  y  $C$  es  $2 \cdot \lambda$

En segundo lugar, la recta reflejada es la simetría axial de la recta vertical respecto a la recta que contiene el radio que pasa por el punto de reflexión. La circunferencia también es invariante respecto a esta simetría, ya que se da respecto a uno de sus radios. Por lo tanto, el punto  $B$  es la simetría de  $C$  respecto al radio que pasa por  $P$ . En consecuencia los ángulos entre el radio que pasa por  $A$  y los radios que pasan por  $B$  y por  $C$  son los mismos, es decir  $2 \cdot \lambda$ . Por lo tanto, el ángulo entre el radio que pasa por  $Q$  y el eje  $X$  es  $\lambda + 2 \cdot \lambda = 3 \cdot \lambda$ .

En conclusión, si una recta se refleja en un punto  $A$  tal que el radio que pasa por este forma un ángulo  $\lambda$  cualquiera en sentido antihorario con el eje  $X$ , el punto  $Q$  será tal que el ángulo en sentido antihorario que forma el radio que pasa por  $Q$  con el eje  $X$  es  $3 \cdot \lambda$ .

Con este resultado se puede definir el haz de rectas reflejadas en una semicircunferencia de radio  $R$  centrada en el origen de coordenadas como sigue:

$$\begin{cases} x(\lambda, t) = R \cdot \cos(\lambda) \cdot (1 - t) + R \cdot \cos(3 \cdot \lambda) \cdot t \\ y(\lambda, t) = R \cdot \sin(\lambda) \cdot (1 - t) + R \cdot \sin(3 \cdot \lambda) \cdot t \end{cases} \quad (5.15)$$

Con  $\lambda \in (0, \pi)$ .

Siguiendo el teorema 5.13, se quiere igualar el jacobiano a 0. Para ello, se buscan en primer lugar las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= R \cdot ((t - 1) \cdot \sin(\lambda) - 3 \cdot t \cdot \sin(3 \cdot \lambda)) \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= R \cdot (\cos(3 \cdot \lambda) - \cos(\lambda)) \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= R \cdot ((1 - t) \cdot \cos(\lambda) + 3 \cdot t \cdot \cos(3 \cdot \lambda)) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= R \cdot (\sin(3 \cdot \lambda) - \sin(\lambda)) \end{aligned}$$

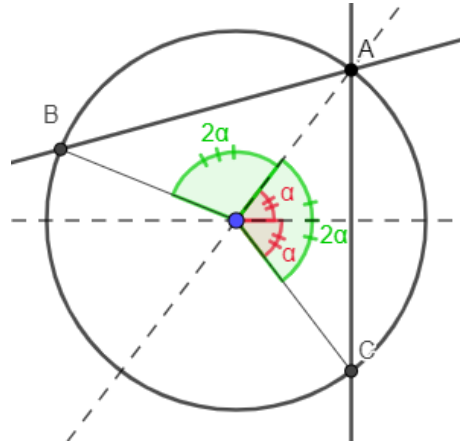


Figura 4: Diseño del problema

Entonces:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial y} \right| &= R^2 \cdot ((t-1) \cdot \sin(\lambda) - 3 \cdot t \cdot \sin(3 \cdot \lambda)) \cdot (\sin(r \cdot \lambda) - \sin(\lambda)) \\
&\quad - R^2 \cdot (\cos(3 \cdot \lambda) - \cos(\lambda)) \cdot ((1-t) \cdot \cos(\lambda) + r \cdot \cos(3 \cdot \lambda)) \\
&= R^2 \cdot ((t-1) \cdot (\sin(\lambda) \cdot \sin(3 \cdot \lambda) + \cos(\lambda) \cdot \cos(3 \cdot \lambda) - \sin^2(\lambda) - \cos^2(\lambda))) \\
&\quad + R^2 \cdot (3 \cdot t \cdot (\sin(\lambda) \cdot \sin(3 \cdot \lambda) + \cos(\lambda) \cdot \cos(3 \cdot \lambda) - \sin^2(3 \cdot \lambda) - \cos^2(2 \cdot \lambda))) \\
&= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (\sin(\lambda) \cdot \sin(3 \cdot \lambda) + \cos(\lambda) \cdot \cos(3 \cdot \lambda) - 1) \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Se quiere simplificar  $(\sin(\lambda) \cdot \sin(3 \cdot \lambda) + \cos(\lambda) \cdot \cos(3 \cdot \lambda))$ . Se sabe que

$$\begin{aligned}
\sin(3 \cdot \lambda) &= 3 \cdot \sin(\lambda) - 4 \cdot \sin^3(\lambda) \\
\cos(3 \cdot \lambda) &= 4 \cdot \cos^3(\lambda) - 3 \cdot \cos(\lambda) \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Incorporando las ecuaciones 5.17 en la ecuación 5.16 se tiene:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial y} \right| &= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (\sin(\lambda) \cdot (3 \cdot \sin(\lambda) - 4 \cdot \sin^3(\lambda)) \\
&\quad + \cos(\lambda) \cdot (4 \cdot \cos^3(\lambda) - 3 \cdot \cos(\lambda)) - 1) \\
&= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (3 \cdot \sin^2(\lambda) - 4 \cdot \sin^4(\lambda)) + (4 \cdot \cos^4(\lambda) - 3 \cdot \cos^2(\lambda)) - 1) \\
&= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (3 \cdot (\sin^2(\lambda) - \cos^2(\lambda)) + 4 \cdot (\cos^4(\lambda) - \sin^4(\lambda)) - 1) \\
&= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (3 \cdot (-\cos(2 \cdot \lambda)) + 4 \cdot ((\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) \cdot (\cos^2(\lambda) + \sin^2(\lambda)) - 1) \\
&= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (3 \cdot (-\cos(2 \cdot \lambda)) + 4 \cdot ((\cos(2 \cdot \lambda)) - 1) \\
&= R^2 \cdot (4 \cdot t - 1) \cdot (\cos(2 \cdot \lambda) - 1) \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Seguendo el teorema 5.13, la ecuación 5.18 debe ser igual a 0. Se ve que  $R \neq 0$ . Por otro lado,  $\lambda \in (0, \pi) \implies \cos(2 \cdot \lambda) \in [-1, 1] \implies (\cos(2 \cdot \lambda) - 1) \in [-2, 0]$ . Por lo tanto,  $(4 \cdot t - 1) = 0$  y finalmente,  $t = \frac{1}{4}$ .

Sustituyendo  $t$  por  $\frac{1}{4}$  en las ecuaciones del haz de rectas (ecuaciones 5.15) se obtiene la envolvente parametrizada en función de  $\lambda$ :

$$\left( \frac{3}{4} \cdot R \cdot \cos(\lambda) + \frac{1}{4} \cdot R \cdot \cos(3 \cdot \lambda), \frac{3}{4} \cdot R \cdot \sin(\lambda) + \frac{1}{4} \cdot R \cdot \sin(3 \cdot \lambda) \right) \tag{5.19}$$

Se quiere ver si esta curva tiene la misma forma que la nefroide con ecuaciones 5.13. Si las ecuaciones 5.19 se multiplican por 4, la curva se hace más grande, pero conserva su forma. Por lo tanto se tiene:

$$(3 \cdot R \cdot \cos(\lambda) + R \cdot \cos(3 \cdot \lambda), 3 \cdot R \cdot \sin(\lambda) + R \cdot \sin(3 \cdot \lambda))$$

Y se ve que estas son las mismas ecuaciones que las ecuaciones 5.13 de la nefroide. Por lo tanto, la envolvente del reflejo en una circunferencia de un haz de rectas paralelas es una nefroide, como se quería demostrar. Y en conclusión, para ver segmentos verticales, hay que dibujar las rectas que envuelven a la nefroide inscrita en la base del cilindro.

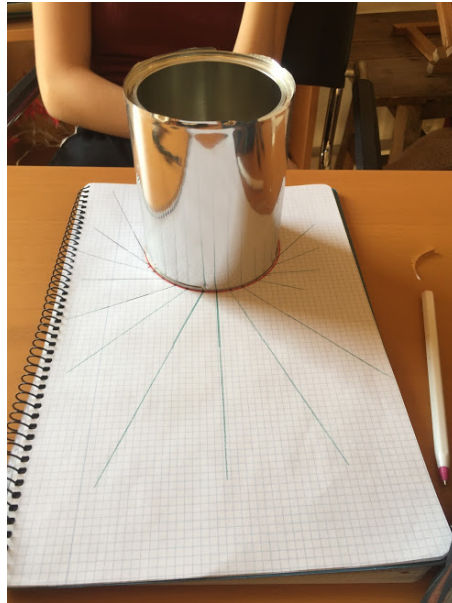


Figura 5: Anamorfismo diseñado por alumna para visualizar segmentos verticales

#### 5.4.3. Segmentos horizontales en un anamorfismo cilíndrico

El estudio de los segmentos horizontales en un *plano virtual* ha llevado a resultados matemáticos para los cuales sería muy interesante una colaboración con la asignatura de tecnología para su aplicación didáctica. El proceso de investigación también ha llevado a situaciones interesantes a compartir con el alumnado.

Como se ha dicho, habitualmente se han usado plantillas que a los segmentos horizontales les hacen corresponder arcos de circunferencias concéntricas con centro en el centro de la base del cilindro. Esto resulta fácilmente refutable pensando en un segmento horizontal que interseque la base del cilindro dos veces. Su proyección sobre el cilindro desde el *punto de observación* genera una curva cuyos extremos son los únicos puntos que están en la base del cilindro. Siguiendo lo explicado en la sección dedicada a los segmentos verticales, se deduce que los *puntos reales* correspondientes a los extremos son los únicos que se hallan en la base del cilindro, imposibilitando así que todo el dibujo quede en una circunferencia con centro en el eje del cilindro.

Trabajando con GeoGebra, se hizo el anamorfismo de seis puntos alineados horizontalmente y la forma resultante se asemejó a la de una elipse. Utilizando la herramienta que traza una cónica dados cinco de sus puntos, se vio que, efectivamente, el sexto punto también se hallaba aparentemente sobre la elipse resultante<sup>11</sup>. En base a esto se conjeturó que el dibujo correspondiente a un segmento horizontal era una elipse. Finalmente, al estudiar puntos del segmento muy cercanos a los límites de la *región virtual*, se descubrió que era falso. También al hacer un gran *zoom* en el sexto punto (el no escogido para definir la cónica), se vio que realmente no formaba parte de la elipse. Sin embargo, resulta interesante, ya que muestra que una elipse puede ser una muy buena aproximación, al menos para la zona central del anamorfismo. Todo este proceso, si bien no lleva a grandes resultados, sí resulta muy interesante explicarlo al alumnado, ya que transmite lo que es la investigación matemática y muestra como es el mismo que están siguiendo ellos.

<sup>11</sup><https://www.geogebra.org/m/vybpmqck>

Entonces, la cuestión que se plantea es: ¿qué se debe dibujar para ver segmentos horizontales en el nuevo modelo basado en rayos que llegan paralelos a la *zona de observación*? Para resolver este problema, nuevamente se pensará el proceso anamórfico inverso, es decir desde la *zona de observación* hasta el *punto real*. Dado un punto virtual  $V = (x_1, 0, z_1)$  en el plano  $y = 0$  y la *zona de observación* definida por  $y = y_0$  y  $z = z_0$ , se considera que el rayo sale de  $O = (x_1, y_0, z_0)$  y va en dirección a  $V$ . Entonces el rayo se refleja en  $C$ , la intersección con el cilindro. Sea  $C_p$  la proyección de  $V$  en el plano  $z = 0$ , entonces  $\lambda \in (0, \pi)$  es el ángulo entre el radio de la base del cilindro que contiene a  $C_p$  y el radio de la base del cilindro que va de  $(0, 0, 0)$  a  $(R, 0, 0)$ . Entonces se puede expresar  $V = (R \cdot \cos(\lambda), 0, z_1)$ , su proyección en  $z = 0$  es  $V_p = (R \cdot \cos(\lambda), 0, 0)$  y  $C = (R \cdot \cos(\lambda), R \cdot \sin(\lambda), z_1)$  y su proyección en  $z = 0$  es  $C = (R \cdot \cos(\lambda), R \cdot \sin(\lambda), z_1)$ . Sea  $V_2$  la proyección de  $V$  en  $z = 0$  desde  $O$ . La distancia desde  $C$  hasta  $V_2$  es la misma que desde  $C$  hasta el *punto real* y por tanto, también se cumple que la distancia desde  $C_p$  hasta  $V_2$  es la misma que desde  $C_p$  hasta el *punto real*. Sea  $y_2$  la segunda coordenada de  $V_2$ , por el teorema de Tales, se tiene

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0} = \frac{y_0}{y_0 + |y_2|} \iff |y_2| = \frac{z_0 \cdot y_0}{z_0 - z_1} - y_0$$

Por lo tanto, el *punto real* está a distancia  $|y_2| + R \cdot \sin(\lambda)$  de  $C_p$ . Ahora falta saber en qué dirección. Para ello siguiendo el desarrollo geométrico expuesto en la figura 6, se ve que el ángulo respecto al eje  $y = R \cdot \sin(\lambda)$  es  $\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \lambda$ .

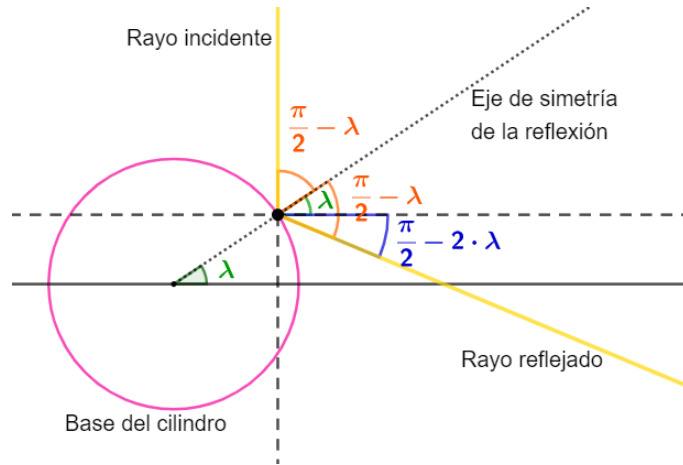


Figura 6: Desarrollo geométrico para averiguar la dirección del rayo reflejado

Sabiendo esto, dado un segmento horizontal en el *plano virtual*  $y = 0$  y a una altura  $z = z_1$ , se tiene que las ecuaciones que definen las coordenadas de los puntos a dibujar son:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(\lambda) + (|y_2| + R \cdot \sin(\lambda)) \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\ y = R \cdot \sin(\lambda) + (|y_2| + R \cdot \sin(\lambda)) \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (5.20)$$

Donde  $|y_2|$  responde a la ecuación 5.4.3 y por tanto es constante en un segmento horizontal.

Se quiere ver si estas ecuaciones corresponden también a una nefroide. Tras hacer un desarrollo que incluye la reparametrización  $\theta = \lambda - \frac{\pi}{2}$  se obtiene (ver anexo 9.2):

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\theta) - \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot \theta) - |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \theta) \\ y = \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\theta) + \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot \theta) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \theta) \end{cases} \quad (5.21)$$

Donde  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Se ve que cuando  $z_1$  se aproxima a  $z_0$ ,  $|y_2|$  tiende a infinito. Con lo cual, todos los sumandos que no están multiplicados por  $|y_2|$  tienden a ser insignificantes y por lo tanto nos quedan las ecuaciones de una circunferencia. Es decir que cuanto más arriba se hallan los segmentos verticales que se quieren ver, su dibujo más se asemeja a una circunferencia.

Si  $z_1 = 0$ , entonces  $|y_2| = 0$  (siguiendo la ecuación 5.4.3). Sea  $|y_2| = 0$  con estas nuevas ecuaciones, se da que:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\theta) - \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot \theta) \\ y = \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\theta) + \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot \theta) \end{cases} \quad (5.22)$$

Si se hace la simetría respecto al eje  $Y$  y se multiplican ambas coordenadas por 2, sigue manteniendo la forma, pero más grande y se obtiene:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot R \cdot \sin(\theta) + R \cdot \sin(3 \cdot \theta) \\ y = 3 \cdot R \cdot \cos(\theta) + R \cdot \cos(3 \cdot \theta) \end{cases} \quad (5.23)$$

Estas son las ecuaciones de la nefroide vistas en las ecuaciones 5.13. Por lo tanto, el dibujo para ver el segmento horizontal que corresponde al diámetro de la base del cilindro que va de  $(-R, 0, 0)$  a  $(R, 0, 0)$  es media nefroide.<sup>12</sup>

Para terminar con los fundamentos matemáticos, se muestran las plantillas de cuadrículas en los dos modelos trabajados y la usada generalmente para compararlas (en los pies de página asociados se encuentran los modelos realizados con GeoGebra para poder experimentar con ellos):

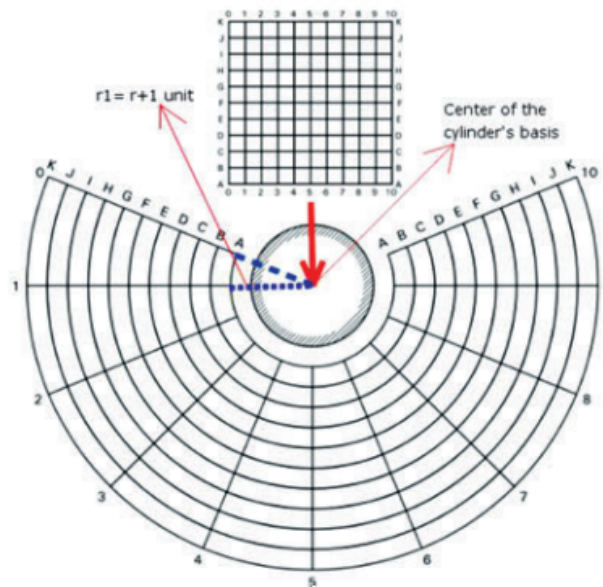


Figura 7: Plantilla de cuadrícula usada generalmente

<sup>12</sup>Se puede ver que dada una circunferencia y uno de sus diámetros, la envolvente de las circunferencias con centro en la circunferencia y tangentes al diámetro escogido es una curva nefroide. Sería una formación de la nefroide análoga a la aquí desarrollada.



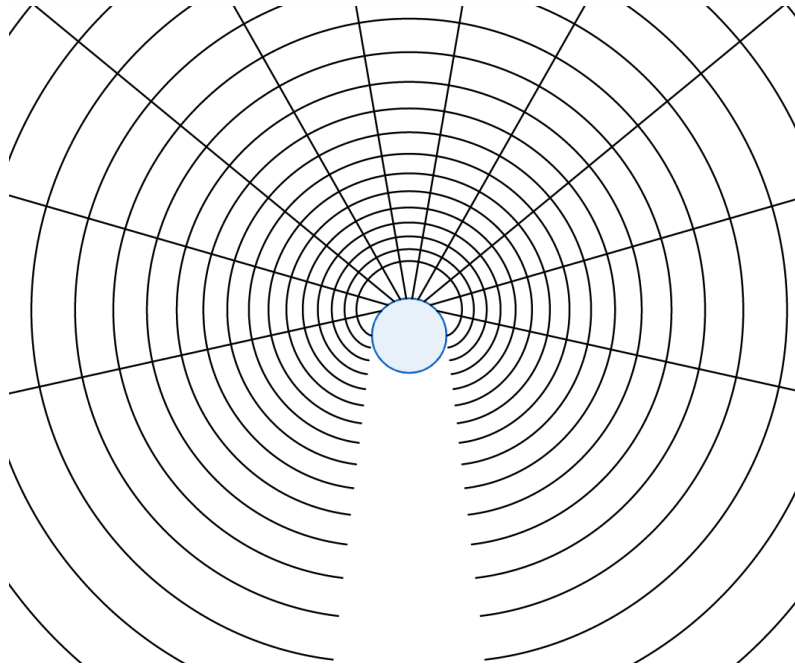


Figura 8: Plantilla de cuadrícula de modelo con un solo *punto de observación* y con  $y_0 = 8,5$ ,  $z_0 = 5$ ,  $y_1 = 0$  y  $R = 1$

GeoGebra para experimentar con el modelo de la figura 8: <https://www.geogebra.org/m/yd2kaam3>

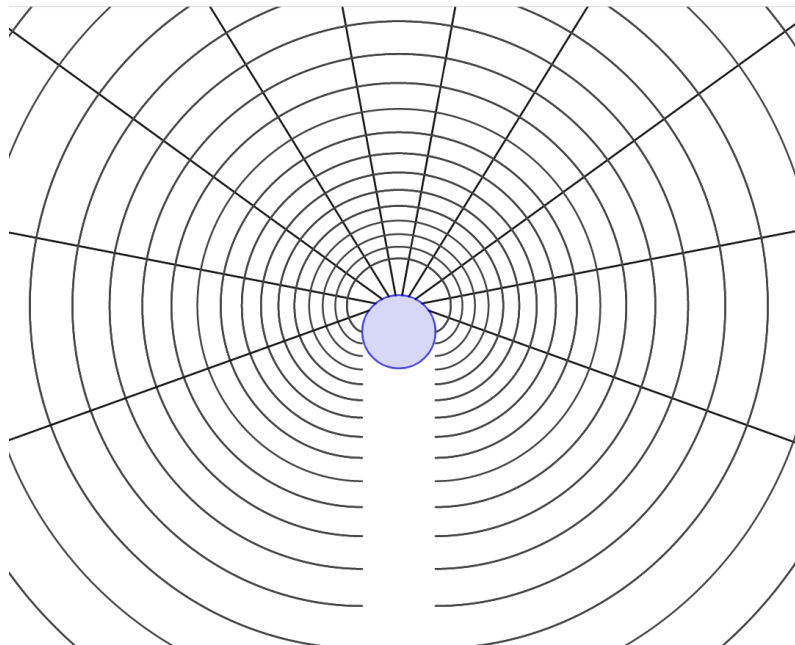


Figura 9: Plantilla de cuadrícula de modelo con rayos paralelos y con  $y_0 = 8,5$ ,  $z_0 = 5$ ,  $y_1 = 0$  y  $R = 1$

GeoGebra para experimentar con el modelo de la figura 9: <https://www.geogebra.org/classic/rfptc3t2>

## 6. Fundamentos didácticos

En una formación en didáctica de las matemáticas para la asociación de ocio científico *Explorium*, el catedrático Anton Aubanell dijo que es esencial que el profesor tenga conocimientos más profundos que aquello que va a enseñar durante la sesión. Es necesario para poder llevar la clase con soltura, para poder entender las dudas del alumnado y tener herramientas para redirigirlos. Tener un conocimiento profundo y diverso permitirá poder enfocar el problema desde diferentes perspectivas, pudiendo entonces abarcarlo desde la más adecuada para la persona en cuestión. Llegados a este punto se considera que ya se tiene un conocimiento de la materia más que suficiente para poder entrar en la dimensión didáctica.

Este proyecto está pensado para ser llevado a cabo con clases de bachillerato y por tanto todas las consideraciones y enfoque didáctico estará sujeto a ello.

Para encarar el diseño de las actividades que se llevarán a cabo se ha realizado una investigación bibliográfica que permite asentar unos fundamentos sólidos a nivel didáctico. Estos se basan en voces autorizadas de la didáctica de las matemáticas tanto actuales como del pasado reciente.

A la hora de transmitir conocimientos son tan importantes los conocimientos a transmitir como la manera en que se transmiten los conocimientos. Una actividad vacía de contenido podrá hacer que el alumnado pase un buen rato, pero sin aprender nada, pero una actividad con mucho contenido mal transmitido será un fracaso, puesto que nadie entenderá nada o a nadie le generará ninguna pregunta o inquietud. Es por eso que esta sección se considera fundamental de cara al éxito del proyecto que se quiere realizar. ¿Qué se quiere lograr? ¿Cómo se puede lograr? Son las voces de la experiencia las que dan los apoyos para innovar.

En el currículum de bachillerato de la Generalitat de Catalunya se detallan el conjunto de competencias, objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación para la enseñanza de las matemáticas en bachillerato en Cataluña. Todo ello se tendrá muy en cuenta ya que a fin de cuentas, es en el bachillerato de Cataluña donde se empezará a llevar a cabo este proyecto.

El currículum empieza dándonos unos objetivos generales:

*“el batxillerat constitueix el primer període postobligatori que ha de donar resposta a uns alumnes per ser terminal i a uns altres per ser propedèutic.”*

Se debe organizar la actividad de manera que plantee un problema a resolver:

*“L’ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes situa l’estudiant en una posició sovint incòmoda que força la seva capacitat autònoma. Les estratègies heurístiques, que sovint no garanteixen efectivitat de resolució, permeten afrontar cada problema tot forçant el pensament crític i creatiu de l’alumnat. El tipus de raonament que generen aquestes estratègies serà d’utilitat per a l’alumne/a més enllà de l’aula de matemàtiques.”*

La toma de decisiones es una práctica fundamental a fomentar. Es lo que diferencia el ejercicio del problema. En el aprendizaje debe haber un proceso de descubrimiento, con conjeturas que lleven a errores, que serán un motor para el aprendizaje, llevándonos a nuevas conjeturas. Luego, para poder comunicar lo que se ha hecho, se necesitará el rigor:

*“En un món en canvi constant, l’ensenyament de la matemàtica ha de seguir camins en els quals l’elecció sigui inevitable, la correcció un hàbit i l’error un motiu per a l’aprenentatge. La resolució de problemes, entesa com una activitat de construcció de coneixement i no sols com la resolució rutinària d’exercicis, pot i deu conduir a l’establiment de patrons generals que posteriorment siguin útils.”*

El conocimiento matemático debe ser construido mediante el desarrollo de las competencias matemáticas. Este proceso de gestación lleva al alumnado por varias fases y ciclos que, al fin, serán lo que más valor tenga. Se debe procurar que estos procesos terminen desembocando en resultados matemáticos que se unirán a los cimientos matemáticos del alumnado y permitirán afrontar nuevos retos. El currículum expone las siguientes como fases de la gestación:

*“Aquest procés de gestació de la matemàtica ha de ser viscut per l’alumnat. Plantejar problemes, experimentar-los, comprendre’ls, establir plans de treball, descobrir invariants, conjecturar resultats, generalitzar casos observats, suggerir altres problemes anàlegs, reconèixer conceptes matemàtics de situacions concretes, errar i corregir per experimentar i conjecturar de nou fins a obtenir resultats plausibles, proposar solucions als problemes plantejats, cercar arguments per consolidar els resultats conjecturals, redactar les conclusions, exposar-les en públic, defensar-les i acceptar els suggeriments i les crítiques dels altres, són activitats pròpies d’una dinàmica de treball que fa de la matemàtica una matèria útil en la formació integral de tots els alumnes i necessària en el batxillerat com a etapa terminal per a una part de l’alumnat.”*

El currículum establece cinco vertientes de la materia de matemáticas que se desarrollan con el trabajo centrado en la resolución de problemas y deben ser objeto de atención del trabajo docente en el aula. Estas son:

- Resolver problemas matemáticos.
- Comunicarse matemáticamente.
- Razonar matemáticamente.
- Valorar la matemática y su construcción.
- Tener confianza en la propia capacidad matemática.

En este sentido se ahonda en aquello que se requiere y que se trabajará en las actividades, proponiendo cuatro competencias específicas de la materia de matemáticas:

*“Ser **matemàticament competent** requereix, entre altres coses, l’assoliment gradual de la capacitat i la voluntat per pensar en la recta, el pla i l’espai (analogia), cercar arguments que aportin solidesa als patrons descoberts, representar construccions, gràfics o diagrames, construir, interpretar i emprar adequadament fórmules. En resum, copsar la naturalesa de la matemàtica i dels objectes amb què treballa aquesta ciència.”*

*“La **competència en modelització matemàtica** s’entén com el procés pel qual s’interpreta matemàticament una determinada situació per tal de conèixer el seu comportament i controlar-la. (...) La matemàtica facilita la creació de models simplificats del món real que permeten una interpretació acotada d’aquest i alhora generen problemes adequats al moment educatiu de l’alumne/a tot facilitant el seu esperit crític i despertant la seva creativitat. Cal facilitar entorns d’aprenentatge en els quals la resolució de problemes forci l’alumne/a a fixar l’atenció en la situació plantejada, cercar relacions entre les variables implicades i descobrir patrons generals per tal d’obtenir un model que, amb un nivell de sofisticació gradual, permeti interpretar el problema plantejat.*

La comprensión de la competencia recién citada es básica para este proyecto, ya que todo él se basa en modelizar un fenómeno óptico para poder controlarlo.

*“La **competència en contextualització** és consubstancial al treball matemàtic en el batxillerat.(...) La contextualització de les situacions-problema participa en la motivació de l’estudiant i alhora és un instrument que permet validar el coneixement après. També facilita la interpretació de la realitat física i social a partir del coneixement matemàtic propi, ajudant a entendre i explicar aquestes realitats. Les referències a situacions de la vida real s’han de fer sota estratègies definides que assignin amb cura on i com s’empren aquestes situacions. (...) En el batxillerat els entorns d’aprenentatge han de facilitar que, a partir d’aquestes situacions vinculades amb la realitat de l’estudiant, es puguin generar entorns d’aprenentatge que permetin l’establiment de resultats útils més enllà dels models concrets emprats. (...) De manera progressiva i sota entorns d’aprenentatge que parteixen de situacions-problema contextualitzades, l’alumnat obtindrà coneixement matemàtic més general que li facilita donar resposta a situacions que van més enllà de cada model concret i contextualitzat emprat. L’aprenentatge de la matemàtica possibilita, per tant, que l’alumne/a sigui competent en contextualització fent-li veure que és necessària aquesta competència, però no suficient. Cal que el coneixement matemàtic construït sigui útil dins els models concrets contextualitzats emprats, però també fora d’ells.*

La competencia en contextualización da sentido a la competencia en modelización y a la inversa. No sirve saber modelizar sin saber encontrar las matemáticas en el entorno, como no sirve encontrar matemáticas en contextos diversos sin saber cómo trabajarlos.

*“La **competència en experimentació** impregna tot el treball científic. Si l’alumne/a no crea no genera coneixement. En aquest cas hi pot haver assimilació de continguts però no necessàriament evolució intel·lectual. (...) Ara bé, experimentar, plantejar problemes, comprendre’ls, establir plans de treball, conjeturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjeturar de nou fins a obtenir-ne una que sigui plausible, proposar la solució, redactar les conclusions i exposarles en públic requereix temps per al qual cal una bona planificació.(...) és possible i desitjable realitzar activitats en les quals la representació gràfica reveli regularitats i variacions. (...) Ser competent en experimentació requereix acceptar-la com a punt de partença de la construcció*

*de coneixement i alhora requereix l'extracció de informació que, tractada adequadament condueix, a la construcció de coneixement matemàtic curricular.*

A lo largo de toda la secuencia didáctica, se procurará que sea la experimentación aquello que dé inicio al proceso de aprendizaje. Además de lo que expone el currículum, se pretende que la experimentación fomente que el alumnado se involucre en la actividad, generando interrogantes y motivaciones para avanzar.

El currículum sigue remarcando aquellas competencias generales del bachillerato que se pueden trabajar desde las matemáticas. Tan solo se citarán:

- Competencia comunicativa
- Competencia en investigación
- Competencia en gestión y tratamiento de la información
- Competencia digital
- Competencia personal e interpersonal
- Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo

Finalmente establece unos criterios de evaluación. A continuación se exponen los que se trabajarán en este proyecto:

1. Desarrollar el conocimiento de geometría plana para comprender, interpretar y resolver situaciones vectoriales tridimensionales, comprender los conceptos de perpendicularidad y ángulo de dos direcciones, y aplicar los conceptos básicos de geometría del espacio a la resolución de problemas de distancia y perpendicularidad.
2. Aplicar los conceptos de límite y de derivada para conocer en profundidad las funciones, y aplicar estos conocimientos a problemas reales; interpretar y aplicar a situaciones concretas la información obtenida del estudio de las funciones. Específicamente, analizar de manera detallada el comportamiento local y global de una función.
3. Usar con soltura la calculadora y el ordenador para facilitar cálculos, hacer representaciones gráficas, y explorar y simular situaciones. Usar inteligentemente las TIC, e interpretar los resultados de una operación automática en el contexto del problema que se está resolviendo.

Hasta este punto se ha presentado todo aquello que se quiere tomar del currículum de bachillerato de Cataluña a nivel de a qué objetivos apuntar, por qué y cómo lograrlos y evaluarlos.

Constantemente el currículum habla de las conexiones con las otras asignaturas. Esto es algo que para este proyecto se ha decidido tomar y ampliar, ya que se considera fundamental para dar sentido al aprendizaje. Se quiere que este trabajo y su secuencia didáctica entren en el marco de la llamada educación *STEAM*. Este término es acrónimo de *Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics* o, en español, de Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas. Todas estas disciplinas se integran para

conformar la realidad y por tanto, para darles sentido se deben trabajar de manera interconectada. En eso consiste la educación *STEAM*: en trabajar de manera integrada las distintas disciplinas de estudio. La Doctora en didáctica de las ciencias Digna Couso define la *alfabetización STEM* así:

Estar alfabetitzat en STEM és ser capaç d'identificar i aplicar, tant els coneixements clau com les formes de fer, pensar, parlar i sentir de la ciència, l'enginyeria i la matemàtica, de forma més o menys integrada, per tal de comprendre, decidir i/o actuar davant de problemes complexos i per a construir solucions creatives i innovadores, tot aprofitant les sinergies personals i les tecnologies disponibles, i de forma crítica, reflexiva i amb valors.

Al añadir la “A” de arte para crear *STEAM*, se incorpora un nuevo campo, que puede atraer la atención de una gran parte del alumnado, y que contribuye de manera muy significativa a la innovación y al mayor desarrollo del pensamiento crítico y creativo. Si bien la secuencia didáctica que aquí se desarrollará estará bastante centrada en las matemáticas, se pueden apreciar sin dificultad la conexión con otras disciplinas como la física y el arte. En el futuro, se desea poder ampliarla a especialistas de otras disciplinas y así poder llevarla a cabo de una manera mucho más conectada y con perspectivas más amplias.

Siguiendo con los fundamentos didácticos más centrados en las matemáticas, leemos los *Principios y estándares para la educación matemática: una visión de las matemáticas escolares* de Antonio Marín del Moral y Jose Luis Lupiáñez Gómez. Estos estipulan los principios para una buena enseñanza que propone el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) y que asimismo se consideran muy apropiados para esta investigación didáctica:

*Igualdad*: La buena educación matemática requiere igualdad, es decir, altas expectativas y una base potente para todos los estudiantes

*Currículum*: Un currículum es más que una colección de actividades: debe ser coherente, enfocado en matemáticas importantes, y bien articulado en grados. El énfasis en seleccionar matemáticas importantes o relevantes para los objetivos marcados es muy notable: por ejemplo, dentro del campo numérico cita la proporcionalidad y las razones; cita las destrezas de razonar y deducir, la capacidad de predicción a través de las matemáticas o incrementar conocimientos en recursión, iteración, comparación de algoritmos.

*Enseñanza*: La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender que los estudiantes saben y necesitan aprender y, entonces, retándolos y desafiándolos aprenderán bien.

*Aprendizaje*: Los estudiantes deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento previo.

*Evaluación*: La evaluación debería apoyar el aprendizaje de las matemáticas importantes y aprovechar esta información poderosa para ambos, alumnos y profesores.

*Tecnología*: La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y refuerza el aprendizaje de los estudiantes.”

Y para terminar con los fundamentos didácticos se considera importante centrarse en lo que en gran parte se basará este proyecto: la didáctica con materiales. Para ello se verá lo que dicen los profesores Pere Puig Adam y Anton Aubanell.

El Museo de las Matemáticas de Cataluña describe a Pere Puig Adam como al gran maestro del uso de materiales manipulables en la educación matemática y el profesor Puig Adam mismo hablaba así de ellos:

“Representa (el material) algo substancial con su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también de originarlas, de sugerirlas. Hemos de estudiar la manera pedagógicamente más acertada de conseguirlos y también los materiales más dúctiles para su realización.”<sup>13</sup>

Él mismo propone un *Decálogo de la didáctica matemática media* en el que hace las sugerencias que considera fundamentales:

- I.- No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
- II.- No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
- III.- Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
- IV.- Guardar cuidadosamente los planos de abstracción.
- V.- Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
- VI.- Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
- VII.- Promover en todo lo posible la autocorrección.
- VIII.- Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
- IX.- Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
- X.- Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

Es un decálogo que en palabras de Doctor Claudi Alsina i Català “*inclou el que en llenguatge d’avui en diríem l’atenció a la diversitat, l’interès històric i aplicat, la interdisciplinarietat, la graduació de dificultats, la creativitat, l’inducció al descobriment, la motivació, l’autoavaluació, la conceptualització, la comunicació, el llenguatge i l’avaluació oberta.*”

Finalmente se le dedicará un espacio a Anton Aubanell. Este es uno de los grandes inspiradores de este trabajo, por sus magistrales formaciones en didáctica de las matemáticas con materiales manipulables a las que he asistido. En base al capítulo *Aprender amb materials manipulables, realisme i tecnologia* de su último libro *Tres professors de matemàtiques. Com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques* junto con Claudi Alsina i Carme Burgués y a unas conversaciones que se han tenido con él mismo, se han extraído varios aprendizajes claves para una buena gestión del aula y de las actividades.

---

<sup>13</sup>(revista SUMA XXX)

Aubanell considera clave el uso de material manipulable y de la experimentación como una forma de descubrimiento. Hay que usar la realidad y los procesos de modelización y de la tecnología. Pero el material por sí mismo no genera un buen aprendizaje, se necesita una buena actividad: *Recurso = Material + Actividad*.

Se debe hacer una doble lectura de cualquier recurso: la de los contenidos matemáticos y la de su capacidad para facilitar el aprendizaje, motivar, interesar... No hay que temer al uso de materiales para enseñar matemáticas; estos no trivializan ni se contraponen con la abstracción. Sin embargo, a menudo lo que se debe hacer en clase son “mostraciones” y no “demostraciones”, ya que muchas veces estas tendrán mayor potencia didáctica.

Aubanell pone un gran acento en el aporte de lo multisensorial a la educación matemática que se da con las actividades de experimentación con materiales manipulables. Con estas se muestran matemáticas que entran por los ojos y que incluyen a todo el alumnado, ya que a la hora de experimentar cualquiera puede hacer algo, se elimina el bloqueo que un alumno pueda tener con las matemáticas. Con todo esto en mente, recalca la importancia de no forzar el recurso: este debe transmitir matemáticas fuertes y experimentales, cosas que sean significativas y sólidas, pero si se ve que el recurso no funciona, no hay que insistir, hay que ver como transformarlo para trabajar mejor.

Para poder entrar en la sección de la secuencia didáctica de la mejor manera, se han dejado para el final dos elementos que, en las conversaciones con Aubanell, éste estableció como la clave para una buena actividad. Toda buena actividad de experimentación matemática debe seguir un ciclo:

- Conjeturar
- Experimentar
- Descubrir
- Conceptualizar
- Formalizar (si hace falta)

Y con todo esto se debe analizar en todo momento qué competencias se están trabajando.

Para terminar con la parte dedicada a Aubanell, recogemos su cita que sirve de motivación en todo momento:

*“Moltes vegades el missatge més important que transmetem als alumnes és la manera com transmetem el missatge, la manera com fem les coses a classe.”*

Viéndolo a él enseñar, se puede entender a la perfección. En sus sesiones se aprenden muchos contenidos matemáticos, pero lo que a uno más le llega es la actitud matemática. Al fin y al cabo, éste será el objetivo último de la enseñanza matemática.



## 7. Secuencia didáctica

La secuencia didáctica está preparada para ser realizada en dos sesiones. En la primera parte se quiere hacer una introducción al concepto de anamorfismo y se busca entender cómo se mueve la luz y cómo ésta se refleja en un espejo. En la segunda parte se trabaja concretamente el anamorfismo cilíndrico. Cada parte estará subdividida en varias actividades de las que se explicará lo necesario para saber cómo funcionará, los objetivos a trabajar, las competencias del currículum que se trabajarán y los criterios de evaluación del currículum a tener en cuenta (ver criterios en la sección de fundamentos didácticos). Además, se mencionarán los contenidos del currículum que se trabajan.

Hubiera sido deseable probar la actividad en diversas escuelas, pero debido al estado de excepción generado por la COVID-19 no se ha podido dar un gran recorrido a las actividades. Sin embargo, se ha conseguido llevar a cabo la secuencia didáctica entera con un grupo de alumnas de primero de bachillerato y se han probado distintas partes por separado con diversas personas que han accedido a hacerlo. En lo que sigue, se expone la secuencia didáctica planeada con las mejoras hechas a partir de la experiencia.

### 7.1. Primera sesión

#### 7.1.1. Actividad 1.1: ¿Qué es un anamorfismo?

##### Objetivos

Generar motivación por los anamorfismos, definir qué es un anamorfismo y empezar a hacerse preguntas de naturaleza matemática. Contextualizar históricamente los anamorfismos.

##### Descripción de la actividad

Se empieza proyectando el video *OK Go - The Writing's On the Wall - Official Video*<sup>14</sup> para tener una primera inmersión amena en el mundo de los anamorfismos.

Entonces se proyectan<sup>15</sup> una serie de anamorfismos de diferentes estilos y se ponen tres grandes hojas de papel en una pared con las preguntas:

- ¿Qué es un anamorfismo?
- ¿Cómo harías tu propio anamorfismo?
- ¿Dónde has visto anamorfismos?

Se hacen grupos de tres o cuatro personas y tienen 10 minutos para comentar y responder a las preguntas en las hojas grandes. Pasado este tiempo, se comentan las respuestas de manera conjunta poniendo especial énfasis en detectar los elementos necesarios para definir un anamorfismo y en el proceso de proyección.

El anamorfismo que se muestra en la figura 10 tiende a generar especial desconcierto. Por ello, se usa como primera experimentación. Se pregunta como se cree que se ha hecho. Después de dar tiempo para que el alumnado conjeture, se pide a tres personas que se levanten y se les plantea un reto:

<sup>14</sup>[https://youtu.be/m86ae\\_e\\_ptU](https://youtu.be/m86ae_e_ptU)

<sup>15</sup>Enlace a la presentación [shorturl.at/nt0Y8](http://shorturl.at/nt0Y8)

una persona es la observadora y debe conseguir colocar a las otras dos personas de manera que una sea muy pequeña en comparación con la otra, pero que se vean los pies a la misma altura.

Finalmente se hace una breve explicación de la historia de los anamorfismos para darle una mayor dimensión al tema que se trabaja y poder ponerlo en contexto.

### **Contenidos**

Definición de anamorfismo.

Introducción a las proyecciones.

Introducción a la historia de la perspectiva y de los anamorfismos.

### **Competencias matemáticas**

Las competencias específicas de matemáticas que más se trabajan son la competencia en modelización matemática, la competencia en contextualización y competencia en experimentación.

### **Criterios de evaluación**

Criterio 1.

### **Temporización**

25 minutos

### **Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno**

Se hacen conexiones con el arte.

### **Aspectos didácticos y metodológicos:**

El video para empezar la clase debe ejercer un efecto de corte con la realidad para entrar en un nuevo ambiente.

El trabajo en grupos pequeños favorece la mayor participación. El profesor debe contribuir al avance con preguntas y reflexiones a partir de lo que el propio alumnado aporte. En esta primera aproximación a los anamorfismos, se debe estar muy atento para detectar aquello que motiva al alumnado.

### **Recursos**

Proyector, hojas de papel grandes, presentación de diapositivas.



Figura 10: Anamorfismo de François Abelanet

## **7.1.2. Actividad 1.2: La luz**

### **Objetivos**

Comprender cómo se mueve la luz por un medio homogéneo y cómo se refleja en un espejo plano.

### **Descripción de la actividad**

Se pone un espejo en posición vertical. Se dice que se va a apuntar con un láser a un punto determinado del espejo y se pide al alumnado que prediga (conjeture) donde va a verse el reflejo. Ello generará una discusión en la que se empezará a ver cómo cree el alumnado que

funciona un espejo y cómo cree que se mueve la luz. Entonces, tras haber conjeturado, se prueba, y se ve el resultado. Para seguir comprendiendo que ha ocurrido, una persona voluntaria vuelve a reflejar el láser en el espejo mientras que otra persona tira polvo de tiza por encima para así ver el haz de luz del láser (alternativamente, se puede hacer con vapor de agua). Se verá que sigue una línea recta, que la recta interseca el espejo en un punto y que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia.

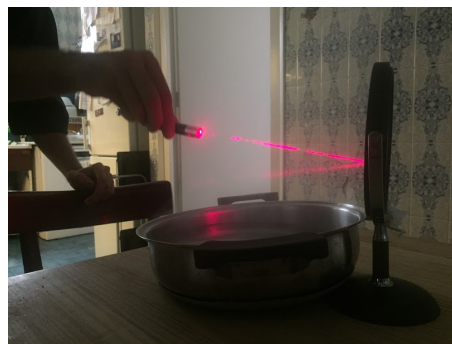


Figura 11: Visualización del movimiento de la luz con láser y vapor de agua

### Contenidos

Propagación de la luz en un medio isótropo y primera y segunda ley de reflexión desde una perspectiva matemática.

Posición relativa de rectas y planos.

### Competencias y procesos que se trabajan de forma destacada

Se trabajan las cuatro competencias matemáticas.

### Criterios de evaluación

Criterio 1.

### Temporización

10 minutos

### Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno

Conecta con la física, en particular la óptica.

### Aspectos didácticos y metodológicos:

Se debe procurar que se note cómo se interrelacionan diferentes disciplinas (física y matemáticas). Es conveniente comentar, por ejemplo, el principio de Fermat y como que la luz se mueva en línea recta es consecuencia de este.

Hay que poner el foco en un buen uso del vocabulario matemático: que el alumnado use las palabras recta, plano, ángulo, eje de simetría...

Debe quedar muy claro que la luz se mueve en línea recta, que el ángulo de incidencia es el mismo que el de reflexión y que el espejo es un plano. Se recomienda conseguirlo mediante muchas preguntas que hagan necesario el uso de estos hechos.

**Recursos** láser, tiza, borrador, espejo plano.

### 7.1.3. Actividad 1.3: El espejo mágico

#### Objetivos

Mejorar la comprensión del movimiento de la luz y su reflejo en un espejo.

Descubrir la relación entre la altura a la que se ve un punto en un espejo y la distancia a la que está dibujado en el suelo.

#### Descripción de la actividad

Se hacen parejas. Cada pareja se sitúa delante de un espejo y recibe un trocito de jabón. Entonces deberán seguir atentamente las instrucciones que se encuentran en el anexo (ver sección 9.3) y que el profesor dará en voz alta. Siguiéndolas terminaran viendo que al dibujar la silueta de su cara en el espejo estando cerca o lejos del espejo, el tamaño de la silueta es, contraintuitivamente, el mismo. Luego se descubrirá que además es exactamente la mitad del tamaño de la cara.

Se da entonces al alumnado un tiempo para dialogar con sus respectivas parejas reflexionando sobre a qué creen que se debe este fenómeno. Concluido este tiempo, se mostrará y comentará un modelo del experimento hecho con GeoGebra<sup>16</sup> con el que se podrá comprender con geometría dinámica lo que está sucediendo.

Entonces se plantea la siguiente situación: el espejo está situado perpendicularmente al suelo y el observador a una distancia  $D$  y a una altura  $H$ . ¿A qué distancia  $d$  del espejo se debe pintar un punto para poder verlo en el espejo a una altura  $h$ ? Se hace un diseño del problema en la pizarra conjuntamente (ver imagen) y se dan 10 minutos para intentar resolver el problema por parejas. Finalmente se resuelve conjuntamente en la pizarra usando el teorema de Tales. Se obtendrá la función  $d = \frac{D \cdot h}{H - h}$  (se ha visto en la sección de fundamentos matemáticos, en el problema 5.2). Antes de discutir acerca de esta función, se graficará con GeoGebra<sup>17</sup>. Viendo el gráfico de la función, se discutirá sobre su forma, su relación con la realidad y cómo la modela.

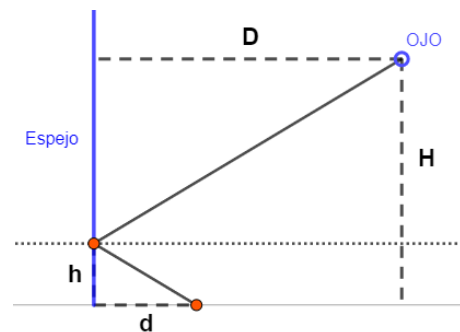


Figura 12: Diseño del problema

### Contenidos

Simetría, proporcionalidad, semejanza de triángulos y cálculo de distancias.

Funciones racionales, una aproximación al concepto de límite de una función en un punto y al infinito, asíntotas verticales, comportamiento asintótico e idea de continuidad en contextos que comportan saltos. Uso de funciones para la interpretación de fenómenos científicos, uso de programas informáticos que facilitan tanto el cálculo simbólico como la representación gráfica.

Estudio de funciones: dominio y recorrido y puntos de corte con los ejes. Representaciones gráficas. Aplicación a situaciones geométricas, científicas y tecnológicas.

### Competencias matemáticas

En esta actividad se trabajan ampliamente las cuatro competencias específicas de matemáticas.

### Criterios de evaluación

Criterios 1, 2 y 3.

### Temporización

50 minutos

### Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno

<sup>16</sup><https://www.geogebra.org/m/ynuspthu>

<sup>17</sup><https://www.geogebra.org/m/qczwemwj>

Conecta con la física, en particular la óptica.

### **Aspectos didácticos y metodológicos:**

Esta actividad es muy potente a nivel matemático, ya que hace muchas conexiones dentro de la propia asignatura de matemáticas con saberes que el alumnado debería haber adquirido recientemente. Es por tanto muy importante poner el foco no solo en la enseñanza sino, sobretodo, en la evaluación.

En la parte en que hay que dibujar la cara en el espejo, es importante conseguir una muy buena atención y dar las instrucciones una a una. Con esto se consigue un gran efecto de intriga en el alumnado, y se logra que el experimento funcione.

Al construir el modelo en GeoGebra, debe hacerse de manera dialogada. Mediante preguntas, se puede lograr que el propio alumnado te diga lo que hay que hacer. Que sean ellos mismos quienes construyen el GeoGebra ayuda mucho a que incorporen lo que se está trabajando.

La segunda parte de la actividad está dividida en: 1. la resolución del problema, 2. entender la gráfica de la función racional. La parte de la resolución del problema resulta interesante porque, en primer lugar, hay que interpretar la simetría y, en segundo lugar, se debe aplicar el teorema de Tales para su resolución. Esto es interesante ya que se trata de una situación de aplicación del teorema de Tales a la que seguramente no estén acostumbrados y porque probablemente hallan tratado las relaciones trigonométricas recientemente y, por tanto, busquen aplicarlas. Se debe aprovechar para relacionar las funciones trigonométricas con el teorema de Tales.

En cuanto a la parte de la actividad en que se grafica la función racional, es muy valiosa tanto por el alto nivel de contextualización de las matemáticas que aporta como por los contenidos específicos que se trabajan. Hay que esforzarse en que ello se transmita. Se debe poner el foco en los conceptos de función racional, dominio, asíntota, límite y intervalos abiertos y cerrados. Pero sobre todo, lo más importante es conectar todos estos conceptos con la realidad.

### **Recursos**

Espejo, jabon, pizarra, proyector, GeoGebra.

## **7.1.4. Actividad 1.4: El plano tangente**

### **Objetivos**

Visualizar el plano tangente a un cilindro por un punto para entender como se refleja la luz en un espejo cilíndrico.

### **Descripción de la actividad**

Ya sabiendo cómo se refleja la luz en un espejo plano, queremos ver qué ocurre con uno cilíndrico. Se repite el experimento explicado en la actividad 1.2 pero ahora se usa un espejo cilíndrico. Nuevamente el alumnado vuelve a decir donde cree que se verá el láser tras reflejarlo en un cierto punto del espejo. Probablemente su respuesta se aleje mucho de la realidad. Entonces se pregunta qué pasaría si en vez de un cilindro, fuera un prisma de base cuadrada. ¿Y de base hexagonal? ¿Y con una base en forma de polígono regular de muchos lados? Se ve que poco a poco se va aproximando al cilindro.

Entonces se explica el concepto de plano tangente a una superficie por un punto. Para visualizar el plano tangente se apoya el cilindro en la mesa y se dialoga hasta que el mismo alumnado llega a la conclusión de que la mesa representa el plano tangente al cilindro y que el radio del cilindro por el punto de contacto es un vector perpendicular al plano. En la experiencia del autor, las propias alumnas vieron que el plano tangente era el mismo para toda una recta y llegaron así al concepto de generatriz de un cilindro. Finalmente, se vuelve a apuntar con el láser al espejo cilíndrico y en el punto en el que toca el espejo, se coloca un espejo plano de manera que haga el papel de plano tangente. Se ve que el punto reflejado casi no se mueve y así se termina de comprobar visualmente que, efectivamente, la luz se refleja en el espejo cilíndrico como en un espejo plano tangente al cilindro en el punto de contacto de la luz.



Figura 13: Visualización del plano tangente a un cilindro por un punto y de su vector perpendicular

### **Contenidos**

Posiciones relativas de rectas y planos.

### **Competencias matemáticas**

Se trabajan principalmente la competencia matemática y la competencia en contextualización.

### **Criterios de evaluación**

Criterio 2.

### **Temporización**

20 minutos

### **Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno**

Conexión con la física, en particular con la óptica.

### **Aspectos didácticos y metodológicos:**

El docente debe poner atención principalmente en tres aspectos: la demostración por paso al límite, cómo se puede definir un plano y la competencia de contextualización.

Se debe poner énfasis en la visualización de los conceptos y en la experimentación con estos. Para ello se debe mover el láser por el cilindro para entender cómo varía el plano, hacer rodar el cilindro por la mesa... jugar con las matemáticas para materializarlas. Para el alumnado resulta muy sorprendente la gran variación en el punto de intersección del láser con el suelo en función de cómo se mueve y resulta una gran satisfacción conseguir elementos para entenderlo. La incomprensión y la sorpresa deben ser los motores de la actividad.

### **Recursos**

Espejo cilíndrico, láser.

## 7.2. Segunda sesión

### 7.2.1. Actividad 2.1: Conjeturando y experimentando con anamorfismos cilíndricos

#### Objetivos

En base a lo aprendido, conjeturar y experimentar con las formas a dibujar para obtener los dibujos deseados tras el proceso anamórfico.

#### Descripción de la actividad

Se reparten los cilindros con los que se harán los espejos para el anamorfismo. Se explica cómo funciona el anamorfismo y deben conjeturar sobre qué habrá que dibujar para ver ciertas formas (líneas horizontales o verticales, circunferencias, cuadrados... y aquellas ideas que surjan del propio alumnado). Entonces se fabrica el espejo cilíndrico envolviendo los cilindros con papel de regalo reflectante y se ve si las conjeturas eran acertadas, en caso de que fueran equivocadas, se vuelve a conjeturar mediante la experimentación. A continuación se experimenta ya con el espejo para descubrir distintas propiedades geométricas del anamorfismo. Se remarca que al final se querrá pintar un anamorfismo siguiendo el método de Durero que se había explicado en la primera actividad, en los apuntes históricos; es decir, a partir de una cuadrícula. Por lo tanto, el objetivo ahora es aprender a hacer verticales y horizontales. Más adelante se verá si las conjeturas son acertadas.

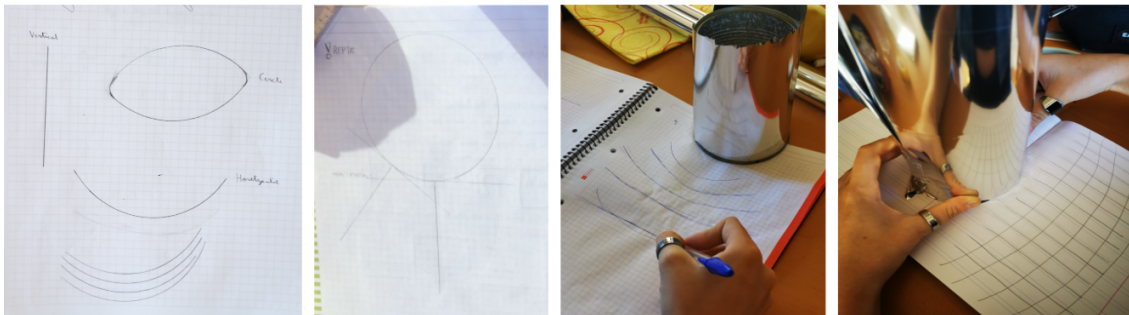


Figura 14: Conjeturas y experimentación de alumnas

#### Contenidos

Posiciones relativas de rectas y planos. Proyección sobre un plano. Recta tangente a una circunferencia y plano tangente a un cilindro.

#### Competencias matemáticas

Se trabajan ampliamente todas las competencias matemáticas.

#### Criterios de evaluación

Criterios 1 y 2.

#### Temporización

30 minutos

#### Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno

Conexión con la física, en particular con la óptica. Conexión con el arte y el dibujo técnico.

### Aspectos didácticos y metodológicos:

La primera parte de esta actividad es, probablemente, la más potente a nivel matemático y por lo tanto el docente debe estar especialmente activo en esta. Se prevé dedicarle 20 minutos, pero se debe estar dispuesto a dedicarle más tiempo, en función de lo que vaya surgiendo por parte del alumnado. En la actividad se pone en juego de manera abstracta todo lo aprendido hasta el momento. Las argumentaciones orales y desarrollos sobre el papel del alumnado muestran su nivel de comprensión de lo trabajado y su competencia tanto matemática como en modelización. Se observarán niveles dispares, y ello se debe aprovechar para generar conocimiento y trabajar la comunicación del alumnado. El alumnado trabaja con las simetrías, translaciones, homotecias... En esta tarea tendrá un gran papel la intuición matemática: se han visto casos en los que se ha acertado el dibujo para ver una circunferencia, por ejemplo.

La motivación del alumnado en esta primera parte se puede promover planteando la actividad como si fuera, hasta cierto punto, un juego en el que tienen que conseguir acertar los dibujos.

La segunda parte (cuando se tiene el espejo) sirve para entender porqué las conjeturas hechas en la primera parte eran o no acertadas y para experimentar y entonces acercarse más a conjeturas acertadas.

#### Recursos

Cilindro (lata), papel de regalo reflectante, celo.

### 7.2.2. Actividad 2.2: Anamorfismo cilíndrico con geometría dinámica

#### Objetivos

Entender, en su conjunto, el camino de la luz desde el *punto real* hasta el *punto de observación* y crear un generador de anamorfismos cilíndricos.

#### Descripción de la actividad

Cada dos personas se tiene un ordenador. El profesor guía al alumnado para que todos puedan hacer un GeoGebra<sup>18</sup> de manera simultánea que sea un modelo de lo que ocurre en un anamorfismo cilíndrico.

Se explica que se ha visto que en general se usa una plantilla con circunferencias concéntricas para hacer las horizontales. Se quiere comprobar. Se ponen seis puntos en una línea horizontal para ver qué se obtiene. Se había conjeturado que daría una circunferencia. ¿Se mantiene esta opinión? Se usa la herramienta de GeoGebra<sup>19</sup> para trazar la cónica que pasa por cinco de los puntos obtenidos y se ve que da una elipse y... ¡el sexto también queda sobre la elipse! Por lo tanto se conjetura que debe dar una elipse. Se prueba de acercarse mucho al sexto punto y se termina viendo que este no está sobre la elipse. Entonces, ¿cuál es la forma que se obtiene? Se pone un punto sobre una recta horizontal y se ve el lugar geométrico del anamorfismo para toda posición del punto sobre la recta. En los fundamentos matemáticos se ha visto la forma obtenida.

Entonces se detiene la actividad y se pasa a la actividad 2.3.

#### Contenidos, competencias y procesos que se trabajan de forma destacada

<sup>18</sup><https://www.geogebra.org/m/arqpqrsk>

<sup>19</sup><https://www.geogebra.org/m/vybpmqck>



Ecuación del cilindro.

Simetría.

Uso de programas informáticos que facilitan la representación gráfica.

Posiciones relativas de rectas y planos.

### **Competencias matemáticas**

Se trabajan principalmente la competencia matemática y la competencia en modelización matemática.

### **Criterios de evaluación**

Criterios 1 y 3.

### **Temporización**

20 minutos

## **Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno**

### **Aspectos didácticos y metodológicos:**

Nuevamente es importante que, si bien el docente debe ser quien guíe el proceso de construcción del GeoGebra, el alumnado sea quien debe decir qué hay que hacer en cada paso. Para ello hay que acompañar al alumnado con preguntas del estilo de: “¿Cuáles hemos decidido que son los elementos básicos de un anamorfismo cilíndrico?” o “Acabamos de hacer tal cosa, ¿ahora qué va a pasar?”.

El GeoGebra con los seis puntos en la recta horizontal es conveniente traerlo preparado, para no perder tiempo y atención haciéndolo en clase.

### **Recursos**

Proyector, Geogebra.

### **7.2.3. Actividad 2.3: La nefroide**

#### **Objetivos**

Aprender a dibujar rectas verticales en un anamorfismo cilíndrico. Descubrir las matemáticas en el entorno. Descubrir las curvas envolventes, en concreto la nefroide. Descubrir cómo dibujar una nefroide.

#### **Descripción de la actividad**

Se comenta que “casualmente” esta mañana mirando en la taza de café se ha observado algo curioso, se mostrará a continuación. Se toma una taza cilíndrica y se procura que haya una luz enfocándola a cierta distancia. Se observa que, en la base de la taza, la sombra genera un arco de circunferencia dentro y la luz genera una curva dentro: se trata de una nefroide. (Ver figura 15)

Se explica cómo se genera la nefroide a partir de la reflexión de rayos paralelos en un circunferencia y se visualiza con GeoGebra<sup>20</sup>. Entonces se hace el desarrollo geométrico (visto en la sección de fundamentos matemáticos) por el cual se ve que al continuar hacia el exterior de la circunferencia las semirrectas reflejadas se obtiene lo que hay que dibujar para ver rectas verticales en el anamorfismo.

<sup>20</sup><https://www.geogebra.org/m/sf6jy7fw>

Ya se sabe qué dibujar para obtener las rectas verticales, pero, ¿cómo se puede hacer? Se dibuja una circunferencia en la pizarra y se ve que las rectas cortan a la circunferencia por dos puntos. Si se consigue saber los dos puntos de intersección, se sabrá la recta a dibujar. Entonces se hace el desarrollo geométrico (ver problema 5.14, en los fundamentos matemáticos) y se ve que el ángulo que forma el primer punto con el centro de la circunferencia respecto al radio perpendicular a los rayos de luz es un tercio del que forma el segundo punto respecto a este mismo radio. De esta manera se ve que si se marcan puntos equiespaciados en la circunferencia y se une el primero con el tercero, el segundo con el sexto... formando una semirecta, se obtienen fuera de la circunferencia las líneas que generarán verticales, y dentro se genera la nefroide.

Para las horizontales se explica que no se tiene una manera de hacerlas manualmente, pero se ha visto la forma que tiene la curva y hay que replicarla. Por la función racional hallada en la actividad 1.3 se sabe que cada vez deben separarse más.

### Contenidos

Introducción a las curvas envolventes. La nefroide.

Simetría. El ángulo como giro. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Las funciones seno, coseno y tangente. El estudio, con ordenador, de las funciones trigonométricas bajo cambios de escala y su aplicación a fenómenos periódicos.

Uso de programas informáticos que facilitan la representación gráfica.

### Competencias matemáticas

Se trabajan principalmente la competencia matemática, la competencia en modelización matemática y la competencia en contextualización.

### Criterios de evaluación

Criterios 1 y 2.

### Temporización

25 minutos

### Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno

Conexión con la física, en particular con la óptica. Conexión con arte y dibujo técnico.

### Aspectos didácticos y metodológicos:

Esta actividad resulta impactante para el alumnado ya que, la mayoría, descubren una curva muy bella que siempre ha estado ante ellos, pero nunca han visto. Se debe incidir en ello para trabajar la competencia de contextualización de las matemáticas. Se debe remarcar también la relación entre las matemáticas y la física y poner énfasis en cómo



Figura 15: Curva nefroide generada por la cáustica en una taza

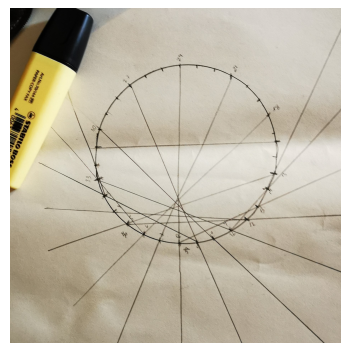


Figura 16: Nefroide dibujada por una alumna

una disciplina se nutre de la otra para enriquecerse.

Al hacer el desarrollo geométrico para ver cómo dibujar la nefroide a mano, es conveniente no especificar por donde pasa el rayo de luz que se utiliza para el estudio. De esta manera cada persona lo hará de una manera diferente y al ver que todos llegan a la misma conclusión, se podrá hacer la extrapolación de la propiedad del triple ángulo para todas las rectas.

Al dibujar la nefroide a mano, debe quedar claro hacia donde continúa la semirrecta, ya que es una fuente de error común.

### Recursos

Taza, luz, regla, compás, proyector, GeoGebra.

#### 7.2.4. Actividad 2.4: Museo

##### Objetivos

Crear algo aplicando todo lo aprendido.

##### Descripción de la actividad

Con todo lo aprendido ya se sabe cómo dibujar con exactitud rectas verticales y se sabe aproximar rectas horizontales (se recomienda ayudarse de un láser). Ahora se propone hacer una exposición de anamorfismos. Aprovechando que cada persona tiene un espejo, se pide a cada alumno/a que haga un dibujo para exponer. Antes se da tiempo para practicar y probar. Mientras, se muestra con GeoGebra, qué formas se obtienen al querer ver diversas figuras geométricas (rectas diagonales, circunferencias, una estrella...).



Figura 17: Arte anamórfico realizado por alumnas

##### Contenidos

Simetría, recta tangente a una circunferencia, plano tangente a un cilindro, la nefroide.

Uso de programas informáticos que facilitan la representación gráfica.

### **Competencias matemáticas**

Se trabajan principalmente la competencia en modelización matemática, la competencia en contextualización y la competencia en experimentación.

### **Criterios de evaluación**

Criterio 1.

### **Temporización**

30 minutos

### **Interdisciplinariedad, transversalidad y relaciones con el entorno**

Conexión con el arte.

### **Aspectos didácticos y metodológicos:**

Al ser la actividad final se le debe dar un carácter de cierre. Es fundamental que a la hora de dibujar se mantenga en todo momento la relación con lo aprendido. Mediante retos y preguntas, se logra. Es un buen momento para pedir la opinión del alumnado, hablar de aquello que más les ha gustado o sorprendido, de aquello que creen haber aprendido... En este diálogo matemático surgen reflexiones muy interesantes y se pueden plantear muchas cuestiones que incentiven al alumnado a seguir pensando en lo que han experimentado.

### **Recursos**

Espejo cilíndrico, útiles de dibujo y para pintar, GeoGebra, proyector.

## 8. Conclusiones

Dado el carácter interdisciplinario del trabajo se han dividido las conclusiones en los tres temas que se consideran principales: las matemáticas, la didáctica y la interdisciplinariedad en sí.

### 8.1. Conclusiones matemáticas

Se ha realizado un modelo analítico completo del anamorfismo cilíndrico clásico (es decir, tomando el *punto de observación* como un único punto). Este se ha hecho basado en la interpretación geométrica del anamorfismo. Con este modelo se puede comprender exactamente qué ocurre en el anamorfismo y se puede trasladar a programas de diseño para poder ilustrar tanto el resultado final como todo el proceso anamórfico.

Se ha realizado una adaptación del anamorfismo basada en el hecho de que el ser humano tiene dos ojos y por lo tanto no hay un único *punto de observación* y que la distancia entre ojos es próxima al diámetro de los cilindros usados en las actividades. En esta nuevo modelo, los rayos de luz llegan a la *zona de observación* paralelos entre ellos. Se ha concluido que en este modelo para generar segmentos verticales se deben dibujar segmentos de las rectas envolventes de la curva nefroide inscrita en la base del cilindro y para ver segmentos horizontales, se deben dibujar las curvas definidas en las ecuaciones 5.22. En particular, el dibujo para ver el segmento horizontal que es diámetro de la base del cilindro, se debe dibujar la mitad de la curva nefroide que circunscribe la base del cilindro y, a medida que el segmento se acerca a la altura de la *zona de observación*, su dibujo aproxima cada vez más una circunferencia.

A lo largo del trabajo se han abierto varios frentes de estudio que no se han podido tratar aquí, pero se quieren estudiar en un futuro. Entre estos destacan la teoría de catástrofes, el estudio de las epicicloides, el estudio de otros tipos de anamorfismos catóptricos o un estudio más profundo de los anamorfismos cilíndricos para representar figuras tridimensionales y su aplicación en programas de diseño potentes.

### 8.2. Conclusiones didácticas

Durante las sesiones se recogieron algunas frases del alumnado que orientan las conclusiones:

*“¿En serio lo has hecho tú todo esto?”*

Preparar una actividad potente, profunda y completa requiere un gran trabajo. En el alumnado generó sorpresa, admiración e interés ver que toda la actividad estaba basada en el estudio propio, lo que muestra que la implicación del docente en lo que enseña es clave en su transmisión y pone de relieve el valor de saber matemáticas para poder enseñarlas.

*“Me gusta porque hacemos cosas y lo puedes ver.”*

El alumnado no está acostumbrado al aprendizaje experimental de las matemáticas. Hacer didáctica de las matemáticas con materiales manipulables ha resultado muy positivo tanto para el disfrute del alumnado como para la contextualización de las matemáticas.

*“Lo que más me sorprende es cómo se convierten las rectas en curvas y las curvas en rectas.”*

El alumnado realmente hizo un trabajo matemático. El ciclo de aprendizaje detallado en los fundamentos matemáticos resultó en la adquisición de nuevos conocimientos y en su conceptualización.

*“¡Creo que he encontrado algo!”*

Se consiguió el ambiente de investigación matemática deseado. Durante la secuencia didáctica se logró una atmósfera en la que las personas se movían motivadas por el deseo de saber.

*“¡Podemos quedar otro día para seguir!”*

Cuando se vio que no daba tiempo a terminar la secuencia didáctica, una alumna dijo esto. Esta es la muestra más clara de que se consiguió que el alumnado disfrutara haciendo matemáticas. También hubo algunas expresiones de asombro que, con cierta vergüenza, las alumnas no pudieron reprimir (al ver cuánto se habían equivocado sobre cómo se reflejaba el láser en el cilindro o al ver la nefroide en la taza). Estos momentos demuestran que la actividad fue novedosa, sorprendente e intrigante, como se quería.

Haber podido realizar las conclusiones en base a las palabras del alumnado en una sola experiencia muestra el valor de poner en práctica la secuencia didáctica. Habría sido deseable tener muchas experiencias en varias escuelas para encontrar muchos más aspectos a mejorar y para mejorar uno mismo como docente, pero dado el carácter marcadamente manipulativo y experimental de la secuencia didáctica, no ha sido posible debido el estado de excepción generado por la COVID-19. Sin duda en un futuro se hará.

### **8.3. Conclusiones interdisciplinarias**

Si bien el mayor esfuerzo ha sido dedicado a las matemáticas y su didáctica, ha sido imprescindible el estudio del arte y su historia, la física, lecturas sobre percepción, etc. Todo ello dota a la secuencia didáctica de riqueza, contextualización, conexión con la realidad y acerca la experiencia a personas con diferentes intereses. La interdisciplinariedad flexibiliza las fronteras entre las asignaturas, convirtiéndolas en algo más real, alejando al alumnado de la visualización del aprendizaje de contenidos como una necesidad para obtener una buena nota, para acercarlos a entenderlos como algo necesario para la comprensión del entorno. Se puede afirmar que se ha logrado generar una secuencia didáctica *STEAM* y que los anamorfismos cilíndricos son un fenómeno a estudiar profundamente desde muchas disciplinas.

Habiendo terminado el trabajo, se considera que sería muy sugerente darle un mayor recorrido en otras asignaturas más allá de las matemáticas. Desde la tecnología (para la creación de herramientas para facilitar la creación de anamorfismos), hasta la historia, pasando por la psicología de la percepción o la biología en relación al sentido de la vista, este proyecto abre el camino a toda una colección de trabajos alrededor de los anamorfismos que serían muy interesantes para entender, investigar y desarrollar el fenómeno a todos los niveles.

## Referencias

- [1] Alsina i Català, C. (2004). Pere Puig i Adam : ahir, avui i sempre. *Butlletí De La Societat Catalana De MatemàTiques*, 16(1). Recuperado de <http://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/9761/9755>
- [2] Aubanell, A., Alsina, C. y Burgués, C. (2019). *Tres professors de matemàtiques: Com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques* (1a ed.). Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat
- [3] Cabezas Jiménez, M.M. (2007) *Imaginario Urbano. Expresión GráficoÁ·Plástica en el Espacio Público*. Recuperado de <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/1538/16713229.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [4] Couso, D. (2017). Per a Què Estem a STEM? Un Intent De Definir l'alfabetització STEM Per a Tothom I Amb Valors. *Ciències: Revista Del Professorat De ciències De Primària I Secundària*, (34), 22-30. Recuperado de <https://www.raco.cat/index.php/Ciències/article/view/338034>
- [5] Čučaković, A. y Paunović, M. (2015). Cylindrical Mirror Anamorphosis and Urban-Architectural Ambience. *Nexus Netw J* 17, 605-622. doi: 10.1007/s00004-015-0239-7
- [6] Currículum Batxillerat Decret 142/2008 DOGC núm. 5183. Recuperado de <http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0082/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf>
- [7] Di Lazzaro, P., Murra, D. y Vitelli, P. (2019). *Le immagini anammorfiche in un viaggio interdisciplinare tra arte, storia, geometria e attualità*. Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/330798158\\_Le\\_immagini\\_anammorfiche\\_in\\_un\\_viaggio\\_interdisciplinare\\_tra\\_arte\\_storia\\_geometria\\_e\\_attualita](https://www.researchgate.net/publication/330798158_Le_immagini_anammorfiche_in_un_viaggio_interdisciplinare_tra_arte_storia_geometria_e_attualita)
- [8] Glaeser, G. (1999). *Reflections on Spheres and Cylinders of Revolution*, Recuperado de <http://sodwana.uni-ak.ac.at/dld/reflections.pdf>
- [9] Hartzer, P. (8 junio 2014). Proof of the Power of a Point Theorem [Publicación en un blog]. Recuperado de <http://curiouscheetah.com/BlogMath/proof-of-the-power-of-a-point-theorem/>
- [10] Lafuente, J. (1998). *Geometría diferencial de curvas en el plano*, Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Curvas%20y%20Superficies/cp.pdf>
- [11] Lee, X. (s.f.) Epicycloid and Hypocycloid. [Online]. Recuperado de [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/EpiHypocycloid\\_dir/epiHypocycloid.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/EpiHypocycloid_dir/epiHypocycloid.html)
- [12] Lee, X. (s.f.) Nephroid. [Online]. Recuperado de [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/Nephroid\\_dir/nephroid.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/Nephroid_dir/nephroid.html)
- [13] López de la Rica, A. y de la Villa Cuenca, A. (1997). *Geometría Diferencial*. (1a ed.). Madrid: CLAGSA.
- [14] Lévy, Elie. (1992). *Diccionario Akal de Física*. (1a ed.). Madrid: Ediciones Akal
- [15] Malacara, D. (2015). *Óptica Básica*. (3a ed.). México: Ediciones Científicas Universitarias.

- [16] Marín del Moral, A. y Lupiáñez Gómez, J.L. (2000) *Principios y Estándares para la Educación Matemática: una Visión de las Matemáticas Escolares*. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/12342118.pdf>
- [17] Natarahan, A. (2010). Caustics, Cold Flows, and Annual Modulation. *Advances in Astronomy 2011*. doi: 10.1007/s00004-015-0239-7
- [18] Sales Rufí, J. (2000). Pedro Puig Adam, maestro. *Suma 34*. Recuperado de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/34/009-020.pdf>
- [19] Santos Benito, J.V. (1999). *Manual de Óptica Geométrica*. (1a ed.). Alicante: Club Universitario.



## 9. Anexos

### 9.1. Imágenes correspondientes a las obras comentadas en la sección 3

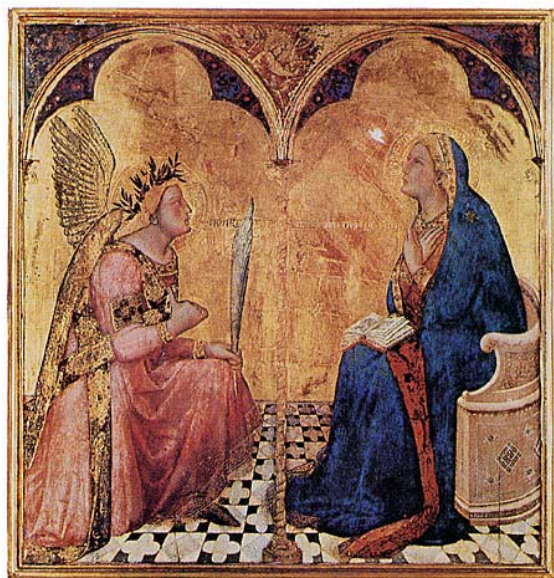


Figura 18: *L'annunciazione* de Ambrogio Lorenzetti, 1344



Figura 19: *Pala Montefeltro* de Piero della Francesca, 1474



Figura 20: Dibujo en el *Codice Atlantico* de Leonardo da Vinci, siglo XV-XVI



Figura 21: *Los embajadores* de Hans Holbein, 1533



Figura 22: *Sátiros admirando la anamorfosis de un elefante* de Simon Vouet, 1625

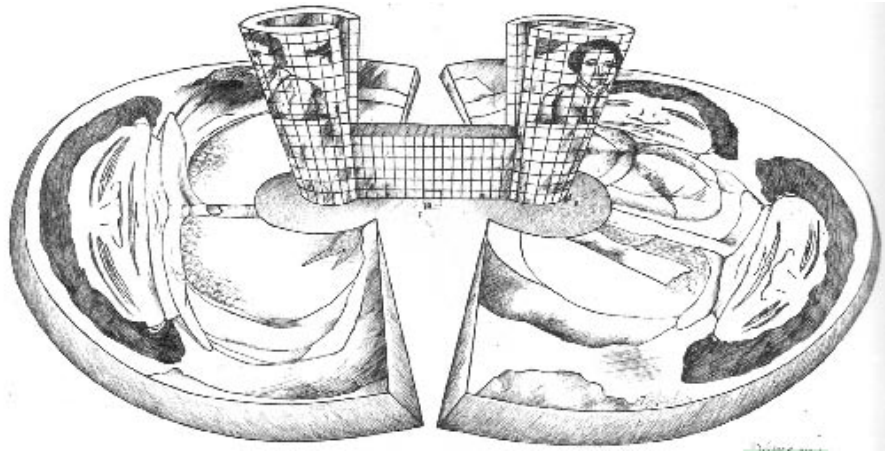


Figura 23: Proyecto de la *Torre de Melbourne* de J. Démeraux, 1970



Figura 24: Anamorfismo dedicado a Dalí en Figueras

## 9.2. Desarrollo de las ecuaciones para ver segmentos horizontales

Partiendo de las ecuaciones 5.20 se tiene para  $x$ :

$$\begin{aligned}
 x &= R \cdot \cos(\lambda) + (|y_2| + R \cdot \sin(\lambda)) \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= R \cdot \cos(\lambda) + R \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin(2 \cdot \lambda) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= R \cdot \cos(\lambda) + 2 \cdot R \cdot \sin^2(\lambda) \cdot \cos(\lambda) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= R \cdot \cos(\lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \sin^2(\lambda) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2})) \\
 &= R \cdot \cos(\lambda) \cdot (1 + 2 \cdot -2 \cdot \cos^2(\lambda) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2})) \\
 &= 3 \cdot R \cdot \cos(\lambda) - 2 \cdot R \cdot \cos^3(\lambda) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= 3 \cdot R \cdot \cos(\lambda) - \frac{R}{2} \cdot (3 \cdot \cos(\lambda) + \cos(3 \cdot \lambda)) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\lambda) - \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot \lambda) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= -\frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\lambda - \frac{\pi}{2}) + \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= -\frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\lambda - \frac{\pi}{2}) + \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2}) + \pi) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) \\
 &= -\frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\lambda - \frac{\pi}{2}) - \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2})) - |y_2| \cdot \sin(2 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2}))
 \end{aligned}$$

Se aplica la reparametrización  $\theta = \lambda - \frac{\pi}{2}$  y se obtiene:

$$x = -\frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\theta) - \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot \theta) - |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$

Para  $y$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 y &= R \cdot \sin(\lambda) + (|y_2| + R \cdot \sin(\lambda)) \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= R \cdot \sin(\lambda) - R \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos(2 \cdot \lambda) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= R \cdot \sin(\lambda) - R \cdot \sin(\lambda) \cdot (\cos^2(\lambda) - \sin^2(\lambda)) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= R \cdot \sin(\lambda) - R \cdot \sin(\lambda) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\lambda)) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= 2 \cdot R \cdot \sin^3(\lambda) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= 2 \cdot R \cdot (\frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin(\lambda) - \sin(3 \cdot \lambda))) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot R \cdot \sin(\lambda) - \frac{R}{2} \cdot \sin(3 \cdot \lambda) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}) - \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot \lambda - \frac{\pi}{2}) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}) + \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2}) + \pi) + |y_2| \cdot \sin(2 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\lambda - \frac{\pi}{2}) + \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2})) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot (\lambda - \frac{\pi}{2}))
 \end{aligned}$$

Se aplica la reparametrización  $\theta = \lambda - \frac{\pi}{2}$  y se obtiene:

$$y = \frac{3}{2} \cdot R \cdot \cos(\theta) + \frac{R}{2} \cdot \cos(3 \cdot \theta) + |y_2| \cdot \cos(2 \cdot \theta)$$

### 9.3. Instrucciones para el experimento del espejo mágico en la actividad 1.3

Una vez los alumnos ya tengan el trozo jabón y el espejo, el docente debe dar las instrucciones escritas a continuación en este preciso orden, con voz muy clara y respetando los tiempos del alumnado:

1. Sitúate delante del espejo, en la mitad derecha del espejo y a una distancia de un brazo.
2. Cierra un ojo.
3. Dibuja la silueta exacta de tu cara en el espejo usando el jabón. Solo de tu cara. Sabrás que lo estás haciendo bien porque no quedarás ningún trozo de cara fuera del dibujo ni habrá nada dentro del dibujo que no sea tu cara. Como estás lejos del espejo, el dibujo es pequeño.
4. Muévete a la mitad izquierda del espejo.
5. ¡Acércate muy rápido al espejo, hasta tocarlo con la nariz!
6. Sepárate un poco, muy poco, del espejo.
7. Cierra un ojo.
8. Vuelve a dibujar la silueta exacta de tu cara en el espejo usando el jabón. Solo de tu cara. Sabrás que lo estás haciendo bien porque no quedarás ningún trozo de cara fuera del dibujo ni habrá nada dentro del dibujo que no sea tu cara. Como estás cerca del espejo, ahora el dibujo es más grande.
9. No te alejes. Muévete de nuevo a la mitad derecha del espejo. ¿Tu cara cabe en el dibujo anterior?
10. Ya podéis alejaros. Mirad: ¿qué está ocurriendo?
11. Vamos a ver una cosa más: con vuestras manos tomad la medida de los dibujos y comparadla con vuestras caras. ¿Qué pasa?



Figura 25: Alumna haciendo el experimento del espejo mágico