Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

HISTÒRIA DE LES PROBABILITATS FINS EL SEGLE XVIII

Autor: Mikel Majewski Etxeberria

Director: Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

The Probability Theory began to be considered as a science in the seventeenth century, but there is a long way to reach this point. This paper will show the roots of the current probability theory and the first steps once it is considered a science. Following the most remarkable mathematics in this field, it is shown how this science has evolved with the resolution of different problems and propositions.

Resum

Les Probabilitats començen a considerar-se com a ciència el segle XVII, però hi ha un llarg camí per a arribar fins a aquest punt. En aquest treball es mostraràn les arrels de la teoria de la probabilitat actual, i es veuràn els primers passos un cop és considerada una ciència. Passant pels més remarcables matemàtics en aquest àmbit, es mostra com ha evolucionat aquesta ciència amb la resolució de diferents problemes i proposicions.

2010 Mathematics Subject Classification. 60A05, 60A10, 60C05, 01-00, 01A40, 01A50, 01A45

Agraïments

Vull agrair als meus pares per donar-me suport en aquests temps difícils, a tots els meus amics per haver-me ajudat amb recomenacions i sobretot al meu tutor, en Josep Vives Santa Eulalia per estar disposat a tutoritzar el treball i haver respós i donat consells sempre que els he necessitat.

Índex

1 Introducció **1**

2 L'origen **2**

2.1 Jocs d'atzar i les probabilitats 3

2.2 Els primers problemes 5

2.2.1 Nombre de diferents resultats en la tirada de varis daus 5

2.2.2 El problema del repartiment d'una aposta no acabada 6

3 Probabilitats en el segle XVI. Les primeres nocions probabilístiques **7**

3.1 Gerolamo Cardano 7

3.1.1 Liber de Ludo Aleae 7

3.2 Niccolò Tartaglia 12

3.2.1 Trattato generale di numeri e misure 12

3.3 Galileo Galilei 14

3.3.1 Considerazione sopra il Giuco dei Dadi 14

3.3.2 Opera 16

3.3.3 Dialogue of the Great World Systems 16

3.4 Etapes bàsiques del desenvolupament de la combinatòria 17

4 Probabilitats en el segle XVII. Primers desenvolupaments en la teoria de la probabilitat **19**

4.1 Gottfried Leibnitz 19

4.1.1 Dissertatio de Arte Combinatoria 19

4.2 La llegenda de De Méré 21

4.3 Fermat i Pascal 23

4.3.1 Fermat 23

4.3.2 Pascal 23

4.3.3 Correspondència entre Fermat i Pascal 23

4.4 Christiaan Huygens 26

4.4.1 De Rationiniis in Ludo Aleae 27

4.5 James Bernoulli 34

4.5.1 Ars Conjectandi. Part 1 34

4.5.2 Ars Conjectandi. Part 2 35

4.5.3 Ars Conjectandi. Part 3 41

4.5.4 Ars Conjectandi. Part 4 41

4.5.5 Ars Conjectandi. Part 5 44

4.6 Pierre-Rémond de Montmort 47
4.6.1 Pròleg 48
4.6.2 Part 1 49
4.6.3 Part 2 49
4.6.4 Part 3 49
4.6.5 Part 4 50
4.7 De Moivre 52

5 Conclusions **54**

1 Introducció

El projecte

La història de les probabilitats ha tingut moltes fases. I encara que no es considera com a ciència fins el segle XVII, ja hi ha algunes nocions relacionades anteriorment.

En aquest treball s'iniciarà un viatge per la història en la prehistòria, amb una breu explicació d'on apareixen els jocs d'atzar. Es seguirà analitzant la evolució d'aquests jocs i l'aparició de les primeres estadístiques. Un cop posats a taula tots aquests detalls, analitzarem quina és la motivació per investigar les probabilitats, on em basaré en l'interessantisim i innovador punt de vista de L.E. Maistrov, qui refuta els arguments més comúns que otorguen tot el reconeixement de l'orígen de la matèria als jocs d'atzar.

Un cop introduits en l'origen, es mostrarà un segon bloc amb alguns matemàtics del segle XVI, els quals comencen a intuir diversos problemes relacionats amb les probabilitats. Tot i no ser considerat encara com a ciència, ja hi ha alguns autors famosos amb propostes interessants. És el cas de Cardano, Tartaglia i Galileo Galilei, els quals ja treballen en alguns problemes de llençaments de daus i el repartiment just d'apostes. També apareix la noció d'errors d'observacions.

Un cop realitzat el primer pas, començarem a introduir els autors més influents, els precursors de les probabilitats i gracies als quals es considerada una ciència. En aquest tercer bloc es mostraran diversos autors del segle XVII com Leibnitz, de Méré, Fermat, Pascal, Huygens i Bernoulli. Especial menció a Pascal i Fermat que són els que aconsegueixen el reconeixement de les probabilitats com a ciència. En aquest bloc seguiran investigant-se problemes evolucionats sobre el repartiment d'apostes i les tirades de daus, pero a més a més apareixen diversos conceptes com la esperança matemàtica i la llei dels grans nombres.

El treball finalitzarà amb els útims matemàtics del segle XVII.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està estructurada en quatre blocs que representen diferents segles i una certa evolució de les probabilitats.

Cada autor té una breu introducció i es parlarà de les obres més importants que van escriure en relació a les probabilitats.

En alguns casos especials farem un incís en successos importants, com correspondències i relacions entre matemàtics importants, com per exemple, la correspondència entre Pascal i Fermat.

2 L'origen

Es difícil determinar quan sorgeixen les probabilitats. Ja en excavacions antigues s'han trobat una gran quantitat d'astràgals en comparació a altres típus d'ossos, però no podem assegurar que l'ús que se'ls donava fos el dels jocs d'atzar, al menys en èpoques d'on no tenim documentació. Tot i això, per la similaritat que tenen amb els daus, tot fa pensar que els utilitzaven per jugar. Les proves més antigues de jocs d'atzar provenen dels antics Egípcis, el 1800 a.C, dels quals s'ha trobat un tauler d'un joc anomenat "gossos i xacals".

Heròdot d'Halicarnàs escriu el 500 a.C. que a Libia, durant una época de fam el 1500 a.C., es van utilitzar els jocs d'atzar com a distracció a la gana.

A Troya, els soldats jugaven als jocs d'atzar com a distracció durant el setge que els van fer els grecs.

Per altra banda, respecte les dades estadístiques, les primeres trobades van ser els cens poblacionals. Els governadors dels antics Egipcis, Grecs i Romans van intentar enumerar quantitats de població, quantitats anuals de grà recolectats, impostos, etc. L'emperador romà Augustus (27 a.C-17d.C) va iniciar el cens de cada territori conquerit, per exemple.

Guillem el Conqueridor (1027-1087) va ordenar la realització d'un registre anomenat "Doomsday" que contenien el cens d'Anglaterra del 1086 amb el propòsit d'establir impostos per la població segons la seva ocupació i categoria. A més, aquests registres contenien informació de les propietats reals, feudals i clericals amb informació de la seva mida, quantitat de ramat i el seu capital.

Les cròniques russes del segle X i períodes posteriors també tenen referències de recolleccions estadístiques. Per exemple, els Mongols després de conquerir Rússia van crear un cens poblacional per recollir tributs i impostos. També es feien cadastres. Més endavant, en 1666 es va fer un cens a tot Rússia per ordre del Tsar de Moscou.

En l'edat mitjana es comencen a fer inventaris detallats d'agricultura de les propietats dels senyors feudals. Per exemple, a Venècia es van realitzar lleis el 1268 i el 1296 ordenant als governadors a recollir dades detallades de les seves províncies. Representats diplomàtics eren obligats a recollir l'informació i portar-lo al senat dels països que representaven. El senat organitzava cens de població i habitatges. A més recollien dades d'activitats comercials. El 1421, Mochenigo va organitzar tota la informació i la va presentar detalladament al senat.

Durant el segle XVII Holanda, Espanya, França, Anglaterra i Alemanya van aparèixer els primers vademècums. A Londres per exemple van aparèixer les primeres publicacions de registres parroquials i estadístiques de mortalitat degut a les diferents plagues epidèmiques. El primer està datat el 1517. Aquestes estadístiques estaven subjectes a canvis. El 1532 i el 1535 es realitzaven setmanalment. El 1693 es publiquen els annuals i es van introduir causes de mort. Al principi hi havia solament dues categories: malaltia i accident. Es van afegir categories progressivament. El 1629 es va afegir el sexe.

Basat en aquestes estadístiques, van aparèixer les primeres nocions probabilístiques com la probabilitat de morir en un període de temps, la probabilitat de sobreviure una quantitat determinada d'anys, etc.

A l'inici del capitalisme es comença a desenvolupar una estadística sistemàtica i extensiva degut a les transicions monetàries. Aquestes estadístiques són un estímul en la evolució de la teoria de la probabilitat. En el segle XIV ja apareixen les primeres companyies d'assegurances marítimes a Itàlia i Holanda estenent-se a altres països durant el segle XVI i evolucionant a altres modalitats durant el segle XVII. Aquestes companyies ja utilitzaven càlculs de probabilitat de risc cobrant un 12-15% del cost dels bens en cas marítim i 6-8% en cas de transport continental.

També la filosofia té una gran influència en les probabilitats, sobretot el segle XVII, però també anteriorment. Per exemple, el dictamen de Thomas Hobbes (1588-1678) [1, Cap.IV, p.18] que deia que independentment de quant temps observàvem un fenomen, mai arribaríem a conèixer-lo absolutament. Per això segons Hobbes, era impossible trobar totes les circumstàncies solament amb observacions.

En síntesis, la teoria de la probabilitat emergeix quan hi ha hagut una necessitat de tenir-les per diversos motius. Aquest fenomen és característic del període del col·lapse del feudalisme, la proletarització dels pagesos i l'augment de la burgesia que va tenir com a conseqüència la crescuda de ciutats, comerç, manufactura i ciència. Aquest període es considera per tant com el període en que neix la teoria de la probabilitat.

2.1 Jocs d'atzar i les probabilitats

Durant la història hi ha hagut la falsa premissa de que les probabilitats neixen a partir dels jocs d'atzar i ha sigut una opinió recolzada per la majoria d'investigadors com per exemple F.N. David o M.G.Kendall en la revista Biometrika. En especial s'atribueix el naixement de les probabilitats als inicis d'investigació dels jocs d'atzar per part de Fermat i Pascal.

I si bé és cert que és innegable la gran influència que han tingut els jocs d'atzar en les probabilitats, com hem vist anteriorment, aquests apareixen ja en a la prehistòria per tot el món, molt abans de l'inici de la teoria de les probabilitats.

Ja en la prehistòria s'utilitzaven astràgals (petits ossos d'animals) com a daus, utilitzant les seves quatre cares. Al tirar l'astràgal, s'anotava quina cara havia sortit. Aquestes cares eren anotades utilitzant diferents mètodes degut a que no existia un mètode d'enumeració estàndard. Una versió d'aquest joc en la antiga Grècia era llançar quatre astràgals alhora i anotar quin costat havia sortit més cops. La millor llançada de totes s'anomenava "Venus" i es donava quan sortien les quatre cares diferents. Els antics Egipcis també els utilitzaven (en els temps de la primera dinastia, el 3500 a.C) pel seu joc anomenat "Gossos i xacals".

En excavacions arqueológiques de l'any 5000 a.C (i possiblement d'abans) és comú trobar una gran quantitat d'astràgals en comparació a altres tipus d'ossos.

A partir de nombrosos experiments s'han establert les freqüències de sortida de cada cara en la llançada. La freqüència de sortida de la cara ample convexa és $\approx$0,39. Per la cara oposada és $\approx$0,37. Per les dues altres cares, la freqüència és $\approx$0,12.

També s'han trobat bastonets de fusta o d'os, amb cares marcades de l'1 al 4, que es llançaven rodant com un llapis. Aquests bastonets es troben en moltes nacions com per exemple a Asia menor els segles VI i VII9 d.C.

Un altre artefacte trobat són uns platets prims quadrats amb una cara marcada amb un punt i l'altre amb sis punts. Es pensa que aquests platets s'utilitzaven com les monedes actuals per jugar al "cara o creu".

Tot i això, els jocs més famosos eren els que es jugaven amb daus de sis cares, cada cara marcada amb d'un a sis punts, encara que la distribució de la numeració per cares variava segons la civilització. La més comú era 1-6, 2-5, 3-4 (cada parella correspón a als nombres entre cares oposades). Aquests daus es feien amb diferents materials com marbre, fusta, vidre... El dau més antic trobat a dia d'avui està datat en el 3000 a.C a Iraq. Civilitzacions com els Grecs també van tenir daus amb més cares.

En la illa de Sumatra es jugava a un joc d'atzar en el que es ficaven entre dos i quatre bastonets, amb quatre cares marcades amb d'un a quatre punts. Aquests bastonets es posaven en una closca de coco partida per la meitat. Un cop ficats, es tancava la closca i es barrejaven. S'apostava quant donaria la suma dels nombres que sortissin i es llançaven. Guanyava qui encertés.

Els jocs de cartes també existeixen des de temps molt antics. Les cartes modernes apareixen per primer cop a França al segle XIV i ràpidament es van estendre en els jocs d'atzar. Els daus i les cartes usualment s'utilitzaven per fer sorteigs i per endevinadors.

Com s'ha anat veient, durant molta part de la història hi ha hagut jocs d'atzar. En l'Imperi Romà va ser necessari promoure lleis per prohibir els jocs d'atzar a excepció de dates especials on si es permetia jugar. Suetonius ens explica en els seus textos "Vida de Augustus" i "Vida de Claudius" que ambdós emperadors els agradava jugar als daus.

En l'època medieval europea trobem múltiples mencions i descripcions de jocs d'atzar en la literatura a partir del segle XI. El nombre de descripcions anava augmentant a través del temps. Alguns autors que van mencionar-ne són Dante i Erasmus. A més, existeixen evidencies de que l'Església Catòlica es va oposar als jocs d'atzar dient que els dimonis estaven associats a ells. Malgrat tot, no els va servir i els jocs d'atzar es van mantenir a Europa.

Algunes altres prohibicions de jocs d'atzar en la historia es van dur a terme per Frederic II el Gran (1232), El Tzar Aleksii Mihailovich (1649), Caterina II de Rusia (1782) entre altres. Lluís IX de fet, inclús va prohibir la manufactura de daus. Eduard III i Enric VIII van afegir els daus i les cartes a la llista d'entreteniments il·legals per tal de promoure l'esport i els jocs militars. Es van fer també algunes lleis més suaus per controlar els jocs d'atzar. Per exemple, en la tercera croada (1190 d.C), els cavallers i clergues van acordar que no es podia perdre més de vint monedes en vint-i-quatre hores.

Tenint en compte que tots aquests jocs d'atzar existeixen molt abans del segle XVII, quan la teoria de les probabilitats comença a ser una ciència, és incoherent assumir que els jocs d'atzar van ser l'estímul per a investigar les probabilitats, doncs la teoria de les probabilitats hauria d'haver sorgit molt abans.

F. N. David suggereix que no sorgeixen abans degut a que les imperfeccions dels daus impedien obtenir informacions de regularitat. Aquesta explicació és insatisfactoria, doncs ja antigament es feien obres arquitectòniques impressionants que fa pensar que també tenien eines per fer daus perfectes. De fet, s'han trobat daus antics perfectes que es troben en museus de Rússia.

Kendall per altra banda dona quatre possibles motius:

1. La no existència d'àlgebra combinatòria.
2. La superstició dels apostadors.
3. La no existència de notacions de successos aleatoris.
4. Barreres religioses i morals al desenvolupament de la idea de aleatorietat i atzar.

Encara i donant aquests possibles motius, Kendall diu que no sabria dir quina és la raó. Realment, ninguna de les raons té gaire fonament. Sempre que una ciència ha requerit evolucionar, s'han desenvolupat noves idees i noves notacions i totes les barreres s'han trencat. No hi ha motius per a pensar que amb les probabilitats no passés el mateix.

Una altra proposta donada per Hotimskii [2], és que el motiu per la qual la teoria de les probabilitats inicia el segle XVII és l'augment de la popularitat de les apostes en el context d'increment de transicions monetàries. La contradicció en aquest cas recau en que en la edat mitjana ja eren molt populars els jocs d'atzar, tant com en el segle XVI i XVII.

L.E Maistrov [3] assegura que no creu que els jocs d'atzar siguin l'estímul principal de la teoria de la probabilitat, encara que no nega que també tenen la seva influencia. La majoria de problemes presentats eren en el context dels jocs d'atzar perquè és la forma més senzilla i intuïtiva de presentar-los, a més de permetre un format i una terminologia més convenient. Tot i això, Maistrov assegura que el transfons d'aquests problemes no són els jocs d'atzar. Aquesta opinió sembla ser la més coherent amb els fets.

2.2 Els primers problemes

2.2.1 Nombre de diferents resultats en la tirada de varis daus

Un dels problemes més típics en la probabilitat és el càlcul del nombre de diferents resultats en la tirada de varis daus. Els primers càlculs d'aquest tipus de problema daten en el segle X o XI.

El primer cas conegut on es calcula les formes com poden caure tres daus (permutacions incloses) apareix en el poema llatí De Vetula. Richard Fournival (1200-1250) és considerat l'autor d'aquest poema. Aquest poema indica que la forma de calcular el nombre de permutacions és la següent:

- Existeixen 6 formes de que surtin els tres nombres iguals (ja que n'hi ha una per cada nombre del dau).
- Si dos daus surten iguals i l'altre diferent, existeixen 30 possibles resultats (cada un dels 6 parells, pot unir-se amb una de les altres 5 xifres).
- Pel cas de tres nombres diferents, ens diu que si ja tenim 2 nombres diferents, existeixen 4 nombres diferents als 2 que ja han sortit. Per tant, es múltiplica per 4 el nombre de possibilitats de 2 daus diferents, que, com s'havia vist en el pas anterior, era 30. Tenim per tant 120 possiblitats. Però l'autor indica que per 3 xifres, existeixen 6 formes d'escriure'ls (és dir, no té en compte l'ordre) i, per tant, hi ha 120/6=20 possiblitats.

Per tant, el nombre total de possibles resultats serà de 6+30+20=56.

Seguidament, encara que no està indicat en el text anterior, el nombre total de possibles camins com poden sortir els tres daus és:

$$6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$$

És interesant observar que no es calcula de la forma més fàcil que seria multiplicar 36 (nombre de possibilitats de 2 tirades) per 6.

2.2.2 El problema del repartiment d'una aposta no acabada

Un altre problema clàssic és la repartició de l'aposta entre dos jugadors si el joc es para abans de complir les rondes pactades inicialment. Aquest problema el treballa Luca dal Borgo (Paccioli) (1445 d.C- 1514 d.C) en la seva obra "Summa de Arithmetica, Geometria, Propotioni et Proportionalità" completada el 1487 i impresa a Venècia el 1494 en italià, encara que el problema té més antiguitat.

Aquest llibre era una enciclopèdia dels coneixements matemàtics de l'època. En una secció anomenada "problemes inusuals" Paccioli presenta els següents problemes:

1. Es juga a un joc que requereix de 60 punts per guanyar i on s'aposten 22 ducats. Per algunes circumstàncies no es pot acabar el joc. Un equip té 50 punts i l'altre 30 en el moment que es deixa de jugar. Com s'haurien de repartir els diners?

2. Es fa una competició de tir amb ballesta. El primer en obtindre les 6 millors tirades guanya. S'aposten 10 ducats. El primer jugador ha aconseguit la millor tirada 4 cops, el segon 3 cops i el tercer 2 cops. Decideixen no continuar. Com s'haurien de repartir els diners?

Segons Paccioli, els ducats apostats s'han de repartir proporcionalment segons els punts aconseguits. Pel primer problema per exemple dona la solució següent:

"Tenint en compte que 5/11+3/11=8/11, si suposem que 8/11 correspón a 22 ducats ens dona que a l'equip amb 50 punts li correspón 5/11, és dir $13\frac{3}{4}$ ducats mentre a l'altre equip li correspón 3/11, és dir, $8\frac{1}{4}$ ducats.

3 Probabilitats en el segle XVI. Les primeres nocions probabilístiques

3.1 Gerolamo Cardano

Gerolamo Cardano (1501-1576) va nèixer a Pavia, Itàlia. Era fill il·legítim d'un advocat. El 1520 entra a la Universitat de Pavia per estudiar medicina, on treu unes excel·lents qualificacions.

La seva obra relacionada amb les probabilitats va ser un tractat anomenat "Liber de Ludo Aleae" (El llibre dels jocs d'atzar), el qual va ser una important contribució en el desenvolupament de nocions probabilístiques. Aquest manuscrit no es va descobrir fins la seva mort i va ser publicat per primera vegada el 1663, editada per Jean Antoine Huguetan i Marc Antoine Ravaud a Lyon.

3.1.1 Liber de Ludo Aleae

Aquest llibre ens permet observar la seva investigació en desenvolupament, encara que finalment no l'acaba. A mesura que avança, Cardano corregeix els errors que havia fet anteriorment sense retrocedir. Degut a la mancança d'una simbologia adequada, pels problemes recurreix a exemples concrets. Tracta de resoldre tant els porblemes relacionats amb els daus com les reparticions d'apostes utilitzant dos mètodes: El recompte directe i el raonament a partir dels beneficis mitjans. En el seu anàlisi és interessant observar que utilitza la comparació d'igualtat o probabilitat $\frac{1}{2}$ al que anomena "la meitat del circuit".

En els primers capítols del llibre, Cardano dona diversos consells per diferents jocs d'atzar pels jugadors i una mena d'autobiografía on explica la seva relació amb els jocs d'atzar. Consells que ell mateix aplicava. També explica alguns detalls històrics d'alguns jocs d'atzar, com per exemple, el *Primera* en el **capítol I** anomenat "Sobre els gèneres dels jocs".

El **capítol II** anomenat "De les condicions dels jocs" el dedica a recomanar apostar moderadament i explica que com a activitat d'oci, existeixen altres afers millors.

En el **capítol III** anomenat "Amb qui i quan convé jugar" explica que apostar es per a nens, adolescents i soldats, doncs es una activitat deshonesta. Per això recomana no jugar gaire contra gent assidua a les apostes, doncs possiblement serà gent deshonesta i si ets inexpert, acabaràs perdent tots els diners.

El **capítol IV** anomenat "Utilitat i prejudicis del joc" explica tal i com diu el títol les diverses utilitats que té el jugar, com per exemple, olvidar-te d'altres preocupacions. Com a perjudici principal, argumenta el perill del vici i el floriment de les males emocions com la ira.

I segueix donant consells fins el **capítol IX**, el qual anomena "Sobre la tirada d'un dau". En aquest capítol explica que tirant un dau sis vegades, hauria d'aparèixer un cop cada cara, però que si es repeteix un nombre, n'hi haurà un altre que ja no apareixerà. Diu que la igualtat (és dir, la meitat de probabilitat) es troba en la meitat dels nombres, doncs la probabilitat de cada cara és $\frac{1}{6}$ i per tant, per tres cares la probabilitat serà $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

El **capítol X** el dedica a explicar perquè Aristòtil condenava el joc.

En el **capítol XI** anomenat "Sobre la tirada de dos daus" Cardano explica que en dos tirades de daus hi ha 6 possibles resultats on surt el mateix nombre en els dos daus i 15 possibles resultats de que toquin diferents xifres, els quals doblem (per comptar la tirada inversa) i per tant hi ha 36 possibilitats.

A més a més Cardano enumera el nombre de possibles successos on tirant dos daus, al menys un surti un nombre prèviament assignat. El nombre total de possiblitats és 11. Seguidament, Cardano diu que si es tiren dos daus dos cops, les posiblitats de treure un 1 dos cops és major que 1/6 però menor que 1/4 de la igualtat (és dir, entre $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ i $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$).

Cardano anomena "conjunt de circuits" als 36 possibles resultats. Cardano assegura que quan el nombre de tirades és petit, la freqüència pot desviar-se molt de la seva "porció" (probabilitat) mentre que quan el nombre de tirades és gran, aquesta desviació és insignificant. D'aquesta manera, Cardano dona una primera idea intuïtiva de la llei dels grans nombres.

En el **capítol XII** anomenat "Sobre la tirada de tres daus" , Cardano explica que les tirades de tres daus amb la mateixa cara són les mateixes que amb dos daus, afegint la mateixa cara per tercer cop. Per tant hi ha 6 possibles tirades d'aquestes característiques. Si considerem 2 tirades iguals i una tercera diferent, hi ha $6 \cdot 5 = 30$ possiblitats, que, multiplicat per 3 segons quin sigui l'ordre dels daus, ens dona 90 possibles casos. Per últim afegeix que per les possibles tirades de 3 daus de forma que surtin tres xifres diferents hi ha 20 possiblitats, cada una de les quals pot sortir de 6 formes diferents, el que ens dona $20 \cdot 6 = 120$ possiblitats. Hi ha un total de 216 possiblitats per tant. És curiós veure que la forma d'arribar a 216 no ha sigut multiplicar $36 \cdot 6$.

En aquest capítol també es resolen problemes relacionats amb el càlcul de diferents resultats de tirades. Per exemple, calcular els diferents camins de com poden sortir 2 nombres donats (1 i 2 per exemple) en la tirada de 3 daus. Cardano conclou que hi ha tres formes de com pugui sortir l'1 repetit i un 2 i, de la mateixa manera, tres més de que surti el 2 repetit i un 1. Si considerem que no es repeteix cap xifra, hi ha 4 formes de que surti l'últim dau (un per cada xifra restant), i 6 formes de com poden sortir l'1 i el 2 ((1,2,x), (1,x,2), (x,1,2), (2,1,x), (2,x,1), (x,2,1)). Per tant, hi haurà 24 possiblitats d'aquestes.

En el **capítol XIII** "Sobre nombres compostos fins a sis i més enllà en la tirada de dos i tres daus" Cardano arriba a un mètode molt proper al càlcul de probabilitats de diversos esdeveniments. Escriu el següent: En dos daus, el dotze i l'onze consisteixen en treure respectivament doble 6 i el 6 amb el 5. El deu, doble 5 i el 6 amb el 4, però aquest últim pot variar de dues formes; per tant en total serà una dotzena part del circuit. En el cas de nou, estan el 5 amb el 4 i el 6 amb el 3, de forma que seran la novena part del circuit. El vuit es forma a partir de dos 4, de 3 amb el 5 i de 2 amb el 6. Aquestes cinc possibilitats formen aproximadament la setena part del circuit. El set es forma amb 6 amb l'1, el 2 amb el 5 i el 4 amb el 3. El total dels punts és per tant sis (la tercera part de la igualtat). Conclou dient que el sis funciona com el vuit, el cinc com el nou, el quatre com el deu, el tres com l'onze i el dos com el dotze.

Cardano calcula en aquest cas la probabilitat de que la tirada de dos daus ens donguin una quantitat de punts. Encara i així, la seva probabilitat no és una relació encara sinó una part del "circuit".

Cardano construeix així la següent taula anomenada "sors amb dos daus" (Sorts a obtenir amb dos daus)

2	12	1	3	11	2	4	10	3
5	9	4	6	8	5	7	8	18

La taula està construïda de la següent forma: 2 i 12 poden ocórrer d'una sola manera; 3 i 11 de dues formes; 4 i 10 de tres i així successivament. En la última parella de nombres (7 i 8) sembla haver un error, doncs hauria de ser 7 i 3. Això voldira dir que 7 podria sortir de 3 formes i finalment posaria el 18 representant la igualtat, és dir, la meitat del circuit.

Seguidament Cardano presenta una altra taula "sors amb tres daus" amb la mateixa lògica, però considerant tirades de tres daus. La taula bé acompanyada per una detallada explicació de com una suma donada es pot obtenir.

3	18	1	5	16	6	7	14	15	9	12	25
4	17	3	6	15	10	8	13	21	10	11	27

En el **capítol XIV** "Sobre la combinació de punts" Cardano calcula el número de casos on un 1 (o qualsevol altre nombre) surt en la tirada de dos daus o el número de casos en el que surten l'1 o un 2 entre altres càlculs.

Diu: "En el cas de dos daus hem d'entrar en un raonament del següent tipus: El punt 1 té 11 tirades favorables i el punt 2 igual i el 3 i així tots els punts singulars, però les opcions de que surtin un 1 o un 2 no tenen 22 casos sino 20. 11 pel punt 1 i 9 pel punt 2 (doncs no comptem els casos en que surt amb un 1, doncs ja els haviem comptat). I si afegim el 3, tenim 27 tirades favorables, no 29 ni 31."

Cardano mostra la següent taula:

Total de casos	11			per un punt
	20	(=11+)	9	per dos punts
	27	(=20+)	7	per tres punts
	32	(=27+)	5	per quatre punts
	35	(=32+)	3	per cinc punts
	36	(=35+)	1	per sis punts(succés segur)

Observa que els nombres 1, 3, 5, 7 i 9 son nombres imparells consecutius. Aquest patró l'obté a partir de les següents observacions de possibles resultats de la tirada de dos daus:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

on les línies separen el total de casos, donada certa quantitat de punts.

Seguint aquesta taula Cardano diu: ”Així si es consideren totes les tirades, s'obtentenen 36, doncs amb això el circuit es fa perfecte i és necessari que totes les tirades continguin algun punt de forma que completa el circuit. Encara i així, si algú diu, vull un 1 o un 2 o un 3, saps que són 27 tirades favorables, i com el circuit són 36, les tres tirades restants en les que aquests punts no surten són 9, i la proporció, per tant, serà de 3 a 1.“ [16, pàg 200]

Amb això raona que, si es juga quatre vegades, les probabilitats diuen que l'aposta de que surti un 1, un 2 o un 3 guanyarà tres vegades, mentre el cas contrari només guanyarà un cop; Per això, si el jugador que espera que surti un dels punts de 1 a 3, aposta tres ducats i l'altre n'aposta un, el primer guanyarà tres cops i per tant guanyarà 3 ducats (el mateix que ha apostat). Per tant, el circuit de quatre tirades, on el primer jugador aposta tres vegades més que el segon, sempre serà equitatiu. Continua:

“Així doncs, aquest és el raonament per jugar en condicions iguals, doncs si l'altre aposta més, jugarà en condicions injustes i amb pèrdues, i si aposta menys, amb avantatge. Igualment, si s'inclou el 4, serien 32 les tirades i el nombre de tirades restants serien solament 4. Per tant, l'aposta serà vuit cops major que el de l'oponent perquè la proporció de 32 a 4 és 8 a 1, i el mateix amb la resta de casos; no és necessària aquí la comparació amb la mitjana. De la mateixa manera podem dir en els casos restants: si volem dos 1 o dos 2 tenim dues tirades favorables, i queden 34, per tant, la seva proporció serà de 17 a 1, i així si volem l'1 doble, la proporció serà de 35 a 1, i totes les regles anteriors s'han de reduir a aquesta regla, com es deu discernir la igualtat de les apostes. Per exemple, perquè aparegui un 1, com són 11 tirades favorables, la proporció ha de ser de 25 a 11, poc més de 2 a 1.“ [16, pàg 200]

Cardano conclou amb que el mateix raonament d'ha d'aplicar pel cas de llançar 3 daus. Veiem que Cardano dona una definició de joc just on diu que l'aposta ha de ser igual a l'esperança matemàtica de guanyar.

D'aquesta forma Cardano escriu el següent per apostes en termes generals: “Així doncs, hi ha una norma general a saber; que hauríem de considerar tot el circuit, i el nombre de tirades que representa els resultats favorables s'ha de comparar amb el nombre de tirades del circuit i d'acord amb aquesta proporció s'hauria d'apostar de forma que l'aposta sigui justa.“ [16, pàg 202]

En aquest context Cardano afirma que si el nombre de possiblitats és n i el nombre d'intents favorables és m, llavors les apostes haurien de ser en el rati $\frac{m}{n-m}$. Com tots els exemples utilitzen daus, l'equiprobabilitat de resultats està assumida. Cardano utilitza el terme "aproximadament" ja que per alguns problemes discutits en el llibre, el rati $\frac{m}{n-m}$ no es pot expressar en nombres rodons de diners. Per exemple, hi ha 11 casos favorables per a que surti un 1 i 25 casos en contra, per tant el rati seria 25 a 11 que seria poc més que 2 a 1.

El següent problema que planteja Cardano és l'aparició d'un cert nombre en la tirada de 3 daus. També ho calcula per dos llançaments de tres daus i per tres llançaments de tres daus. Cardano exposa el següent:

"Si una persona necessita treure un 1, llavors el nombre favorable de casos són 91 i el nombre de casos no favorables és 125 (aquí corregeix el nombre de llançades favorables, doncs havia dit que eren 108 en el capítol XII); així que si multipliquem cadascun d'aquests nombres per si mateix, ens dona 8.281 i 15.625 i per tant les probabilitats són aproximadament de 1 a 2. Per tant, si hagués d'apostar el doble estaria jugant en condicions desfavorables. Seria més just que s'oferís el doble. En tres tirades, les possibilitats serien 753.571 a 1.953.125, molt a prop de 2 a 5." [16, pàg 202]

Observem que en aquest cas calcula els cubs de 91 y 125, és dir, utilitza la propietat del producte per probabilitats.

Per calcular les apostes de dos séries, fa el quadrat de $\frac{m}{n-m}$ obtenint $\frac{m^2}{(n-m)^2}$:

$$p1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m^2}{n^2};$$
$$q1 = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n-m}{n} = \frac{(n-m)^2}{n^2};$$

i les apostes proporcionals a aquestes probabilitats són:

$$\frac{p1}{q1} = \frac{(m^2/n^2)}{((n-m)^2/n^2)} = \frac{m^2}{(n-m)^2};$$

Fa el mateix per les tres tirades, calculant cubs.

Dos capítols posteriors(XXX i XXXI) estan connectats amb la història dels jocs d'apostes. Cardano diu que l'inventor va ser Palamedes durant les guerres de Troya, durant l'assetjament.

El 1570 es va publicar un altre llibre de Cardano anomenat "Opus novum de proportionibus numerorum" (Nou treball de proporcionalitats). En aquest tractat Cardano treballa problemes relacionats amb la combinatòria. Cardano diu per exemple que el nombre de combinacions amb n elements és

$$2^n - 1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$$

però no dona cap demostració.

En un altre tractat anomenat "Practica arithmeticae generalis" (Practica general d'aritmètica) publicat el 1539, Cardano argumenta amb Paccioli la solució del problema del "repartiment just de l'aposta" on Paccioli repartia el premi per el nombre de partides guanyades sense tenir en compte les que quedaven per guanyar. Cardano ho nota, però no va donar la solució correcta al problema. Ell va assumir que si S és el nombre total de rondes per completar el joc i p i q són el nombre de rondes guanyades per cada jugador, l'aposta s'hauria de dividir segons el rati següent:

$$[1+2+3+...+(S-q)]:[1+2+3+...+(S-p)]$$

Cardano utilitza la propietat d'addició de les probabilitats. Era conscient però, que per utilitzar aquesta norma, els esdeveniments havien de ser disjunts. A més a més, Cardano utilitzava la regla de multiplicació de probabilitats per successos independents.

3.2 Niccolò Tartaglia

Niccolò Fontana neix a Brescia el 1499 o el 1500. Era fill de Michele Fontana qui mor quan Tartaglia tenia l'edat de 6 anys, deixant a la família en una situació de pobresa.

A l'edat de dotze anys, les tropes franceses envaeixen la ciutat i Niccolò Fontana reb diverses ferides, una d'elles a la boca, tot i estar refugiat en la catedral. Aquestes ferides li originen un tartamudeig que li otorga el seu sobrenom; Tartaglia, amb el que firma les seves obres.

Va ser un dels principals matemàtics del segle XVI, però viu tota la seva vida en la pobresa fins a la seva mort, el 1557.

3.2.1 Trattato generale di numeri e misure

Niccolò Tartaglia va escriure el seu tractat "Trattato generale di numeri e misure" (Tractat general de nombres i mesures) que va ser publicat el 1556 a Venecia. En aquest text apareixen diversos problemes relacionats amb la combinatòria i la teoria de la probabilitat. Un exemple és el problema següent: "Deu persones han de seure i ser servits de tantes formes possibles com sigui possible de forma que no s'asseguin dos cops de la mateixa forma". Obté com a solució $10! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 10$. Llavors Tartaglia diu "Hauria de solucionar aquest problema si hi hagués 1000 persones o qualsevol altre nombre ja que la regla s'aproxima a l'infinit" [17]. Encara i així, Tartaglia no dona una solució general del problema.

Més endevant Tartaglia presenta el capítol: "Una norma general de l'autor descobert en el primer dia de quaresma, 1523 a Verona, al obtindre el nombre de variacions en posicions de qualsevol nombre de tirades de daus". Tartaglia explica la història del 1523, quan visita Verona, un grup de gent estava extraient respostes d'un llibre anomenat "Llibre de la felicitat" utilitzant tirades de tres daus. Tartaglia va observar que hi havia 56 variants al llençar 3 daus i va decidir trobar la norma per trobar aquesta xifra per qualsevol nombre de daus. Va passar tota la nit pensant en aquest problema, i al següent dia (el primer dia de quaresma) va trobar que aquesta norma està formada per "diferents tipus de progressions especials".

A continuació alguns dels seus càlculs: Un dau pot caure de sis formes: 1+1+1+1+1+1=6. Dos daus de 21 formes (Tartaglia compta aquí el nombre de tirades sense repeticions) on 21 és la suma de termes que corresponen a la suma dels termes anteriors en la sèrie precedent. És dir, 1+2+3+4+5+6=21, on 1+1=2, 1+1+1=3... La següent sèrie és 1+3++6+10+15+21=56 on 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10...

1)	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	=	6
2)	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	=	21
3)	1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21	=	56
4)	1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56	=	126
5)	1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126	=	252
6)	1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252	=	462
7)	1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462	=	792
8)	1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792	=	1287

Tartaglia conclou aquest capítol remarcant que, per explicar amb detall la forma com va originar els sis termes de totes les progressions seria necessari un llibre sencer. Encara i així, per la norma donada a continuació, un pot trobar quantes variacions hi ha llençant 10.000 daus.

És fàcil veure que les sumes en qüestió són de la següent forma:

$(1)C_0^0 + C_1^1 + C_2^2 + C_3^3 + C_4^4 + C_5^5 = 6 = C_6^5$

$(2)C_1^0 + C_2^1 + C_3^2 + C_4^3 + C_5^4 + C_6^5 = 21 = C_7^5$

$(3)C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 + C_7^5 = 56 = C_8^5$

$(k)C_{k-1}^0 + C_k^1 + C_{k+1}^2 + C_{k+2}^3 + C_{k+3}^4 + C_{k+4}^5 = C_{k+5}^5 = C_{6+k-1}^k$

En el cas de k daus, l'últim nombre és igual a la suma dels sis primers de la sèrie (k-1) i per tant:

$$\binom{k+5}{5} = \binom{6+k-1}{k}$$

En la secció 20, anomenada "Error di Fa Luca dal Borgo"(Els errors de Pacciolo) Tartaglia treballa en el problema del repartiment de les apostes. Primerament comenta la solució proposada per Pacciolo de repartir les apostes segons els punts aconseguits en aquell moment. Tartaglia diu que no li sembla un repartiment just, doncs si, per exemple, en una aposta un jugador porta 10 punts i l'altre 0, segons aquesta regla, el jugador amb 10 punts s'emportaria tot el premi, la qual cosa òbviament no té sentit.

Més endavant escriu: "Per tant dic que la resolució d'aquest problema és més judicial que matemàtic, de forma que sigui com sigui el repartiment de l'aposta, sempre hi haurà lloc pel litigi.".

Seguidament dona dues solucions que ell considera menys controvertides.

1. En un enfrontament de 60 partides, el jugador A ha guanyat deu i el jugador B zero. Si cada jugador ha apostat 22 ducats, com s'haurien de repartir? La solució que dona és la següent:

   $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ part dels 22 ducats, per tant $\frac{22}{6} = 3\frac{2}{3}$ ducats.

   Així doncs, el jugador A s'emporta $22 + 3\frac{2}{3} = 25\frac{2}{3}$ ducats i el jugador B els $18\frac{1}{3}$ restants.

2. Sota les mateixes condicions, el jugador A ha guanyat 50 partides i el jugador B 30. Com s'haurien de repartir els 22 ducats de cada jugador? La solució que dona és la següent :

   50-30=20; $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$; $\frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$. Per tant el jugador A s'hauria d'emportar $22{+}7\frac{1}{3} = 29\frac{1}{3}$ ducats mentre que el jugador B s'emportaria $14\frac{2}{3}$ ducats.

A més a més Tartaglia soluciona el següent problema: "En un enforntament de 6 partides A ha guanyat cinc i B tres. Com s'hauria de dividir la aposta?

Solució: La diferència entre els punts de A (cinc) i els de B (tres) és dos, el qual és una tercera part de les partides necessàries per guanyar (sis). Per tant, A hauria d'emportar-se 2/3 de l'aposta i B 1/3, és a dir, l'aposta total s'hauria de dividir en un rati 2:1.

A diferència de Paccioli, qui recomana repartir el premi proporcionalment al nombre de victóries. Tartaglia suggereix que la desviació de la meitat de l'aposta hauria de ser proporcional a la diferència de rondes guanyades entre els jugadors. Per tant un jugador rep la meitat de la aposta més l'extra calculat prèviament i l'altre la meitat menys la mateixa quantitat. Les dues solucions són incorrectes, ja que una bona divisió de les apostes hauria de ser proporcional a la probabilitat de guanyar l'aposta.

Dos anys més tard del tractat de Tartaglia, en 1558, un petit treball de G.F.Pevarone "Due Brevi e Facili Trattati, il Primo d'Arithmetica, l'Altro di Geometria" (Dos petits tractats, el primer d'aritmètica i el segon de geometria) apareix. En la primera part del tractat Peverone considera un problema similar al de la divisió d'apostes: "En un enfrontament de 10 partides, A ha guanyat set partides i B nou. Com haurien de dividir-se l'aposta? ". Diu que s'hauria de dividir en un rati de 1:6, bastant pròxim a la solució correcta: 1:7 de rati.

3.3 Galileo Galilei

Galileo Galilei, fill de Giulia Ammannati i Vincenzo Galilei, neix el 1564 a Pisa. Era el fill major de la seva famíia, pertanyent a la baixa noblesa dedicats al comerç. Estudia matemàtiques, medicina i filosofía en la Universitat de Pisa. És considerat un dels més grans científics de l'anomenada revolució científica per diversos motius com la millora del telescopi o la primera llei del moviment. La seva mort es data el 1642 a Arceti, Toscana.

3.3.1 Considerazione sopra il Giuco dei Dadi

La solució més completa al problema dels resultats de 3 daus el va donar Galileo Galilei en el seu tractat "Considerazione sopra il Giuco dei Dadi" (Consideració sobre el joc de daus). Aquest tractat va ser publicat el 1718 i no se sap quan va ser escrit. El mètode que dona Galileo pot ser fàcilment generalitzat al cas d'un nombre més gran de daus.

Galileo considera el següent problema: 3 daus són llençats simultàniament i la suma dels puntuatges s'anota: En aquest cas "mentres que el 9 i l'11 poden aconseguir-se de tantes formes com el 10 i el 12, i per tant hauríem de considerar que tenen la mateixa utilitat, segons les observacions dels jugadors, 10 i 11 són millors apostes que 9 i 12. I està clar que 9 i 10 poden fer-se amb la mateixa quantitat de combinacions. Mentre que 9 pot formar-se de sis formes:(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3); 10 pot d'altres sis formes: (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)." [5, pàg 192]

Perquè és preferible el 10 que el 9? Galileo explica el següent: "Ara jo, per encàrrec de la persona que em va demanar escriure qualsevol cosa que se m'acudis respecte el problema, exposaré les meves idees, amb la idea de no solament solucionar el problema, sinó també la d'obrir un procés a l'enteniment de les raons per les quals tots els detalls del joc que, amb molta cura, han sigut organitzats i ajustats." [5, pàg 193]

Galileo obté el nombre de possibles resultats amb 3 tirades de la forma més completa. Per dos daus són $6 \cdot 6 = 36$ possiblitats i per tres daus són $36 \cdot 6 = 216$.

Després d'exposar tots els possibles casos, Galileo arriba a les tres següents proposicions:

Proposició 3.1. *Les tirades de tres nombres iguals només poden produir-se d'una manera. [5, pàg 194]*

Proposició 3.2. *Les tirades de dos daus iguals i un tercer diferent es produeixen de tres formes diferents. [5, pàg 194]*

Proposició 3.3. *Les tirades de tres nombres diferents es produeixen de sis formes diferents. [5, pàg 194]*

Diu que d'aquests punts fonamentals, podem fàcilment deduir que quantes formes poden produir-se diferents llançades que es poden formar amb la tirada de 3 daus.

Conclou amb la següent taula que anomena Taula II:

Taula II

1																
3																
6	10		9		8		7		6		5		4		3	
10	631	6	621	6	611	3	511	3	411	3	311	3	211	3	111	1
15	622	3	531	6	521	6	421	6	321	6	221	3				
21	541	6	522	3	431	6	331	3	222	1						
25	532	6	441	3	422	3	322	3								
27	442	3	432	6	332	3										
	443	3	333	1												
108																
108		27		25		21		15		10		6		3		1
216																

La fila superior (10, 9, 8,...) indica la suma de punts de tres daus. Les columnes sota aquests nombres indiquen els camins com poden sortir aquestes sumes. La columna del seu costat indica la quantitat de formes com poden sortir aquestes tirades. El nombre inferior d'aquesta columna (27, 25...) indica la quantitat de tirades que donen aquesta suma, fent el sumatori de la columna. En la primera columna és fa el sumatori d'aquesta fila, obtenint de tal forma 108 tirades totals, al que li suma 108 tirades de nombres majors que 10 i per tant conclou que hi ha unes altres 108 tirades que poden donar un resultat major a 10. En connexió a això, Galileo dedueix:

"I aquí, havent un nombre igual de llençades per les majors sumes, que són l'11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 i 18, un arriba a la suma de totes les possibles tirades, les quals es poden fer amb tres daus, que és 216." [5, pàg 195]

Galileo soluciona el problema de la seguent manera:

La probabilitat d'obtindre una suma de 10 és igual a $\frac{27}{216} = 0.125$ i la suma de 9 és $\frac{25}{216} = 0.116$. La diferència és 0.09, la qual és tan petita que difícilment es nota fent partides normals doncs faria falta una quantitat enorme de tirades a més de tenir daus perfectament equilibrats. Galileo explica que la detecció de la diferència per part dels jugadors es deu a una al·legació tradicional.

3.3.2 Opera

En la seva obra "Opera", apareixen unes cartes que va enviar-se amb un capellà, Nazzoloni i a més una carta de Benedetto Castelli. En aquestes cartes discuteixen el següent problema: Un caball tasat en 100 escuts, ha sigut valorat per un home a 1000 escuts i per un altre a 10. Quin dels dos l'ha valorat millor? Galileo suggereix que els dos l'han valorat igual de malament doncs el rati 1000:100 és el mateix que el de 100/10. Nozzolani considera que el que l'ha valorat en 1000 escuts l'ha valorat pitjor doncs 1000-100 és major que 100-10. Sembla ser que Galileo va canviar d'opinió per la carta de Castelli, doncs al principi tenia la mateixa opinió que Nazzolani.

3.3.3 Dialogue of the Great World Systems

Amb l'invenció del telescopi, fer observacions astronómiques amb divers equipament es va generalitzar i el problema de calcular errors d'observacions va agafar importància. Galileo va ser un dels primers investigadors en plantejar aquest problema en els seus textos. Encara i així, Galileo no dona cap solució analítica, però si va plantejar varies proposicions que van influenciar el problema d'estimació d'error. Aquests problemes els discuteix en el seu tractat "Dialogue of the Great World Systems" publicat el 1632.

En el capítol del tercer dia, es discuteix si una estrella localitzada el 1572 estava ubicada per sota la lluna, per sobre la lluna o en l'esfera del firmament. Aquesta estrella va ser descoberta l'11 de setembre de 1572 per Tycho Brahe. Tenia la mida de Venus, brillava tot el dia i estava ubicada en la constel·lació Cassiopeia. Diverses teories van sorgir a partir d'aquesta estrella. La conclusió de Tycho Brahe en el seu llibre "De Nova Stella" va ser que aquesta estrella formava part de l'espai fixe de les estrelles, però que aquest espai podia canviar.

L'estrella va començar a perdre brillantor i el març del 1574 va desaparèixer. Tot i així les teories sobre aquesta estrella van continuar molt de temps.

El 1628, en el llibre "De Tribus novis stellis quae Annis 1572, 1600, 1604" escrit per Chiaramonti, l'autor defensa que la distància d'aquesta estrella era menor que el de la lluna.

Chiaramonti havia utilitzat 13 observacions fetes per diversos astrònoms i va calcular distancies utilitzant 12 parelles d'aquestes observacions. Va calcular que la distancia entre la Terra i l'estrella era entre 1/48 del radi de la terra i 32 cops el radi de la Terra (més a prop que la Lluna en tot cas). La major part de les observacions van donar com a resultat que l'estrella estava més lluny de la terra que la lluna però Chiaramonti va pensar que les observacions relacionades a aquestes llargues distàncies eren errònies.

Galileo, en el seu tractat "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems-Ptolemaic and Copernican" diu a això que les 12 parelles d'observacions utilitzades donaven moltes distancies diferents. Afegeix: "Aquests errors no eren de càlcul sinó en la estimació dels angles i distàncies" [22, pàg 303]. Seguidament Galileo afirma que totes les observacions venien acompanyades d'un error. Per exemple, per prendre una altitud del trípode, amb el mateix instrument, en el mateix lloc i el mateix observador, que ha repetit la observació mil cops, seguirà havent una variància d'un o més minuts. Galileo conclou que els errors són inevitables. Per això Galileo es planteja com pot corregir els valors observats per tal d'obtenir resultats fiables. És a dir, com es poden tenir en compte els errors aleatoris?

Galileo dona en relació els següents postulats:

1. Els errors són inevitables tant per observacions directes com per calculs a partir de varies observacions.
2. Els errors petits són més probables que els grans.
3. Els errors pels dos signes(per excés o per defecte) són igualment probables.
4. La majoria de dades observatories s'acosten al valor vertader.
5. Les mesures que difereixen considerablement amb la majoria de les demés mesures s'han de descartar.
6. Els errors d'observacions no són les relacionades amb els càlculs fets a partir d'observacions sino errors numèrics de les dades en si.
7. Les observacions que donen resultats plausibles després de fer les correccións mínimes necessàries s'han de veure com a correctes.

3.4 Etapes bàsiques del desenvolupament de la combinatòria

Abans de que la integració i la diferenciació entressin dins de la teoria de probabilitats, la principal eina utilitzada era la combinatòria. Els pitagòrics (540 a.C) ja investigaven els nombres triangulars que representaven el nombre de combinatòries de dos elements sobre un conjunt de n elements. En els primers segles d.C van començar a considerar-se nombres més complexos com els tetaèdrics, els quals corresponien a les combinacions de tres elements.

L'anomenat triangle de Pascal ja l'utilitzaven els hindús el 200 a.C i a més estaven ja familiaritzats amb la identitat:

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$$

Bhâskara II (1114 d.C) en el seu tractat "Lilavati" (1150) descriu mètodes per calcular permutacions i combinacions. A més va trobar la fórmula general del nombre de combinacions $C_n^p = \binom{n}{p}$.

El matemàtic hindú Nârâyana(s. XIV d.C), calculant la quantitat de vaques en un ramat en un període de 20 anys, va arribar al mètode per comptar el nombre de combinacions amb repeticions de k elements sobre n.

A Índia les combinatòries s'aplicaven (i possiblement van derivar) pel recompte de diferents combinacions de síl·labes curtes i llargues en un peu(mesura mètrica del vers en grec o llatí).

En la cultura xina per altra banda, s'han trobat taules de coeficients binomials fins a vuitè grau donats pel matemàtic Chi Shih-Chien en la seva obra "El preciós mirall dels quatre elements“ escrita el 1303. Hi ha referències a més de que aquest tipus de taula ja existien des del segle XI a Xina.

El teorema general de la expansió de potències binomial per exponents positius sembla ser que va ser introduït per primera vegada per Al-Kashi (s. XIV), però probablement també el coneixia Omar Khayyam (mort el 1214 d.C).

Una investigació de problemes de combinatòries va ser trobat en un treball aritmètic hebreu escrit per Levi ben Gerson el 1321. Aquest treball conté una formula recursiva pel nombre de combinacions sobre un conjunt de n components, agafant-ne p (és dir, A_n^p) i en particular, el nombre de permutacions de n objectes. Escriu les següents fórmules:

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!};$$
$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p};$$

Tot i això, aquests manuscrits no eren coneguts pels seus contemporanis i tots aquests resultats van ser redescoberts.

Michael Stifel (1486-1567) en el seu llibre “Arithmetica Integra“ (1544) construeix una taula de coeficients en les expansions de potències següents (fins a grau 17):

$(a+b)^2$			1		2		1		
$(a+b)^3$		1		3		3		1	
$(a+b)^4$	1		4		6		4		1

En el mateix tractat, Stifel investiga i compara les sèries de nombres en aritmètica amb les progressions geomètriques corresponents.

El 1634, P. Herigone en el segon volum del seu “Cursus mathematicus novus“ titulat “Arithmetica Practica“ determina el nombre de combinacions de m elements entre n.

Una solució correcta d'aquest problema és donat per Tacquet en el seu “Theory and Practice of Arithmetic“ (1656).

4 Probabilitats en el segle XVII. Primers desenvolupaments en la teoria de la probabilitat

Fins la meitat del segle XVII no existeix cap mètode general per resoldre problemes probabilístics. Solament es solucionen problemes específics. A meitats del segle XVII diversos científics es van involucrar en el desenvolupament de la teoria de probabilitats. Els primers van ser Pascal, Fermat i Huygens. Ells van aplicar les propietats d'addició i multiplicació de les probabilitats, van utilitzar la dependència i independència d'esdeveniments i van introduir la noció d'esperança matemàtica.

Amb això es desenvolupen noves formes de solucionar problemes i comencen a aparèixer les notacions bàsiques de les probabilitats. Tot això va fer que la teoria de la probabilitat començés a ser una ciència.

4.1 Gottfried Leibnitz

Gottfried Leibnitz va neixer l'1 de juliol de 1646 a Leipzig. Fill de Friedrich Leibniz i Catherina Schmuck, encara que el seu pare moriria quan només tenia 6 anys. Degut a això, reb molta influència per part de la seva mare respecte als valors morals i religiosos. El seu pare, però, com treballava com a professor a la Univeristat de Lepizig, li va deixar una biblioteca personal a la qual Leibnitz tenía accés des dels 7 anys d'edat. Als catorze anys d'edat entra a la Universitat de Leipzig i surt als vint anys havent estudiat dret i havent fet cursos bàsics de llengües clàssiques, lògica i filosofia escolàstica.

Va ser filòsof, científic, matemàtic, lògic, diplomàtic, jurista, bibliotecari i filòleg fins la seva mort el 14 de novembre de 1716.

4.1.1 Dissertatio de Arte Combinatoria

La obra de Leibnitz on treballa les combinatòries és l'anomenat "Dissertatio de Arte Combinatoria" (1666).

En aquest llibre, Leibnitz soluciona diversos problemes de combinatoria i desenvolupa mètodes combinatoris.

Cal mencionar que Leibnitz utilitza una terminología diferent a l'actual. Per exemple, a les permutacions les anomena "variationes ordinis" i a les combinacions "complexions". A les combinacions sense repetició les anomena "complexions simpliciter".

Alguns dels resultats que dona sobre combinatories són els següents:

– $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ on $C_m^n = \binom{n}{m}$

Presenta a més una taula anàleg al triangle de Pascal(la imatge següent) amb alguns corol·laris com:

– $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$

– $\binom{n}{n} = 1$

– $\binom{n}{n-1} = n$

– $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Tab. ℵ.

Exponentes / Complexiones

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7 *n*	8 *u*	9 *m*	10 *e*	11 *r*	12 *i*
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495
5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792
6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924
7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	495
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
*	0	1.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1023.	2047.	4095.
†	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.

Presenta també la següent identitat sense demostració:

– $2^n - 1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$

En un dels problemes obté el nombre de permutacions en una taula fins el 24. En particular anota que 24!=6.204.484.017.332.394.339.360.000.

A continuació presenta les següents propietats:

Proposició 4.1. *El nombre de permutacions sempre és parell.*

Proposició 4.2. *Del nombre de permutacions de n-1 elements i del nombre n un pot saber el nombre de permutacions de n elements.*

Proposició 4.3. *Si el nombre de permutacions de n elements es divideix successivament pels enters del 1 a n, s'obté una progressió harmònica.*

Proposició 4.4. $2P_n - (n-1)P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$

Dem: $2P_n - (n-1)P_n - 1 = 2n! - (n-1)(n-1)! = 2(n-1)!n - (n-1)(n-1)! = (n-1)!(2n-(n-1)) = (n-1)!(n+1) = (n-1)!n + (n-1)! = n! + (n-1)! = P_n + P_{n-1}$ #

Proposició 4.5. $P_n \cdot P_n/(n-1)! = P_{n+1} - P_n$

Dem: $\frac{P_n \cdot P_n}{(n-1)!} = \frac{n!n!}{(n-1)!} = n \cdot n!$;

$P_{n+1} + P_n = (n+1)! - n! = n!(n+1) - n! = n!(n+1-1) = n \cdot n!$ #

Leibnitz també dona la fórmula de les permutacions circulars: $Q_n = P_n/n$

En treballs posteriors Leibnitz retorna a problemes de combinatòria. Calcula el nombre de resultats en els jocs de daus. En particular, de m daus, els resultats en els que surt una cara k vegades és: $\binom{m}{k} \cdot 5^{m-k}$. Els seus resultats per nombre de possibles tirades de daus sense comptar repeticions amb n daus es pot expressar de la següent manera:

- 1 dau: $\binom{6}{1} = 6$;
- 2 daus: $\binom{1}{0} \cdot \binom{6}{1} + \binom{1}{1} \cdot \binom{6}{2} = \binom{7}{2} = 21$;
- 3 daus: $\binom{2}{0} \cdot \binom{6}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{6}{2} + \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3} = \binom{8}{3} = 56$;

Fins a 6 daus.

A més a més Leibitz exten els resultats dels daus de 6 cares per altres tipus de políedres.

4.2 La llegenda de De Méré

El 1654 comença una correspondència entre Pascal i Fermat per discutir diversos problemes. Un d'aquests problemes era el repartiment de les apostes per jocs interromputs. Molts autors consideren que Chevelier de Méré va ser el precursor d'aquesta correspondència. El següent problema és el que de Méré suggereix a Pascal:

"Chevalier de Méré, un apostador empedreït, en una ocasió presenta un problema a Pascal, el qual sembla que li preocupava molt i aparentment tenia certa importància. El problema era el següent: Dos jugadors acorden jugar un nombre de partides. El guanyador és el primer en guanyar S partides. El joc s'interromp quan un jugador ha guanyat a ($a < S$) partides o l'altre jugador ha guanyat b ($b < S$) partides. La qüestió és com s'hauria de dividir l'aposta." [3, p.40]

Una breu redacció de la historia de de Méré presentada per L.E. Maistrov és la següent:

"Un cavaller francés, el Cavaller de Méré, era un apostador empedreït. Va provar de tornar-se ric apostant i sempre estava pensant en algunes normes complicades que li ajudessin amb el seu objectiu.

Per exemple, de Méré pensa en la següent norma: Proposa llançar un dau quatre cops i aposta que al menys un sis apareixerà. De Méré assumeix que guanyaria més cops que perdre però, no obstant, planteja el problema al seu amic B. Pascal(1623-1662) i li demana calcular les probabilitats de guanyar aquest joc.

Presentem els càlculs de Pascal:

En una tirada, la probabilitat de treure sis és igual a 1/6 i la probabilitat de no treure sis és 5/6. La probabilitat de que en quatre llançades no aparegui el sis és $(\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296}$. Aquesta probabilitat és la que fa perdre a de Méré i és menor que $\frac{1}{2}$. Per tant, la probabilitat de guanyar és superior a $\frac{1}{2}$. En altres paraules, hi ha més d'una meitat de probabilitat que el cavaller guanyi cada partida i, repetint molts cops el joc, certament sortirà guanyador. Per tant, com més jugui, més guanyarà.

De Méré estava molt content d'haver trobat un mètode segur de guanyar una fortuna. Malauradament, els demés jugadors no van tardar en descobrir que el joc no era just i van deixar de jugar amb ell. Degut a això, de Méré va pensar en un altre joc. Va proposar llançar dos daus 24 cops i aposta que al menys un cop sortiran dos 5. Aquí però, de Méré va cometre un error. La probabilitat de treure doble 5 en una llançada és $\frac{1}{36}$. Per tant, la probabilitat de no treure'n és $\frac{35}{36}$ i conseqüentment la probabilitat de que no surtin dos 5 en 24 partides és $(\frac{35}{36})^{24} > \frac{1}{2}$. La probabilitat de perdre és major a $\frac{1}{2}$ i per tant, com més jugués més diners perdria en aquest cas. I així va passar. Com més jugava més perdia i va acabar empobrit." [3, p.40]

Aquest segon problema també l'envia a Pascal, qui li diu que per desgracia no té temps per resoldre'l. Tot i això, indica que amb els principis que tenia de Méré, hauria de ser capaç de resoldre-ho. És possible però que de Méré tingués dos regles de càlcul i li sortís resultats contradictoris.

Molts autors atorguen a aquesta història l'inici de la teoria del càlcul de fenòmens aleatoris, la qual cosa va lligada amb el supòsit de que la teoria de probabilitats va sorgir dels jocs d'atzar. Però com s'ha vist anteriorment, el problema del repartiment d'apostes ja existia anteriorment.

De Méré era un filòsof i escriptor important en la cort de Lluis XIV. Coneixia i tenia correspondència amb casi tots els matemàtics més importants de l'època, inclòs Pascal com s'ha vist. De Méré participa en la solució de diversos problemes. En una carta dirigida a Pascal escriu el següent:

“Ja sabeu que he descobert coses tan rares en matemàtiques que han sorprès als millors matemàtics europeus i ni tan sols els més savis entre els antics matemàtics mai no les havien discutit. Heu escrit sobre els meus invents, així com monsieur Huygens, monsieur de Fermat i molts altres que han admirat aquestes coses. Podeu concloure d'això que no proposo a ningú que menysprei aquesta ciència i, certament, pot ser de servei sempre que un no s'hi obsessioni massa, doncs allò que es busca amb massa curiositat em sembla inútil. I el temps dedicat a això es podria utilitzar millor.“ [28]

De Méré es refereix amb aquesta carta a la teoria de la probabilitat, el qual li semblava inútil mentres que els seus matemàtics contemporanis si que van veure la importància de la matèria.

En una carta de Pascal a Fermat, Pascal relata la història de la forma següent:

“Ell [De Méré] em va explicar que els postulats estaven malament per la següent raó: si volem treure un sis amb un dau, un té avantatge de que surti amb quatre tirades i la proporcionalitat de que toqui envers a que no toqui és de 671 a 625. Però si un vol llançar dos sisos amb dos daus, hi ha una desavantatge si només utilitzem 24 llançaments encara que 24 a 36 és equivalent que 4 a 6.“ [28, pàg 411]

Aquestes últimes proporcions de Méré els treu de les fórmules que va donar Cardano, en concret la següent:

“Si en un cas hi ha una probabilitat sobre N_0 en una llançada normal i en un altre cas hi ha una probabilitat sobre N_1, el rati corresponent als nombres crítics és de $N_0 : N_1$. Així tenim $n_0 : N_0 = n_1 : N_1$.“ [28, pàg 414]

De Méré va obtindre així que si $n_0 = 4$, $N_0 = 6$ i $N_1 = 36$, llavors $n_1 = 24$ i va assumir que aquesta proposició era exacta. 60 anys més tard, aquest problema va ser investigat per de Moivre en el seu tractat “Doctrina de probabilitats“ on proposa:

$$n = (ln2)N = 0,69N$$

Utilitzant la fórmula ens dona $n = 0,69 \cdot 36 = 24,84$.

En general, la fórmula de de Moivre ens dona molt bons valors quan N és gran, però només és una aproximació. De Moivre va aplicar aquesta fórmula per la Royal Oaks lottery en Londres on havia 1 possibilitat de guanyar sobre 32 i d'aquesta forma, $n = 0,69 \cdot 32 = 22,08$. Actualment s'ha trobat per observacions que:

$\frac{31}{32} \cdot 22,134 > 1/2$ i $\frac{31}{32} \cdot 22,135 > 1/2$, és dir, n=22,135.

4.3 Fermat i Pascal

4.3.1 Fermat

Pierre de Fermat neix el 17 d'agost del 1601 a Bèumont de Lomanha i va ser un jurista i matemàtic occità, que sobresurt pels seus treballs matemàtics. Va estudiar a Tolouse però es trasllada a Bordeus en els anys 20, on comença a investigar seriosament les matemàtiques. Va comunicar la major part de la seva obra matemàtica en cartes a amics, sovint sense o amb poques proves dels seus teoremes, el que li dona un estatus d'"afeccionat" tot i ser reconegut. Una d'aquestes correspondències és la que es veurà més endavant. Mor el 1665 a Castres.

4.3.2 Pascal

Blaise Pascal neix a Clarmont d'Alvèrnia el 19 de juny del 1623 i va ser un filòsof, matemàtic, físic, inventor, escriptor, moralista, místic i teòleg occità. Fill d'una família noble, el seu pare (Étienne Pascal) era un magistrat que treballava com a jutge. La seva mare, Antoniette Begon, era de família d'alta burgesia i mor quan Pascal tenia tres anys. Pascal va ser un prodigi de ben petit fins el punt que a l'edat de 16 anys va publicar el Teorema de Pascal. Va ser un dels matemàtics més importants de la seva època. Mor el 1665.

4.3.3 Correspondència entre Fermat i Pascal

La correspondència entre Pascal i Fermat va ser un punt clau en el desenvolupament de la teoria de les probabilitats. Aquesta correspondència és datada el 1654 i va ser publicada el 1679 a Tolouse. Desafortunadament, no totes les cartes van sobreviure. En aquestes cartes trobem la solució de cada un del problema del repartiment del diner apostat.

El mètode de Pascal queda clar en una carta enviada a Fermat el 29 de juliol de 1654. Deia el següent:

"Aquí mostro més o menys el repartiment just de cada partida quan dos contrincants juguen, per exemple, en tres partides i cada persona ha apostat 32 pistoles (moneda italiana de l'època).

Suposem que el primer jugador ha guanyat dues partides i l'altre una. Ara es juga una partida més. Les condicions són les següents: Si el primer jugador guanya es queda amb tota la aposta(64 pistoles) mentre que si el segon jugador guanya queden empatats a 2 partides guanyades cadascú i s'emporten cada un la meitat de la aposta.

Llavors consideri, senyor, si el primer jugador guanya, s'emporta 64 pistoles mentre que si perd s'emporta 32. Per tant, si no es volen arriscar en una partida més i volen separar el premi, el primer jugador ha de dir: "És segur que al menys guanyaré 32 pistoles encara que perdi. Però si guanyo la partida a més m'emportaré les altres 32. Com les probabilitats de guanyar la següent partida són meitat i meitat, dividim-nos aquestes 32 pistoles en joc a meitat i meitat cadascú." " [5, pàg 231]

Per tant, el primer jugador hauria de rebre 48 pistoles mentre que el segon quedaria amb 16. En la mateixa carta Pascal explica una altra situació: En aquest cas, el primer jugador ha guanyat 2 partides i el segon cap. Pascal escriu que el primer jugador hauria de proposar el següent:

“Si guanyo, rebré 64 espases. Si perdo, 48 seran legítimament meus. Per tant, em quedo amb 48 pistoles i ens dividim les 16 pistoles restants meitat i meitat“. [5, pàg 232]

El primer jugador es quedaria amb 56 pistoles mentre que el segon quedaria amb 8.

Pascal exposa un tercer cas:

“Suposem ara que el primer jugador ha guanyat una partida i el segon cap. Vostè pot veure senyor, que si el primer comença una nova partida, les condicions seran tals que si guanya el primer jugador s'emportaria justament 56 pistoles al anar 2 a 0, mentre que si perd, els dos s'emportarien 32 pistoles, al haver empat. Per tant ha de proposar: “Si no vols jugar més, dóna'm 32 pistoles que guanyaré si o si i repartim-nos la resta de la aposta fins les 54 pistoles en meitat i meitat. És dir, de 54-32=24 pistoles 12 per mí i 12 per tú. Per tant jo m'emportaria 44 espases“ “. [5, pàg 232]

Pascal suggereix per tant repartir l'aposta segons les probabilitats de guanyar si el joc continua. La solució de Pascal és enginyós però molt difícil d'aplicar per casos més complicats.

Per contra, el mètode de Fermat es pot establir a partir d'una carta de Pascal a Fermat del 24 d'Agost del 1654. La carta original on Fermat descriu la seva solució no ha sobreviscut. El problema de Fermat era el següent:

“Si dos jugadors, jugant varies partides es troben en la situació de que el primer jugador necessita dues partides per guanyar i el segon en necessita tres, com es repartiria justament la aposta feta? “ [5, pàg 239]

L'argument de Fermat és de següent: La partida pot continuar com a molt per 4 partides més. Els possibles resultats són els següents:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-
+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	-
+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-
+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-

Dels 16 possibles resultats, 11 (els primers 11) són favorables al primer jugador per guanyar l'aposta, mentre que els 5 restants són favorables pel segon jugador.

Per tant, 11/16 de l'aposta hauria de ser pel primer jugador mentre que 5/16 de l'aposta hauria de ser pel segon jugador. Per tant, Fermat proposa dividir l'aposta en relació a les probabilitats de guanyar el joc sencer (i emportar-se l'aposta sencera). Encara i donar solucions originals a aquests problemes, en aquells temps no es va arribar a donar un mètode general.

El 1653 Pascal informa als seus amics sobre el seu manuscrit “El triangle aritmètic“. Aquest treball es publica després de la seva mort, el 1655 sota el títol de “Tracté du triangle arithmétique“. En aquest tractat es dona una exposició de les propietats i relacions entre termes de progressions i els coeficients binomials, amb demostracions apropiades.

En una secció del llibre anomenat “Ús del triangle aritmètic per determinar el nombre de partides necessàries entre dos jugadors que juguen una quantitat gran de partides“ Pascal aplica el triangle aritmètic (anomenat més tard triangle de Pascal) per solucionar diversos jocs relacionats amb el càlcul de probabilitats.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	
1	3	6	10	15	21	28	36	...		
1	4	10	20	35	56	84	...			
1	5	15	35	70	126	...				
1	6	21	56	126	...					
1	7	28	84	...						
1	8	36	...							
1	9	...								
1	...									

En aquesta taula apareixen els coeficients de la expansió $(a+b)^n$ per n=1,2,... La primera fila i la primera columna s'omplen d'uns i la resta de xifres es calculen sumant el nombre de la xifra a sobre i el de la esquerra.

Com ja hem vist anteriorment, aquests nombres ja els utilitzaven Tartaglia i Stifel entre altres.

Si utilitzem el símbol $(r)_k$ per denotar el nombre de la columna r i la fila k, llavors, la formula per construir la taula de Pascal és:

- $(r)_k + (r-1)_k$ on $(r)_k = \binom{r+k-2}{k-1}$

Com a corol·lari Pascal escriu que qualsevol triangle aritmètic els nombres que estan a la mateixa distancia del terme de la diagonal principal sempre seran iguals, és dir, $(r)_k = (k)_r$. A més, Pascal diu que una fila i la columna del mateix índex de la fila són iguals. És dir:

- $(r)_k = \binom{r+k-2}{k-1}$
- $\binom{r+k-2}{k-1} = \binom{r+k-3}{k-1} + \binom{r+k-3}{k-2}$

Utilitzant el triangle, Pascal resol el "problema dels punts" (el problema del repartiment de les apostes) en una forma general. El mètode de la seva solució és: Primerament el nombre de punts que cada jugador necessita per guanyar s'anoten (suposem que el jugador A ha de guanyar encara n partides i el jugador B m). Es sumen els dos termes i es busca la diagonal que contingui aquesta quantitat de termes. Un cop fet, començant pel nombre 1, es sumen els primers m nombres per calcular la quantitat de resultats favorables pel primer jugador. Es sumen els n nombres restants per calcular els possibles resultats favorables al jugador B. D'aquesta forma, el premi s'hauria de repartir en un rati entre aquests dos resultats.

Exemple 4.6. El jugador A li queden 3 partides per guanyar i al jugador B li en queden 5.

Per tant tenim n=3, m=5, n+m=3+5=8.

La diagonal amb 8 xifres és la 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Per tant, el jugador A té 1+7+21+35+35=99 possibles resultats favorables mentre que el jugador B en té 21+7+1=29. Per tant el premi s'hauria de repartir en un rati de 99:29.

Observem que aquestes diagonals ens donen els nombres combinatoris sobre una xifra donada. Per exemple, la vuitena diagonal, utilitzada a l'exemple anterior, representa les diferents combinatòries sobre 7 elements en el següent ordre:

- $C_7^0 = 1, C_7^1 = 7, C_7^2 = 21, C_7^3 = 35, C_4^7 = 35, C_5^7 = 21, C_7^6 = 7, C_7^7 = 1$

De forma que els possibles resultats favorables per A són:

- C_7^0 on guanya 7 partides i no en perd cap.
- C_7^1 on guanya 6 partides i en perd 1.
- C_7^2 on guanya 5 partides i en perd 2.
- C_7^3 on guanya 4 partides i en perd 3.
- C_7^4 on guanya 3 partides i en perd 4.

i per tant té $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 = 1 + 7 + 21 + 35 + 35 = 99$ resultats favorables, que és el càlcul que havíem fet.

El nombre total de possibles resultats és $2^7 = 128$, per tant, el jugador A s'hauria d'emportar 99/128 parts de l'aposta total i el jugador B 29/128. És dir, un rati de 99:29. #

Es pot escriure la fórmula de Pascal de la següent forma:

Si a un jugador A li queden m partides per guanyar i a un jugador B li en queden n:
$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{m+n-1}{0}+\binom{m+n-1}{1}+...+\binom{m+n-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{0}+\binom{m+n-1}{1}+...+\binom{m+n-1}{m-1}}$

Veiem que Pascal va obtenir dues solucions diferents per el problema de les apostes: un per un cas particular i una solució pel cas general.

En una carta escrita per Pascal el 27 d'octubre de 1654, diu que considera que el mètode de Fermat i el seu són diferents, encara que posteriorment veiem que essencialment, són el mateix mètode, només que Pascal utilitzava el seu triangle aritmètic per calcular el nombre de resultats i Fermat comptava directament el nombre de resultats favorables.

4.4 Christiaan Huygens

El 1655, Christian Huygens(1629-1695) visita França, on coneix diversos científics. Estava molt impressionat amb els problemes investigats per Fermat i Pascal, així com en el problema de la repartició de les apostes. En el seu retorn a Holanda a finals del 1655 treballa en solucionar aquests problemes (a França li havien ensenyat els problemes, però no les solucions trobades per Fermat i Pascal) que deriva en un tractat anomenat "De Rationiniis in Ludo Aleae" (Sobre jocs de daus) el qual es publica com a apèndix a un volum titulat "Exercitationes Mathematicae" (Estudis Matemàtics), el qual es publica el 1657.

4.4.1 De Rationiniis in Ludo Aleae

En primer lloc, com a pròleg, es presenta una carta datada el 27 d'Abril de 1657 enviada per ell a van Schooten, on diu així:

"M'agradaria creure que considerant atentament aquests conceptes, el lector observarà que estem treballant no només amb jocs d'apostes sinó en els fonaments d'una nova teoria profunda i interessant."

En la mateixa carta Huygens explica que no se li ha d'atribuir l'invenció d'aquests càlculs, doncs alguns dels millors Matemàtics de França portaven temps treballant en la qüestió. Però aquests matemàtics es reptaven amb problemes difícils i Huygens afirma haver anat més a fons i començar amb nocions més bàsiques per trobar resultats que en moltes ocasions no difereixen dels francesos.

El tractat de Huygens va ser molt ben rebut pels matemàtics contemporanis i fins al segle XVIII va servir com a introducció a la teoria de les probabilitats.

Després del pròleg, es presenten 14 proposicions:

Proposició 4.7. *(Prop I) Si les possibilitats de que surtin a i b són iguals, la seva esperança serà* $\frac{a+b}{2}$.

Proposició 4.8. *(Prop II) Si les possibilitats de que surtin a, b i c són iguals, la seva esperança serà* $\frac{a+b+c}{3}$.

Proposició 4.9. *(Prop III) Si hi ha p possibilitats de que surti a, i q possibilitats de que surti b, cada possibilitat amb la mateixa probabilitat, la esperança matemàtica és* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Proposició 4.10. *(Prop IV: El problema de la divisió d'apostes). Suposem que s'accepta jugar una partida on el que guanya primer 3 rondes s'emporta tota l'aposta. Suposem que, quan he guanyat 2 rondes i l'oponent 1, hem de deixar de jugar. Com es reparteix l'aposta?*

Solució: Primer s'observa que el joc és equivalent a una partida de 20 rondes, on jo he guanyat 19 rondes i l'oponent 18, doncs l'important és que en ambdós casos a mi em queda una partida per guanyar i a l'oponent dues. Per calcular la proporció de repartiment de l'aposta hauríem de considerar que passaria si continuéssim amb el joc. Si s'accepta continuar i guanyo la ronda, guanyo l'aposta (que anomenem a). Però si l'oponent guanya la primera ronda, les nostres possibilitats de guanyar l'aposta serien ara iguals doncs als dos ens quedaria guanyar una ronda. Per tant, ambdós tindríem dret a $\frac{1}{2}a$. Com tinc la mateixa probabilitat de guanyar la primera (a) i la segona ronda ($\frac{1}{2}a$), aplicant la proposició 8.2, l'esperança matemàtica seria $\frac{a+\frac{1}{2}a}{2} = \frac{3}{4}a$ i per tant el meu oponent es quedaria amb $\frac{1}{4}a$. #

Les següents proposicions utilitzen mètodes anàlegs per solucionar-los.

Proposició 4.11. *(Prop V) Suposem que em queda una ronda per guanyar i a l'oponent tres. Com hauríem de repartir l'aposta?*

Resposta: $\frac{7}{8}a$ *per mi i* $\frac{1}{8}a$ *pel contrincant.*

Proposició 4.12. *(Prop VI) I suposant que em queden 2 rondes i al meu oponent 3?*

Resposta: $\frac{11}{16}a$ *per mi i* $\frac{5}{16}a$ *pel contrincant.*

Proposició 4.13. *(Prop VII) I suposant que em queden 2 rondes i al meu oponent 4?*

Resposta: $\frac{13}{16}a$ *per mi i* $\frac{3}{16}a$ *pel contrincant.*

Proposició 4.14. *(Prop VIII) Suposem ara que juguem tres jugadors. Als dos primers jugadors els queda 1 ronda per guanyar i a l'altre jugador 2 rondes. Com repartiríem l'aposta?*

Resposta: $\frac{4}{9}a$ *per cada un dels dos primers jugadors i* $\frac{1}{9}a$ *per l'altre.*

Donada una solució detallada d'aquests problemes, Huygens suggereix el següent:

Proposició 4.15. *(Prop IX) Per calcular la proporció de l'aposta que s'ha de donar a cada jugador s'ha de considerar el que deu cada jugador en el cas de que un hagi guanyat la següent partida. Aquestes parts s'haurien de sumar i posteriorment s'hauria de dividir la suma total entre el nombre de jugadors. Primer s'haurien d'investigar els casos més simples, de forma que un podria calcular qualsevol cas donat una taula d'infinits altres casos.*

Seguidament, dona la taula que menciona:

Nombre de punts restants	1,1,2	1,2,2	1,1,3	1,2,3	1,1,4	1,1,5	1,2,4	1,2,5
Part de l'aposta per cada jugador	4,4,1 / 9	17,5,5 / 27	13,13,1 / 27	19,6,1 / 27	40,40,1 / 81	121,121,1 / 243	178,58,7 / 243	542,179,8 / 729

La taula continua fins el cas de faltar 2,3,5 rondes on la part d'aposta corresponent és 1433/2187, 635/2187, 119/2187.

La solució de Huygens al problema del repartiment de l'aposta és correcte. La divisió de l'aposta segons la probabilitat d'emportar-te tota l'aposta.

Proposició 4.16. *(Prop X) Trobar quantes vegades hauríem de llançar un dau per a que surti al menys un 6.*

Per solucionar-ho, Huygens va calculant per cada tirada quines són les probabilitats. La taula resultant que obté és la següent:

Nº llançaments	Probabilitats de guanyar vs perdre
1	1 a 5
2	11 a 25
3	91 a 125
4	671 a 625
5	4651 a 3125
6	31031 a 15625

on es veu que a partir de la quarta tirada es tenen les probabilitats a favor.

Proposició 4.17. *(Prop XI) Trobar quantes vegades hauríem de llançar dos daus per treure 12 punts. Cal remarcar que per accelerar càlculs fa alguns salts.*

Resol aquesta proposició exactament de la mateixa manera que l'anterior i treu que es necessiten 25 tirades.

Proposició 4.18. *(Prop XII) Trobar quants daus s'han de tirar per treure mínim dos sisos.*

Per resoldre aquesta proposició, inicialment considera les probabilitats de treure dos sisos amb dos daus, és dir, 1/36. A partir d'aquesta probabilitat, afageix un dau més per llançar i argumenta que aquest dau podria donar un sis i llavors necessitariem que un dels dos daus restants toqués un sis, que, com hem calculat en la proposició X, és 11/36. Si pel contrari, no toca un sis, necessitariem que els altres daus fossin sisos i tenim 1/36 de probabilitat. Abans de la tirada tindrà una possiblitat de necessitar 11/36 per cinc de necessitar 1/36. Aplicant la Prop III, obtenim que la probabilitat de treure dos sisos amb tres daus serà 16/216. Diu a més que si seguim calculant d'aquesta forma arribem a veure que necessitem 10 daus.

Proposició 4.19. *(Prop XIII) Si aposto amb una altra persona que si tirant dos daus apareix el 7 guanyo jo i si apareix el 10 guanya ell, com sería el repartiment just de les apostes?*

Proposició 4.20. *(Prop XIV) Si aposto amb una altra persona jugar com a molt tres rondes de llençades d'un parell de daus i que si surt un 7 punts en la meva tirada, guanyo jo i si surten 10 punts en la seva, guanya ell. Si comença tirant ell, quina és la proporció de les nostres probabilitats?*

El llibre de Huygens va ser el llibre estàndard de la teoria de les probabilitats abans de sortir "l'Ars Conjectandi" de James Bernoulli. A més, Huygens va ser el primer en introduir la noció d'esperança i com aplicar-la. Aquest tractat va ser utilitzat per problemes comercials i industrials per determinar preus, beneficis, etc. Amb el desenvolupament de la industria van cobrar importància les transaccions financeres. Holanda va ser pionera en el desenvolupament del comerç i dels processos comptables dels bancs.

La terminologia de Huygens va ser influenciada per l'argot comercial. Per exemple, l'esperança el considerava com "el preu just que acceptaria per cedir en una partida". No anomena l'esperança com "esperança" sinó com a "el valor de la probabilitat". El terme "esperança" apareix per primer cop en la traducció de van Schooten.

A més cal remarcar que Huygens no va utilitzar combinatòria i per tant les seves solucions eren complicades. Els seus mètodes eren igualment difícils d'aplicar per solucionar problemes en una forma general. I no apareixen solucions d'aquest caire en el seu tractat.

Al final del tractat Huygens proposa cinc problemes pel lector sense solució (dels quals dos van ser suggerits per Fermat i un per Pascal). Les solucions van ser publicades per ell vuit anys després, el 1665. Aquestes solucions els dona sense explicació. Només amb càlculs matemàtics corresponents.

Els problemes eren els següents:

Problema 4.21. A i B juguen amb dos daus amb la condició de que A guanya si li surt un 6 i que B guanya si li surt un 7. A té primerament una tirada. A continuació B té dues tirades i així segueixen alternant dues tirades fins que un guanyi. Quins són els ratis de les seves probabilitats de guanyar?

Problema 4.22. Tres jugadors A, B i C tenen dotze boles, de les quals quatre són blanques i vuit negres. S'agafa una bola aleatòria amb els ulls tapats i A és el primer en agafar, B el segon i C el tercer. Guanya el primer en agafar una bola blanca. Quin és el rati de les seves probabilitats de guanyar?

Problema 4.23. A aposta a B que, donades 40 cartes dels quals hi ha 4 colors i 10 cartes de cada color, agafarà una carta de cada color. Quins són els ratis de les seves probabilitats de guanyar?

Problema 4.24. S'agafen dotze boles, quatre blanques i vuit negres. A juga contra B i agafa set boles amb els ulls tapats de forma aleatòria. Per guanyar ha d'obtenir tres boles blanques. Compara les probabilitats d'A i de B per guanyar.

Problema 4.25. A i B agafen dotze fitxes i juguen amb tres daus amb la condició de que si surt un onze, A li dona a B una fitxa i que si surt un catorze, B li dona una fitxa a A. Guanya el primer en obtenir totes les fitxes. Quins són els ratis de les seves probabilitats de guanyar?

Huygens aclareix al final del llibre que no presenta les solucions a aquests problemes perquè és massa difícil raonar-los.

Tot i això en diversos documents posteriors hi trobem les solucions que dona, tal i com haviem dit anteriorment. Aquestes són les seves resolucions.

Solució Problema 4.21: La solució d'aquest problema per part de Huygens apareix en una carta enviada a Carcavy el 9 de juny de 1656. Huygens observa que aquest problema té una periocitat corresponent a ABBA. Degut a això, afirma que és suficient amb buscar les esperances pel jugador A en les quatre primeres rondes, les quals anomenarem e_1, e_2, e_3, e_4.

Un cop plantejat el problema, diu que hi ha un total de 5 casos com espoden treure 6 punts i 6 casos de com es poden treure 7 punts.

Argumenta per rondes:

Ronda 1 : Abans de començar a jugar, el jugador A tè 5 possibles tirades per guanyar i 31 tirades que faràn passar a la primera tirada de B. Per tant, la seva esperança de guanyar abans de començar la partida serà $e_1 = \frac{5}{36}a + \frac{31}{36}e_2$ on e_2 represnta l'esperança de guanyar un cop ha passat la primera ronda.

Ronda 2 : La segona esperança a calcular és e_2 corresponent a l'esperança del jugador A de guanyar la partida un cop jugada la primera ronda. En aquest cas sabem que A té 6 possiblitats de perdre l'aposta (és dir, que B guanyi) i 30 possibles tirades de que B passi a la seva segona tirada. Per tant, l'esperança serà $e_2 = \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{30}{36}e_3$ on e_3 represnta l'esperança de guanyar un cop ha passat la segona ronda.

Ronda 3 : S'utilitza mateix argument que la segona ronda (doncs és el mateix cas que la ronda anterior amb la petita salvetat de que la següent ronda en cas de seguir la partida no és igual) per calcular e_3. D'aquesta forma obtenim que $e_3 = \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{30}{36}e_4$ on e_4 represnta l'esperança de guanyar un cop ha passat la tercera ronda.

Ronda 4 : Aquest és un cas similar a la Ronda 1 amb la salvetat que la ronda següent en cas de contínuar la partida serà diferent (de fet, si no acaba en aquesta partida, la següent ronda ja sería el mateix cas que la Ronda 1). Per això tenim que la esperança del jugador A un cop jugades les tres primeres rondes és $e_4 = \frac{5}{36}a + \frac{31}{36}e_1$.

D'aquesta forma, utilitzant la substitució s'obté $e_1 = \frac{10355}{22631}a$ i per tant l'esperança del segon jugador serà $\frac{12276}{22631}a$. Per tant, el rati de les probabilitats és 10355:12276 a favor del jugador B. #

<u>Solució Problema 4.22</u>: La solució d'aquest problema es troba inclós en l'apèndix II d'una edició del segle XIX del seu tractat per part de la Acadèmia Holandesa de les Ciències, els quals treuen la solució de diverses notes i papers solts de Huygens. Encara que el problema es pot interpretar de diverses maneres, Huygens el referia com un problema d'extraccions amb reposició. És el primer problema conegut d'aquest caire. En aquest problema observa que existeix també una periocitat ABC. Anomena x, y, z les esperances dels jugadors abans de començar a jugar i anomena "a" a l'aposta. Soluciona aquest problema d'una forma similar a l'anterior.

1. La primera extracció serà del jugador A. Té 4 possibles resultats a favor de conseguir l'aposta a i 8 possiblitats de que passi el torn al jugador B i per tant es trobarà en la situació d'haver d'esperar 2 torns, és dir, la situació del jugador C abans de començar la partida, el qual té esperança z. Per tant, aplicant la Proposició 4.9, calcula que $x = \frac{4a+8z}{12}$.
2. Pel jugador B, l'esperança es construeix de la següent forma. Hi ha 4 possibles tirades de que el jugador A hagi guanyat en la primera partida i per tant, emportar-se 0 de premi. Per altra banda, hi ha 8 possiblitats de que li toqui el turn i trobar-se en la situació de A al començar la partida, és dir, tenir esperança x. Per tant, aplicant la Proposició 4.9, calcula que $y = \frac{4 \cdot 0+8x}{12}$.
3. Pel jugador C, funciona de forma similar. Hi ha 4 possiblitats de perdre l'aposta quan juga el jugador A i té 8 possiblitats de que li arribi el torn a B, on C es trobaria en la mateixa situació que B al començar la partida, és dir, tenir esperança y. Per tant, aplicant la Proposició 4.9, calcula que $y = \frac{4 \cdot 0+8y}{12}$.

D'aquesta forma, resolent les tres equacions obté que $x = \frac{9}{19}$, $y = \frac{6}{19}$ i $z = \frac{4}{19}$ i per tant el rati de possiblitats de guanyar seràn 9:6:4. #

<u>Solució Problema 4.23</u>: En el cas del tercer problema, Huygens dona la resposta en la carta escrita a Carcavy el 6 de juliol de 1656, però no diu com ho soluciona. Diu que A té 1000 possibilitats de guanyar pels 8139 de B. (David en [5] remarca que la solució correcta és 1000 a 9139). #

<u>Solució Problema 4.24</u>: A l'igual que el problema 4,22, la solució d'aquest problema es troba en l'esmentat apèndix II. En aquest cas cal esmentar que Huygens considera les extraccions sense reposar.

Considera la situació del joc de la següent manera: Al principi hi ha 4 boles blanques i 8 de negres. Suposem l'instant en que s'han extret b boles blanques i n negres. Ens quedaran per tant 4-b boles blanques i 8-n boles negres en la caixa (en total 12-b-n boles). Sigui e(b,n) l'esperança del jugador que extreu en aquest instant, en la següent extracció hi ha 4-b possiblitats d'extreure una blanca (en el qual cas passariem a la situació e(b+1,n)) i 8-n possiblitats d'extreure una negra (per la qual passariem al cas e(b,n+1)). Per tant, aplicant la proposició 4.9, tenim que:

$$e(b,n) = \frac{(4-b) \cdot e(b+1,n)+(8-n) \cdot e(b,n+1)}{12-b-n} \text{ on } 0 \le b \le 4 \text{ i } 0 \le b+n \le 7$$

Suposant que ja hem agafat 3 blanques i 3 negres, si el jugador A extreu una negra tindrà 3 blanques i 4 negres (e(3,4)) i guanya l'aposta a. En cas d'agafar una bola blanca, perdrà l'aposta. Per tant:

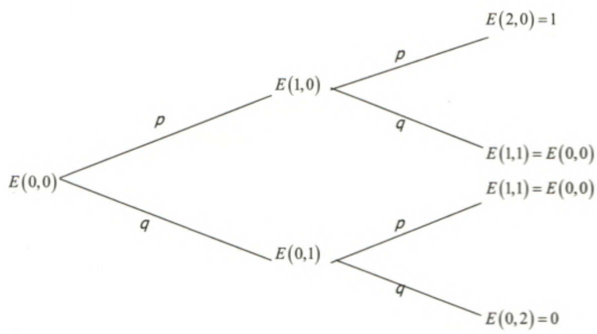
$$e(3,3) = \frac{1 \cdot e(4,3)+(5) \cdot e(3,4)}{6} = \frac{1 \cdot 0+5 \cdot a}{6} = \frac{5}{6}a$$

Utilitzant aquest argument recursivament arriba fins e(0,0)=$\frac{35}{99}a$ i per tant conclou que el rati de possiblitats de guanyar és 35:64 a favor del jugador B. #

Solució Problema 4.25: La resolució d'aquest problema també es troba entre els papers de Huygens en 1676 i inclosa en l'apèndix de la edició de les seves obres. Ho resol així:

Les probabilitats de guanyar una fitxa són $\frac{15}{42} = \frac{5}{14}$ pel jugador A i $\frac{27}{42} = \frac{9}{14}$ pel jugador B. Suposem que E(a,b) és la probabilitat de A que té A de guanyar quan A té a punts i B en té b. El problema consisteix en trobar E(0,0).

Huygens comença analitzant el cas simple de que el joc acaba quan un dels dos jugadors arriba a 2 punts. Dona el següent diagrama:



Aquí es pren el total apostat com 1. De l'esquema treu les següents igualtats:

$$E(0,0) = pE(1,0) + qE(0,1) = p(pE(2,0) + qE(1,1)) + q(pE(1,1) + qE(0,2)) = \\ p(p + qE(0,0)) + q(pE(0,0) + q \cdot 0) = p^2 + 2pqE(0,0).$$

Tenint en compte que p+q=1, aïllant E(0,0) s'obté $E(0,0) = \frac{p^2}{P^2+q^2}$ i per tant les probabilitats de A respecte B estan en un rati p^2:q^2.

Després Huygens estudia el cas on el guanyador ha d'aconseguir quatre punts de ventatge.Només soluciona els casos (4,0), (2,0), (0,0), (0,2) i (0,4) i senyala que l'arbre de successos serà similar al primer però amb totes les probabilitats al quadrat. La justificació d'ometre passos intermitjos és que per passar de (0,0) a (4,0) s'ha de passar per (2,0) per exemple. La solució que dona per tant és $E(0,0) = \frac{p^4}{P^4+q^4}$ i el rati entre A i B serà p^4:q^4.

Diu que si fós necessària una ventatja de 8 punts s'aplicaria de nou l'argument anterior i tindriem que $E(0,0) = \frac{p^8}{P^8+q^8}$.

Si es necessita una ventatja de 3 punts per guanyar, es fa el pas de (0,0) a (1,0) amb probabilitat p i després el pas de (1,0) a (3,0) amb probabilitat p^2 i de forma similar en la resta del diagrama, el que el porta a les següents equacions:

- $E(1,0) = \frac{p^2 E(3,0)+q^2 E(1,2)}{p^2+q^2} = \frac{p^2+q^2 E(0,1)}{p^2+q^2}$

- $E(0,1) = \frac{p^2E(2,1)+q^2E(0,3)}{p^2+q^2} = \frac{p^2E(1,0)}{p^2+q^2}$
- $E(0,0) = pE(1,0) + qE(0,1)$

amb la solució $E(0,0) = \frac{p^3}{P^3+q^3}$ d'on generalitza per $E(0,0) = \frac{p^6}{P^6+q^6}$.

Tots els casos vistos fins ara requereixen la solució de tres equacions. Huygens afirma que per el cas de necessitar una ventatja de 5 punts, farien falta moltes més equacions però que la solució es podria trobar com pel cas n=3. Finalment Huygens afirma que en general, el rati de les esperances de A i B és p^n:q^n i per tant la resposta final del problema serà el rati 5^{12}:9^{12} per A respecte B. És dir, A té 244.140.625 possiblitats de guanyar pels 282.429.536.481 de B.#

El 1687, deu anys després de la mort de Baruch Spinoza apareix a La Haia un assaig de vint pàgines anomenat "Steelkonsige Reeckening van den Regenboog" i un pamflet de vuit pàgines anomenat "Mathematical Probability". Aquests treballs tornen a publicar-se el 1884 per D. Bierens de Haan amb el nom de "Dos treballs de Benedict Spinoza".

En aquest treball se li atribueix a Spinoza l'autoria dels volums. Uns anys més tard Gebhardt acredita l'autoria de Spinoza deixant poc dubte a que no fós ell l'autor. En aquest pamflet, apareix el primer problema de Huygens solucionat.

Spinoza conclou que el rati serà de 10.355 possibilitats per A per 12.276 de B.

No es té constància de cap intent de resolució dels demés problemes plantejats per Huygens per part de Spinoza.

Montmort també és un matemàtic que treballa en la resolució d'aquests problemes. Es mostrarà més endevant les solucions que dona.

Altres contribucions de Huygens són:

- El 16 de març de 1662, el president de la London Royal Society demana a Huygens que revisés un tractat de John Graunt sobre varis problemes de estadístiques vitals. El 9 de juny de 1662 Huygens respón amb una valoració molt bona del tractat.
- El 1669, basat en el treball de Graunt, Huygens construeix una corba de mortalitat i defineix les nocions de mitjana i esperança de vida. Huygens va ser el primer en aplicar les probabilitats en les estadístiques demogràfiques.
- El 1671, Un altre matemàtic holandés, van Hudden(1623-1704), qui servia a l'alcalde d'Amsterdam, planteja a Huygens diversos problemes relacionats amb els impostos anuals. Van Hudden va col·laborar en un projecte que portava Johan de Witt. El 3 d'octubre de 1671 Huygens dona una bona valoració del treball.

Veiem d'aquesta forma que durant el segle XVII molts problemes probabilístics van ser resolts. Un d'ells era l'adició i la multiplicació de probabilitats. La noció de probabilitat comença a tenir rellevància. S'introdueix la noció d'esperança, una de les nocions més importants de les probabilitats. Les probabilitats fan la seva primera aparició com a aplicació d'estadística, física i astronomia.

Tot i això, com a disciplina matemàtica, encara estava iniciant. Només s'havien resolt qüestions i proposicions individuals, però l'interès per aquest camp creix durant aquest segle.

4.5 James Bernoulli

James Bernoulli(1654-1705) va néixer en una família de famosos matemàtics suïssos. Ell mateix també ho va ser ocupant una plaça a la Universitat de Basilea des del 1687 fins el 1699 i a més va ser membre de l'Acadèmia de Ciències de París.

El 1713 es publica el seu llibre "Ars Conjectandi"(L'art de Conjecturar), pel seu nebot, vuit anys després de la seva mort. Aquest llibre que va tenir una gran rellevància en la història de les probabilitats. Es pot dir que gràcies a les contribucions de Bernoulli, les probabilitats van poder rebre l'estatus de ciència.

En aquest llibre es demostra rigorosament el primer teorema del límit.

4.5.1 Ars Conjectandi. Part 1

La primera part del llibre consisteix en una còpia del "De Ratiociniis in Ludo Alae" de Huygens, afegint comentaris en totes les proposicions excepte d'un. Aquesta part del llibre es titulat "Un tractat de possibles càlculs de jocs d'atzar de Christian Huygens amb comentaris de J. Bernoulli".

Els comentaris més importants són els següents:

Proposició I: "L'autor ens presenta en dues proposicions els principis bàsics de l'art de conjecturar. És molt important que aquest principi s'entengui. Intentaré per tant fer una demostració utilitzant càlculs més comuns i comprensibles.

La paraula "esperança" no apareix aquí en el seu context usual d'"esperar"(que referiria al resultat més favorable) tot i que el resultat menys favorable també podria ocórrer. Hauríem d'entendre aquesta esperança com l'esperança de treure el millor resultat disminuït per la por de treure el pitjor. Per tant, el valor d'esperança sempre es trobarà entre el millor i el pitjor resultat."

Proposició III: "Sobre aquesta proposició... és evident que existeix una similaritat amb la propietat associativa de l'aritmètica, que consisteix en trobar el valor d'una barreja composta de quantitats definides de coses diferents amb diferents valors. O més aviat que els càlculs són absolutament iguals. Similarment al fet que la suma dels productes de les quantitats de les substàncies de la barreja amb els seus valors corresponents dividit per la suma de les quantitats que produeixen el resultat necessàri es troba entre el els valors extrems; de la mateixa manera, la suma dels productes pels resultats favorables possibles dividits pel nombre de resultats possibles ens dona l'esperança, la qual està entre els guanys més petits possibles i els més grans possibles." [29]

Proposició IV: "Quan un vol computar percentatges, un hauria de mirar les partides que queden per fer i no les ja hi ha fetes."

Seguidament Bernoulli explica l'aplicació de la propietat d'adició per probabilitats. En particular la no aplicabilitat en el cas de conjunts no disjunts. "Si a dues persones, condemnades a morir, se'ls ordena tirar un dau sota la condició que el que aconsegueixi el nombre de punts més baix serà executat mentre que l'altre serà perdonat. Si empaten, els dos seran perdonats. Trobem així que un jugador té 7/12 de probabilitat de sobreviure però no és cert que l'altre tingui 5/12, doncs tots dos tenen la mateixa probabilitat. Per tant, entre els dos hi ha una probabilitat de 7/6 de que sobreviure un, és dir, més possibilitats dels totals. La raó d'això és que no hi ha cap resultat possible on els dos morin mentre que si existeix un possible resultat on tots dos són perdonats." [29]

Com a adició a les proposicions de Huygens sobre el problema de reparticions d'apostes, Bernoulli construeix taules que proporcionen les probabilitats de dos jugadors i el rati d'aposta entre dos jugadors sota diverses condicions.

Proposició IX: Aquí Bernoulli discuteix amb detall sobre els diferents llançaments que es poden fer amb dos o més daus i el nombre de casos favorables a cada resultat, donant una taula equivalent al teorema següent:

El nombre de possibles resultats d'obtenir m punts llençant n daus és igual al coeficient de x^m en l'expansió $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$.

Proposició XI: Bernoulli diu: "L'autor diu que un té avantatge per guanyar si s'aposta treure un sis en quatre tirades. Ara bé, diu que un no es pot comprometre, sense esperar pèrdues, a llençar dos sisos en 24 llançaments de dos daus. Això pot semblar absurd per moltes persones, doncs existeix la mateixa relació entre 24 tirades i 36 possibles resultats que amb 4 tirades i 6 possibles resultats.

Proposició XII: En aquest comentari Bernoulli obté el resultat de la distribució binomial. Estableix que la probabilitat de que un esdeveniment A amb probabilitat p passi m vegades en n tirades és:

$$P_{m,n} = \binom{m}{n} \cdot p^m \cdot q^{n-m} \text{ on q=1-p;}$$

4.5.2 Ars Conjectandi. Part 2

La segona part de l'"Ars Conjectandi" titulat "La doctrina de les Permutacions i Combinacions" consisteix en el següents 9 capítols:

1. Permutacions.
2. Combinacions sense repeticions.
3. Nombre de combinacions (sense repeticions) d'una classe particular; nombres figurats i les seves propietats.
4. Nombre de combinacions (sense repeticions) d'una classe particular: una xifra que indica quants cops passa un esdeveniment separadament o en combinació amb altres.
5. Nombre de combinacions amb repeticions.
6. Nombre de combinacions amb repeticions restringides.
7. Variacions sense repeticions.
8. Variacions amb repeticions.
9. Nombre de variacions amb repeticions restringides.

La teoria de la probabilitat requeria en aquells temps de la combinatòria, doncs era el seu eix central abans de l'entrada dels càlculs infinitesimals. Bernoulli indica que estava familiaritzat amb la teoria combinatòria portada per autors com Leibnitz, Schooten o Wallis.

Suplementa les investigacions d'aquests autors amb alguns nous resultats com els nombres figurats. Bernoulli observa que no hi havia cap exposició completa de combinatòries i per això presenta tota la informació necessària detalladament i des del principi.

La teoria de combinacions, durant els segles XVI i XVII, s'utilitzava per la construcció d'anagrames(paraules amb les mateixes lletres en diferent ordre) o per fer versos Proteus(versos construïts amb paraules d'un altre vers). Els anagrames per exemple s'utilitzaven per crear pseudònims(a partir del nom real). També s'utilitzaven per ocultar un nou mètode o invenció. Les primeres pàgines d'aquesta part estan dedicades a poblemes d'aquest caire.

Capítol 1: Dedicat a la teoria de permutacions. Una permutació segons Bernoulli són variacions que mantenen el nombre d'elements però canvien les seves posicions. Distingeix els casos on tots els elements eren diferents i aquells on hi havia elements repetits. Bernoulli obté el nombre de permutacions de n elements diferents de la següent manera:

- Com qualsevol element pot aparèixer a la primera posició, tenim n possibilitats.
- Per la segona posició hi ha n-1 possiblitats, doncs una ja ha sigut assignada a la primera posició.
- Per tant, per les dues primeres posicions tenim n(n-1) possibles resultats.
- Seguint aquest tipus d'argument arribem a que el nombre de permutacions de en elements diferents és $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

Presenta una taula de permutacions fins l'ordre de n=12:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	6	24	120	720	5.040	40.320	362.880	362.880	39.916.800	47.900.160

on la columna inferior representa la permutació per n corresponent a la xifra de sobre. Encara que s'utilitzava la terminologia actual de "permutació", "combinació" i "variació", Bernoulli no utilitza cap mena de notació simbòlica per representar-los.

Per les permutacions amb repeticions, Bernoulli dona el següent resultat:

$$P_n(a_1, a_2, ..., a_k) = \frac{n!}{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k}$$

Posa com a exemple el nombre de permutacions que tenen la paraula Roma ($1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 24$), la paraula Leopoldus ($\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 2} = 90.720$) i la paraula Studiosus ($\frac{362.880}{2 \cdot 6} = 30.240$).

Capítols 2, 3, 4: Parla sobre combinacions. Una combinació segons Bernoulli, és una col·lecció d'elements dels quals s'extreu una altra quantitat d'elements i es combinen sense tenir en compte l'ordre. L'index de la classe de combinacions representa el nombre d'objectes agafats en l'extracciò. Entre les classes investigades per Bernoulli, apareix la del 0, és a dir, sense cap element. Per varis elements, Bernoulli construeix una taula de combinacions(que probablement agafa de van Schooten). Per exemple, la taula de cinc elements a, b, c , d, e és la següent:

a;

b; ab;

c; ac; bc, abc;

d; ad; bd; cd; abd; acd; bcd; abcd

e; ae; be; ce; de; abe; ace; bce; ade; bde; cde; abce; abde; acde; bcde; abcde;

Bernoulli afirma que aquesta taula es pot ampliar. Utilitzant l'inducció, Bernoulli demostra que el nombre de combinacions possibles de totes les classes és igual al producte de tants dosos com elements hi ha, menys un. El resultat seria el següent:

$$2^n - 1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$$

Com s'ha vist, aquest resultat ja apareixia entre els textos de Cardano. També apareix entre els de Leibnitz i els de Stifel.

Seguidament, presenta una taula amb el nombre de combinacions:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

on la primera columna representa el nombre total d'elements, i la primera fila, el nombre d'elements que s'agafen. Veiem que aquesta taula és el triangle de Pascal. Leibnitz presenta algunes propietats sobre aquesta taula (presento algunes d'elles):

Proposició 4.26. *(Prop 1) La segona columna comença amb un zero. La tercera amb dos. En termes generals, la columna C comença amb C-1 zeros.*

Proposició 4.27. *(Prop 4) Cada element de la taula és igual a la suma de tots els elements precedents de la columna anterior.*

Proposició 4.28. *(Prop 8) Començant pel principi, si agafem un nombre de files i els elements del mateix nombre de columnes, obtenim la següent fila sense el primer terme. Per exemple:*

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
1	3	3	1	0
1	4	6	4	1
5	10	10	5	1

Proposició 4.29. *La suma d'un cert nombre de termes (començant per algun zero) d'una mateixa columna està relacionat amb la suma del darrer terme tantes vegades com sumands haguem agafat d'aquesta columna. Si comencem la suma de termes d'una columna per l'1, en comptes d'agafar el darrer terme, s'agafa el següent terme de la columna i es suma tantes vegades com sumands haguem agafat de la columna. La relació entre els dos nombres, en ambdós casos serà 1 respecte al nombre de la columna.*

0	3	1	5	0	10	1	56
1	3	2	5	0	10	4	56
2	3	3	5	1	10	10	56
3	3	4	5	4	10	20	56
				10	10	35	56
6:12 = 1:2		10:20 = 1:2		15:60 = 1:4		70:280 = 1:4	

Bernoulli prova que la suma de n termes de la columna k, o equivalentment, el terme n+1 de la columna k+1 és igual a:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

és a dir, el nombre de combinacions de n elements agafant k alhora.

Capítols 5 i 6: En aquests capítols, Bernoulli construeix taules de combinacions. Per exemple, amb els elements a, b, c i d es poden construir les següents combinacions de classe 1, 2 i 3:

a, aa, aaa;

b, ab, bb, aab, abb, bbb;

c, ac, bc, cc, aac, abc, bbc, acc, bcc, ccc;

d, ad, bd, cd, dd, aad, abd, bbd, acd, bcd, ccd, adb bdd, cdd, ddd;

Aquesta taula es podria continuar amb classes més grans. Si escrivim en ordre el nombre d'elements en cada fila, podem observar que la classe 1 té: 1, 1, 1, 1... element; la classe 2 té: 1, 2, 3, 4,... elements; la classe 3 té 1, 3, 6, 10... elements... Si seguim escrivint la llista i sumem els resultats en una taula, obtenim una taula amb el nombre de combinacions amb repeticions, el qual coincideix amb el triangle aritmètic de Pascal.

Bernoulli observa les següents propietats per aquesta taula:

Proposició 4.30. *(Prop 1) Les columnes i les files consisteixen en els mateixos nombres.*

Proposició 4.31. *(Prop 2) La suma dels primers n termes en la columna k és igual al terme localitzat en la columna (k+1) i la fila n.*

Proposició 4.32. *(Prop 3) La suma dels primers n termes de la columna k (o fila) estan relacionats amb la suma del mateix nombre de sumands, cadascun igual al terme següent del darrer nombre amb el mateix rati que 1 està relacionat amb el nombre de columna(o fila). Per exemple:*

1		35
4		35
10		35
20		35
35:140	=	1:04

Seguidament, Bernoulli prova que la suma dels primers n termes de la columna k, o equivalentment, el nombre de combinacions amb repetició de n elements agafant k alhora és igual a:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Anomenem $a_{n,k}$ el terme en la columna k i la fila n. La suma dels primers n elements de la primera columa és igual a n/1!. Per la segona propietat, aquest nombre serà igual al terme número n de la segona columna, és dir:

$$a_{n,2} = n/1$$

A més:

$$a_{n+1,2} = \frac{n+1}{1};\ a_{n+2,2} = \frac{n+2}{1}.$$

D'aquesta forma, per la prop 4.31, obtenim: $\sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = a_{n,3}$; i per la prop 4.32 tenim:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,2} : na_{n+1,2} = 1 : 2.$$

Per tant:

$$a_{n,3} = \frac{n\cdot a_{n+1,2}}{2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Anàlogament trobem que $a_{n,4} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3!}$

La fórmula general per un n i k+1 arbitraris serà:

$$a_{n,k+1} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

Verifiquem la validesa per una n i k+2 arbitraris. Per la prop 4.31:

$$a_{n,k+2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k+1}$$

Per la prop 4.32:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k+1} : na_{n+1,k+1} = 1 : (k+1).$$

I per tant:

$$a_{n,k+2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k+1)}$$

Bernoulli va ser el primer en considerar el problema de combinacions amb repeticions restringides. Va resoldre el problema en el cas general. Construeix una taula per casos particulars i ensenya el mètode per determinar el nombre de classes.

Capítols 7 i 8

En aquests capítols Bernoulli discuteix el problema del nombre de variacions. Bernouilli es refereix a les variacions com a combinacions amb les seves permutacions.

Bernoulli troba que el nombre de variacions sense repetició de k elements d'un conjunt de n elements és igual a:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Seguidament troba que el nombre de variacions de k elements amb repeticions de m elements diferents és igual a mk. Aquests càlculs venen acompanyats de la suma de variacions de totes les classes entre 1 i k. Expressa aquest nombre com la progressió geomètrica amb rati m:

$$m + m^2 + \ldots + m^k = \frac{m \cdot (m^k - 1)}{m-1}$$

Capítol 9: L'últim capítol el dedica a les variacions amb repeticions restringides. No ho investiga en el cas general però dona alguns exemples particulars dels quals construeix una taula. Igual que amb les combinacions, sembla ser que Bernoulli és el primer en treballar en el problema de les variacions amb repetició restringida.

Considera seqüències del que anomena nombres figurats, els presenta en una taula i dona propietats d'aquests nombres. Basat en aquestes propietats, Bernoulli troba fórmules per la suma d'enters elevats fins a grau 9:

$S(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n;$

$S(n^2) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;$

$S(n^3) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{6}n;$

$S(n^4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n;$

.

.

.

$S(n^{10}) = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n;$

Les fórmules per S(n), $S(n^2)$ i $S(n^3)$ ja es coneixien en l'antiga Grècia. El de $S(n^4)$ es troba en la edat mitjana. Fermat a més tenia coneixement de la fórmula:

$$S(n^i) = \frac{1}{i+1}n^{i+1} + a_{i,1}n + a_{i,2}n^2 + ... + a_{i,i}n^i;$$

la qual és provada posteriorment per Pascal, però la determinació de $a_{i,k}$ no era coneguda per Pascal i investigadors anteriors.

Basat en la prova i error i per analogia, Bernoulli escriu sense demostració la fórmula següent:

$$S(n^i) = \frac{1}{i+1}n^{i+1} + \frac{1}{2}n^i + \frac{1}{2}C_i^1 An^{i-1} + \frac{1}{4}C_i 3Bn^{i-3} + \frac{1}{6}C_i^5 Cn^{i-5} + \frac{1}{8}C_i^7 Dn^{i-7} + ...$$

On C_n^m representa els coeficients binomials. A més observa que a partir del tercer terme, les potències van saltant de dos en dos fins al final de la fórmula.

Els nombres A, B, C, D són els anomenats nombres de Bernoulli (per Euler) que són iguals als coeficients de n en $S(n^2), S(n^4), S(n^6)...$ respectivament (A=1/6, B=-1/30, C=1/42).

4.5.3 Ars Conjectandi. Part 3

La tercera part es titula "Aplicació de la teoria de Combinacions en diferents jocs d'atzar i daus." Aquesta part consisteix en 24 problemes amb solucions detallades. Alguns d'aquests problemes són els següents:

1. Una persona posa dos pilotes en una urna(un de blanc i un de negre) i ofereix una prima a tres jugadors sota la condició que el primer jugador que tregui la pilota blanca rebrà aquesta prima, però que si cap treu la pilota blanca, quedaran sense prima. Si el jugador A roba primer, el jugador B segon i el C tercer, quines probabilitats té cada jugador?

5. A aposta amb B que de 40 cartes de quatre colors diferents, 10 de cada color, robarà quatre cartes de diferent color. Quina probabilitat de guanyar té cada jugador?

12. En una partida de tirar un dau sis vegades, un jugador aposta que el dau caurà de la següent manera: 1 punt a la primera tirada, 2 a la segona i així fins el sisè. Quina esperança té?

22. En un joc d'atzar està fet de tal forma que hi ha "a" casos diferents dels quals hi ha "b" casos d'un cert tipus i "c"=a-b casos de l'altre tipus. Titus, pagant a Gaius, rep el dret de llançar un dau diversos cops. Si aconsegueix un dels resultats continguts en el cas b, rebrà m monedes de Gaius. Per contra, si el resultat es un dels continguts en el cas c, no rebrà diners. Quina esperança de guanyar tenen Titus i Gaius?

Notem que aquest últim problema és més complex i està resolt d'una forma general.

4.5.4 Ars Conjectandi. Part 4

Les tres parts vistes fins ara van ser una gran contribució en l'àrea de la teoria de les probabilitats. Tot i això, la part més important del llibre és la quarta, la titulada "Pars Quarta, tradens usum er applicationem procedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis" (Aplicació de l'estudi previ a problemes civils, morals i econòmics).

Aquesta part conté el teorema de Bernoulli, és dir, la llei dels grans nombres en la seva forma més simple. Desafortunadament aquesta part va acabar incompleta per l'autor; el tractat acaba amb la demostració del teorema de Bernoulli. A més, tal com indica el títol, Bernoulli va considerar aplicar les probabilitats a problemes civils, socials i econòmics.

En aquesta part especialment, apareixen molts problemes filosòfics connectats amb la probabilitat. Bernoulli clarament era determinista metafísic (totes les accions humanes són ocasionats per esdeveniments que van passar anteriorment i no directament per la voluntat de l'individu). Tot i això, l'anomenat determinisme Laplacià (si una persona conegués la ubicació i el moment de cada àtom de l'univers, el seu passat i futur serien deduïbles d'aquesta informació) es troba també en la obra de Bernoulli. En la primera part d'aquest capítol escriu:

"Si una cosa destinada a passar no és segur que passi, llavors no és clar com es pot mantenir la lloació de l'omnipresència i omnipotència del Senyor... Donat les posicions d'un dau, la seva velocitat i distància del tauler, quan el dau deixa la mà del llançador, indubtablement no caurà d'una forma diferent de com cau en realitat.

Similarment, per a una composició donada de l'aire i donades la massa, posició, direcció i velocitat del vent, vapor i núvols i també les lleis de la mecànica que governen totes aquestes interaccions, el temps de demà no serà diferent del que hauria de ser. Així doncs, aquests fenòmens succeeixen amb no menys regularitat que els eclipses dels cossos celestes. Tanmateix, un eclipsi es considera com un esdeveniment regular, mentre que la caiguda d'un dau o el temps de demà es consideren esdeveniments d'atzar. La raó d'això és que els esdeveniments de la naturalesa no són suficientment coneguts. I encara que ho fossin, el nostre coneixement físic i matemàtic no és suficientment desenvolupat per calcular aquests fenòmens mentre que els principis absoluts de l'astronomia els eclipses poden ser precalculats i predits... la probabilitat depèn del nostre coneixement." [30]

El segon capítol de la "Pars Quarta", comença amb la següent definició:

"L'art de conjecturar es defineix com l'art de mesurar probabilitats de les coses, amb tanta precisió com sigui possible, per poder seguir sempre el millor camí, més satisfactori, fàcil i raonable. Tota la saviesa i prudència del filòsof consisteix només en això." [30]

Abans de començar amb la tasca principal, Bernoulli escriu: "és útil assumir certes normes generals i axiomes". Presenta nou normes:

1. No es permet conjecturar sobre coses de les quals podem tenir una certesa total.

2. No és suficient tenir en compte una o altra raó. S'han de tenir en compte totes les raons que poden ajudar en els nostres coneixements i semblin servir per probar l'assumpte. Si un de tres vaixells naufreguen, no ha d'haver necessàriament 1/3 de probabilitat que sigui cada vaixell. Hem de tenir en compte, per exemple, l'estat de cada un a la sortida per saber quin és més probable que hagi naufragat.

3. No només hem de tenir en compte les raons que parlen a favor d'una cosa sino també de les que parlen en contra, per saber quines predominen.

4. Per parlar de coses generals és suficient tenir raons universals i generals, però per conjecturar sobre coses individuals, també s'han de tenir en compte raons individuals. És dir, si investiguem la probabilitat de morir d'una persona de 20 anys i un altre de 60 anys és suficient amb l'edat, però si agafem dues persones concretes farà falta tenir en compte més dades sobre elles.

5. Quan les coses són incertes o dubtoses, s'ha d'aplaçar les decisions fins que quedin més clarificades. Però si hem d'escollir en el mateix instant, haurem d'escollir aquella que és més segura, favorable, adequada i probable.

6. Una cosa que en certs casos és útil i mai nociu sempre s'ha de preferir a una cosa que mai és útil i pugui ser nociu.

7. El valor de l'acció humana no s'hauria de mesurar pel seu èxit. Una acció estúpida pot acabar exitósa i un ben pensada en fracàs.

8. En els nostres judicis ens hem de guardar de concedir a les coses més importància de la que tenen i no hem de considerar (ni instar a altres a considerar) segur alló que més probabilitat té.

9. Com pocs cops es troba la certesa, és necessari considerar com a cert alló que només ho és moralment. És dir, la que té una probabilitat gairebé segura.

Després de descriure aquestes normes, Bernoulli remarca que cada persona pot fer per si mateix normes similars.

A més Bernoulli afegeix: "La força d'una demostració d'un argument correspón al nombre de casos en que pot o no existir, ser provat o refutat". [30]

Continua amb un dels punts centrals del llibre, on presenta una explicació detallada de la interpretació estadística de les probabilitats:

"Hem arribat a un punt on sembla que per fer una conjectura correcta de qualsevol esdeveniment seria necessari calcular només el nombre de possibles casos i determinar llavors quin cas té major probabilitat. Però sorgeix una dificultat i és que aquest procediment gairebé només és aplicable pels fenòmens dels jocs d'atzar. Els inventors originals d'aquests jocs els van dissenyar de tal forma que tots els jugadors tinguessin les mateixes possibilitats de guanyar, ajustant el nombre de casos que resultarien en guany o pèrdua i donar coneixement als jugadors de les seves possibilitats i també arreglant casos de forma que cada cas fos equiprobable. Però aquest no és el cas en la majoria d'altres fenòmens que es regeixen per la llei de la naturalesa o per la voluntat de l'home... Però quin mortal a qui pregunti podria dir-me el nombre de malalties, comptant tots els casos, que afecten al cos humà en cada una de les seves parts i a cada edat i dir quina probabilitat hi ha de que una malaltia sigui més mortal que l'altre (pesta que gota per exemple, o hidropesia que febre). Els resultats en aquests casos depenen de factors totalment desconeguts i que ens enganyen constantment per la complexitat interminable de les seves interrelacions de forma que no tindria sentit continuar per aquest camí.

Hi ha, però, una altra manera que ens permetrà trobar el que busquem i ens permetrà trobar a posteriori allò que no podem provar a priori, és dir, comprovar-ho a partir dels resultats observats en nombrosos casos similars. Hem de suposar que sota certes condicions que l'ocurrència o no ocurrència d'un event seguirà un patró observat en esdeveniments del passat... Aquest procés empíric per determinar el nombre de casos per observació no és nou ni inusual;... i a la vida quotidiana tots podem veure aquest principi en el treball." [30]

Continua de forma més detallada:

"Aquest tipus de predicció requereix un gran nombre d'observacions... però tot i que tots reconeixem que aquest cas és la naturalesa de la qüestió, la prova científica d'aquest principi no és gens senzilla i per tant em correspon presentar-ho aquí. Sentiria estar fent massa poc si em limités a provar aquest punt que és familiar a tothom. En canvi, hi ha una cosa més que s'ha de tenir en consideració-una cosa que potser encara no ha ocorregut a ningú. El que hem d'investigar és si augmentant el nombre d'observacions seguim augmentant la probabilitat de que la proporció de favorables i no favorables s'apropa al rati real, de forma que aquesta probabilitat finalment excedirà qualsevol grau de certesa desitjat. Això implicaria que existeixen graus de certesa particulars de que el rati vertader ha sigut trobat que no es pot augmentar amb ningun augment d'observacions.

Per a que aquesta qüestió no quedi incompresa, s'hauria d'anotar el rati reflectint la relació actual entre nombres de casos i el rati que volem determinar mitjançant l'observació mai pot ser trobada amb exactitud absoluta;... El rati al qual arribem és només aproximat: ha de ser definit per dos límits, però aquests límits poden ser de tal forma que ens aproximin al rati vertader tan a prop com vulguem. Aquest és el problema que vull publicar després de considerar-lo durant vint anys." [30]

4.5.5 Ars Conjectandi. Part 5

Després de totes les explicacions que dona en el capítol 4, procedeix a demostrar el teorema. Primer demostra una col·lecció de lemes:

Lema 4.33. *Considerem dos sèries:*

- *0, 1, 2, ..., r-1, r, r+1, ... , r+s;*
- *0, 1, 2, ..., nr-n, ..., nr, ..., nr+n, ..., nr+ns;*

S'imposa que si n s'incrementa, el nombre de termes entre:

- *nr i nr+n;*
- *nr i nr-n;*
- *nr-n i nr+ns;*
- *nr i 0;*

també incrementa. A més, no importa com gran sigui n, el nombre de termes majors que nr+n no serà més gran que s-1 vegades el nombre de termes entre nr i nr+n o entre nr i nr-n. I a més, el nombre de termes més petits que nr-n no serà superior a r-1 vegades el nombre de termes entre els mateixos nombres.

Lema 4.34. *El nombre de termes de la expansió* $(r+s)^n$ *on n és enter, és n+1.*

Lema 4.35. *En un binomi r+s elevat a una potència t major a r+s (o bé* $nt > nr + ns$*), un cert terme M serà el més gran dels termes si els termes que el precedeixen i els que el segueixen immediatament tenen un rati s:r. O equivalentment, si en aquest terme, les potències dels r i s posteriors estan en el rati de les quantitas r i s; sent el terme més pròxim pels dos cantons més gran que el terme més llunyà dels dos costats; però el rati del terme M al terme més proper és menor que el rati entre el terme més pròxim i un més llunyà sempre que el nombre de termes intermedis sigui el mateix.*

Dem:

$$(r+s)^{nt} = r^{nt} + \frac{nt}{1} r^{nt-1} s + \frac{nt(nt-1)}{1 \cdot 2} r^{nt-2} s^2 + \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3 + ...$$

Notem que els coeficients dels termes equidistants dels extrems és el mateix. El nombre total de termes és nt+1=nr+ns+1. El terme més gran és:

$$M = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nt-ns+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot ns} r^{nr} s^{ns} = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nr+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot ns} r^{nr} s^{ns}$$

M pot ser trobat d'una forma diferent usant la fórmula $C_{nt}^{ns} = C_{nt}^{nt-ns} = C_{nt}^{nr}$:

$$M = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nt-nr+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot nr} r^{nr} s^{ns} = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (ns+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot nr} r^{nr} s^{ns}$$

El terme més pròxim a l'esquerra serà:

$$\frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nr+2)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (ns-1)} r^{nr+1} s^{ns-1}$$

El terme més pròxim a la dreta serà:

$$\frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (ns+2)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (nr-1)} r^{nr-1} s^{ns+1}$$

El terme anterior per la dreta serà:

$$\frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nr+3)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (ns-2)} r^{nr+2} s^{ns-2}$$

A partir d'aquests termes, fent comparacions i divisions fàcilment es comprova el lema.
#

Lema 4.36. *Suposem r, s, n i t enters positius tals que t=r+s. Considerem la expansió de* $(r+s)^n t$*. Un pot escollir n suficientment gran de forma que el radi entre el terme més gran M i els termes L i* λ *els quals estan posicionats n termes abans i després respectivament pot ser tan gran com desitgem.*

Dem:

$$M = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nr+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot ns} r^{nr} s^{ns} = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (ns+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot nr} r^{nr} s^{ns}$$

$$L = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nr+n+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (ns-n)} r^{nr+n} s^{ns-n}$$

$$\lambda = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (ns+n+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (nr-n)} r^{nr-n} s^{ns+n}$$

Hem de veure que $lim(\frac{M}{L}) = \infty$ i $lim(\frac{M}{\lambda}) = \infty$

Pel primer límit:

$$\frac{M}{L} = \frac{nt \cdot (nt-1) \cdot (nt-2) \cdot ... \cdot (nr+1) \cdot 1 \cdot ... \cdot (ns-n) \cdot r^{nr} \cdot s^{ns}}{nt \cdot (nt-1) \cdot ... \cdot (nr+n+1) \hat{a} \cdot 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot ns \cdot r^{nr+n} \cdot s^{ns-n}} = \frac{(nr+n) \cdot (nr+n-1) \cdot ... \cdot (nr+1) \cdot s^n}{(ns-n+1) \cdot (ns-n+2) \cdot ... \cdot ns \cdot r^n} =$$
$$\frac{(nrs+ns) \cdot (nrs+ns-s) \cdot ... \cdot (nrs+s)}{(nrs-nr+r) \cdot (nrs-nr+2r) \cdot ... \cdot nrs}$$

Continua dient: "Però aquests ratis (també $\frac{M}{\lambda}$) seran infinitament llargs si n és infinit doncs els nombres 1, 2, 3... desapareixen comparant-los amb n i els nombres $nr \pm n \mp 1$, $nr \mp n \pm 2$,... i $ns \pm n \mp 1$, $ns \pm n \mp 2$,... tindran el mateix valor que $nr \pm n$ i $ns \mp n$. Utilitzant ara aquests nombres i cancel·lacions apropiades utilitzant n obtenim:

$$\frac{M}{L} = \frac{(rs+s)\cdot(rs+s)\cdot...\cdot r\cdot s}{(rs-r)\cdot(rs-r)\cdot...\cdot r\cdot s}$$

El nombre de factors de numerador i denominador és n. Bernoulli diu: "Com a resultat, aquest rati es converteix en una potència infinita de $\frac{rs+s}{rs-r}$ i per tant, infinitament gran". Bernoulli prova posteriorment aquest fet. I així queda demostrat el lema.

$lim(\frac{M}{\lambda}) = \infty$ es proba anàlogament. #

Lema 4.37. *El rati de la suma de termes de L fins a λ en relació a la suma de a resta de termes es pot fer arbitràriament gran a mesura que incrementem n.*

Dem: Suposem que M és el terme més gran de la expansió. Anomenem els termes més pròxims ubicats a la seva esquerra F, G, H... i els de l'esquerra de L els anomenem P,Q,R... Del tercer lema obtenim:

$$\frac{M}{F} < \frac{L}{P}; \frac{F}{G} < \frac{P}{Q};$$
$$\frac{G}{H} < \frac{Q}{R} \text{ o bé } \frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R} < ...$$

Com pel Lema 4.36, si n tendeix a l'infinit, el rati M/L és infinit, els ratis F/P, G/Q, H/R... també ho són i per tant el rati (F+G+H+...)/(P+Q+R+...) també és infinit, és dir, la suma de termes entre M i L és infinitament més gran que la suma del mateix nombre de termes entre L i els seus adjacents.

I com, pel Lema 4.33, el nombre de termes més enllà de L no sán més que s-1 vegades el nombre de termes entre M i L (és dir, un nombre finit de vegades) i els termes disminueixen de magnitud amb l'increment de la seva distancia respecte L, a partir de la segona part del Lema 4.35 sabem que la suma de tots els termes entre M i L (tot i no incloure M) serà infinitament més gran que la suma de tots els termes posteriors a L.

Es fa una demostració anàlogament pels termes entre M i λ i ajuntant les dues demostracions es demostra el lema. #

Un cop demostra tots els lemes, Bernoulli procedeix a enunciar el principal enunciat del seu tractat. Es refereix a ell com a "proposició principal" o "el teorema d'or". Diu el següent:

Proposició 4.38. *"Finalment, la proposició per la qual tots els lemes anteriors han sigut donats i dels quals la seva demostració deriva únicament de l'aplicació dels lemes anteriors... Suposem que el nombre d'esdeveniments (casos favorables) estigui relacionat amb el nombre d'errors amb una relació r a s, exactament o aproximadament, o es relaciona amb el nombre total de proves com a r a r+s o r a t; Aquest rati es troba entre (r+1)/t i (r-1)/t. S'ha de demostrar que el nombre de proves es pot realitzar de manera que per qualsevol nombre c, tenim les probabilitats de c a 1 i que el nombre d'esdeveniments estarà dintre d'aquests límits, és dir, la relació entre el nombre de vegades que succeeix l'esdeveniment i el nombre total de proves es troba entre $\frac{r+1}{t}$ i $\frac{r-1}{t}$."*

Aquest estament equival a l'actual teorema de Bernoulli.

Dem: Suposem que el nombre d'observacions és nt. La probabilitat de que totes les observacions siguin favorables és:

$$P_{nt,nt} = (\frac{r}{t})^{nt}$$

La probabilitat de que totes les observacions excepte una siguin favorables serà:

$$P_{nt-1,nt} = \frac{nt}{1} \cdot s \cdot \frac{r^{nt-1}}{t^{nt}}$$

I la de tots els resultats excepte dos favorables:

$$P_{nt-2,nt} = \frac{nt(nt-1)}{1 \cdot 2} \cdot s^2 \cdot \frac{r^{nt-2}}{t^{nt}}$$

I així successivament. Aquests termes són exactament els que veiem en la expansió del binomial (r+s) elevat a nt (dividit per t^{nt}), els quals s'han investigat en els lemes prèvis. Totes les conclusions posteriors estan basats en aquests lemes. El nombre d'intents amb ns fallades i nr casos favorables correspon al terme M. El nombre d'intents corresponents a nr+n o nr-n casos favorables corresponen a L i λ, els quals estan a n termes de distancia de M. Per tant, el nombre de proves pels quals el nombre d'esdeveniments favorables no és menor que nr+n i tampoc major que nr-n s'expressa per la suma de termes entre L i λ. El nombre total d'intents pels quals el nombre d'observacions favorables és o bé major que nr+n o bé menor que nr-n es expressat per la suma de termes ubicats a l'esquerra de L i a la dreta de λ.

"Desde que la potència a la qual s'eleva el binomi pot ser escollit suficientment gran de forma que la suma de termes continguts entre els límits L i λ excediran més de c vegades la suma dels termes restants. Com s'ha vist en els lemes 4.36 i 5.37, un pot triar el nombre d'observacions suficientment gran per tal que el nombre d'intents pels quals el rati entre observacions favorables i el total es trobi entre els límits $\frac{nr+n}{nt}$ i $\frac{nr-n}{nt}$, és dir, entre $\frac{r+1}{t}$ i $\frac{r-1}{t}$ superarà per més de c vegades el nombre d'altres intents. És dir, les probabilitats de que el rati de casos favorables es trobi entre $\frac{r+1}{t}$ i $\frac{r-1}{t}$ seran majors a c:1."

Bernoulli conclou el seu tractat dient:

"Si tots els esdeveniments d'ara en endavant fossin contínuament observats (de forma que la probabilitat es convertiria en certesa), es comprovaria que tots els esdeveniments del món es produeixen per raons definides i conforme a les lleis, i per tant, estem restringits, fins i tot per esdeveniments que poden semblar accidentals, per assumir una certa necessitat, fatídica si ho fós." [31]

En aquest punt, l'Ars Conjectandi finalitza abruptament. L'últim capítol d'aquest treball pretenia ser una aplicació de les probabilitats en problemes civils i econòmics no arriba a fer-se. S'especula que Bernoulli mai no va arribar a visualitzar problemes significantius per aplicar la teoria de la probabilitat.

4.6 Pierre-Rémond de Montmort

Montmort va ser un matemàtic francès del segle XVIII que va estudiar filosofia i religió. Va tenir correspondència amb diversos matemàtics (N. Bernoulli, J. Bernoulli, Leibnitz, etc.)

i era un membre important de la comunitat científica. En particular, Leibnitz el selecciona com a representant en la comissió de la Royal Society per resoldre la controvèrsia entre Newton i Leibnitz respecte al reconeixement del descobriment del càlcul diferencial i integral.

El seu treball més important sobre les probabilitats va ser "Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard". Hi va haver dues edicions, la primera de les quals es va publicar el 1708 a París. La segona edició es creu que es publica el 1713 encara que Isaac Todhunter afirma que "La data del títol de la meva còpia és el 1714 doncs sembla ser que va ser un regal de l'autor a Gravesande". [6] La segona edició és molt més extensa que la primera, doncs té un total de 414 pàgines mentre que la primera té 189. Aquesta segona edició conté una sèrie de cartes entre Montmort i Nicholas Bernoulli a més d'una carta de John Bernoulli, germà de James Bernoulli.

El tractat de Montmort(la segona edició) està dividit en quatre parts. La primera part conté la teoria de les combinatòries. La segona discuteix alguns jocs d'atzar amb cartes. La tercera discuteix alguns jocs d'atzar amb daus. La quarta part conté la solució de diversos problemes, inclosos els cinc problemes de Huygens, els quals venen acompanyats de les correspondències esmentades anteriorment. En el pròleg, Montmort presenta breument un esquema del tractat de J. Bernoulli, el qual coneixia a partir dels resums de Fontenelle i Saurin.

Montmort pensava que el tractat de Bernoulli no seria publicat pòstumament. Escriu per tant:

"He arribat a la conclusió de que un pot recórrer un llarg camí dins d'aquesta àrea inexplorada i descobrir un gran nombre de veritats sorprenents i novedosos. Això em va donar la idea d'entrar al fons d'aquest problema i desitjar recuperar pel públic d'alguna manera la pèrdua de ser privats de l'excel·lent treball de M. Bernoulli." [6]

4.6.1 Pròleg

En el pròleg, Montmort senyala que les matemàtiques han tingut molta influencia en les ciències naturals; en primer lloc, en la física on hi va haver molts avenços. Afageix: "Hauria sigut molt meritori per aquesta ciència que a més hagués pogut servir per determinar judicis i el comportament humà en la vida diària". [7] Afegeix a més que Bernoulli ho va intentar però que la seva mort prematura li va privar poder completar-ho:

"M. Bernoulli divideix el seu treball en quatre parts. Les primeres tres parts estan orientades a la solució de varis problemes en jocs d'atzar. Hauria d'haver alguns nous resultats de sèries infinites, combinacions i permutacions junt a solucions dels problemes proposats per Huygens. En la quarta part utilitza el mètode presentat en les tres primeres parts per solucionar alguns problemes civils, morals i polítics. No sabem quins eren els jocs dels quals feia el repartiment d'apostes per l'autor de la mateixa forma que no sabem quins problemes morals i polítics va intentar solucionar, però no importa com de considerable fos el projecte, podem assumir que l'autor hagués realitzat la tasca admirablement... Estic segur que hagués completat tot allò que promet en el títol." [7]

Montmort tampoc inclou aplicacions de les probabilitats a problemes morals, econòmics i polítics. Diu:

"Si continués el projecte de Bernoulli hauria afegit una quarta part on aplico mètodes continguts en els tres primers a problemes polítics, econòmics i morals. El que ho ha evitat és que no se on trobar les teories basades en la teoria de la informació, la qual em permetria perseguir els meus objectius.“ [7]

Montmort, de la mateixa forma que Bernoulli, no troba aplicacions probabilístiques a les ciències morals. Cal remarcar que Montmort adhereix la filosofia del determinisme metafísic a la metodologia general dels seus problemes.

En el seu pròleg, Montmort presenta una discussió referent a l'aplicabilitat de les probabilitats al comportament humà. Deixa indefinides aquestes discussions. Cita els treballs de Halley, Petty, Huygens i la correspondència entre Pascal i Fermat. Com a conclusió diu: "En aquest tractat tinc en compte el gaudiment dels matemàtics en comptes dels avantatges dels jugadors; en la meva opinió aquells que perden temps en jocs mereixen perdre els diners en ells.“ [7]

4.6.2 Part 1

En la primera part del seu llibre, anomenat "Traité des Combinaisons“ [7, pag 1-72] investiga el triangle aritmètic, esperances matemàtiques i altres tòpics. Prova el teorema binomial pel cas $(a+b)^4$ de la següent forma:

<u>Dem</u>: Suposem que tenim quatre fitxes, cada una amb dues cares, una blanca i una negra. Les quatre fitxes es llancen. Només hi ha una forma en que totes les cares caiguin negres, quatre formes de que caiguin tres cares negres i una blanca, sis formes per a que caiguin dos blanques i dos negres, i el mateix simètricament. Per tant, $(a+b)^4$ ha de contenir a^4 i b^4 els quals corresponen a treure quatre cares blanques i quatre cares negres. Seguidament, hauria d'haver un coeficient 4, el qual correspon al nombre de possibilitats de llançar tres cares negres i una blanca. Seguidament segueix un 6 que correspon al nombre de possibilitats de llançar dues cares de cada color. D'aquí, Montmort conclou que els coeficients binomials han de ser 1, 4, 6, 4, 1. #

Procedeix amb la discussió d'alguns problemes. Un exemple és el següent: "Hi ha p daus (cadascun amb el mateix nombre de cares). Troba el nombre de possibilitats en els quals, quan són llençats aleatòriament, podem tenir a uns, b dosos, c tresos i així fins a 6.“

4.6.3 Part 2

La segona part del tractat està relacionat als jocs de cartes, entre elles, el Faraó.

4.6.4 Part 3

La tercera part del tractat s'orienta als jocs de daus. També es discuteix el problema del just repartiment d'una aposta, "Per dur a terme, en el cas general, la divisió de les apostes entre diversos jugadors, jugant varies partides sota condicions justes“ [7]. En relació a això, Montmort presenta la correspondència entre Pascal i Fermat, reproduint en particular tot el text de la carta de Pascal datada en el 24 d'agost de 1654 [7, pag. 233-244].

Montmort considera el següent problema: "Tres jugadors (Pierre, Paul, Jacques) pacten jugar tres partides acordant que si Pierre, qui només necessita guanyar una partida més per guanyar, guanya abans de que algun dels altres dos jugadors guanyi dues partides, serà declarat guanyador. Perdrà si un dels altres jugadors a qui els queda dues partides per guanyar, guanya dues partides abans de que ell guanyi una.“ [7]. Quina probabilitat de guanyar té cada jugador? Montmort soluciona el problema utilitzant la taula següent:

Pierre				Paul	Jacques
aaa	abc	bab	cac	bba	cca
aab	aca	bac	cba	bbb	ccc
aac	acb	bca		bbc	ccb
aba	acc	caa		bcb	cbc
abb	baa	cab		cbb	bcc

Dels 27 possibles resultats de tres daus, 17 són favorables a Pierre, 5 a Paul i altres 5 a Jacques. Segueix presentat la norma general que diu que s'hauria de “considerar el nombre de llançades necessàries per completar el joc, agafar tants daus com partides que resten per jugar i assignar les cares guanyadores per cada jugador; llavors un hauria de mirar, d'entre tots els possibles resultats, quins afavoreixen a cada jugador, cosa que es pot fer fàcilment.“ [3, pàg 79]

Aquesta norma es il·lustrada amb molts problemes. Per exemple: Pierre necessita una partida per guanyar, Paul dues i Jacques tres.

4.6.5 Part 4

La quarta part del llibre de Montmort conté solucions de varis problemes d'atzar d'entre els quals hi ha els cinc proposats per Huygens el 1657 en el seu “De Rationiis in Ludo Aleae“. Els resol de la següent forma(problemes formulats en la pàgina 29 i 30 d'aquest treball i resolucions de Huygens en les pàgines 30, 31 i 32):

Solució Problema 4.21: Montmort resol el primer problema de forma quasi idèntica a Huygens, mètode que anomena “forma analítica“.

Igual que Huygens calcula les esperances de cada torn utilitzant la notació b=5, c=30, d=31, f=36:

1. $e_1 = \frac{b}{f}a + \frac{d}{f}e_2$
2. $e_2 = \frac{c}{f}e_3$
3. $e_3 = \frac{c}{f}e_4$
4. $e_4 = \frac{b}{f}a + \frac{d}{f}e_1$

Fent substitucions:

1. $e_3 = \frac{c}{f}e_4 = \frac{bc}{f^2}a + \frac{cd}{f^2}e_1$ substituint e_4
2. $e_2 = \frac{c}{f}e_3 = \frac{bc^2}{f^3}a + \frac{c^2d}{f^3}e_1$ substituint e_3 del pas anterior.
3. $e_1 = \frac{b}{f}a + \frac{d}{f}e_2 = \frac{b}{f}a + \frac{bc^2d}{f^4}a + \frac{c^2d^2}{f^4}e_1$ substituint e_2 del pas anterior.

i repetim en bucle infinitament de forma que extreu la sèrie:

$$\frac{b}{f}a+\frac{bc^2d}{f^4}a+\frac{bc^2d^2}{f^5}a+\frac{bc^3d^3}{f^9}a+\frac{bc^3d^4}{f^{10}}a+\frac{bc^5d^3}{f^{12}}a+\frac{bc^9d^8}{f^{16}}a+\frac{bc^9d^7}{f^{17}}a+\frac{bc^9d^8}{f^{18}}a+\frac{bc^9d^9}{f^{19}}a+\frac{bc^{14}d^{10}}{f^{25}}a+...$$

Aquesta sería l'esperança del jugador A i el del jugador B es conseguiria restant el valor "a" amb aquesta esperança.

Com s'ha vist Montmort ha fet una generalització del problema. També afegeix el cas de tirar un dau i que toqui un nombre concret. La sèrie en aquest cas sería:

$$1-p+p^1-p^5+p^8-p^{11}+p^{15}-p^{19}+p^{24}-p^{29}+...\text{ per } p=\frac{1}{6}\ \#$$

Solució Problema 4.22: En aquest cas, Montmort realitza també una demostració de forma analítica i de manera molt semblant a Huygens. La diferència entre les dues demostracions radica en que Montmort fixa les esperançes del jugador C en el primer torn(S), en el segón torn (y) i en el seu torn (z). D'aquesta forma obté:

- $S=\frac{4}{12}\cdot 0+\frac{8}{12}y=\frac{2}{3}y$; doncs si guanya el primer jugador, l'esperança del tercer serà 0 i si no guanya es converteix a l'esperança que té en el torn del segon jugador, és dir, y.
- $y=\frac{4}{12}\cdot 0+\frac{8}{12}z=\frac{2}{3}z$; doncs si guanya el segon jugador, l'esperança del tercer serà 0 i si no guanya es converteix a l'esperança que té quan ha d'extreure, és dir, z.

D'aquesta forma troba que S=$\frac{4}{19}a$ que és la seva esperança abans de començar a jugar. De la mateixa forma calcula les esperances del primer i del segon jugador, les quals són $\frac{9}{19}a$ i $\frac{6}{19}a$ respectivament. #

Solució Problema 4.23: Per aquest problema Montmort trenca la seva forma de resolució anterior i a canvi utilitza la combinatòria.

Calcula directament $\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}}=\frac{10^4}{91390}$

És dir, les possiblitats de guanyar són 10000:81390 a favor del jugador B. #

Solució Problema 4.24: Montmort torna a utilitzar la combinatòria per resoldre fàcilment aquest problema. Ho fa de la següent manera:

$$\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}}=\frac{35}{99}$$

i per tant el rati ès 35:64 a favor del jugador B. # Solució Problema 4.25: Per resoldre aquest problema Montmort calcula primer les probabilitats de cada jugador en cada tirada. El nombre de possibles resultats és $6^3=216$. Els favorables pel jugador A (treure 11 punts) són 27 i els del jugador B (treure 14 punts) són 15. Els 174 restants no afavoreixen a ningú. Per tant utilitza les probabilitats $\frac{27}{216}$, $\frac{15}{216}$ i $\frac{174}{216}$.

A continuació l'autor defineix:

- x: esperança del jugador A quan té 12 fitxes i el jugador B també.
- y: esperança del jugador A quan té 12 fitxes i el jugador B en té 11.

- z: esperança del jugador A quan té 11 fitxes i el jugador B en té 12.

i verifica que $x = \frac{27}{216}y + \frac{15}{216}z + \frac{174}{216}x$ d'on treu l'equació $14x = 9y + 5k$. D'aquesta forma planteja unes altres 19 igualtats i subsitituint cap enrere arribarà $x = \frac{9y+5k}{14} = \frac{282429536481a+352487604195x}{987648885496}$ i per tant $x = \frac{282429536481}{282673677106}a$. L'esperança del jugador B es calcula restant aquesta esperança al valor "a". #

A més a més afegeix el problema de la "duració del joc". Conclou aquesta secció amb els quatre problemes següents (els quals dona originalment al final de la primera edició):

1. Determina les probabilitats del banquer en el joc de les 13 cartes(Treize)
2. Un problema connectat amb el joc de cartes "Le Her".
3. Un problema connectat amb el joc anomenat "Ferme" similar al joc "Point" (El Punto).
4. Un problema connectat amb un joc(no plenament d'atzar) similar al "Solitari".

Procedeix [7, pag. 283-414] amb la correspondència entre Montmort i Nicholas Bernoulli junt a una carta de John Bernoulli a Montmort i una contestació de Montmort. En una carta a Montmort datada el 9 de setembre de 1713 [7, pag.401-402] N. Bernoulli proposa el següent problema: Dos jugadors A i B llencen una moneda sota les següents condicions: el joc continua fins que la primera cara aparegui; El jugador B donarà dues monedes a A si un cap apareix en la primera llançada, quatre monedes si apareix en la segona, vuit si ho fa en la tercera i així successivament. Quina quantitat hauria de pagar A a B al principi de la partida per a que sigui una aposta justa?

Per a que l'aposta sigui justa, A hauria de pagar a B el nombre de monedes que dona l'esperança matemàtica, la qual és:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + ... + 2n \cdot \frac{1}{2n} = n$$

Per tant, l'esperança matemàtica tendeix a l'infinit i per tant A hauria de pagar a B un nombre infinit de monedes abans de començar a jugar, cosa que clarament no té sentit. Daniel Bernoulli(1700-1782) va estudiar aquest problema i el va publicar en les seves investigacions en el "Papers of St. Petersburg Imperial Academy of Sciences". Per aquesta raó el problema s'anomena el problema de Petersburg o la paradoxa de Petersburg.

4.7 De Moivre

De Moivre(1667-1754) va ser un matemàtic francès del segle XVIII. Les seves obres principals són "The Doctrine of Chances" (primera edició el 1718 [8], la segona el 1740 i la tercera el 1756) i "De Mesura Sortis" [9] publicat en el "Philosophical Transactions of the Royal Society" l'any 1711.

De Moivre era membre de la Royal Society a partir del 1697 i va ser elegit com a membre de les Acadèmies de Ciència de París i Berlin. Es conegut per la seva contribució a la teoria de series. Descobreix les propietats de l'elevació d'un nombre complex i el càlcul de l'arrel n-èssima d'un nombre complex. Aquestes fórmules es diuen avui en dia fórmules de De Moivre. A més obté l'expansió asimptòtica de $n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n}$.

En el seu tractat “The Doctrine of Chances“ de Moivre discuteix problemes relacionats a la duració d’una partida i investiga tòpics connectats amb el teorema de Bernoulli. El problema de la duració d’una partida va ser proposat per primer cop per Huygens. De Moivre el treballa repetidament en els seus tractats “De Mesura Sortis“ [9, pag. 227] i “The Doctrine of Chances“ [8, pag. 52].

Considerem el problema: Donats dos jugadors A i B, les probabilitats de guanyar una ronda són p i q=1-p respectivament. Al principi del joc A té a monedes i B b monedes. El perdedor de cada ronda ha de donar una moneda al guanyador. Quina és la probabilitat P_a de que A perdrà tots els seus diners abans de guanyar tots els diners de B? Anàlogament definim P_b. Es pot veure que el joc és finit, és dir, $P_a + P_b = 1$.

Sol: De Moivre dona la següent solució:

$$P_b = \frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}$$

De mateixa forma troba que el nombre de partides esperades és:

$$E(N) = \frac{bP_b - aP_a}{p-q}$$

A més, suggereix una formula general per determinar $P_{a,n} + P_{b,n}$ on $P_{a,n}$ és la probabilitat de que A s’arruini en n partides i $P_{b,n}$ l’anàleg per B. A més determina $P_{b,n}$ quan a és infinit i per tant $P_{a,n} = 0$.

No obstant, uns mesos abans de la publicació d’aquests resultats, Montmort, el 1713 publica les solucions pels valors $P_{a,n}$ i $P_{b,n}$.

Estudiant taules de mortalitat, de Moivre presenta al final del seu llibre “The Doctrine of Chances“ en la secció “The Doctrine of Chances Applied to Valuation of Annnuaities“ una equació simple per la llei de mortalitat entre els 22 anys i el límit de longetivitat (que ell considerava 86 anys). Dona una equació lineal: y=86-x on x denota una edat entre els 22 i 86 anys i y representa el nombre de persones que arriben a la edat x. Assignant a x valors s’obté que el 63% de persones arriben als 23 anys, el 62% 24 anys i així successivament.

Com s’indica anteriorment, no s’extreu del teorema de Bernoulli que a mesura que n incrementa, la fracció m/n tendirà al valor p. El nombre de vegades que surt un esdeveniment, és dir, el nombre m, està subjecte a l’atzar, i per tant, són possibles grans desviacions de m/n a p. En el seu treball “Miscellanea Analytica“(1730) de Moivre investiga el problema la probabilitat de varies desviacions de m/n respecte m/n i p. De Moivre obté una solució pel cas particular p=1/2, és dir, investiga per p=1/2 les probabilitats de diversos valors de $|\frac{m}{n} - p|$.

Més tard, Laplace estén el teorema de De Moivre a valors arbitraris de $p \notin (0, 1)$. El teorema de De-Moivre-Laplace és el teorema central del límit.

5 Conclusions

Com s'ha vist en aquest treball, gràcies al gran aport de grans matemàtics del segle XVII, les probabilitats comencen a ser considerats com a ciència. Es indubtable que gran part dels nostres coneixements en la matèria provenen d'aquest segle i una gran quantitat de problemes relacionats amb la matèria són solucionats.

S'ha vist també que entre tots els matemàtics existien connexions, bé sigui per correspondències o per la lectura de treballs anteriors, que els van permetre anar progressant de forma continuada, millorant els mètodes per resoldre els problemes de forma eficaç.

Ara bé, existeix la creença generalitzada de que la motivació del sorgiment d'aquesta ciència van ser els jocs d'atzar. Però, com s'ha argumentat durant el treball, és probable que altres raons com l'inici del capitalisme tinguessin mòlta incidència.

A partir del segle XVII les probabilitats han seguit evolucionant fins arribar als nostres dies, però la base en la que s'ha treballat i treballem avui en dia són les probabilitats del segle XVII (i mostra d'això és pràcticament totes les probabilitats que s'estudien en l'educació secundària provenen d'aquest segle).

Referències

[1] Hobbes, T., “The English Works of Thomas Hobbes“, *Vol 4*

[2] Hotimskii, V., “Historical roots of probability theory“, *PZM, Nos. 1 i 6*

[3] L. E Maistrov., “Probability Theory, A Hitorical sketch“

[4] Gnedenko, B. V., “A Course in Probability Theory“

[5] David F. N., “Games, Gods and Gambling.“

[6] Todhunter, I., “History of the Mathematical Theory of Probability.“

[7] Montmort. P., “Essai d’Analyse sur les Jeux de Hasard,“ *2nd ed.*

[8] de Moivre, A., “The Doctrine of Chances,“ *2nd ed.*

[9] de Moivre, A., “De mensura sortis“, Traducció de Roy. Soc. London *Ser. A 27 (329), 213-264(1711).*

[10] Lurie, S. Ya., “Approximate calculations in ancient Greece“. *Ser. 1.*

[11] Leibniz, G. W., “New Essays Concerning Human Understanding“ Traducció de A.G. Langley.

[12] “Algebra and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara“ Traducció de H. Th. Colebrooke.

[13] Jesús Basulto Santos, María Dolores Pérez Hidalgo. “La resolución de Montmort de los cinco problemas propuestos por Huygeens en su tratado.“

[14] Miguel Ángel Gómez Villegas, Mary Sol de Mora Charles. Història de la Probabilidad y de la Estadística. *Edición digital: junio de 2018.*

[15] https://ca.wikipedia.org/wiki/GirolamoCardano

[16] Ore, O., “Cardano: The Gambling Scholar‘.‘

[17] Tartaglia, N., “General Trattato di Numeri et Misure.“.

[18] https://es.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2FontanaTartaglia

[19] M. S. De Mora Charles, “La Teoria de la Probabilidad: Primeros Cálculos. Una propuesta de traducción y comentario a Cardano“

[20] https://ca.wikipedia.org/wiki/GalileoGalilei

[21] https://es.wikipedia.org/wiki/PierredeFermat

[22] Galilei, G., “Dialogue Concerning the Two Chief World Systems-Ptolemaic and Coper-nican“ Traducció de S. Drake *2nd rev. ed., 1962.*

[23] A.H.E.P.E. “Historia de la probabilidad y la estadística(III)“

[24] https://ca.wikipedia.org/wiki/GottfriedWilhelmLeibniz

[25] Mary Sol de Mora. “La matemática de Leibnitz, un caso especial“

[26] RevistaSuma noviembre 2007 pàg. 43-54
https://revistasuma.es/IMG/pdf/56/043-054.pdf

[27] Christiani Hugenii “Libellus de ratiociniis in ludo alae“.

[28] Ore, O., “Pascal and the invention of probability theory“, Amer. Math. Monthly 67, 409-419 (1960).

[29] Bernoulli, J., ”Ars Conjectandi.” *Impensis Thurnisiorum, Fratrun, Basileae, 1713.*

[30] Bernoulli, J., “Pars Quarta, tradens usum et applicationem proecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus, et Oeconomicus“ Traducció de Ya. V. Upsenkii *A. A. Markov, ed.*.

[31] Bernoulli, J., “The law of large numbers, in “The World of Mathematics““ *J. R. Newman, ed., Vol. 3*

[32] https://es.wikipedia.org/wiki/BlaisePascal

[33] https://es.wikipedia.org/wiki/JakobBernoulli

[34] https://es.wikipedia.org/wiki/ChristiaanHuygens

[35] https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre%C3%A9monddeMontmort