PROCESSOS ESTOCÀSTICS:
un curs bàsic

Carles Rovira

Text docent per l'assignatura *Processos Estocàstics* del *Grau de Matemàtiques* preparat per la docència online del curs 2020-21. Durant el curs es donen les definicions bàsiques del tema i es presenten algunes de les famílies de processos més utilitzades: els processos de ramificació, el procés de Poisson, el moviment brownià, els processos de Markov a temps continu i els processos de naixement i mort.

Índex

Capítol 1

DEFINICIONS I PROPIETATS BÀSIQUES

En tot el curs, suposem que estem en el marc d'un cert espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definició. Un *procés estocàstic* amb espai d'estats S és una família $\{X_t, t \in T\}$ de variables aleatòries $X_t : \Omega \to S$ indexades en un conjunt T.

Observacions:

1. T s'anomena l'*espai de paràmetres*.
   (a) Si T és discret, parlem d'un procés amb paràmetre discret. Per exemple $T = \mathbb{N}$.
   (b) Si T és no numerable, habitualment $T = \mathbb{R}$ o $T = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$, parlem d'un procés amb paràmetre continu.
2. L'índex t representa el temps i X_t serà l'**estat** o la **posició** del procés al temps t.
3. Quan $S = \mathbb{R}$ direm que és un procés a "valors reals".

Els processos estocàstics s'utilitzen per modelitzar (parlarem de models estocàstics) fenòmens que evolucionen al llarg del temps, per exemple, a la física, a la química, a la biologia, a l'economia, etc.

El cas interessant és quan les variables aleatòries de la família $\{X_t, t \in T\}$ no són independents. En general, estarem interessats en quina relació de dependència hi ha entre les variables.

Definició. Un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ on T és un subconjunt de $\mathbb{R}$, es diu que té **increments independents** si per a tot $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ les variables aleatòries $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$ són independents.

Definició. Un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ on T és un subconjunt de $\mathbb{R}$ es diu que té **increments estacionaris** si per a tot $t_1 < t_2$, la llei de la variable aleatòria $X_{t_2} - X_{t_1}$ és la mateixa que la llei de la variable aleatòria $X_{t_2 - t_1} - X_0$.

1.1 La llei d'un procés estocàstic

Coneixem què és la llei d'una variable aleatòria. Vegem ara com s'estén aquest concepte als processos estocàstics.
Definició. Donat un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ definim les seves **distribucions conjuntes en dimensió finita** com la família de lleis multidimensionals dels vectors aleatoris $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ per a tot $t_1, \ldots, t_m \in T$ i per a tot $m \geq 1$.

Problema. Es pot definir un procés estocàstic donant només les seves distribucions conjuntes en dimensió finita? La resposta seria —sota certes condicions— que sí.
El teorema següent recull aquest resultat:
Teorema de Kolmogórov. Considerem una família

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n}; t_1 < t_2 < \ldots < t_n, n \geq 1, t_i \in T\, \forall i\} \tag{1.1}$$

on

1. $P_{t_1,\ldots,t_n}$ és una probabilitat sobre $\mathbb{R}^n$.
2. Si $\{t_{1_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_m}\} \subset \{t_1 < t_2 < \ldots < t_n\}$, la distribució de probabilitat $P_{t_{1_1},\ldots,t_{i_m}}$ és la llei marginal de $P_{t_1,\ldots,t_n}$.

Aleshores existeix un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$, definit en el mateix espai de probabilitat, tal que (1) són les seves distribucions conjuntes en dimensió finita. És a dir, el vector $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ té llei $P_{t_1,\ldots,t_m}$.

Per acabar de treballar aquests conceptes, estudiarem en detall el cas gaussià.

Recordem que la llei d'un vector aleatori gaussià queda determinada per dos paràmetres, un vector d'esperances i la matriu de covariàncies

$$\begin{aligned} m(t_1, \ldots, t_m) &= (E(X_{t_1}), \ldots, E(X_{t_m})), \\ \Gamma(t_1, \ldots, t_m) &= \Big(Cov(X_{t_i}, X_{t_j})\Big)_{1\leq i,j\leq m}. \end{aligned}$$

Definició. Un procés estocàstic a valors reals $\{X_t, t \in T\}$ es diu que és de **segon ordre** si $E(X_t^2) < \infty$ per a tot $t \in T$. Donat un procés de segon ordre $\{X_t, t \in T\}$, es defineix la **mitjana** i la **funció de covariància** com

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X_t), \\ \Gamma_X(s,t) &= Cov(X_s, X_t). \end{aligned}$$

Exemple. Considerem $X_t = A\cos(\varphi + \lambda t)$ on A i φ són variables aleatòries independents tals que $E(A) = 0$ i $E(A^2) < \infty$ i $\varphi \sim U(0, 2\pi)$. Aleshores $\{X_t, t \geq 0\}$ és un procés de segon ordre amb

$$\begin{aligned} m_X(t) &= 0, \\ \Gamma_X(s,t) &= \frac{1}{2}E(A^2)\cos(\lambda(t-s)). \end{aligned}$$

Vegem-ho:

$$m_X(t) = E(A\cos(\varphi + \lambda t)) = E(A)E(\cos(\varphi + \lambda t)) = 0.$$

D'altra banda, utilitzant que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ tenim

$$\begin{aligned} \Gamma_X(s,t) &= E(X_t X_s) = E(A\cos(\varphi + \lambda t)A\cos(\varphi + \lambda s)) \\ &= \frac{1}{2}E(A^2)E\Big(\cos(\varphi + \lambda(t+s)) + \cos(\lambda(t-s))\Big) \\ &= \frac{1}{2}E(A^2)\Big(\cos(\lambda(t-s)) + E(\cos(\varphi + \lambda(t+s)))\Big), \end{aligned}$$

i s'acaba utilitzant que

$$E(\cos(\varphi + \lambda(t+s)) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(x + \lambda(t+s))dx = 0.$$

Definició. Un procés estocàstic a valors reals $\{X_t, t \in T\}$ es diu que és **gaussià** si les seves distribucions conjuntes en dimensió finita són lleis gaussianes.

Exemple. Existència de processos gaussians. Considerem una funció $K : T \times T \to \mathbb{R}$, tal que

- $K(s,t) = K(t,s)$, $\forall s,t \in T$ (simetria)
- $\sum_{i,j=1}^n K(t_i,t_j)x_i x_j \geq 0$ per a qualsevol $n \geq 0, t_1, \ldots, t_n \in T, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ (K definida no negativa).

Aleshores existeix un procés gaussià $\{X_t, t \in T\}$ tal que $m_X(t) = E(X_t) = 0$ per a tot $t \in T$ i $\Gamma_X(s,t) = Cov(X_s, X_t) = K(s,t)$ per a tot $s,t \in T$.
Per demostrar l'existència, definim una família de probabilitats

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n}; t_1 < t_2 < \ldots < t_n, n \geq 1, t_i \in T\,\forall i\}$$

de la manera següent. Per a cada $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ considerem $P_{t_1,\ldots,t_n} \sim N(0,\Lambda)$ amb $\Lambda = \Big(K(t_i,t_j)\Big)_{1\leq i,j\leq n}$.
Per acabar només ens cal veure que si $\{t_{1_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_m}\} \subset \{t_1 < t_2 < \ldots < t_n\}$, la distribució de probabilitat $P_{t_{1_1},\ldots,t_{i_m}}$ és la llei marginal de $P_{t_1,\ldots,t_n}$. Sigui $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ un vector aleatori amb llei $P_{t_1,\ldots,t_n}$. Per a qualsevol subconjunt $\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}\} \subset \{t_1, \ldots, t_n\}$, es té que

$$A(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (X_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_m}}),$$

amb

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{t_1,t_{i_1}} & \cdots & \delta_{t_n,t_{i_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{t_1,t_{i_m}} & \cdots & \delta_{t_n,t_{i_m}} \end{pmatrix}$$

on $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ i $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Aleshores el vector aleatori $(X_{t_{i_1}}, \ldots, X_{t_{i_m}}) \sim N(0, A\Lambda A^T)$ i a més

$$A\Lambda A^T = \Big(K(t_{i_l}, t_{i_j})\Big)_{1\leq l,j\leq m}.$$

1.2 Trajectòries d'un procés estocàstic

Un cop hem parlat de la llei d'un procés, ens el podem mirar des del punt de vista de les seves trajectòries.

Definició. Fixat $\omega \in \Omega$, la funció

$$t \to X_t(\omega)$$

definida a l'espai de paràmetres T s'anomena una *realització* o una *trajectòria* (*sample path*) del procés.

Fixeu-vos que un procés estocàstic ens el podem mirar, per tant, de dues maneres, com a funció de t o com a funció de ω, és a dir:

- **Per a cada t, com una variabla aleatòria X_t.**
- **Per a cada $\omega \in \Omega$, com una trajectòria $t \to X_t(\omega)$.**

Exemple. Siguin X i Y dues variables aleatòries independents. Considerem el procés amb paràmetre $t \in [0, \infty)$

$$X_t = tX + Y.$$

Les trajectòries seran les rectes (amb coeficients aleatoris)

$$t \to tX(\omega) + Y(\omega).$$

Podem calcular també les distribucions en dimensió finita

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) &= P(t_1 X + Y \leq x_1, \ldots, t_n X + Y \leq x_n) \\ &= P\Big(X \leq \frac{x_1 - Y}{t_1}, \ldots, X \leq \frac{x_n - Y}{t_n}\Big) \\ &= P\Big(X \leq \min_{1 \leq i \leq n} \big(\frac{x_i - Y}{t_i}\big)\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_X\Big(\min_{1 \leq i \leq n} \big(\frac{x_i - y}{t_i}\big)\Big) P_Y(dy), \end{aligned}$$

on F_X és la funció de distribució de la variable aleatòria X i P_Y denota la llei de Y.

Exemple. Procés d'arribada. Considerem el procés N_t que compta el nombre d'arribades a una botiga al temps t. Mesurem el temps entre les arribades (*interarrival times*) $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Així, per a cada $t \in [0, \infty)$, direm que $N_t = k$ si

$$X_1 + \ldots + X_k \leq t \leq X_1 + \ldots + X_{k+1},$$

i, $N_t = 0$ si $t < X_1$. És a dir, $N_t = k$ si fins al temps t hi ha hagut k arribades.
Aleshores, $\{N_t, t \geq 0\}$ és un procés estocàstic a temps continu que pren valors a l'espai d'estats $\mathbb{N}$.
A més, les trajectòries són no decreixents, continuen per la dreta i creixen amb salts d'amplada 1.

Per comparar dos processos hi ha diversos conceptes que podem utilitzar i que indiquen relacions diferents: equivalents, indistingibles i versió. Vegem-ho:

Definició. *Un procés estocàstic* $\{X_t, t \in T\}$ es diu que és **equivalent** a un altre procés estocàstic $\{Y_t, t \in T\}$ si per a tot $t \in T$ se satifà que

$$P(X_t = Y_t) = 1.$$

Direm que $\{X_t, t \in T\}$ és una **versió** de $\{Y_t, t \in T\}$.
Exemple. Dos processos equivalents poden tenir trajectòries diferents. Considerem Z una variable aleatòria no negativa amb funció de distribució contínua i agafem $T = \mathbb{R}_+$. Definim, per a tot $t \geq 0$:

$$X_t = 0, \qquad Y_t = \mathbb{1}_{\{Z=t\}}.$$

Clarament els dos processos tenen trajectòries diferents però en canvi són equivalents ja que, fixat $t \geq 0$,

$$P(X_t = Y_t) = 1 - P(X_t \neq Y_t) = 1 - P(Z = t) = 1.$$

Definició. Dos processos estocàstics $\{X_t, t \in T\}$ i $\{Y_t, t \in T\}$ es diu que són **indistingibles** si es té que $X_\cdot(\omega) = Y_\cdot(\omega)$ per a tot $\omega \notin N$ amb $P(N) = 0$, o dit d'una altra manera, que

$$P(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1.$$

Està clar que dos processos indistingibles seran equivalents, però la implicació contrària no és certa.

Exemple. Dos processos equivalents que no són indistingibles. Considerem $Z \sim U(0,1)$ i agafem $T = [0,1]$. Definim, per a tot $t \in [0,1]$

$$X_t = 0, \qquad Y_t = \mathbb{1}_{\{Z=t\}}.$$

Com hem vist en l'exemple anterior, els dos processos són equivalents. En canvi, no seran indistingibles, ja que

$$P(X_t = Y_t, \forall t \in [0,1]) = P(Y_t = 0, \forall t \in [0,1]) = P(Z \neq t, \forall t \in [0,1]) = 0.$$

Acabem aquest tema amb algunes consideracions-definicions més sobre el concepte de *continuïtat*.

Definició. Un procés estocàstic a valors reals $\{X_t, t \in T\}$ on T és un interval de $\mathbb{R}$, es diu que és **continu en probabilitat** si, per a tot $\varepsilon > 0$ i cada $t \in T$

$$\lim_{s \to t} P\Big(|X_t - X_s| > \varepsilon\Big) = 0.$$

Definició. Fixem $p \geq 1$. Sigui $\{X_t, t \in T\}$, on T és un interval de $\mathbb{R}$, un procés estocàstic a valors reals tal que $E(|X_t|^p) < \infty$ per a tot $t \in T$. El procés $\{X_t, t \in T\}$ es diu que és **continu en mitjana d'ordre** p si per a tot $t \in T$

$$\lim_{s \to t} E\Big(|X_t - X_s|^p\Big) = 0.$$

La continuïtat en mitjana d'ordre p implica la continuïtat en probabilitat però no implica necessàriament que les trajectòries del procés estocàstic hagin de ser contínues. El criteri de Kolmogórov ens dona condicions suficents per obtenir la continuïtat de les trajectòries.
Criteri de continuïtat de Kolmogórov. Sigui $\{X_t, t \in T\}$ un procés estiocàstic a valors reals i T un interval finit de $\mathbb{R}$. Suposem que existeixen constants $\alpha > 1$ i $p > 0$ tal que

$$E\Big(|X_t - X_s|^p\Big) \leq C_T|t-s|^\alpha$$

per a tot $s, t \in T$ on C_T és una constant. Aleshores, existeix una versió del procés $\{X_t, t \in T\}$ amb trajectòries contínues.

Capítol 2

FUNCIÓ GENERATRIU

Iniciem un petit tema tècnic sobre la funció generatriu per poder estudiar després els processos de ramificació.

Definició. Sigui X una variable aleatòria no negativa a valors enters amb $p_k = P(X = k), k \geq 0$. Aleshores, es defineix la **funció generatriu** de X com

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k) = E\Big(s^X\Big),$$

per a tot $s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1$.
Observem que està ben definit, ja que la funció generatriu $\Phi_X(s)$ és una sèrie de potències amb radi de convergència de com a mínim 1, ja que, si $|s| \leq 1$:

$$|\Phi_X(s)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s^k p_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Encara que l'hem definida sobre $\mathbb{C}$ ens restringim a partir d'ara a $\mathbb{R}$.
La funció generatriu és una eina útil per al:

- **Càlcul de la llei de la suma de variables.**
- **Càlcul de moments.**
- **Càlcul de distribucions límit.**

Exemples:

1. Si $X \sim Pois(\lambda)$, aleshores per a tot $s > 0$

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

2. Si $X \sim B(n,p)$, aleshores per a tot $s > 0$

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} = (ps + 1 - p)^n.$$

3. Si $X \sim Geom(p)$, aleshores per a tot $0 < s < \frac{1}{1-p}$

$$\Phi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)s)^k = \frac{p}{1-(1-p)s}.$$

Com que $\Phi_X(s)$ és una sèrie de potències amb radi de convergència de com a mínim 1, podem derivar Φ_X tantes vegades com calgui intercanviant el sumatori amb l'operació de derivar, obtenint així

$$\begin{aligned} \Phi'_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} P(X=k), \\ \Phi''_X(s) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) s^{k-2} P(X=k), \end{aligned}$$

i en general

$$\frac{d^n}{ds^n} \Phi_X(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k \times \cdots \times (k-n+1) s^{k-n} p_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} s^{k-n} p_k,$$

per a tot $0 \leq s < 1$.

Proposició. La funció generatriu determina de manera única la distribució de probabilitat.
Prova. Observem que avaluant $s = 0$ obtenim que

$$\frac{d^n}{ds^n} \Phi_X(s)_{|s=0} = n! p_n,$$

per a tot $n \geq 0$. Així podem calcular tots els p_n. □

Tot seguit veurem com utilitzant la funció generatriu podem trobar els moments de variables aleatòries no negatives que prenen valors enters.
Teorema.

1. $E(X) = \lim_{s \uparrow 1} \Phi'_X(s)$,
2. $E\Big(X(X-1) \times \cdots \times (X-k+1)\Big) = \lim_{s \uparrow 1} \frac{d^k}{ds^k} \Phi_X(s)$,

on $\lim_{s \uparrow 1}$ denota el límit per l'esquerra.
Observem que les esperances del teorema estan ben definides —encara que poden ser ∞—, ja que els dos sumatoris tenen un nombre finit de valors negatius.

Prova. Sabem que $\Phi'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}P(X = k)$ per a tot $s \in (-r, r)$ on $r \geq 1$ és el radi de convergència de Φ_X. Observem que si $r = 1$, aleshores Φ_X no és derivable a $s = 1$. De totes maneres, com que és una suma de nombre positius, utilitzant el teorema de convergència monòtona podem escriure

$$\begin{aligned}\lim_{s\uparrow 1} \Phi'_X(s) &= \lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} ks^{k-1}P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{s\uparrow 1} ks^{k-1}P(X = k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = E(X).\end{aligned}$$

La segona part del teorema es demostra de la mateixa manera utilitzant el teorema de convergència monòtona, ja que

$$\frac{d^n}{ds^n}\Phi_X(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k \times \cdots \times (k-n+1)s^{k-n}p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \times \cdots \times (k-n+1)s^{k-n}p_k.$$

□

A partir d'aquí, si volem ser rigorosos, quan escriguem $\Phi'_X(1)$ i $\Phi''_X(1)$, estarem parlant de les derivades per l'esquerra. Observem que tenim

$$\Phi'_X(1) = E(X) \quad \text{i} \quad \Phi''_X(1) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X),$$

de manera que

$$\mathrm{Var}(X) = \Phi''_X(1) + \Phi'_X(1) - (\Phi'_X(1))^2.$$

Exemple. Sigui $X \sim B(n, p)$, amb $n \geq 2$. Sabem que $\Phi_X(s) = (ps + 1 - p)^n = ((1-p) + ps)^n$, per a tot $s > 0$. Calculem

$$\begin{aligned}\Phi'_X(s) &= np((1-p) + ps)^{n-1}, \\ \Phi''_X(s) &= n(n-1)p^2((1-p) + ps)^{n-2}.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}E(X) &= \Phi'_X(1) = np, \\ E(X(X-1)) &= \Phi''_X(1) = n(n-1)p^2 \\ \mathrm{Var}(X) &= \Phi''_X(1) + \Phi'_X(1) - (\Phi'_X(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).\end{aligned}$$

Mirem ara què passa amb la suma de variables aleatòries independents.

Proposició. Siguin X i Y dues variables aleatòries independents amb funcions generatrius Φ_X i Φ_Y, respectivament. Aleshores, per a tot s en els radis de convergència de Φ_X i Φ_Y es compleix que

$$\Phi_{X+Y}(s) = \Phi_X(s)\Phi_Y(s).$$

Prova. Només cal veure que

$$\Phi_{X+Y}(s) = E\Big(s^{X+Y}\Big) = E\Big(s^X\Big)E\Big(s^Y\Big) = \Phi_X(s)\Phi_Y(s).$$

□

Exemple. Suma de Poissons independents. Si $X \sim Poiss(\lambda)$ i $Y \sim Poiss(\beta)$ són dues variables aleatòries independents, aleshores $X+Y \sim Poiss(\lambda+\beta)$.
El resultat s'obté del fet que

$$\Phi_{X+Y}(s) = \Phi_X(s)\Phi_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\beta(s-1)} = e^{(\lambda+\beta)(s-1)},$$

que és la funció generatriu d'una $Poiss(\lambda+\beta)$.

Acabem aquesta secció estudiant les anomenades sumes aleatòries. És a dir, considerem que tenim:

1. $\{X_n\}_{n\geq 1}$, una família de variables aleatòries no negatives independents idènticament distribuïdes a valors enters amb funció generatriu $\Phi_X(s)$, $0 \leq s \leq 1$, i moments $E(X)$ i $Var(X)$,
2. N, una variable aleatòria no negativa a valors enters amb funció generatriu Φ_N i independent de les $\{X_n\}_{n\geq 1}$.

Definim aleshores $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ per a tot $k \geq 1$ i

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} X_k$$

amb $S_N = 0$ quan $N = 0$. Aleshores S_N té funció generatriu

$$\Phi_{S_N}(s) = \Phi_N(\Phi_X(s)),\ 0 \leq s \leq 1.$$

A més,

$$E(S_N) = E(N)E(X) \quad \text{i} \quad Var(S_N) = Var(N)E^2(X) + E(N)Var(X).$$

Vegem-ho. Per a tot $j \geq 0$

$$P(S_N = j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_N = j, N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = j, N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = j)P(N = k),$$

on hem utilitzat que S_k i N són independents. Per tant,

$$\begin{aligned}
\Phi_{S_N}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(S_N = j)s^j = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = j)P(N = k)\Big)s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} P(S_k = j)s^j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k)\Phi_{X_1+\ldots+X_k}(s) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k)\Big(\Phi_X(s)\Big)^k = \Phi_N(\Phi_X(s)).
\end{aligned}$$

Ara, com que $\Phi_{S_N}(s) = \Phi_N(\Phi_X(s))$, derivant obtenim que

$$\Phi'_{S_N}(s) = \Phi'_N(\Phi_X(s))\Phi'_X(s)$$

i fent $s \uparrow 1$ obtenim que

$$\Phi'_{S_N}(1) = \Phi'_N(\Phi_X(1))\Phi'_X(1) = \Phi'_N(1)\Phi'_X(1),$$

és a dir,

$$E(S_N) = E(N)E(X_1).$$

Tornem ara a derivar. Obtenim que

$$\Phi''_{S_N}(s) = \Phi''_N(\Phi_X(s))(\Phi'_X(s))^2 + \Phi'_N(\Phi_X(s))\Phi''_X(s)$$

i fent $s \uparrow 1$ obtenim que

$$\Phi''_{S_N}(1) = \Phi''_N(\Phi_X(1))(\Phi'_X(1))^2 + \Phi'_N(\Phi_X(1))\Phi''_X(1) = \Phi''_N(1)(\Phi'_X(1))^2 + \Phi'_N(1)\Phi''_X(1).$$

Utilitzant

$$\Phi'_Y(1) = E(Y) \quad \text{i} \quad \Phi''_Y(1) = E(Y^2) - E(Y),$$

hem obtingut que

$$E(S_N^2) - E(S_N) = \big(E(N^2) - E(N)\big)E^2(X) + E(N)\big(E(X^2) - E(X)\big),$$

que implica que

$$E(S_N^2) = E(N^2)E^2(X) - E(N)E^2(X) + E(N)E(X^2).$$

Si restem als dos costats $E^2(S_N) = E^2(N)E^2(X)$ obtenim

$$\begin{aligned} Var(S_N) &= E(N^2)E^2(X) - E^2(N)E^2(X) - E(N)E^2(X) + E(N)E(X^2) \\ &= \big(E(N^2) - E^2(N)\big)E^2(X) + E(N)\big(E(X^2) - E^2(X)\big) \\ &= Var(N)E^2(X) + E(N)Var(X). \end{aligned}$$

Exemple. Considerem $N \sim Poiss(\lambda)$ i $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb llei $B(p)$. Considerem $S_N = \sum_{k=0}^{N} X_i$. Aleshores,

$$\Phi_{S_N}(s) = \Phi_N(\Phi_X(s)) = \Phi_N(1 - p + sp) = e^{\lambda(1-p+sp-1)} = e^{\lambda p(s-1)},$$

de manera que tindrem que $S_N \sim Poiss(\lambda p)$.

Capítol 3

PROCESSOS DE RAMIFICACIÓ

A mitjan del segle XIX, algunes famílies aristocràtiques a l'Anglaterra victoriana van veure que els seus cognoms podien desaparèixer. Sir Francis Galton va plantejar la qüestió següent l'any 1873 a *Educational Times*: "How many male children must each generation of a family have in order for the family name to continue in perpetuity?". El 1874, Galton i Watson van escriure *On the probability of extinction of families* on donaven resposta a la pregunta plantejada.
El model que van proposar és l'inici dels anomenats *processos de ramificació*.

3.1 Model matemàtic

El model proposat va ser el següent:

1. La població comença amb un únic individu a l'instant inicial $n = 0$, és a dir, $Z_0 = 1$.
2. Després d'una unitat de temps, $n = 1$, l'únic individu inicial produeix Z_1 clons d'ell mateix i mor. Z_1 és una variable aleatòria no negativa a valors enters.
   (a) Si $Z_1 = 0$, la població s'extingeix.
   (b) Si $Z_1 \neq 0$, després d'una unitat de temps, $n = 2$, cada un dels Z_1 individus té un nombre aleatori de fills i després es moren. És a dir,
   $$Z_2 = \sum_{k=1}^{Z_1} Z_{2,k}.$$
   A més, $\{Z_{2,k}, k \geq 1\}$ és una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb la mateixa llei que Z_1 i independent de Z_1. A la llei de Z_1 l'anomenarem la distribució de la descendència (*offspring distribution*).
3. Les generacions següents es reprodueixen de la mateixa manera. Així
   $$Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} Z_{n,k},$$

on $\{Z_{n,k}, k \geq 1\}$ és una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb la mateixa llei que Z_1 i independent de totes les variables implicades en les generacions anteriors. Observem que $Z_{n,j}$ correspon al nombre de membres de la n-èsima generació que són descendents del j-èsim membre de la $(n-1)$-èsima generació.

Definició. Un procés estocàstic que satisfà les propietats 1, 2 i 3 direm que és un **procés de ramificació simple** (*simple branching process*).

Observem que:

1. Si $Z_n = 0$, aleshores $Z_{n+k} = 0$ per a tot $k \geq 0$; és a dir, quan arribem al zero (extinció de la població) ens hi quedem.

2. Z_{n-1} és independent de $\{Z_{n,k}, k \geq 0\}$.

La idea és que la distribució de la descendència determina l'evolució del procés. La pregunta de Galton la podem plantejar ara de la manera següent:
Sota quines condicions en la distribució de la descendència (*offspring distribution*) el procés $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ no arribarà mai a l'extinció, o dit d'una altra manera, quan

$$P\Big(Z_n \geq 1, \, \forall n \geq 1\Big) = 1$$

serà cert?

3.2 Procés de ramificació simple

Estem amb un procés $\{Z_n, n \geq 0\}$ amb

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 1, \\
Z_1 &= Z_{1,1}, \\
Z_2 &= Z_{2,1} + \ldots + Z_{2,Z_1}, \\
&\ \ldots \\
Z_n &= Z_{n,1} + \ldots + Z_{n,Z_{n-1}}, \\
&\ \ldots
\end{aligned}$$

on $\{Z_{n,k},\, n \geq 1, k \geq 0\}$ és una família de variables aleatòries no negatives a valors enters independents idènticament distribuïdes amb la mateixa llei que $Z_{1,1}$ amb $P(Z_{1,1} = k) = p_k$ per a tot $k \geq 1$.

Considerem les funcions generatrius

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= E\Big(s^{Z_{1,1}}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1, \\
\Phi_n(s) &= E\Big(s^{Z_n}\Big), \quad 0 \leq s \leq 1, \, \forall n > 0.
\end{aligned}$$

Clarament

$$\begin{aligned}\Phi_0(s) &= s,\\ \Phi_1(s) &= \Phi(s),\end{aligned}$$

i com que $Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} Z_{n,k}$

$$\Phi_n(s) = \Phi_{n-1}(\Phi(s)).$$

Observem que la llei de Z_n és difícil de calcular explícitament però, en canvi, la podem determinar a partir de Φ_n, que es pot obtenir component funcionalment n vegades la funció Φ, ja que

$$\Phi_n(s) = \Phi(\Phi_{n-1}(s)),$$

com es veu fent

$$\Phi_n(s) = \Phi_{n-1}(\Phi(s)) = \Phi_{n-2}(\Phi(\Phi(s))) = \Phi_{n-2}(\Phi_2(s)) = \cdots = \Phi(\Phi_{n-1}(s)).$$

Tenim una expressió explícita per als moments de Z_n.
Proposició. Sigui $m = E(Z_{1,1})$ i $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Z_{1,1})$ tal que $m > 0$ i $0 < \sigma^2 < \infty$. Aleshores,

$$\begin{aligned}E(Z_n) &= m^n,\\ Var(Z_n) &= \begin{cases}\sigma^2 m^{n-1}\left(\frac{1-m^n}{1-m}\right), & \text{si}\, m \neq 1,\\ \sigma^2 n, & \text{si}\, m = 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Prova. Sigui $m_n = E(Z_n)$. Com que $Z_n = \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} Z_{n,k}$ sabem que

$$m_n = E(Z_{n-1})E(Z_{1,1}) = m_{n-1}m.$$

Iterant m vegades, obtindrem que

$$m_n = m_{n-1} \times m = m_{n-2} \times m^2 = \cdots = m \times m^{n-1} = m^n.$$

D'altra banda, tenim també que

$$Var(Z_n) = m^2 Var(Z_{n-1}) + m^{n-1}\sigma^2.$$

Quan $m = 1$, aquesta darrera igualtat és només

$$Var(Z_n) = Var(Z_{n-1}) + \sigma^2.$$

Iterant n vegades i observant que $Var(Z_0) = 0$, ens queda

$$Var(Z_n) = Var(Z_{n-1}) + \sigma^2 = Var(Z_{n-2}) + 2\sigma^2 = \cdots = Var(Z_1) + (n-1)\sigma^2 = n\sigma^2.$$

Ens queda per fer el cas $m \neq 1$. Demostrem per inducció que $Var(Z_n) = \sigma^2 m^{n-1}\left(\frac{1-m^n}{1-m}\right)$. Suposem que és cert per a $m - 1$. Com que

$$Var(Z_n) = m^2 Var(Z_{n-1}) + m^{n-1}\sigma^2,$$

aplicant la hipòtesi d'inducció tindrem que

$$\begin{aligned} Var(Z_n) &= m^2\sigma^2 m^{n-2}(\frac{1-m^{n-1}}{1-m}) + m^{n-1}\sigma^2 \\ &= \sigma^2 m^{n-1}\big(m\frac{1-m^{n-1}}{1-m}+1\big) \\ &= \sigma^2 m^{n-1}(\frac{m-m^n+1-m}{1-m}) \\ &= \sigma^2 m^{n-1}(\frac{1-m^n}{1-m}). \end{aligned}$$

□

Observem, per tant, que

1. **Si $m = 1$, la mitjana de la població no varia i la variància creix linealment —parlarem del cas crític.**
2. **Si $m > 1$, tant la mitjana de la població com la seva variància creixen geomètricament —parlarem del cas supercrític.**
3. **Si $m < 1$, tant la mitjana com la variància decreixen geomètricament —parlarem del cas subcrític.**

3.3 Probabilitat d'extinció

Com ja hem comentat, el nostre objectiu és calcular la probabilitat d'extinció, és a dir

$$\rho = P(\{\text{extinció}\}).$$

Observeu que

$$\{\text{extinció}\} = \{Z_n = 0\,\text{per algun}\,n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k = 0\},$$

de manera que

$$\rho = P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k=0\}) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n}\{Z_k=0\}) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0)$$

on hem utilitzat la propietat de continuïtat seqüencial de la probabilitat, ja que la successió de conjunts $\{Z_n = 0\}$ és creixent. L'objectiu és poder calcular la ρ sense haver de calcular les $P(Z_n = 0)$.
Observem que si $p_0 = 0$, aleshores $\rho = 0$ i si $p_0 = 1$ clarament $\rho = 1$. A partir d'ara suposarem que $0 < p_0 + p_1 < 1$.

Teorema. Suposem que $0 < p_0 + p_1 < 1$ i sigui Φ la funció generatriu de $Z_{1,1}$. Aleshores:

1. Si $m \leq 1$, $\rho = 1$.

2. Si $m > 1$, $\rho < 1$ i és l'única solució no negativa de l'equació $s = \Phi(s)$ que és menor que 1.

Prova. Dividim la prova en tres etapes.
Primer, demostrem que ρ és solució de l'equació $s = \Phi(s)$. Sigui

$$\rho_n = P(Z_n = 0) = \Phi_n(0).$$

Ja hem vist que $\rho_n \uparrow_{n\to\infty} \rho$. Com que $\Phi_{n+1}(s) = \Phi(\Phi_n(s))$, substituint amb $s = 0$ tenim que

$$\rho_{n+1} = \Phi(\rho_n).$$

Com que Φ és contínua, fent $n \to \infty$ obtenim que

$$\rho = \Phi(\rho).$$

Segon, demostrem que ρ és la solució més petita a l'interval $[0,1]$ de l'equació $s = \Phi(s)$. Sigui $q \in [0,1]$ una solució. Aleshores, com que $q \geq 0$ i Φ és una funció creixent,

$$\rho_1 = \Phi(0) \leq \Phi(q) = q.$$

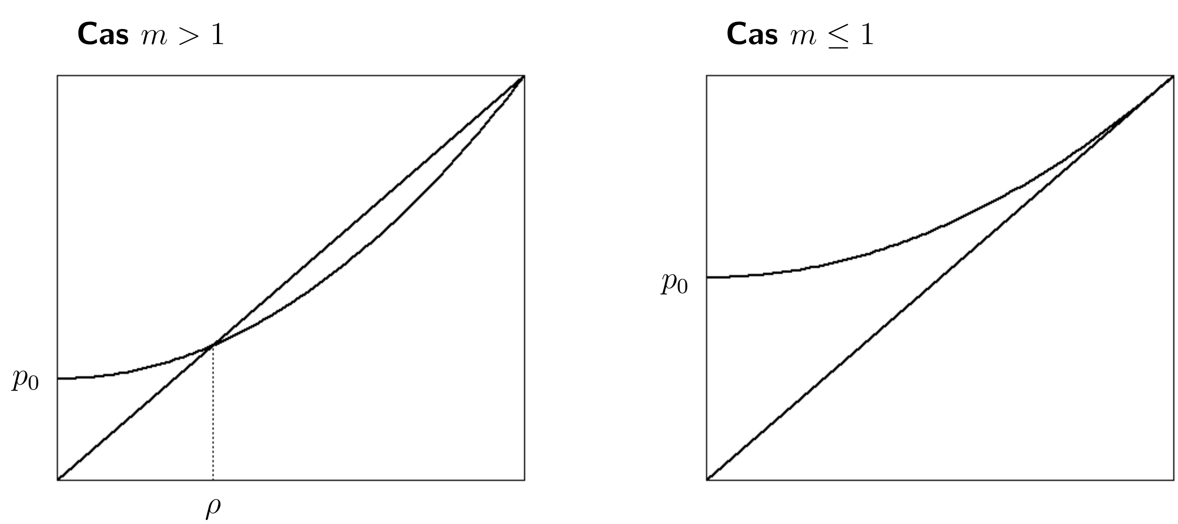
Veiem, per inducció, que $\rho_n \leq q$ per tot $n \geq 1$. El cas $n = 1$ ja l'hem vist. Suposem que és cert fins a $n-1$, aleshores

$$\rho_n = \Phi_n(0) = \Phi(\Phi_{n-1}(0)) = \Phi(\rho_{n-1}) \leq \Phi(q) = q.$$

Un cop tenim que $\rho_n \leq q$ per a tot $n \geq 1$, fent $n \to \infty$ obtenim que $\rho \leq q$.
Tercer, obtenim l'existència de solució. Com que

$$\Phi''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0,$$

Φ és una funció convexa. Com que $\Phi(0) = p_0 > 0$ i Φ és convexa, les funcions $y = \Phi(s)$ i $y = s$ per a $s \in (0,1)$ tenen com a molt dos punts en comú:



1. Si $\Phi'(1) = m \leq 1$, per la convexitat de Φ, la gràfica $y = \Phi(s)$ està sempre per sobre de la diagonal i, per tant, només hi ha una intersecció quan $s = 1$.

2. Si $\Phi'(1) = m > 1$, per la convexitat de Φ, la gràfica $y = \Phi(s)$ està per sota de la diagonal en un entorn de l'1 i, per tant, a part de $s = 1$, hi ha una altra intersecció.

$\square$

Tenim encara una manera més general de trobar el valor de ρ.
Proposició. Per a tot $s \in [0, 1)$, $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(s) = \rho$.
Prova. Distingim dos casos.
Fem primer el cas $0 \leq s \leq \rho$. Fixat s, com que Φ és creixent,

$$\Phi(s) \leq \Phi(\rho) = \rho.$$

Tornant a aplicar la Φ obtenim que

$$\Phi_2(s) = \Phi(\Phi(s)) \leq \Phi(\rho) = \rho.$$

Repetint el procés obtenim que per a tot $n \geq 1$ es compleix que $\Phi_n(s) \leq \rho$.
Tenim, per tant, que

$$\rho_n = \Phi_n(0) \leq \Phi_n(s) \leq \rho.$$

Així doncs, fent $n \to \infty$ obtenim que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n \leq \lim_{n\to\infty} \Phi_n(s) \leq \rho,$$

i acabem la prova en aquest cas.
Fem ara el cas $\rho \leq s < 1$. Com que $\rho \leq s < 1$, es compleix que $\Phi(s) \leq s$ (es veu fàcilment al gràfic del cas $m > 1$). Com que Φ és creixent,

$$\rho = \Phi(\rho) \leq \Phi(s) \leq s.$$

Tornant a aplicar la Φ, obtenim que:

$$\rho = \Phi(\rho) \leq \Phi_2(s) \leq \Phi(s) \leq s,$$

i repetint el mateix argument, obtindrem

$$\rho \leq \Phi_n(s) \leq \Phi_{n-1}(s) \leq \ldots \leq \Phi(s) \leq s.$$

Per tant, existeix

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(s) = \Phi_\infty(s) < 1.$$

Per acabar la demostració suposarem que existeix algun $s_0 \in (\rho, 1)$ tal que $\Phi_\infty(s_0) = \alpha > \rho$ i veurem que arribem a una contradicció —que prové, per tant, de suposar que $\alpha > \rho$. Vegem-ho. Si $\Phi_\infty(s_0) = \alpha > \rho$, aleshores

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\lim_{n\to\infty} \Phi_n(s_0)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{n+1}(s_0) = \alpha,$$

i, per tant, α és una solució no negativa de l'equació $s = \Phi(s)$ que és menor que 1. Però estem en el cas $m > 1$ i sabem que ρ és l'única solució no negativa de l'equació $s = \Phi(s)$ que és menor que 1.

□

Observem que el fet que quan n tendeixi a ∞,

$$\Phi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)s^k \to \rho$$

ens dona la idea que

$$\begin{aligned} P(Z_n = 0) &\quad \longrightarrow \rho \\ P(Z_n = k) &\quad \longrightarrow 0, \qquad \forall \geq 1, \end{aligned}$$

o dit en altres paraules, que o bé la població s'extingeix o bé la població explota

$$P(Z_n \to 0 \text{ o } Z_n \to \infty) = 1.$$

Recollim aquesta idea en la proposició següent.

Proposició. Suposem que $0 < p_0 + p_1 < 1$. Aleshores,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0, \qquad \forall k \geq 1.$$

A més a més,

$$P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = \rho.$$

Prova. Definim

$$R_k = P(Z_{n+j} = k \text{ per algun } j \geq 1 \mid Z_n = k).$$

Podem veure primer que $R_k < 1$ per a tot $k \geq 1$. Vegem-ho:

1. Si $p_0 = 0$, aleshores com que cada membre de la generació n-èsima ha de tenir només un descendent, tindrem que

$$R_k = P(Z_{n+1} = k|Z_n = k) = p_1^k < 1.$$

2. Si $p_0 > 0$, aleshores

$$R_k \leq P(Z_{n+1} > 0|Z_n = k) = 1 - P(Z_{n+1} = 0|Z_n = k) = 1 - p_0^k < 1.$$

$R_k < 1$ ens diu que, si en un moment la població és k, la probabilitat que tornem a una població de k més endavant és més petita que 1. Per tant,

$$P(Z_n = k \,\text{per a un nombre infinit de n}) = 0.$$

I, per tant, Z_n ha d'anar cap a 0 o a cap a ∞, és a dir:

$$P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) + P(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1,$$

i, evidentment, per a tot $k \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = k) = 0.$$

□

Exemple. Estudi clàssic d'Alfred Lotka per estimar l'extinció de cognoms als EUA el 1920. Alfred Lotka va estimar la probabilitat que els descendents mascles d'una línia familiar s'extingissin als EUA el 1930. Basant-se en les dades del cens de 1920, Lotka va ajustar la distribució del nombre de fills mascles d'un home a una distribució geomètrica modificada amb $p_0 = 0,48235$ i $p_k = (0,2126)(0,5893)^{k-1}$ per a $k \geq 1$ amb $m = 1,26$. La funció generatriu corresponent té la forma

$$\Phi(s) = 0,48235 + 0,2126 \sum_{k00}^{\infty} 0,5893^{k-1} s^k = 0,48235 + \frac{0,2126s}{1 - 0,5893s}.$$

Lotka va estimar numèricament la solució de l'equació $\Phi(s) = s$ i va determinar una probabilitat d'extinció de $\rho = 0,819$.

Observem que, tot i que la mitjana del nombre de fills que tenia un home era al voltant de 2,5 (inclou mascles i femelles), la probabilitat d'extinció del cognom d'una família era de més del 80 %.

Capítol 4

PROCÉS DE POISSON

Comencem situant el procés de Poisson dins de dues classes més grans de processos: els processos puntuals i els processos de comptatge.

4.1 Processos puntuals i processos de comptatge

Els processos puntuals s'utilitzen per modelitzar processos que depenen de punts en algun subespai de $E \subset \mathbb{R}^d$. Assumim que hi ha una sèrie de punts distribuïts a l'atzar a E i ens interessarà la funció que comptarà el nombre aleatori de punts que hi ha en cada subconjunt afitat $A \subset E$.
Això inclou exemples com els temps d'arribada a una cua, la posició i el moment en què hi ha un terratrèmol o la posició d'un cert tipus d'arbre en un bosc.

Considerem $E \subset \mathbb{R}^d, d \geq 1$. Suposem que tenim una família $\{X_n, n \in T\}$, $X_n : \Omega \to E$ de punts aleatoris sobre l'espai E. Aleshores, fixat $A \subset E$, considerem

$$\mathbb{1}_{X_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n \in A, \\ 0, & \text{si } X_n \neq A. \end{cases}$$

Aleshores, definim la mesura de comptatge

$$N(\cdot) = \sum_n \mathbb{1}_{X_n}(\cdot)$$

amb

$$N(A) = \sum_n \mathbb{1}_{X_n}(A),$$

el nombre de punts aleatoris que cauen al conjunt A.
Definició. Direm que N és un **procés puntual** i anomenarem punts a les variables $\{X_n, n \in T\}$.

Exemple. Modelització lloc-temps de terratrèmols. En aquest cas considerem

$$E = [0, \infty) \times \mathbb{R}^2,$$

és a dir, temps per espai. Podem escriure el procés puntual com

$$N = \sum_n \mathbb{1}_{(T_n,(L_{n,1},L_{n,2}))}$$

on T_n representa el temps en què hi ha hagut l'n-èsim terratrèmol i $(L_{n,1}, L_{n,2})$ són la seva longitud i la seva latitud. Així, donats $0 < s < t$ i $B \subset \mathbb{R}^2$, $N([s,t] \times B)$ denota el nombre de terratrèmols localitzats a la regió B durant l'interval de temps $[s,t]$.

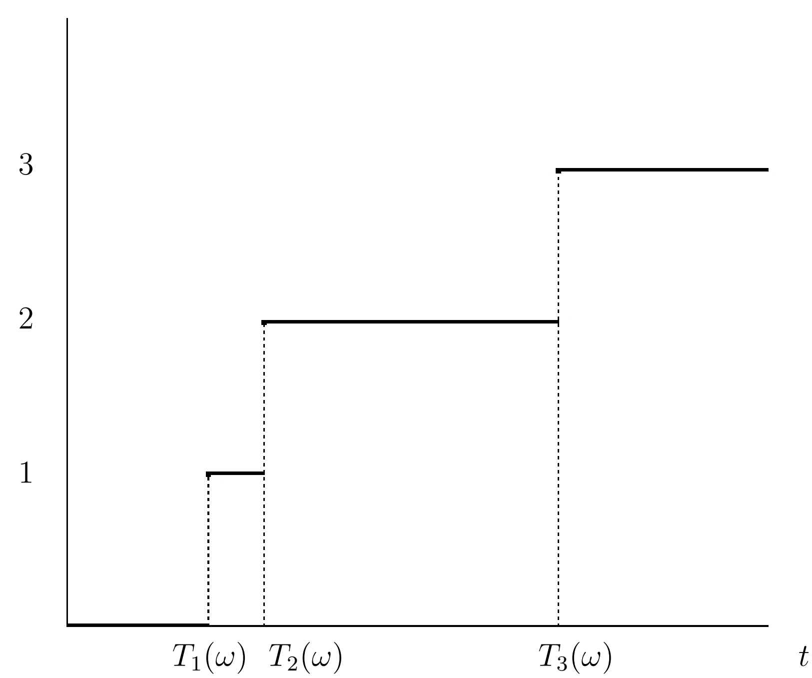
Vegem ara un cas particular dels processos puntuals, els processos de comptatge.
Definició. Un **procés de comptage** és un procés aleatori $\{N_t, t \geq 0\}$ no negatiu, creixent a valors enters, és a dir,

- $N_0 = 0$ i $N_t \geq 0$ per a tot t.
- N_t és un enter.
- Si $s < t$, aleshores $N_s \leq N_t$.

Si $s < t$, aleshores $N_t - N_s$ és el nombre d'esdeveniments que han succeït durant l'interval $[s,t]$.

Recordem que estem en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Fixat ω, si dibuixem una trajectòria $N_{\cdot}(\omega)$

Trajectòria del procés de comptatge



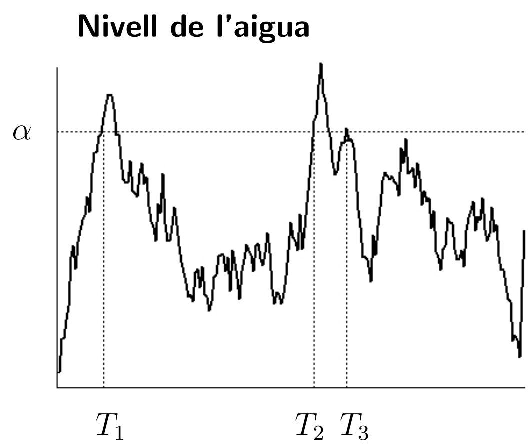
en què als $\{T_n\}_{n\geq 1}$ els anomenarem els **temps d'arribada**, aleshores,

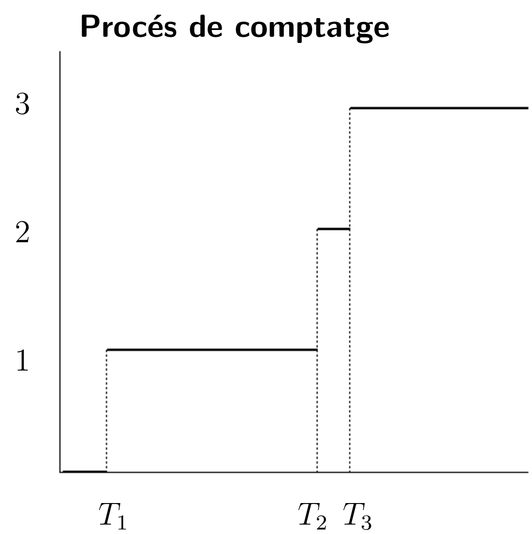
$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}.$$

A més, tenim la relació

$$\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}.$$

Observeu que l'expressió de N_t ens mostra el procés de comptatge com un procés puntual.
Exemple del nivell de l'aigua d'un riu. Considerem al gràfic següent el nivell màxim d'aigua d'un riu. A partir d'un cert nivell α s'inunda una zona determinada del voltant del riu. Indiquem els moments on es produeix una inundació. Si considerem el procés que compta quan hi ha inundacions, obtenim un procés de comptatge.





Recordem que hem vist què vol dir que un procés té increments independents i què vol dir que té increments estacionaris. En processos de comptatge s'interpreta:

- **Tindrà increments estacionaris si la distribució del nombre d'esdeveniments que passen en un interval de temps depèn només de la longitud de l'interval.**

- **Tindrà increments independents si les distribucions del nombre d'esdeveniments que passen en dos intervals de temps disjunts són independents.**

4.2 Definició del procés de Poisson

Definició. Un procés de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ es diu que és un **procés de Poisson** de paràmetre λ, $\lambda > 0$, si

1. $N_0 = 0$.

2. El procés té increments independents.

3. Per a tot $0 \leq s, t$, $N_{t+s} - N_t \sim Pois(\lambda s)$, és a dir,

$$P(N_{t+s} - N_t = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}.$$

Observem que 3 ens diu que tenim increments estacionaris. Combinant 1 i 3 també és evident que $N_t \sim Poiss(\lambda t)$.

Hi ha altres definicions del procés de Poisson, equivalents a la que hem donat, que es poden trobar a la literatura matemàtica. Una de les més habituals és la següent.
Definició 2. Un procés de comptatge $\{N_t, t \geq 0\}$ es diu que és un **procés de Poisson** de paràmetre λ, $\lambda > 0$, si

1. $N_0 = 0$
2. El procés té increments independents i estacionaris.
3. $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$
4. $P(N_h \geq 2) = o(h)$.

Recordem que diem f és $o(h)$ si, i només si, $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.
La demostració de l'equivalència entre les dues definicions es pot trobar fàcilment a la literatura matemàtica.

El procés de Poisson no és una martingala. S'ha de fer una translació.

Nota recordatòria sobre la definició de martingala. Donat un procés $\{M_t\}_{t \geq 0}$ i una filtració $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, direm que $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ és una martingala si satisfà

- M_t és integrable per a tot $t \geq 0$.
- M_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable per a tot $t \geq 0$.
- Per a tot $s < t$, $E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$.

Proposició. Considerem la família de σ-àlgebres $\mathcal{F}_t = \sigma\langle N_u, u \leq t\rangle$. Aleshores,

$$\{N_t - \lambda t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

és una martingala.
Prova. Clarament $N_t - \lambda t$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable i es comprova fàcilment que és integrable

$$E(|N_t - \lambda t|) \leq E(N_t) + \lambda t < +\infty.$$

Ens cal, per tant, calcular, per a $0 < s < t$

$$\begin{aligned} E(N_t - \lambda t | \mathcal{F}_s) &= E(N_t | \mathcal{F}_s) - \lambda t \\ &= E(N_t - N_s | \mathcal{F}_s) + E(N_s | \mathcal{F}_s) - \lambda t \\ &= E(N_t - N_s) + N_s - \lambda t = \lambda(t - s) + N_s - \lambda t \\ &= N_s - \lambda s, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que $N_t - N_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$ i que N_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable. $\square$

4.3 Els temps d'arribada del procés de Poisson

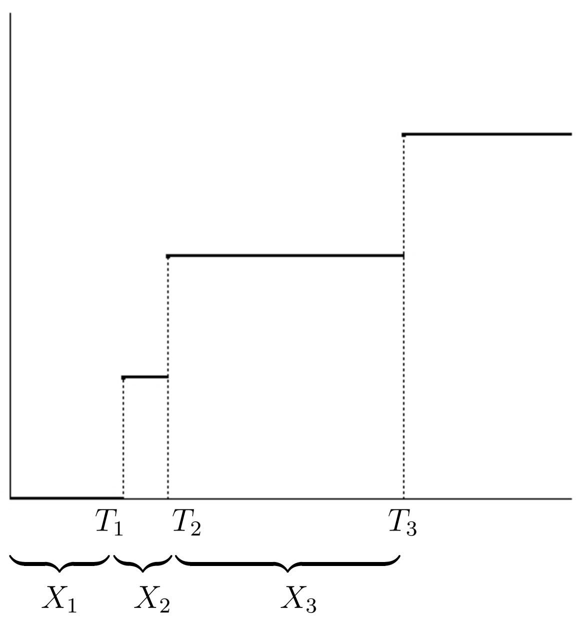
Considerem un procés de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ amb paràmetre λ, $\lambda > 0$. Definim aleshores els temps següents:

- Per a tot $n \geq 1$, T_n és el **temps d'arribada** (*arrival times*) de l'n-èsim salt.
- Per a tot $n \geq 1$, X_n és el temps entre l'$n-1$-èsim i l'n-èsim salt. S'anomenen els **temps entre arribades** (*interarrival times*).

Per tant, tenim dues successions: la successió de temps d'arribades $\{T_n\}_{n\geq 1}$ i la successió de temps entre arribades $\{X_n\}_{n\geq 1}$. A més,

$$\begin{aligned} &T_0 = 0, \qquad T_1 = X_1, \qquad T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1, \\ &X_n = T_n - T_{n-1},\ n \geq 2. \end{aligned}$$

Trajectòria del procés de Poisson



Tot seguit estudiarem les propietats tant de les $\{T_n\}_{n\geq 1}$ com de les $\{X_n\}_{n\geq 1}$.
Proposició. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ és una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució exponencial del paràmetre λ.
Prova. Estudiem primer X_1. Observem que

$$P(X_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

i, per tant, $X_1 \sim \exp(\lambda)$.

D'altra banda, en tenim prou demostrant que

$$P(X_{n+1} > t | X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) = e^{-\lambda t},$$

ja que això ens diu que $X_{n+1} \sim \exp(\lambda)$ i és independent de $\sigma\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$. Per demostrar-ho observem primer que

$$\sigma\langle X_1, \ldots, X_n \rangle = \sigma\langle T_1, \ldots, T_n \rangle = \sigma\langle N(u), u \leq T_n \rangle.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} > t | X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) &= P(X_{n+1} > t | T_1 = s_1, \ldots, T_n = s_1 + \cdots + s_n) \\
&= P(N(s_1 + \cdots + s_n + t) - N(s_1 + \cdots + s_n) = 0 | T_1 = s_1, \ldots, T_n = s_1 + \cdots + s_n) \\
&= P(N(s_1 + \cdots + s_n + t) - N(s_1 + \cdots + s_n) = 0 | N_u, u \leq s_1 + \cdots + s_n) \\
&= P(N(s_1 + \cdots + s_n + t) - N(s_1 + \cdots + s_n) = 0) = e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

□

Com que $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$, aquesta proposició implica que T_n segueix una distribució gamma amb paràmetres n i λ, és a dir, amb densitat

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

i que és independent de X_{n+1}.

El fet que els temps entre les arribades siguin variables exponencials independents —totes amb el mateix paràmetre— és un aspecte fonamental del procés de Poisson. En alguns llibres es pot trobar una definició del procés de Poisson, equivalent a les dues que hem donat, basada en els temps entre arribades.

Definició 3. Sigui $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una família de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució exponencial de paràmetre λ. Un procés de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ es diu que és un **procés de Poisson** de paràmetre λ, $\lambda > 0$, si per a cada $n \geq 1$, l'arribada n-èsima es dona al temps $T_n = X_1` + \ldots + X_n$.

Com ja hem comentat, la distribució exponencial està estretament lligada als temps del procés de Poisson. Així, si estem a un temps t, el temps d'espera fins a l'arribada següent és també una exponencial.

Nota recordatòria sobre les propietats de la llei exponencial:

- La llei exponencial no té memòria, és a dir, si $X \sim \exp(\alpha)$, aleshores per a tot $x, y > 0$

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x).$$

- Si $X \sim \exp(\alpha)$, $Y \sim \exp(\beta)$ i X i Y són independents, aleshores $\min(X, Y) \sim \exp(\alpha + \beta)$.

Proposició. Fixem $t \geq 0$. Sigui W_t el temps d'espera des de t fins a l'arribada següent. Aleshores $W_t \sim \exp(\lambda)$.

Prova. Com que no sabem quantes arribades hi ha hagut abans de t, hem d'escriure

$$\{W_t \le z\} = \cup_{n=0}^{\infty}\{T_n \le t < T_{n+1} \le t+z\}.$$

Hem de calcular cada una de les probabilitats de la unió. Utilitzant que $T_{n+1} = T_n + X_{n+1}$, amb $T_n \sim \gamma(n,\lambda)$, $X_{n+1} \sim \exp(\lambda)$ independents, podem escriure

$$\begin{aligned}
&P(T_n \le t < T_{n+1} \le t+z) \\
&= \int\int_{\{(x,y), x\le t\le x+y\le t+z\}} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y} dx dy \\
&= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}\Big(\int_{t-x}^{t+z-x} \lambda e^{-\lambda y} dy\Big) dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}\Big(e^{-\lambda(t-x)} - e^{-\lambda(t+z-x)}\Big) dx \\
&= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1}\Big(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+z)}\Big) dx \\
&= \frac{1}{n!}(\lambda t)^n\Big(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+z)}\Big).
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
P(W_t \le z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \le t < T_{n+1} \le t+z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\Big(1 - e^{-\lambda z}\Big) = 1 - e^{-\lambda z}.
\end{aligned}$$

□

També es diu que el procés de Poisson és absolutament aleatori (*absolutely random*), ja que si sabem que a l'instant t hi ha hagut n esdeveniments, aquests es distribueixen de manera aleatòria.

Nota recordatòria sobre els estadístics d'ordre. Siguin $Y_1, \cdots, Y_n$, n variables aleatòries independents. Definim els seus estadístics d'ordre com $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ si

$$Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le \cdots \le Y_{(n)}.$$

Si les variables $Y_1, \cdots, Y_n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb llei $U(0,t)$, aleshores tenen densitat conjunta

$$f_{(Y_1,\ldots,Y_n)}(y_1,\ldots,y_n) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y_i) = \frac{1}{t^n}\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{(0,t)}(y_i).$$

En canvi, l'estadístic d'ordre $(Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)})$ té densitat conjunta

$$f(y_1,\ldots,y_n) = \frac{n!}{t^n}\mathbb{1}_D(y_1,\ldots,y_n),$$

amb $D = \{x \in (0,t)^n; x_1 < x_2 < \ldots < x_n\} \subset (0,t)^n$.

Proposició. Si $N_t = n$, aleshores els temps d'arribada $(T_1, \ldots, T_n)$ segueixen la mateixa distribució que els estadístics d'ordre corresponents a n variables aleatòries independents $U(0,t)$.
Prova. Hem de comprovar que per a tot $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq t$,

$$P(T_i \leq s_i, i = 1, \ldots, n | N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int_0^{s_1} \ldots \int_{x_{n-2}}^{s_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^{s_n} dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1.$$

Calculem primer

$$\begin{aligned}
&P(T_i \leq s_i, i = 1, \ldots, n, N_t = n) \\
&\quad = P(X_1 \leq s_1, X_1 + X_2 \leq s_2, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq s_n, X_1 + \ldots + X_{n+1} \geq t) \\
&\quad = \int_0^{s_1} \int_0^{s_2 - t_1} \cdots \int_0^{s_n - (t_1 + \ldots + t_{n-1})} \int_{t-(t_1+\ldots+t_n)}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda(t_1 + \cdots + t_{n+1})} dt_1 \ldots dt_{n+1} \\
&\quad = \lambda^n \int_0^{s_1} \int_0^{s_2 - t_1} \cdots \int_0^{s_n - (t_1 + \ldots + t_{n-1})} e^{-\lambda(t_1 + \cdots + t_n)} [-e^{-\lambda t_{n+1}}]_{t-(t_1+\ldots+t_n)}^{\infty} dt_1 \ldots dt_n \\
&\quad = \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^{s_1} \int_0^{s_2 - t_1} \cdots \int_0^{s_n - (t_1 + \ldots + t_{n-1})} dt_1 \ldots dt_n \\
&\quad = \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^{s_1} \int_{u_1}^{s_2} \cdots \int_{u_{n-1}}^{s_n} du_1 \ldots du_n,
\end{aligned}$$

en què en el darrer pas hem fet el canvi

$$\begin{cases} u_n = t_1 + \cdots + t_{n-1} + t_n \\ u_{n-1} = t_1 + \cdots + t_{n-1} \\ \cdots \\ u_1 = t_1. \end{cases}$$

La prova acaba fàcilment, ja que

$$P(T_i \leq s_i, i = 1, \ldots, n, N_i = n) = \frac{P(T_i \leq s_i, i = 1, \ldots, n, N_t = n)}{P(N_t = n)}$$

i

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

□

Tenim també el resultat següent on apareix la distribució binomial.
Proposició. Sigui $u < t$ i $n > 0$. Aleshores, $N_{u|N_t = n} \sim B(n, \frac{u}{t})$.

Prova. Sigui $k \in \{0, \dots, n\}$. Calculem:

$$\begin{aligned}
P(N_u = k | N_t = n) &= \frac{P(N_u = k, N_t - N_u = n-k)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{P(N_u = k) P(N_{t-u} = n-k)}{P(N_t = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\lambda(t-u)} \frac{(\lambda(t-u))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{u^k (t-u)^{n-k}}{t^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

4.4 Superposició i descomposició de processos de Poisson

Teorema. Siguin $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$ i $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ dos processos de Poisson independents de paràmetres λ_1 i λ_2, respectivament. Aleshores, $\{N_t^{(1)} + N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ és un procés de Poisson de paràmetre $\lambda_1 + \lambda_2$.
El procés de Poisson $\{N_t^{(1)} + N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ s'anomena la **superposició dels processos** $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$ i $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$.
Prova. Clarament $\{N_t^{(1)} + N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ és un procés de comptatge. A més, podem comprovar que:

- $N_0^{(1)} + N_0^{(2)} = 0 + 0 = 0.$
- Té increments independents, ja que si $0 < s < t$

$$(N_t^{(1)} + N_t^{(2)}) - (N_s^{(1)} + N_s^{(2)}) = (N_t^{(1)} - N_s^{(1)}) + (N_t^{(2)} - N_s^{(2)}).$$

  Com que $N_t^{(1)} - N_s^{(1)}$ és independent de $\{N_u^{(1)}, u \leq s\}$, $N_t^{(2)} - N_s^{(2)}$ és independent de $\{N_u^{(2)}, u \leq s\}$ i $N^{(1)}$ i $N^{(2)}$ són independents, aleshores,

$$(N_t^{(1)} + N_t^{(2)}) - (N_s^{(1)} + N_s^{(2)})$$

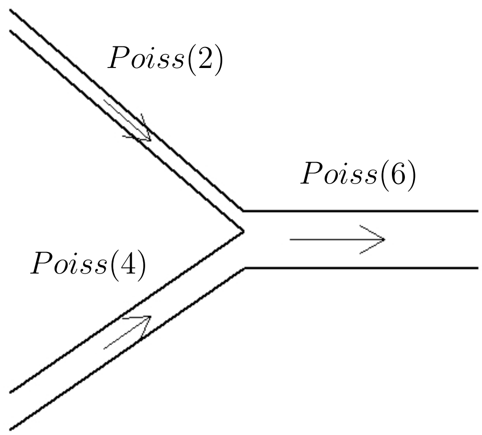
  és independent de $\{N_u^{(1)} + N_u^{(2)}, u \leq s\}$.
- Per a tot $s, t \geq 0$

$$(N_{t+s}^{(1)} + N_{t+s}^{(2)}) - (N_t^{(1)} + N_t^{(2)}) = (N_{t+s}^{(1)} - N_t^{(1)}) + (N_{t+s}^{(2)} - N_t^{(2)}) \sim Pois((\lambda_1 + \lambda_2)s),$$

  ja que $N_{t+s}^{(1)} - N_t^{(1)} \sim Poiss(\lambda_1 s)$ i $N_{t+s}^{(2)} - N_t^{(2)} \sim Pois(\lambda_2 s)$ i a més són independents.

□

Exemple de superposició. Dues carreteres conflueixen en una de més gran. Els cotxes que arriben per la primera carretera segueixen un procés de Poisson de paràmetre 2 mentre que els que arriben per la segona segueixen un procés de Poisson de paràmetre 4. El nombre de cotxes que arriben per una carretera no depèn dels que arriben per l'altra. Els cotxes que passen per la carretera on conflueixen les dues seguiran un procés de Poisson de paràmetre 6.



Considerem ara que tenim $\{N_t, t \geq 0\}$, un procés de Poisson de paràmetre λ. Suposem que cada cop que hi ha una arribada, aquesta és classificada entre dues classes, A i B. Suposem també que serà de la classe A amb probabilitat p i serà de classe B amb probabilitat $1-p$. Definim aleshores que:

- N_t^A serà el nombre d'arribades de la classe A a $[0,t]$.
- N_t^B serà el nombre d'arribades de la classe B a $[0,t]$.

Observem que

$$N_t = N_t^A + N_t^B.$$

Teorema. Aleshores $\{N_t^A, t \geq 0\}$ i $\{N_t^B, t \geq 0\}$ són dos processos de Poisson independents de paràmetres $\lambda_A = \lambda p$ i $\lambda_B = \lambda(1-p)$, respectivament.
Els processos $\{N_t^A, t \geq 0\}$ i $\{N_t^B, t \geq 0\}$ s'anomenen la **descomposició del procés** $\{N_t, t \geq 0\}$.
Prova. Calculem la llei conjunta de (N_t^A, N_t^B). Observem primer que, utilitzant la distribució binomial,

$$P\big(N_t^A = n, N_t^B = m | N_t = n+m\big) = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
&P\big(N_t^A = n, N_t^B = m\big) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} P\big(N_t^A = n, N_t^B = m | N_t = k\big) P(N_t = k) \\
&\quad = P\big(N_t^A = n, N_t^B = m | N_t = n+m\big) P(N_t = n+m) \\
&\quad = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\
&\quad = e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} \times e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}.
\end{aligned}$$

I a partir d'aquí calculem

$$P\big(N_t^A = n\big) = \sum_{m=0}^{\infty} P\big(N_t^A = n, N_t^B = m\big) = e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!}$$

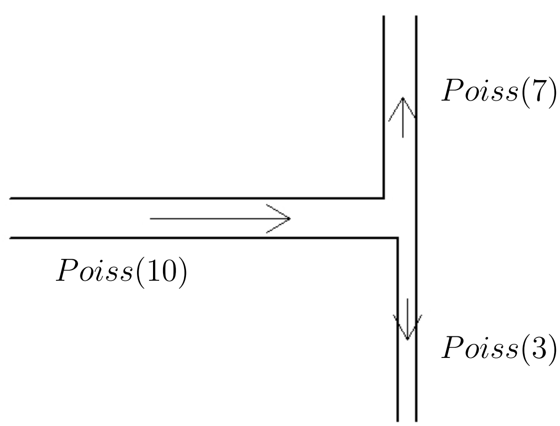
i de manera anàlega

$$P\big(N_t^B = m\big) = e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}.$$

Utilitzant el mateix mètode es pot demostrar que per a tot $s, t \geq 0$, tenim que $N_{t+s}^A - N_t^A \sim Poiss(\lambda s p)$ i $N_{t+s}^B - N_t^B \sim Poiss(\lambda s(1-p))$ i a més que són independents.

Per acabar també és evident que N^A i N^B tenen increments independents. Es pot raonar fàcilment, a partir del fet que la llei de $N_t^A - N_s^A$ depèn només de la llei de $N_t - N_s$. $\square$

Exemple de descomposició. Els cotxes que passen per una carretera segueixen un procés de Poisson de paràmetre 10. La carretera acaba en una cruïlla on els cotxes giren a l'esquerra amb probabilitat 0,7 o giren a la dreta amb probabilitat 0,3. Aleshores, els cotxes que passen per la carretera que quedava a l'esquerra seguiran un procés de Poisson de paràmetre 7 mentre que l'altra seguirà un procés de Poisson de paràmetre 3.



4.5 Extensions del procés de Poisson

Tot seguit comentarem breument algunes extensions del procés de Poisson. Parlarem de:

- Procés de Poisson compost.
- Procés de Poisson no homogeni.
- Procés de Poisson condicional.

Procés de Poisson compost

Considerem el cas en què els salts no han de ser de longitud 1. L'amplada de cada salt vindrà donada per una variable aleatòria independent del procés de Poisson.

Definició. Sigui $\{N_t, t \geq 0\}$ un procés de Poisson de paràmetre λ, $\lambda > 0$, amb temps d'arribada $\{T_n\}_{n\geq 1}$ i sigui $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una família de variables aleatòries independent idènticament distribuïdes independents del procés de Poisson. Aleshores, es defineix el **procés de Poisson compost** $\{Z_t, t \geq 0\}$ com

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{N_t} X_n.$$

Per les propietats de la funció generatriu, podem obtenir la funció generatriu de Z_t, que serà

$$\Phi_{Z_t}(s) = \Phi_{N_t}(\Phi_X(s))) = e^{\lambda t(\Phi_X(s)-1)},\ 0 \leq s \leq 1,$$

on Φ_X és la funció generatriu de X_1. A més,

$$E(Z_t) = E(N_t)E(X_1) = \lambda t E(X_1)$$

i

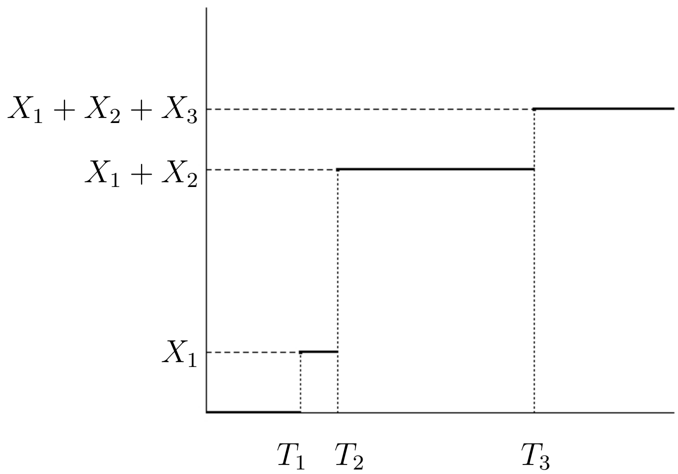
$$Var(Z_t) = Var(N_t)E^2(X_1) + E(N_t)Var(X_1) = \lambda t(E^2(X_1) + Var(X_1)) = \lambda t E(X_1^2).$$

D'altra banda, observem que si $0 \leq s < t$, els increments del procés $\{Z_t, t \geq 0\}$ tenen les expressions

$$Z_t - Z_s = \sum_{n=N_s+1}^{N_t} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{1}_{\{s < T_n \leq t\}}.$$

Es pot comprovar fàcilment, utilitzant aquestes expressions, que el procés $\{Z_t, t \geq 0\}$ té increments estacionaris i independents.

Poisson compost



Exemple. Els clients d'una botiga arriben segons un procés de Poisson de paràmetre λ. La despesa de cada client segueix una variable aleatòria X amb $E(X) = \beta$. La despesa de cada client és independent de les despeses que han fet els altres clients.
Els ingressos de la botiga a l'instant t els podem expressar com

$$Z_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n$$

on X_n és la despesa del client n-èsim i la llei de X_n és la mateixa que la llei de X. Aleshores $E(Z_t) = \lambda\beta t$.

Procés de Poisson no homogeni

Considerem ara el cas en què el paràmetre λ depèn del temps t, i tenim, per tant, una funció $\lambda(t)$. En aquest cas, la definició la podem donar a partir de la definició 2 que hem vist del procés de Poisson.

Definició. Un procés de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ es diu que és un **procés de Poisson no estacionari** (o no homogeni) amb funció d'intensitat nonegativa $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si

1. $N_0 = 0$.
2. El procés té increments independents.
3. $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.
4. $P(N_{t+h} - N_t \geq 2) = o(h)$.

A partir de la definició, es demostra que per a $s, t \geq 0$

$$N_{t+s} - N_t \sim Poiss(m(t+s) - m(t)),$$

on

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u)du.$$

Observem que, en particular, $m(t+s) - m(t) = \int_t^{t+s} \lambda(u)du$ i que $m(t) = E(N_t)$.
D'altra banda, en aquest cas, es demostra que els temps entre les arribades ja no són variables aleatòries independents, però sí que són condicionalment exponencials, és a dir, que se satisfà

$$P\big(T_{n+1} - T_n > t | T_1, T_2, \ldots, T_n\big) = e^{-(m(T_{n+1}) - m(T_n))},$$

per a tot $t \geq 0$.

Procés de Poisson condicional o dues vegades estocàstic

Considerem el cas en què el paràmetre λ no sigui un valor concret, sinó que segueix una distribució de probabilitat.

Definició. Sigui G una variable aleatòria no negativa i $\{N_t, t \geq 0\}$ un procés de comptage tal que, donat $G = \lambda$, $\{N_t, t \geq 0\}$ és un procés de Poisson amb paràmetre λ. Aleshores, $\{N_t, t \geq 0\}$ és un **procés de Poisson condicional** o un **procés de Poisson dues vegades estocàstic**.
Observem que aleshores, per a tot $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P\big(N_{t+s} - N_s = n\big) &= \int_0^\infty P\big(N_{t+s} - N_s = n | G = \lambda\big) dG(\lambda) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda). \end{aligned}$$

Aquest procés:

- Té increments estacionaris, ja que

$$P\big(N_{t+s} - N_s = n\big) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda).$$

- No té increments independents. Es pot comprovar, per a $t_1 < t_2 < t_3$

$$\begin{aligned} &P\big(N_{t_3} - N_{t_2} = m, N_{t_2} - N_{t_1} = n\big) \\ &\quad = \int_0^\infty P\big(N_{t_3} - N_{t_2} = m, N_{t_2} - N_{t_1} = n | G = \lambda\big) dG(\lambda) \\ &\quad = \int_0^\infty e^{-\lambda(t_3 - t_2)} \frac{(\lambda(t_3 - t_2))^m}{m!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^n}{n!} dG(\lambda), \end{aligned}$$

  que en general és diferent de

$$\begin{aligned} &P\big(N_{t_3} - N_{t_2} = m\big) P\big(N_{t_2} - N_{t_1} = n\big) \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-\lambda(t_3 - t_2)} \frac{(\lambda(t_3 - t_2))^m}{m!} dG(\lambda)\right)\left(\int_0^\infty e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^n}{n!} dG(\lambda)\right). \end{aligned}$$

Podem calcular també la distribució condicional de G si sabem que $N_t = n$

$$\begin{aligned} P\big(G \le x | N_t = n\big) &= \frac{P\big(G \le x, N_t = n\big)}{P\big(N_t = n\big)} = \frac{\int_0^x P\big(N_t = n | G = \lambda\big) dG(\lambda)}{P\big(N_t = n\big)} \\ &= \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)} = \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} \lambda^n dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda^n dG(\lambda)}. \end{aligned}$$

4.6 Procés de Poisson amb dimensió més gran que 1

La construcció del procés de Poisson definit a $[0, \infty)$ està fortament lligada als temps de les arribades,

$$T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \cdots ,$$

que és una successió ordenada de nombres reals. Quan passem a dimensions superiors, perdem l'ordre que tenim a $\mathbb{R}$, fet que complica la generalització del procés de Poisson a dimensions superiors.

Fixat $d \in \mathbb{N}_+$, sigui λ_d la mesura de Lebesgue d-dimensional, és a dir, per a $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\lambda_d(A) = \int_A dx.$$

Recordem que per a $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\lambda_2(A)$ és l'àrea d'A i que per a $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$, $\lambda_3(A)$ és el volum d'A.

Definició. Sigui $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i considerem un procés puntual definit sobre D. Per a $A \subset D$, diem que $N(A)$ és el nombre de punts aleatoris a A.
La família de variables aleatòries $\{N(A); A \in \mathcal{B}(D)\}$ és un **procés de Poisson a D amb paràmetre** $r > 0$ si, i només si,

1. $N(A)$ segueix una distribució de Poisson de paràmetre $r\lambda_d(A)$.
2. Si $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ és una família de subcojunts de $\mathcal{B}(D)$ disjunts dos a dos, aleshores $N(A_1), N(A_2), \cdots, N(A_k)$ són variables aleatòries independents.

Per convenció, si $\lambda_d(A) = 0$, aleshores $N(A) = 0$ quasi segurament i si $\lambda_d(A) = \infty$, aleshores $N(A) = \infty$ quasi segurament.

De manera anàlega com passava en la dimensió 1, es pot demostrar que si sabem que un conjunt A conté n punts, aleshores els n punts es distribueixen uniformement en A. Ho podem veure en el cas $n = 1$ en un conjunt A, en què aquest punt es distribuirà de manera uniforme en A. En efecte, si $B \subset A$,

$$\begin{aligned} P(X \in B | N(A) = 1) &= \frac{P(X \in B, N(A) = 1)}{P(N(A) = 1)} \\ &= \frac{P(N(B) = 1, N(A - B) = 0)}{P(N(A) = 1)} = \frac{P(N(B) = 1) P(N(A - B) = 0)}{P(N(A) = 1)} \\ &= \frac{e^{-r\lambda_d(B)} r\lambda_d(B) e^{-r\lambda_d(A-B)}}{e^{-r\lambda_d(A)} r\lambda_d(A)} = \frac{\lambda_d(B)}{\lambda_d(A)}. \end{aligned}$$

Exemple. Procés de Poisson en $\mathbb{R}^2$. Considerem un procés de Poisson en $\mathbb{R}^2$ amb paràmetre r. Considerem les regions circulars de radi t centrades a l'origen

$$C_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq t^2\}.$$

Per a $t > 0$, definim $M_t = N(C_t)$. Clarament, $M_t \sim Poiss(r\pi t^2)$.
Definim $Z_0 = 0$ i per a tot $k \geq 1$, Z_k la distància a l'origen del k-èsim punt més proper a l'origen. Observem que els Z_k són l'equivalent al T_k d'un procés de Poisson definit a $[0,\infty)$. Òbviament, $Z_k \leq t$ implica que $M_t \geq k$.
Podem comprovar que $\pi Z_k^2 \sim \gamma(k,r)$ i $\{\pi Z_k^2 - \pi Z_{k-1}^2\}_{k\geq 1}$ és una família de variables aleatòries independents amb distribució exponencial de paràmetre r. Vegem-ho:

1. Comprovem primer que $\pi Z_1^2 \sim \exp(rt)$,

$$P(\pi Z_1^2 > t) = P\Big(Z_1 > (\frac{t}{\pi})^{\frac{1}{2}}\Big) = P\Big(M_{\left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} < 1\Big) = P\Big(M_{\left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0\Big) = e^{-rt},$$

   ja que $M_{\left(\frac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \sim Poiss(rt)$.

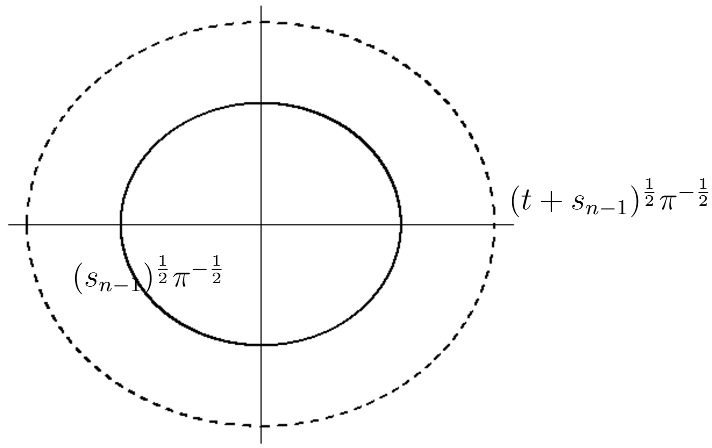
2. Comprovem que $\pi Z_n^2 - \pi Z_{n-1}^2 \sim \exp(rt)$ i a més és independent de $\pi Z_1^2, \ldots, \pi Z_{n-1}^2$. Calculem, per a $t > 0$,

$$\begin{aligned}
&P\Big(\pi Z_n^2 - \pi Z_{n-1}^2 > t | \pi Z_1^2 = s_1, \ldots, \pi Z_{n-1}^2 = s_{n-1}\Big) \\
&\quad = P\Big(\pi Z_n^2 > t + s_{n-1} | \pi Z_1^2 = s_1, \ldots, \pi Z_{n-1}^2 = s_{n-1}\Big) \\
&\quad = P\Big(N(C_{(t+s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}} - C_{(s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}}) = 0 | \pi Z_1^2 = s_1, \ldots, \pi Z_{n-1}^2 = s_{n-1}\Big) \\
&\quad = P\Big(N(C_{(t+s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}} - C_{(s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}}) = 0\Big) = e^{-rt},
\end{aligned}$$

   on hem utilitzat que els primers $n-1$ punts estan al conjunt $C_{(s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}}$, que és disjunt del conjunt $C_{(t+s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}} - C_{(s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}}$ i que aquest conjunt té mesura

$$\lambda_2(C_{(t+s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}} - C_{(s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}}) = t.$$

   Combinant 1 i 2 tenim el que volíem comprovar:


$(t + s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}$
$(s_{n-1})^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}$

Capítol 5

EL MOVIMENT BROWNIÀ

També s'anomena **procés de Wiener**. És un procés que apareix moltes vegades tant en la matemàtica teòrica com a l'aplicada.
Fem una mica d'història:

- Richard Brown (1827), botànic anglès, observa el moviment en ziga-zaga d'una partícula de pol·len en un líquid, però no ès capaç d'explicar-ne el motiu.
- Einstein (1905) i Smoluchowski (1916) expliquen que el moviment es deu als múltiples xocs de les molècules del líquid que estan en moviment constant.
- Wiener (1920) dona la formulació matemàtica rigorosa del procés.

Si ens restringim al cas unidimensional, suposem a més que:

1. Al temps inicial $t = 0$, estem a l'origen $x = 0$.
2. Diem W_t a la posició de la partícula a l'instant t. Pel caràcter caòtic del moviment tindrem que per a cada $t > 0$, W_t serà una variable aleatòria. A més $W_0 = 0$.
3. Per un argument de simetria, sembla raonable suposar que $E(W_t) = 0$ per a tot $t > 0$.
4. Si la temperatura del líquid es manté constant, la distribució de l'increment $W_{t+s} - W_s$, amb $t, s \geq 0$, no hauria de dependre de s.

Amb aquestes premises, es defineix el moviment brownià estàndard.

5.1 Definició

Definició. Un moviment brownià estàndard és un procés estocàstic $\{W_t, t \geq 0\}$ definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que satisfà les propietats següents:

1. $W_0 = 0$, quasi segurament.
2. Té increments independents.

3. Per a tot $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

Destaquem tres propietats que es dedueixen de la definició:

A) Per a $0 \leq s < t$
$$Var(W_t - W_s) = t - s.$$

B) Per a tot $0 \leq s, t$
$$E(W_s W_t) = \min(s, t).$$
Comprovem aquesta segona propietat. Suposant $s < t$ tindrem que
$$E(W_s W_t) = E(W_s(W_t - W_s)) + E(W_s^2) = E(W_s)E(W_t - W_s) + s = s = \min(s, t),$$
on hem utilitzat que $W_t - W_s$ i W_s són independents i que
$$E(W_s^2) = E((W_s - W_0)^2) = Var(W_s - W_0) = s.$$

C) Anomenen $f_{t_1,\ldots,t_n}$ la densitat conjunta del vector $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ amb $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. En particular, f_t indicarà la densitat de W_t, és a dir
$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\big(-\frac{x^2}{2t}\big).$$
Aleshores, si $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$
$$, f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \times \cdots \times f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}).$$
Aquest resultat es demostra utilitzant que el vector $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ té densitat
$$g(y_1, \ldots, y_n) = f_{t_1}(y_1) f_{t_2 - t_1}(y_2) \times \cdots \times f_{t_n - t_{n-1}}(y_n),$$
(això és evident ja que els increments són independents) i fent el canvi de variable
$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \longrightarrow & (y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + \cdots + y_n) \end{array}$$
de manera que
$$h(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) = (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}).$$
Observeu que
$$h^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}).$$

A partir de la darrera propietat i utilitzant el teorema de Kolmogórov obtenim l'existència del moviment brownià estàndard. En efecte, a partir de les densitats $f_{t_1,\ldots,t_n}$ podem trobar les funcions de distribució marginals en dimensió finita $F_{t_1,\ldots,t_n}$ del procés, que és fàcil comprovar que formen una família que satisfà:

1. $F_{t_1,\ldots,t_n}$ defineix una probabilitat sobre $\mathbb{R}^n$.

2. Si $\{t_{1_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_m}\} \subset \{t_1 < t_2 < \ldots < t_n\}$, la distribució de probabilitat de $F_{t_{1_1},\ldots,t_{i_m}}$ és la llei marginal de $F_{t_1,\ldots,t_n}$.

D'altra banda, utilitzant el criteri de continuïtat de Kolmogórov demostrem que el moviment brownià té una versió amb trajectòries contínues. Més endavant podrem demostrar que no són derivables. **En general, quan parlem de moviment brownià estàndard ens referim a la versió amb trajectòries contínues.**

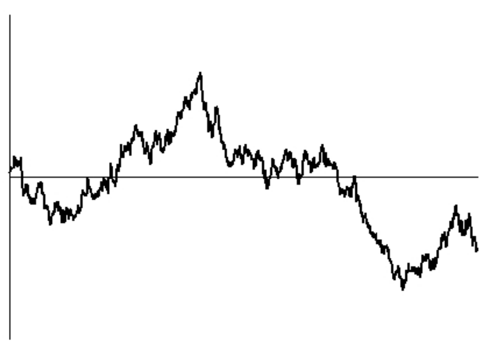
Proposició. Les trajectòries del moviment brownià estàndard $\{W_t, t \geq 0\}$ són contínues quasi segurament.

Prova. Recordem que si $X \sim N(0, \sigma^2)$, aleshores $E(X^4) = 3\sigma^4$. Per tant, per a $h > 0$ i per a tot $t > 0$

$$E(|W_{t+h} - W_t|^4) = 3h^2.$$

Aleshores, pel criteri de continuïtat de Kolmogórov existeix una versió del procés $\{W_t, t \geq 0\}$ amb trajectòries contínues. $\square$

Trajectòria del moviment brownià



Considerem ara la família de σ-àlgebres $\mathcal{F}_t = \sigma\langle W_u, 0 \leq u \leq t\rangle$. Aleshores podem veure que tant el procés $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ com el $\{W_t^2 - t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ són martingales. Tenim en realitat un resultat més potent, bàsic en l'estudi del moviment brownià, ja que ens dona una caracterització del moviment brownià.

Teorema de caracterització de Paul Lévy. Sigui $\{W_t, t \geq 0\}$ un procés estocàstic amb trajectòries contínues quasi segurament i amb $W_0 = 0$ quasi segurament. Denotem per a $\mathcal{F}_t = \sigma\langle W_u, 0 \leq u \leq t\rangle$. Aleshores, són equivalents:

a) $\{W_t, t \geq 0\}$ és un moviment brownià.

b) $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i $\{W_t^2 - t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ són martingales.

Prova. Demostrarem només que *a*) implica *b*). L'altra implicació es pot trobar fàcilment a la literatura matemàtica.
Considerem un moviment brownià $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i la família de σ-àlgebres $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_u, 0 \leq u \leq t\}$. És evident que per a tot $t \geq 0$, les variables W_t són integrables i $\mathcal{F}_t$-mesurables. Per comprovar que $\{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ és una martingala, només cal veure que per a $0 \leq s < t$, es compleix que $E(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s$. Vegem-ho:

$$E(W_t|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + E(W_s|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s) + W_s = W_s,$$

on hem utilitzat que W_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable, $W_t - W_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$ i té esperança zero.
D'altra banda, també és clar que per a tot $t \geq 0$, les variables $W_t^2 - t$ són integrables i $\mathcal{F}_t$-mesurables. Per comprovar que $\{W_t^2 - t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ és una martingala, només cal veure que per a $0 \leq s < t$, es compleix que $E(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$. Vegem-ho. Utilitzant que

$$W_t^2 - t = (W_t - W_s)^2 + 2W_tW_s - W_s^2 - t,$$

tenim que

$$\begin{aligned} E(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= E((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) + 2E(W_tW_s|\mathcal{F}_s) - E(W_s^2|\mathcal{F}_s) - t \\ &= E((W_t - W_s)^2) + 2W_sE(W_t|\mathcal{F}_s) - W_s^2 - t \\ &= (t - s) + 2W_s^2 - W_s^2 - t = W_s^2 - s, \end{aligned}$$

on hem utilitzat que $W_t - W_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$ i té variància $t - s$, W_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable, i per la propietat de martingala demostrada abans $E(W_t|\mathcal{F}_s) = W_s$. □

5.2 Extrems i temps de xoc

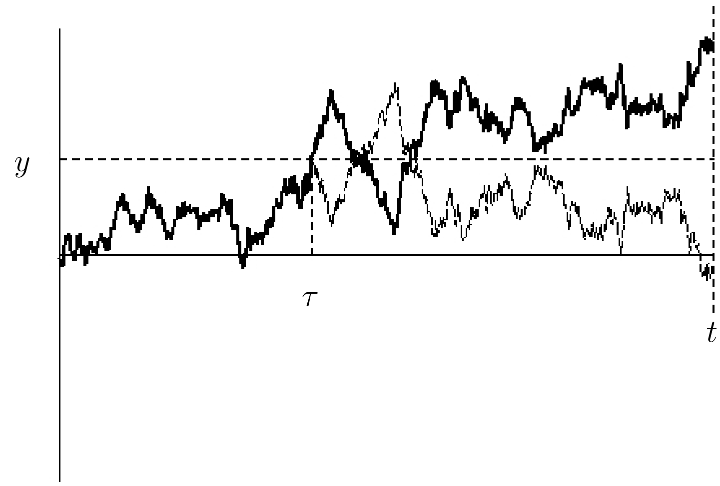
L'objectiu d'aquesta part és estudiar el comportament del suprem del moviment brownià. Definim per tant, un nou procés

$$X_t = \sup_{0 \leq u \leq t} W_u.$$

L'eina fonamental que utilitzem és l'anomenat *principi de reflexió*.

El principi ens diu que, fixat un cert nivell $y > 0$ (el cas $y < 0$ és anàleg) i un temps t, per a cada trajectòria del moviment brownià que assoleix el nivell y abans de t i que al temps t està per sobre d'aquest nivell, hi ha una altra trajectòria **igualment probable** que assoleix el nivell y abans de t i que al temps t està per sota d'aquest nivell.
Observeu que si τ denota quan assoleix per primera vegada el nivell y, el que passa després de τ no depèn del que ha passat abans de τ.

Principi de reflexió



En termes de probabilitats, el **principi de reflexió** ens diu

$$P\Big(X_t > y, W_t > y\Big) = P\Big(X_t > y, W_t < y\Big).$$

Podem ja enunciar el resultat principal.
Proposició. Si $y \geq 0$, aleshores

$$P\Big(\sup_{0\leq u\leq t} W_u > y\Big) = 2P\Big(W_t > y\Big).$$

Prova. Utilitzant el principi de reflexió tenim que

$$\begin{aligned} P\Big(\sup_{0\leq u\leq t} W_u > y\Big) &= P\Big(X_t > y, W_t > y\Big) + P\Big(X_t > y, W_t < y\Big) \\ &= 2P\Big(X_t > y, W_t > y\Big). \end{aligned}$$

I la demostració s'acaba fàcilment ja que

$$\{X_t > y, W_t > y\} = \{W_t > y\},$$

□

D'aquesta proposició se segueixen una sèrie de conseqüències:

- $X_t = \sup_{0\le u\le t} W_u$ és una variable aleatòria absolutament contínua, ja que per a tot $y > 0$

$$P\Big(X_t \le y\Big) = 1 - P\Big(X_t > y\Big) = 1 - 2P\Big(W_t > y\Big) = 1 - \frac{2}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int_y^\infty \exp\big(-\frac{u^2}{2t}\big)du.$$

- Aplicant el resultat anterior a $y = 0$, tenim que

$$P\Big(\sup_{0\le u\le t} W_u > 0\Big) = 1.$$

- Com que

$$\{\inf_{0\le u\le t} W_u < 0\} = \{-\sup_{0\le u\le t}(-W_u) < 0\} = \{\sup_{0\le u\le t}(-W_u) > 0\}$$

  per un argument de simetria obtenim que

$$P\Big(\inf_{0\le u\le t} W_u < 0\Big) = P\Big(\sup_{0\le u\le t} W_u > 0\Big) = 1.$$

Com que aquest resultat és cert per petit que sigui l'interval, tindrem que si sortim de $x = 0$, la trajectòria d'un moviment brownià intersecarà amb l'eix x infinites vegades en qualsevol interval $[0, t]$. Observeu, per tant, que les trajectòries seran molt irregulars encara que siguin contínues.
Podem veure que, a la llarga, arriba a $+\infty$.
Proposició.

$$P\Big(\sup_{0\le u<\infty} W_u = +\infty\Big) = P\Big(\inf_{0\le u<\infty} W_u = -\infty\Big) = 1.$$

Prova. Fixat $k > 0$ enter, tindrem que per a tot t

$$P\Big(\sup_{0\le u<\infty} W_u > k\Big) \ge P\Big(\sup_{0\le u\le t} W_u > k\Big) = \frac{2}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int_k^\infty \exp\big(-\frac{u^2}{2t}\big)du = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{kt^{-\frac{1}{2}}}^\infty \exp\big(-\frac{u^2}{2}\big)du,$$

de manera que

$$P\Big(\sup_{0\le u<\infty} W_u > k\Big) \ge \lim_{t\to\infty}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_{kt^{-\frac{1}{2}}}^\infty \exp\big(-\frac{u^2}{2}\big)du = 1.$$

Aleshores, per la propietat de continuïtat seqüencial de la probabilitat,

$$P\Big(\sup_{0\le u\le\infty} W_u = +\infty\Big) = P\Big(\cap_{k=1}^\infty \{\sup_{0\le u<\infty} W_u > k\}\Big) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\sup_{0\le u<\infty} W_u > k\Big) = 1.$$

D'altra banda,

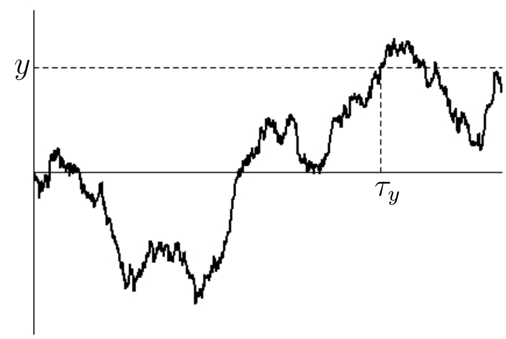
$$P\Big(\inf_{0\le u\le\infty} W_u = -\infty\Big) = P\Big(\sup_{0\le u<\infty}(-W_u) = +\infty\Big) = 1.$$

$\square$

Passem ara a estudiar el problema dels **temps de xoc** (*hitting times*).
Donat el procés $\{W_t, t \ge 0\}$ i $y \in \mathbb{R}$, definim τ_y com el primer instant en què arriben a y, és a dir,

$$\tau_y = \inf\{t > 0, W_t = y\}.$$

Temps de xoc



Observem que per a $y > 0$

$$\{\tau_y \geq t\} = \{\sup_{0\leq u\leq t} W_u \leq y\}.$$

De la mateixa manera, per a $y < 0$

$$\{\tau_y \geq t\} = \{\inf_{0\leq u\leq t} W_u \geq y\}.$$

Així, per a cada $y \in \mathbb{R}$, tenim una variable aleatòria τ_y (s'anomenen *temps d'atur*, però no demostrarem que és una variable aleatòria). Observem que:

- Si $0 < x < y$, aleshores $\tau_x < \tau_y$ quasi segurament.
- Per simetria, les lleis de τ_x i τ_{-x} són la mateixa.

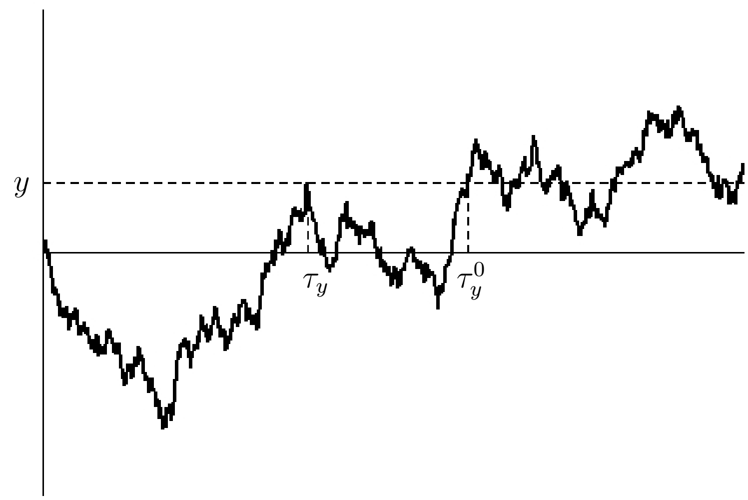
Definim també els **temps de creuament** com el primer instant que es creua un cert nivell, és a dir, per a $y > 0$

$$\tau_y^0 = \inf\{t > 0, W_t > y\}$$

i per a $y < 0$

$$\tau_y^0 = \inf\{t > 0, W_t < y\}.$$

Temps de xoc i temps de creuament



Observem que és clar que, per a tot y, $\tau_y \leq \tau_y^0$ quasi segurament. El nostre objectiu és veure que en realitat són iguals, és a dir, que la primera vegada que s'arriba a un nivell, es creua, de manera que $\tau_y = \tau_y^0$ quasi segurament (i la trajectòria del darrer gràfic no seria possible).

Proposició. Per a tot $y \in \mathbb{R}$,

- $P\Big(\tau_y \leq t\Big) = 2P\Big(W_t \geq y\Big)$.
- $\tau_y < \infty$ quasi segurament.
- Si $y \neq 0$, $E(\tau_y) = +\infty$.

Prova. Fixem $y \geq 0$. De la definició de τ_y es té que

$$\{\tau_y \leq t\} = \{\sup_{0\leq u\leq t} W_u \geq y\}$$

i, per tant,

$$P\Big(\tau_y \leq t\Big) = P\Big(\sup_{0\leq u\leq t} W_u \geq y\Big) = P\Big(\sup_{0\leq u\leq t} W_u > y\Big) = 2P\Big(W_t > y\Big) = 2P\Big(W_t \geq y\Big).$$

Per tant,

$$P\Big(\tau_y \leq t\Big) = \frac{2}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_y^\infty e^{-\frac{u^2}{2t}} du = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{yt^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv,$$

de manera que $\tau_y < \infty$ quasi segurament, ja que

$$P\Big(\tau_y < \infty\Big) = \lim_{t\to\infty} P\Big(\tau_y \le t\Big) = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = 1.$$

D'altra banda, utilitzant de nou que $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = 1$ tenim que si $y \neq 0$

$$\begin{aligned} E(\tau_y) &= \int_0^\infty P\Big(\tau_y > s\Big) ds = \int_0^\infty \Big(1 - 2P\big(W_s \ge y\big)\Big) ds \\ &= \int_0^\infty \Big(1 - \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{ys^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\Big) ds = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \Big(\int_0^{ys^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\Big) ds \\ &= \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} \Big(\int_0^{\frac{y^2}{z^2}} dz\Big) = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} y^2 \int_0^\infty \frac{1}{z^2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &\ge \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} y^2 \int_0^1 \frac{1}{z^2} e^{-\frac{1}{2}} dz = \infty. \end{aligned}$$

Per al cas $y > 0$, hem d'utilitzar que la distribució de τ_y és la mateixa que la de τ_{-y}, de manera que tindrem que

$$P\Big(\tau_y \le t\Big) = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{|y|t^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.$$

A partir d'aquí la demostració és anàlega. □

Hem vist, per tant, que donat un nivell $y \neq 0$, el moviment brownià arribarà al nivell y amb probabilitat 1 però el temps que trigarà a aconseguir-ho serà, en mitjana, infinit. Podem veure-ho, ja que els temps de xoc i de creuament coincideixen.

Proposició. Per a tot $y \neq 0$,

$$\tau_y = \tau_y^0$$

quasi segurament.

Prova. Com que W_t i $-W_t$ tenen la mateixa llei, n'hi ha prou si ho demostrem per a $y > 0$. Suposem, per tant, $y > 0$. Ja hem vist, a partir de la definició, que $\tau_y \le \tau_y^0$ quasi segurament, així que només cal demostrar que

$$P\Big(\tau_y < \tau_y^0\Big) = 0.$$

Per demostrar-ho, observem que

$$\{\tau_y < \tau_y^0\} \subset \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \{ \sup_{0 \le u \le \frac{i}{n}} W_u = y\}.$$

(La idea és que si no hi ha creuament hi haurà algun nombre racional, entre τ_y i τ_y^0, per al qual el suprem serà y.)

I com que $X_{\frac{i}{n}} = \sup_{0 \le u \le \frac{i}{n}} W_u$, és una variable aleatòria absolutament contínua

$$P\Big(\tau_y < \tau_y^0\Big) \le \sum_{i=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty P\big(\sup_{0 \le u \le \frac{i}{n}} W_u = y\big) = 0.$$

□

Ara ja podem veure que les trajectòries no són diferenciables.

Proposició. Les trajectòries del moviment brownià estàndard $\{W_t, t \geq 0\}$ són quasi segurament no diferenciables en cap instant de temps $t > 0$.

Prova. Veurem primer que

$$P\Big(\limsup_{h \to 0^+} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = \infty\Big) = 1.$$

Com que

$$\sup_{0<h<\delta} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \geq \frac{1}{\delta} \sup_{0<h<\delta} \big(W_{t+h} - W_t\big)$$

i utilitzant que coneixem la distribució del suprem del brownià X_t, podem escriure per a tot $x > 0$

$$\begin{aligned} P\Big(\sup_{0<h<\delta} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} > x\Big) &\geq P\Big(\sup_{0<h<\delta} \big(W_{t+h} - W_t\big) > \delta x\Big) \\ = P\Big(\sup_{0<h<\delta} W_h > \delta x\Big) &= \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{x\delta^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv, \end{aligned}$$

de manera que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} P\Big(\sup_{0<h<\delta} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} > x\Big) \geq \lim_{\delta \downarrow 0} \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{x\delta^{\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = 1.$$

Aleshores, per la propietat de continuïtat seqüencial de la probabilitat

$$\begin{aligned} P\Big(\limsup_{h \to 0^+} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = \infty\Big) &= \lim_{\delta \downarrow 0} P\Big(\sup_{0<h<\delta} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = \infty\Big) \\ &\geq \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{x \to \infty} P\Big(\sup_{0<h<\delta} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} > x\Big) = 1. \end{aligned}$$

D'altra banda, com que W_t té la mateixa llei que $-W_t$, s'obté que

$$P\Big(\liminf_{h \to 0^+} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} = -\infty\Big) = 1.$$

I, per tant, quasi segurament,

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{W_{t+h} - W_t}{h} < \limsup_{h \to 0^+} \frac{W_{t+h} - W_t}{h},$$

i la trajectòria no pot ser derivable en cap punt. □

Nota recordatòria sobre la variacó lineal i quadràtica. Donada una funció $f : [0, t] \to \mathbb{R}$, definim la seva variació total (o lineal) com el límit —si existeix—

$$\lim_{|\pi_n| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i})|,$$

on les π_n són una successió creixent de particions $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,n} = t$ amb normes $|\pi_n| = \max_i(t_{n,i+1} - t_{i,n})$. Definim també la seva variació quadràtica com el límit —si existeix—

$$\lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i})|^2.$$

Per exemple, si tenim una funció derivable amb derivada afitada per C, aleshores té variació total afitada per Ct i la variació quadràtica és zero, ja que

$$\lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i})| = \lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_{n,i})(t_{n,i+1} - t_{n,i})| \leq C \lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = Ct$$

i

$$\begin{aligned} \lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i})|^2 &= \lim_{|\pi_n|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_{n,i})(t_{n,i+1} - t_{n,i})|^2 \\ &\leq C^2 \lim_{|\pi_n|\to 0} \max_i (t_{n,i+1} - t_{i,n}) \sum_{i=0}^{n-1} (t_{n,i+1} - t_{n,i}) = 0. \end{aligned}$$

Observeu que hem utilitzat que $\sum_{i=0}^{n-1}(t_{n,i+1} - t_{n,i}) = t$.

Veurem que les trajectòries del moviment brownià no tenen variació total afitada però que la seva variació quadràtica a $[0, t]$ és t.

Proposició. Sigui $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,n} = t$ una partició de l'interval $[0, t]$ tal que $\max_i(t_{n,i+1} - t_{i,n}) \to 0$ quan $n \to \infty$. Aleshores,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2 = t,$$

L^2 i quasi segurament.

Prova. Observem que

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} E\Big(\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(t_{n,i+1} - t_{n,i}\Big) = t,$$

de manera que

$$E\Big(\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2 - t\Big)^2\Big) = Var(\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2\Big).$$

Així, per demostrar la convergència en L^2, n'hi ha prou veient que aquesta variància convergeix a zero quan $n \to \infty$. Utilitzant que el moviment brownià té increments independents i que si

$X \sim N(0, \sigma^2)$ sabem que $E(X^4) = 3\sigma^4$, obtenim que:

$$\begin{aligned}
Var\Big(\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2\Big) &= \sum_{i=0}^{n-1} Var\Big(\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(E\Big(\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^4\Big) - \Big(t_{n,i+1} - t_{n,i}\Big)^2\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(3\Big(t_{n,i+1} - t_{n,i}\Big)^2\Big) - \Big(t_{n,i+1} - t_{n,i}\Big)^2\Big) = 2\sum_{i=0}^{n-1}\Big(t_{n,i+1} - t_{n,i}\Big)^2 \\
&\leq 2\max_i(t_{n,i+1} - t_{i,n})\sum_{i=0}^{n-1}\Big(t_{n,i+1} - t_{n,i}\Big) \leq 2t\max_i(t_{n,i+1} - t_{i,n}),
\end{aligned}$$

que, per hipòtesis, convergeix a zero quan $n \to \infty$.
De la demostració quasi segura en donem momés l'esquelet, ja que hi ha un càlcul una mica complicat. Ho fem a més per unes particions concretes, on $t_{n,i} = \frac{i}{n}$. Diem

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1}\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2 - t = \sum_{i=0}^{n-1}\Big(\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2 - \frac{t}{n}\Big).$$

Utilitzant que $E((W_t - W_s)^4) = 3(t-s)^2$, $E((W_t - W_s)^6) = 15(t-s)^3$ i $E((W_t - W_s)^8) = 105(t-s)^4$, s'obté que (aquest és el càlcul llarg, no complicat)

$$E(Y_n^4) \leq C\Big(\frac{t}{n}\Big)^3 t$$

on C és una constant que no depèn de n. Utilitzant la desigualtat de Txebixov

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(|Y_n| > \varepsilon\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^4}E(Y_n^4) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{\varepsilon^4}\Big(\frac{t}{n}\Big)^3 t < \infty,$$

que implica que

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\{|Y_n| > \varepsilon\}\Big) = 0$$

que ens dona la convergència quasi segura cap a zero. □

Hem vist, per tant, que les trajectòries tenen variació quadràtica. Això implica que, quasi segurament, no tenen variació total afitada. Ho podem comprovar, ja que amb probabilitat 1

$$\begin{aligned}
t &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}\Big)^2 \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\Big(\Big(\sup_{0\leq i\leq n-1}|W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}|\Big)\sum_{i=0}^{n-1}|W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}|\Big)
\end{aligned}$$

i com que per la continuïtat del brownià tenim que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{0\leq i\leq n-1}|W_{t_{n,i+1}} - W_{t_{n,i}}|\Big) = 0$$

s'haurà de complir que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}|W_{t_{n,i+1}}-W_{t_{n,i}}|\Big)=\infty.$$

5.3 Transformacions i processos relacionats

Transformacions del moviment brownià

Hi ha una sèrie de transformacions que transformen un moviment brownià en un altre moviment brownià. Concretament, donat un moviment brownià estàndard $\{W_t, t\geq 0\}$, aleshores els processos

a) $W_t^{(1)}=cW_{\frac{t}{c^2}}$, per a $c>0$ fixat.

b) $W_t^{(2)}=\begin{cases} tW_{\frac{1}{t}}, & \text{si}\, t>0,\\ 0, & \text{si}\, t=0,\end{cases}$

c) $W_t^{(3)}=W_{t+h}-W_h$, per a $h>0$ fixat.

determinen tres nous moviments brownians. Vegem-ho.
Recordem que hem de veure tres coses de cada procés: a l'inici val zero, té increments independents i per a tot $0\leq s<t$, $W_t^{(i)}-W_s^{(i)}\sim N(0,t-s)$.
Transformació *a*). Clarament $W_0^{(1)}=0$ quasi segurament. D'altra banda, com que els increments tenen l'expressió, pera $0\leq s<t$,

$$W_t^{(1)}-W_s^{(1)}=c\big(W_{\frac{t}{c^2}}-W_{\frac{s}{c^2}}\big),$$

els increments són independents i $W_t^{(1)}-W_s^{(1)}$ té llei normal amb esperança zero i

$$Var\Big(W_t^{(1)}-W_s^{(1)}\Big)=c^2Var\Big(W_{\frac{t}{c^2}}-W_{\frac{s}{c^2}}\Big)=c^2\Big(\frac{t}{c^2}-\frac{s}{c^2}\Big)=t-s.$$

Transformació *b*). Clarament $W_0^{(2)}=0$ quasi segurament. D'altra banda, si $t>s>0$,

$$W_t^{(2)}-W_s^{(2)}=tW_{\frac{1}{t}}-sW_{\frac{1}{s}}=-s\big(W_{\frac{1}{s}}-W_{\frac{1}{t}}\big)+(t-s)W_{\frac{1}{t}}$$

té llei normal amb esperança zero i

$$\begin{aligned} Var\Big(W_t^{(2)}-W_s^{(2)}\Big) &= s^2Var\Big(W_{\frac{1}{s}}-W_{\frac{1}{t}}\Big)+(t-s)^2Var\Big(W_{\frac{1}{t}}\Big)\\ &= s^2\Big(\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\Big)+(t-s)^2\frac{1}{t}=s-\frac{s^2}{t}+t-2s+\frac{s^2}{t}=t-s.\end{aligned}$$

Com que són lleis normals, la independència dels increments s'obté demostrant que per a $0<u<v<s<t$ tenim que

$$Cov\Big((W_t^{(2)}-W_s^{(2)})(W_v^{(2)}-W_u^{(2)})\Big)=0.$$

Vegem-ho. En ser variables centrades, hem de calcular només l'esperança del producte i utilitzant que $\frac{1}{u} > \frac{1}{v} > \frac{1}{s} > \frac{1}{t}$ i que el brownià és centrat amb increments independents

$$\begin{aligned}
&E\Big((W_t^{(2)} - W_s^{(2)})(W_v^{(2)} - W_u^{(2)})\Big) \\
&\quad = E\Big(\big(-s\big(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\big) + (t-s)W_{\frac{1}{t}}\big)\big(-u\big(W_{\frac{1}{u}} - W_{\frac{1}{v}}\big) + (v-u)W_{\frac{1}{v}}\big)\Big) \\
&\quad = E\Big(\big(-s\big(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\big) + (t-s)W_{\frac{1}{t}}\big)(v-u)W_{\frac{1}{v}})\Big) \\
&\quad = -s(v-u)E\big(W_{\frac{1}{s}}W_{\frac{1}{v}}\big) + t(v-u)E\big(W_{\frac{1}{t}}W_{\frac{1}{v}}\big) \\
&\quad = -s(v-u)\frac{1}{s} + t(v-u)\frac{1}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Transformació *c*). Clarament $W_0^{(3)} = 0$ quasi segurament. Els increments són, per $0 \leq s < t$

$$W_t^{(3)} - W_s^{(3)} = W_{t+h} - W_h - W_{s+h} + W_h = W_{t+h} - W_{s+h}.$$

Clarament, els increments són independents i $W_t^{(3)} - W_s^{(3)}$ té llei normal amb esperança zero i

$$Var\Big(W_t^{(3)} - W_s^{(3)}\Big) = Var\Big(W_{t+h} - W_{s+h}\Big) = (t+h) - (s+h) = t - s.$$

Processos relacionats amb el moviment brownià

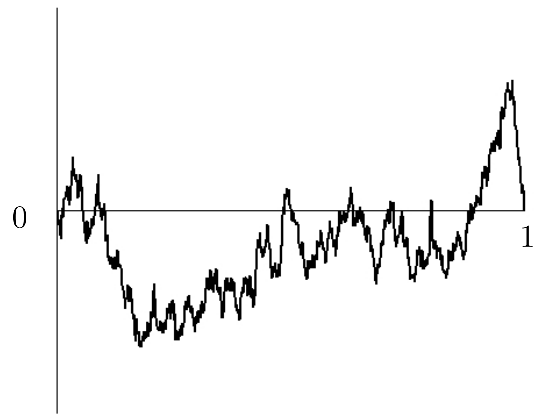
El pont brownià. Considerem el procés

$$Y_t = W_t - tW_1, \qquad t \in [0,1],$$

on $\{W_t, t \geq 0\}$ és un moviment brownià. Es tracta d'un procés tal que;

1. $Y_0 = Y_1 = 0$ quasi segurament.
2. Y_t segueix una llei normal, ja que es pot escriure com
$$Y_t = (1-t)W_t - t(W_1 - W_t).$$
3. $E(Y_t) = 0$.
4. Per a $s < t$,
$$\begin{aligned}
E(Y_tY_s) &= E\Big((W_t - tW_1)(W_s - sW_1)\Big) \\
&= E(W_tW_s) - sE(W_tW_1) - tE(W_1W_s) + stE(W_1^2) \\
&= s - st - ts + st = s - st.
\end{aligned}$$

Trajectòria del pont brownià



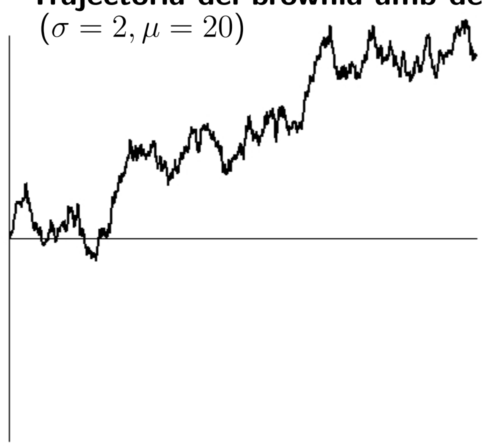
El moviment brownià amb deriva. Considerem el procés

$$Y_t = \sigma W_t + \mu t, \qquad t \geq 0,$$

on $\{W_t, t \geq 0\}$ és un moviment brownià, i $\sigma > 0$ i $\mu \in \mathbb{R}$ són constants. Es tracta d'un procés tal que;

- Y_t segueix una llei normal.
- $E(Y_t) = \mu t$.
- Per a $s, t \geq 0$, es compleix $Cov(Y_y, Y_s) = E\Big(\sigma W_t \sigma W_s\Big) = \sigma^2 \min(s, t)$.

Trajectòria del brownià amb deriva



El moviment brownià geomètric. És el model proposat per Black, Scholes i Merton com a model per a la corba de preus dels actius financers. Es defineix com

$$Y_t = \exp(\sigma W_t + \mu t), \qquad t \geq 0,$$

on $\{W_t, t \geq 0\}$ és un moviment brownià, i $\sigma > 0$ i $\mu \in \mathbb{R}$ són constants (es tracta de l'exponencial d'un moviment brownià amb deriva).

Capítol 6

PROCESSOS DE MÀRKOV A TEMPS CONTINU

Una de les propietats més importants que pot tenir un procés estocàstic és la propietat de Màrkov. Dins d'aquesta família hi podem trobar el procés de Poisson i inclourà els processos de naixement i mort i tota la seva aplicació a la teoria de cues.
Ens interessen els processos a temps continu però començarem amb una secció dedicada a les anomenades *cadenes de Màrkov*, que són processos a temps discret, i que necessitarem per acabar d'estudiar els processos a temps continu. En farem una presentació bàsica i descriptiva. Penseu que hi ha cursos i llibres sencers dedicats a aquest tipus de processos.

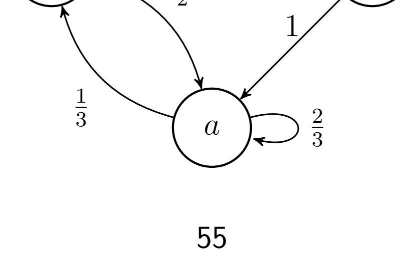
6.1 Cadenes de Màrkov

Parlarem aquí de les cadenes de Màrkov. És un procés a temps discret, $\{X_n\}_{n\geq 1}$, que té dues característiques:

- **No té memòria d'on ha estat en el passat**, és a dir, per decidir el comportament futur només importa el present.
- El procés **només pot prendre un nombre fínit o numerable de valors.**

Podem representar un procés d'aquest tipus amb un diagrama. Podeu veure-ho en l'exemple següent, que representa un procés tal que, en cada pas:

- Ens movem de b a a amb probabilitat 1.
- Si estem a a anem a c amb probabilitat $\frac{1}{3}$ o ens quedem a a amb probabilitat $\frac{2}{3}$.
- Si estem a c anem a a o a b amb probabilitat $\frac{1}{2}$.



Considerem un conjunt numerable I que anomenarem **conjunt d'estats** i cada $i \in I$ serà un **estat**.

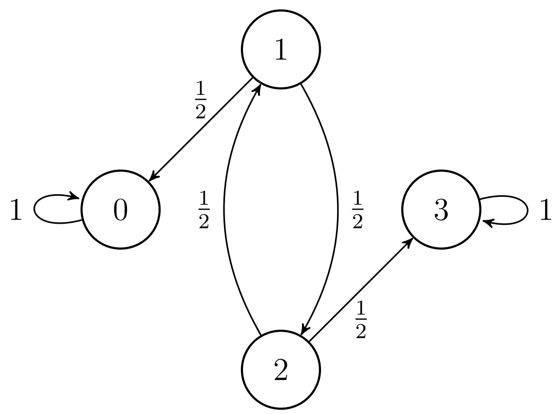
Definició. Direm que una matriu $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$ és estocàstica si, i només si,

(i) $p_{i,j} \in [0,1]$ per a tot i, j,

(ii) $\sum_{j\in I} p_{i,j} = 1$, per a tot $i \in I$.

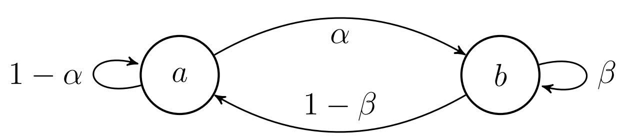
Hi ha una bijecció entre les matrius estocàstiques i els diagrames.
Exemple 1. Espai d'estats $I = \{0,1,2,3\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Exemple 2. Espai d'estats $I = \{a, b\}$ i $\alpha, \beta \in [0,1]$.

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$



Ja podem definir què és una cadena de Màrkov homogènia.

Definició. Un procés estocàstic $\{X_n, n \geq 0\}$ que pren valors en un conjunt d'estats I direm que és una **cadena de Màrkov homogènia** amb distribució inicial ν i matriu de probabilitats de transició $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in I\times I}$ si

(i) X_0 té distribució ν.

(ii) Per a tot $i_0, \cdots, i_{n+1} \in I$ i $n \geq 0$

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = p_{i_n, i_{n+1}}.$$

Utilitzarem la notació $CM(\nu, P)$.

La primera igualtat de *(ii)* és l'anomenada *propietat de Màrkov*, és a dir, que el futur només depèn del present i no del passat. La segona igualtat és l'anomenda *homogeneïtat*, és a dir, la probabilitat no depèn de n.

Per entendre'n bé el funcionament, podem veure el teorema següent.

Proposició. Sigui $\{X_n, n \geq 0\}$ un procés estocàstic a valors en I. Aleshores, és una cadena de Màrkov homogènia $CM(\nu, P)$ si, i només si, per a tot $i_0, \cdots, i_{n+1} \in I$ i $n \geq 0$

$$P(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = \nu(i_0) p_{i_0,i_1} \times \cdots \times p_{i_{n-1},i_n}.$$

Prova. Suposem primer que $\{X_n, n \geq 0\}$ és una cadena de Màrkov homogènia $CM(\nu, P)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} &P(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) \\ &\quad = P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &\quad = p_{i_{n-1},i_n} P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

La demostració d'aquesta implicació s'acaba repetint en el mateix procediment $n-1$ vegades.
Per veure l'altra implicació, observem primer que per a la hipòtesi

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1) = \nu(i_0) p_{i_0,i_1}$$

de manera que

$$P(X_0 = i_0) = \sum_{i_1 \in I} P(X_0 = i_0, X_i = i_1) = \sum_{i_1 \in I} \nu(i_0) p_{i_0,i_1} = \nu(i_0).$$

Per tant, X_0 té distribució ν. Per veure la propietat de Màrkov i l'homogeneïtat observem que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) &= \frac{P(X_0 = i_0, \cdots, X_{n+1} = i_{n+1})}{P(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n)} \\ = \frac{\nu(i_0) p_{i_0,i_1} \times \cdot \times p_{i_n,i_{n+1}}}{\nu(i_0) p_{i_0,i_1} \times \cdot \times p_{i_{n-1},i_n}} = p_{i_n,i_{n+1}} \end{aligned}$$

i que

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = \frac{P(X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1})}{P(X_n = i_n)} = p_{i_n,i_{n+1}}.$$

La darrera igualtat és certa, ja que

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}) &= \sum_{j_0, \cdots, j_{n-1} \in I} P(X_0 = j_0, \cdots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}) \\ = \sum_{j_0, \cdots, j_{n-1} \in I} \nu(j_0) p_{j_0,j_1} \times \cdots \times p_{j_{n-1},i_n} p_{i_n,i_{n+1}} &= p_{i_n,i_{n+1}} \sum_{j_0, \cdots, j_{n-1} \in I} \nu(j_0) p_{j_0,j_1} \times \cdots \times p_{j_{n-1},i_n} \\ = p_{i_n,i_{n+1}} \sum_{j_0, \cdots, j_{n-1} \in I} P(X_0 = j_0, \cdots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = i_n) &= p_{i_n,i_{n+1}} P(X_n = i_n). \end{aligned}$$

□

Tot seguit parlarem de les probabilitats de transició en m etapes, és a dir, quina és la probabilitat que després de m etapes la cadena estigui en un determinat estat.
Donada $\{X_n, n \geq 0\}$ i una cadena $CM(\nu, P)$, definim la probabilitat d'anar de l'estat i a l'estat j en m etapes

$$p_{i,j}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i),$$

per a tot $n, m \geq 0$ i $i, j \in I$. Ho denotem per

$$P_m = (p_{i,j}^{(m)})_{(i,j) \in I \times I}.$$

Considerem, d'altra banda, les potències de la matriu de probabilitats de transició:

$$P^m = P^{m-1} P = P \times \cdots \times P.$$

És fàcil comprovar que la matriu de probabilitats de transició en m etapes coincideix amb la potència d'ordre m de P:

$$P_m = P^m.$$

D'aquestes igualtats, se'n dedueixen diverses propietats:

- P^m és una matriu estocàstica.
- Com que $P^{l+k} = P^l P^k$ per a tot $k, l \geq 0$, obtenim l'anomenada **equació de Chapman-Kolmogórov** $P_{l+k} = P_l P_k$, que podem escriure

$$p_{i,j}^{(l+k)} = \sum_{h \in I} p_{i,h}^{(l)} p_{h,j}^{(k)}.$$

- Repetint iterativament l'equació de Chapman-Kolmogórov obtenim la relació

$$p_{i,j}^{(m)} = \sum_{i_1 \in I} p_{i,i_1} p_{i_1,j}^{(m-1)} = \sum_{i_1, \cdots, i_{m-1} \in I} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \times \cdots \times p_{i_{m-1},j}.$$

- Si diem $\nu^{(m)}$ la llei de X_m, és a dir, $P(X_m = k) = \nu^{(m)}(k)$, es té que

$$\nu^{(m)} = \nu P^m.$$

Direm que dos estats $i, j \in I$ es **comuniquen** si existeixen n i m tals que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ i $p_{i,j}^{(m)} > 0$, és a dir, que sortint de i podem anar a j i sortint de j podem anar a i. La relació comunicar-se és una relació d'equivalència, de manera que podem considerar les classes d'equivalència corresponents, que donarà lloc a una partició de I. Direm que una cadena és **irreduïble** si té una única classe d'equivalència.

Els estats d'una cadena de Màrkov homogènia es poden classificar de diverses maneres segons les seves propietats. Ens interessa especialment el resultat següent:

Definició. Un estat i és recurrent si

$$P(X_n = i \,\text{per a infinits}\, n | X_0 = i) = 1.$$

Un estat i és transitori si

$$P(X_n = i \,\text{per a infinits}\, n | X_0 = i) = 0.$$

Un estat és recurrent si hi acabes tornant sempre. En canvi, d'un estat transitori, en pots sortir i no tornar-hi. A més, tot estat o és recurrent o és transitori. Encara més, es tractarà d'una propietat de classe, de manera que tots els estats d'una classe d'equivalència seran o bé recurrents o bé transitoris.

En particular, quan tenim una cadena irreduïble els estats seran recurrents i parlarem d'una cadena irreduïble recurrent. Per a aquesta classe de cadenes, existeix una **distribució invariant** ν que és l'única solució —mòdul de multiplicaci/'o per una constant— no degenerada de

$$\nu P = \nu.$$

6.2 Processos a temps continu

Comencem ja amb l'estudi dels processos de Màrkov a temps continu.

Sigui E un conjunt numerable que serà l'espai on prendrà valors el procés i considerem $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Podem donar ja la definició de procés de Màrkov a temps continu que és, en realitat, la versió contínua d'una cadena de Màrkov.

Definició. Un procés estocàstic $\{Y_t, t \in [0, T]\}$ que pren valors en un espai d'estats E numerable, es diu que és un **procés de Màrkov** si per a tot $s, t \geq 0$ i $j \in E$

$$P(Y_{t+s} = j | Y_u, u \leq t) = P(Y_{t+s} = j | Y_t).$$

Quan, per a tot $i, j \in E$ i $s, t \geq 0$ es compleix que

$$p_s(i, j) = P(Y_{t+s} = j | Y_t = i),$$

i és independent de $t \geq 0$, direm que Y és un procés de Màrkov homogeni en temps.

Fixats $i, j \in E$, la funció

$$t \longrightarrow p_t(i, j),$$

s'anomena una **probabilitat de transició** i la família de matrius

$$P_t = (p_t(i, j))_{(i,j) \in E \times E},$$

s'anomena la **funció de transició** del procés de Màrkov.

Encara que hem definit el temps per a $t \in [0, T]$, per comoditat a partir d'ara considerarem $t \geq 0$.

A partir d'ara treballarem només amb processos homogenis en temps. Tenim les propietats següents:

a) $p_t(i,j) \geq 0$.

b) $\sum_{k \in E} p_t(i,k) = 1$.

c) $\sum_{k \in E} p_t(i,k) p_s(k,j) = p_{t+s}(i,j)$.

Proposició. Sigui $\{Y_t, t \geq 0\}$ un procés de Màrkov a temps continu homogeni en temps. Per a tot $i, j \in E$ i $t, s \geq 0$ se satisfan les propietats $a), b)$ i $c)$.
La propietat $c)$ es coneix com l'equació de Chapman-Kolmogórov. Si l'escrivim en notació matricial tenim

$$P_{t+s} = P_t P_s.$$

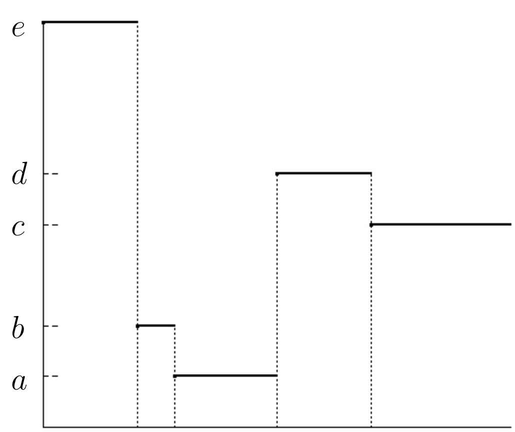
Interpretem el que diu: per anar de l'estat i a l'estat j en un temps $t+s$ podem fer-ho passant per qualsevol estat k, anant de l'estat i al k en un temps t i després anar de l'estat k al j en un temps s.

Prova. Observem que $a)$ i $b)$ són evidents. Comprovem l'equació de Chapman-Kolmogórov, fent servir la propietat de Màrkov:

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in E} p_t(i,k) p_s(k,j) &= \sum_{k \in E} P(Y_t = k | Y_0 = i) P(Y_{t+s} = j | Y_t = k) \\
&= \sum_{k \in E} P(Y_{t+s} = j | Y_t = k, Y_0 = i) P(Y_t = k | Y_0 = i) \\
&= \sum_{k \in E} \frac{P(Y_{t+s} = j, Y_t = k, Y_0 = i)}{P(Y_t = k, Y_0 = i)} \frac{P(Y_t = k, Y_0 = i)}{P(Y_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in E} \frac{P(Y_{t+s} = j, Y_t = k, Y_0 = i)}{P(Y_0 = i)} = \sum_{k \in E} P(Y_{t+s} = j, Y_t = k | Y_0 = i) \\
&= P(Y_{t+s} = j | Y_0 = i) = p_{t+s}(i,j).
\end{aligned}$$

□

Trajectòria de Màrkov $E = \{a, b, c, d, e\}$



A partir de les propietats podem veure que per a tot $0 < t_1 < \cdots < t_n$, la llei conjunta del vector $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ queda determinada per la distribució inicial de Y_0 —que denotarem per π— i la funció de transició $(P_t)_{t\geq 0}$.

Proposició. Per a tot $n \geq 0$, $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, i estats $i_0, i_1, \ldots, i_n$ d'E, es compleix que

$$P\Big(Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n | Y_{t_0} = i_0\Big) = p_{t_1 - t_0}(i_0, i_1) \times \cdots \times p_{t_n - t_{n-1}}(i_{n-1}, i_n).$$

Prova. Ho demostrarem per inducció. El cas $n = 1$ és directament la definició de les probabilitats de transició

$$p_{t_1 - t_0}(i_0, i_1) = P(Y_{t_1} = i_1 | Y_{t_0} = i_0).$$

Suposem que és cert fins a $n-1$ i vegem que també és cert per a n. Usant la definició de probabilitat condicionada tenim:

$$\begin{aligned}
P\Big(Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n | Y_{t_0} = i_0\Big) &= \frac{P\Big(Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n, Y_{t_0} = i_0\Big)}{P\Big(Y_{t_0} = i_0\Big)} \\
&= \frac{P\Big(Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n\Big)}{P\Big(Y_{t_0} = i_0\Big)} \times \frac{P\Big(Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_{n-1}} = i_{n-1}\Big)}{P\Big(Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_{n-1}} = i_{n-1}\Big)} \\
&= P\Big(Y_{t_n} = i_n | Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_{n-1}} = i_{n-1}\Big) \\
&\quad \times P\Big(Y_{t_0} = i_0, Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_{n-1}} = i_{n-1} | Y_{t_0} = i_0\Big).
\end{aligned}$$

Utilitzant ara la propietat de Màrkov per a la primera probabilitat i la hipòtesi d'inducció per a la segona obtenim:

$$\begin{aligned}
&P\Big(Y_{t_1} = i_1, \ldots, Y_{t_n} = i_n | Y_{t_0} = i_0\Big) \\
&\quad = P\Big(Y_{t_n} = i_n | Y_{t_{n-1}} = i_{n-1}\Big) p_{t_1 - t_0}(i_0, i_1) \times \cdots \times p_{t_{n-1} - t_{n-2}}(i_{n-2}, i_{n-1}) \\
&\quad = p_{t_n - t_{n-1}}(i_{n-1}, i_n) p_{t_1 - t_0}(i_0, i_1) \times \cdots \times p_{t_{n-1} - t_{n-2}}(i_{n-2}, i_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

En realitat, el recíproc també és cert, encara que no ho demostrarem, Així, donada una distribució de probabilitat π i una funció de transició $(P_t)_{t\geq 0}$ sobre un conjunt E que satisfà les propietats $a), b)$ i $c)$, podem construir un espai mostral Ω i una família de variables aleatòries $Y_t : \Omega \to E$ per a $t \geq 0$ tal que $\{Y_t, t \geq 0\}$, un procés de Màrkov a temps continu homogeni en temps amb distribució inicial π i funció de transició $(P_t)_{t\geq 0}$.

6.3 Equació diferencial de Kolmogórov

Els processos de Màrkov poden tenir trajectòries molt irregulars. Per obtenir més resultats, ens limitem a partir d'ara als processos que satisfan la propietat de continuïtat de la funció de transició següent:

d) $\lim_{t\to 0} p_t(i,j) = \delta_{i,j}$.

L'objectiu ara és, sota la propietat $d)$, obtenir dues equacions diferencials satisfetes per $p_t(i,j)$. Començarem amb una sèrie de proposicions tècniques.

Proposició. Per a tot $s, t \geq 0$, i estats i, j d'E, es compleix que

$$|p_{s+t}(i,j) - p_s(i,j)| \leq 1 - p_t(i,i).$$

Prova. Utilitzant l'equació de Chapman-Kolmogórov, separant el terme on $k = i$, podem escriure

$$p_{s+t}(i,j) - p_s(i,j) = \sum_{k\neq i} p_t(i,k)p_s(k,j) + p_t(i,i)p_s(i,j) - p_s(i,j).$$

Com que

$$\sum_{k\neq i} p_t(i,k)p_s(k,j) \leq \sum_{k\neq i} p_t(i,k) = 1 - p_t(i,i),$$

posant juntes les dues expressions tenim que

$$\begin{aligned} p_{s+t}(i,j) - p_s(i,j) &\leq 1 - p_t(i,i) + p_t(i,i)p_s(i,j) - p_s(i,j) \\ &= (1 - p_t(i,i))(1 - p_s(i,j)) \leq 1 - p_t(i,i). \end{aligned}$$

Fent càlculs similars, podem obtenir també

$$\begin{aligned} p_s(i,j) - p_{s+t}(i,j) &= p_s(i,j) - \sum_{k\neq i} p_t(i,k)p_s(k,j) - p_t(i,i)p_s(i,j) \\ &\leq p_s(i,j)(1 - p_t(i,i)) \leq 1 - p_t(i,i). \end{aligned}$$

De manera que acabem la prova. □

Proposició. Per a tot i, j d'E, la funció $p_\cdot(i,j) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $p_\cdot(i,j)(t) = p_t(i,j)$ és contínua.

Prova. Utilitzant els mateixos arguments que en la proposició anterior s'obté també que per a tot $0 < t < s$

$$|p_{s-t}(i,j) - p_s(i,j)| \leq 1 - p_t(i,i).$$

Aquesta darrera igualtat combinada amb el resultat de la proposició anterior i la propietat $d)$ implica que

$$\lim_{t\to 0} |p_{s+t}(i,j) - p_s(i,j)| \leq 1 - \lim_{t\to 0} p_{|t|}(i,i) = 0,$$

i tenim, per tant, la continuïtat. □

El proper objectiu és demostrar que tant $p_t(i,j)$ com $p_t(i,i)$ tenen derivada per la dreta al punt $t = 0$. Aquesta derivada tindrà un paper fonamental en el comportament del procés de Màrkov.

Abans de donar aquest resultat enunciem un lema tècnic d'anàlisi que ens serà útil per a la demostració.

Lema. Sigui $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció subadditiva (és a dir, $H(t+s) \leq H(t) + H(s)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$) amb $H(t) = 0$ per a tot $t \leq 0$. Aleshores,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{H(t)}{t} = \sup_{0<t<\infty} \frac{H(t)}{t} = c,$$

on $c \in [0, \infty]$ (és a dir, el suprem existeix).

Proposició.

A) Per a tot $i \in E$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t} := q_i \in [0, \infty].$$

B) Per a tot $i, j \in E$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} := q_{i,j} < \infty.$$

Prova. Demostrarem només $A)$. $B)$ es faria utilitzant el mateix mètode.
Definim $H_i(t) = -\ln p_t(i,i)$ si $t > 0$ i $H_i(t) = 0$ si $t < 0$. És clar que $H_i(0) = -\ln p_0(i,i) = 0$. D'altra banda, de Chapman-Kolmogórov es dedueix que per a tot $s, t > 0$ es compleix que

$$p_{s+t}(i,i) \geq p_s(i,i) p_t(i,i),$$

de manera que aplicant $-\ln$ als dos costats de la desigualtat obtenim

$$H_i(s+t) \leq H_i(s) + H_i(t).$$

És fàcil, per tant, acabar de comprovar que H_i és subadditiva.
Podem, per tant, aplicar el lema tècnic que hem enunciat i obtindrem que existeix el límit

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{H_i(t)}{t} := q_i$$

que denotem per q_i.
Aleshores tenim que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - e^{-H_i(t)}}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - e^{-H_i(t)}}{H_i(t)} \times \frac{H_i(t)}{t} = q_i,$$

ja que quan $t \downarrow 0$ tindrem que $H_i(t) \to 0$ i

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-h}}{h} = 1.$$

$\square$

Observem amb detall què ens diu aquesta proposició. Com que $p_0(i,i) = 1$, l'apartat $A)$ ens diu que existeix el límit

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,i) - p_0(i,i)}{t} := -q_i,$$

és a dir, que $p_t(i,i)$ té derivada per la dreta a $t=0$. De la mateixa manera, com que $p_0(i,j)=0$, $B)$ ens diu que $p_t(i,j)$ té derivada per la dreta a $t=0$ i aquesta derivada és el $q_{i,j}$.

Observem que la proposició també ens diu que

$$p_h(i,i) = 1 - hq_i + o\big(h\big)$$

i

$$p_h(i,j) = hq_{i,j} + o\big(h\big).$$

Notació. Observeu que farem servir indistintament $\lim_{t\to 0^+}$ i $\lim_{t\downarrow 0}$.

Ara veurem el paper que tenen els q_i i els $q_{i,j}$. Podem comprovar que

$$q_i \geq \sum_{j\neq i} q_{i,j}.$$

En efecte, si considerem $E_0 \subset E$ tal que E_0 sigui finit i $i \notin E_0$, aleshores,

$$\frac{1-p_t(i,i)}{t} = \frac{\sum_{j\neq i} p_t(i,j)}{t} \geq \sum_{j\in E_0} \frac{p_t(i,j)}{t}.$$

Si ara fem $\lim_{t\downarrow 0}$ obtindrem:

$$q_i = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-p_t(i,i)}{t} \geq \lim_{t\downarrow 0} \sum_{j\in E_0} \frac{p_t(i,j)}{t} = \sum_{j\in E_0} q_{i,j},$$

i com que és cert per a qualsevol conjunt E_0 d'aquí deduïm que

$$q_i \geq \sum_{j\neq i} q_{i,j}.$$

Definició. Un estat $i\in E$, direm que és **estable** o **regular** si, i només si, $q_i < \infty$ i

$$q_i = \sum_{j\neq i} q_{i,j}.$$

També té un paper important la matriu formada pels $(q_{i,j})_{i,j\in E}$, entenent que $q_{i,i} = -q_i$.

Definició. La matriu

$$A := \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t - I}{t} = \frac{d}{dt}(P_t)_{|t=0^+}$$

s'anomena el **generador infinitesimal** del procés de Màrkov a temps continu.

Si assumim $E=\mathbb{N}$, el generador infinitesimal té l'aspecte següent

$$A = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,0} & -q_1 & q_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Exemple. El procés de Poisson. Si $\{N_t, t \geq 0\}$ és un procés de Poisson, com que té increments independents és fàcil comprovar que

$$P(N_{t+s} = j | N_u, u \leq t) = P(N_{t+s} = j | N_t),$$

de manera que serà un procés de Màrkov. A més, si $i \geq j$,

$$\begin{aligned} p_t(i,j) &= P(N_{t+s} = i | N_s = j) = P(N_{t+s} - N_s = i - j | N_s = j) \\ &= P(N_{t+s} - N_s = i - j) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \end{aligned}$$

i $p_t(i,j) = 0$ si $i < j$.
Si diem $p_t(k) := e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, podem escriure

$$P_t = \begin{pmatrix} p_t(0) & p_t(1) & p_t(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p_t(0) & p_t(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & p_t(0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Podem observar també que:

1. Per a tot i,
$$q_i = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} = \lambda$$
.

2. Per a tot $i < j$,
$$q_{i,j} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}}{t} = \begin{cases} \lambda, & \text{si } j = i+1, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

3. Per a tot $i > j$, $q_{i,j} = 0$.

Per tant,
$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Exemple. Una cua M/M/1. Considerem un servei que té les característiques següents:

- Els clients arriben seguint un procés de Poisson.
- Si el client arriba i troba el servidor no ocupat comença a ser atès immediatament. Si quan arriba, el servidor està ocupat, el client s'espera fins que li toca el seu torn.
- El temps que es triga a completar un servei —sense comptar el temps d'espera— segueix una distribució exponencial i és independent de les arribades i els serveis als altres clients.

Diem Y_t al nombre de clients al sistema —inclou els que s'esperen i als que se serveixen— a l'instant de temps t. Per tant,

$$\begin{aligned} Y_{t+s} = Y_t \quad &+ \quad \text{nombre d'arribades durant } [t, t+s) \\ &- \quad \text{nombre de serveis finalitzats durant } [t, t+s). \end{aligned}$$

Observem que:

- El nombre d'arribades durant $(t, t+s]$ és independent de tot el que ha passat abans de t.
- Com que la distribució exponencial té la propietat de falta de memòria, el temps de servei pendent a un client a qui estan servint a l'instant t és independent de tot el que ha passat abans.

Per tant, el nombre de serveis finalitzats durant $(t, t+s]$ depèn només de Y_t i del nombre d'arribades durant $(t, t+s]$. Tindrem, per tant, un procés de Màrkov.

Podem enunciar ja un resultat fonamental: les equacions de Kolmogórov.

Teorema. *Kolmogorov's backward equation* **(KBE).** Suposem que tots els elements de E són regulars. Aleshores, per a tot $i, j \in E$ i $t \geq 0$,

$$p'_t(i,j) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} p_t(k,j) - q_i p_t(i,j) = \sum_{k \in E} p'_{0^+}(i,k) p_t(k,j).$$

En notació matricial, podem escriure

$$\frac{d}{dt} P_t = A P_t.$$

Teorema. *Kolmogorov's forward equation* **(KFE).** Suposem que $i \in E$ és regular i que $\sum_{k \in E} p_t(i,k) q_k < \infty$. Aleshores, per a $t \geq 0$,

$$p'_t(i,j) = \sum_{k \neq j} p_t(i,k) q_{k,j} - p_t(i,j) q_j = \sum_{k \in E} p_t(i,k) p'_{0^+}(k,j).$$

En notació matricial, podem escriure

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t A.$$

En els teoremes anteriors, $p'_{t^+}(k,j)$ indica la derivada per la dreta. Quan parlem de la derivada $p'_t(i,j)$ i l'apliquem a $t = 0$, indica també la derivada per la dreta.

L'equació matricial

$$\frac{d}{dt} P_t = A P_t$$

té una solució

$$P_t = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}.$$

Per veure el tipus de tècniques que cal utilitzar, demostrarem només el primer dels teoremes.

Prova de la *Kolmogorov's backward equation* **(KBE).** Fixem $i, j \in E$. De l'equació de Chapman-Kolmogórov podem escriure

$$\begin{aligned} p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j) &= \sum_{k \in E} p_h(i,k) p_t(k,j) - p_t(i,j) \\ &= \sum_{k \neq i} p_h(i,k) p_t(k,j) + (p_h(i,i) - 1) p_t(i,j). \end{aligned}$$

Si dividim per h i agafem límits,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j)) = \lim_{h \downarrow 0} \Big(\sum_{k \neq i} \frac{p_h(i,k)}{h} p_t(k,j) + \frac{(p_h(i,i) - 1)}{h} p_t(i,j) \Big)$$

Si suposem que podem intercanviar el límit amb el sumatori, tenim que

$$p'_{t^+}(i,j) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} p_t(k,j) - q_i p_t(i,j)$$

i tenim, per tant, l'existència de derivades per la dreta. Com que l'existència de derivades per la dreta més la continuïtat ens dona la derivabilitat, tenim la derivabilitat de $p_t(i,j)$ i l'equació KBE. Per tant, per acabar la demostració, hem de comprovar que podem intercanviar el límit i el sumatori. Vegem-ho. Fixat un N qualsevol,

$$\liminf_{h \downarrow 0} \sum_{k \neq i} \frac{p_h(i,k)}{h} p_t(k,j) \geq \liminf_{h \downarrow 0} \sum_{k \neq i, k \leq N} \frac{p_h(i,k)}{h} p_t(k,j) = \sum_{k \neq i, k \leq N} q_{i,k} p_t(k,j).$$

D'altra banda, per a $N > i$

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} p_h(i,k) p_t(k,j) &\leq \sum_{k \neq i, k \leq N} p_h(i,k) p_t(k,j) + \sum_{k > N} p_h(i,k) \\ &= \sum_{k \neq i, k \leq N} p_h(i,k) p_t(k,j) + 1 - p_h(i,i) - \sum_{k \neq i, k \leq N} p_h(i,k) \\ &= \sum_{k \neq i, k \leq N} p_h(i,k)(p_t(k,j) - 1) + 1 - p_h(i,i), \end{aligned}$$

de manera que dividint per h i agafant límits, obtenim

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k \neq i} p_h(i,k) p_t(k,j) \\ &\quad \leq \limsup_{h \downarrow 0} \Big(\sum_{k \neq i, k \leq N} \frac{p_h(i,k)}{h} (p_t(k,j) - 1) + \frac{(1 - p_h(i,i))}{h} \Big) \\ &\quad = \sum_{k \neq i, k \leq N} q_{i,k} (p_t(k,j) - 1) + q_i. \end{aligned}$$

I ajuntant les dues desigualtats que hem vist tenim:

$$\sum_{k\neq i, k\leq N} q_{i,k}p_t(k,j) \leq \liminf_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\sum_{k\neq i} p_h(i,k)p_t(k,j)$$
$$\leq \limsup_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\sum_{k\neq i} p_h(i,k)p_t(k,j) \leq \sum_{k\neq i, k\leq N} q_{i,k}(p_t(k,j)-1)+q_i.$$

Fent tendir N cap a ∞ i utilitzant que els estats són regulars, i que, per tant, $q_i = \sum_{j\neq i} q_{i,j}$, tenim que

$$\sum_{k\neq i} q_{i,k}p_t(k,j) = \lim_{h\downarrow 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_h(i,k)}{h}p_t(k,j)$$

o dit d'una altra manera

$$\sum_{k\neq i}\lim_{h\downarrow 0}\frac{p_h(i,k)}{h}p_t(k,j) = \lim_{h\downarrow 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_h(i,k)}{h}p_t(k,j).$$

□

6.4 Descripció del procés

Dedicarem aquesta sessió a entendre bé quin és el funcionament d'un procés de Màrkov.

Anomenem T_i el temps que estem a l'estat i abans de moure'ns a un altre estat. Per la propietat de Màrkov del procés homogeni en temps, tindrem que, per a tot $s,t\geq 0$,

$$P(T_i > s+t | T_i > s) = P(T_i > t).$$

Per tant, T_i és una variable sense memòria, de manera que seguirà una distribució exponencial. Determinem-ne el paràmetre i veurem que $T_i \sim \exp(q_i)$. Observem que, per a tot $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} P(T_i > t) &= P(Y_s = i, 0\leq s\leq t | Y_0 = i) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P\Big(Y_s = i, \frac{(k-1)t}{n} \leq s \leq \frac{kt}{n} | Y_{\frac{(k-1)t}{n}} = i\Big) \\ &= \bigg(P\Big(Y_s = i, 0\leq s\leq \frac{t}{n} | Y_0 = i\Big)\bigg)^n, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} P(T_i > t) &= \lim_{n\to\infty}\bigg(P\Big(Y_s = i, 0\leq s\leq \frac{t}{n} | Y_0 = i\Big)\bigg)^n \\ &\approx \lim_{n\to\infty}\big(p_{\frac{t}{n}}(i,i)\big)^n = \lim_{n\to\infty}\big(1-\frac{t}{n}q_i + o(\frac{t}{n})\big)^n = e^{-tq_i}. \end{aligned}$$

Ara veurem cap a on pot anar el procés quan canviem d'estat. Suposem, per tant, que sabem que el procés que està a l'estat i canvia al temps t. La probabilitat que el procés passi de l'estat i a l'estat j és:

$$\lim_{h\to 0} P(Y_{t+h}=j|Y_t=i, Y_{t+h}\neq i) = \lim_{h\to 0}\frac{P(Y_{t+h}=j, Y_t=i)}{P(Y_t=i, Y_{t+h}\neq i)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{p_h(i,j)}{\sum_{k\neq i} p_h(i,k)} = \lim_{h\to 0}\frac{p_h(i,j)}{1-p_h(i,i)} = \frac{q_{i,j}}{q_i}.$$

Per tant, el procés actua de la manera següent:

- **Un cop ha arribat a un estat i, s'hi queda durant un temps amb distribució exponencial de paràmetre q_i i després salta a un altre estat.**
- **El procés pot saltar a qualsevol altre estat $j (j\neq i)$ amb probabilitats $\frac{q_{i,j}}{q_i}$.**
- **Un cop arriba a l'estat j, torna a repetir-se el mateix funcionament.**

Veiem, per tant, que el comportament del procés depèn només de la matriu A.

Si del procés observem només els salts, ens queda una cadena de Màrkov amb matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{q_{i,j}}{q_i} & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

Aquest cadena s'anomena *embedded Markov chain* o cadena de Màrkov associada. Aleshores els estats del procés de Màrkov a temps continu es poden definir —transitoris, recurrents, etc.— segons les seves propietats a la cadena de Màrkov associada.

6.5 Processos irreduïbles

Considerem ara que tenim un procés de Màrkov $\{Y_t, t\geq 0\}$ a temps continu tal que la seva cadena de Màrkov associada, amb matriu de probabilitats de transició P, és irreduïble. Com que hi ha una única classe, serà també recurrent.
Per la propietat de les cadenes de Màrkov, existeix una distribució invariant ν que és l'única solució —mòdul de multiplicació per una constant— no degenerada de

$$\nu P = \nu.$$

Donat un estat j, anomenarem un **cicle** l'interval de temps que comença amb una entrada a l'estat j i acaba amb la següent entrada al mateix estat j. Fem un estudi heurístic dels cicles.

Com que ν és la distribució invariant, el nombre esperat de visites a l'estat i en un cicle de j, és a dir, entre dues visites a l'estat j, el podem obtenir calculant

$$\frac{\nu(i)}{\nu(j)}.$$

Com que el temps que estem en qualsevol estat k és una $\exp(q_k)$, que té esperança $\frac{1}{q_k}$, el temps que esperem que duri un cicle de j el podem calcular a partir del nombre esperat de visites a cada estat per la durada d'aquestes visites, que ens quedarà

$$\frac{1}{q_j} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{q_i} \times \frac{\nu(i)}{\nu(j)} = \frac{1}{\nu(j)} \sum_{i \in E} \frac{\nu(i)}{q_i}.$$

I, finalment, podem calcular la ràtio del temps del cicle que esperem que passem a l'estat j respecte de la durada total del cicle

$$\pi(j) = \frac{\frac{1}{q_j}}{\frac{1}{\nu(j)} \sum_{i \in E} \frac{\nu(i)}{q_i}} = \frac{\frac{\nu(j)}{q_j}}{\sum_{i \in E} \frac{\nu(i)}{q_i}},$$

de manera que $\pi(j)$ ens indicarà la proporció del temps que el procés Y està a j i coincidirà, per tant, amb la distribució límit (si existeix).

El teorema següent ens explica aquests resultats.

Teorema.

(1) Si el procés de Màrkov és irreduïble, aleshores la distribució límit

$$\lim_{t \to \infty} P(Y_t = j) = \pi(j)$$

existeix i és independent de la condició inicial del procés. Els límits $\{\pi(j), j \in E\}$ són, o bé idènticament igual a zero ($\pi(j) = 0, \forall j \in E$) o són tots positius i formen una distribució de probabilitat $(\pi(j) > 0, \forall j \in E, \sum_{j \in E} \pi(j) = 1)$.

(2) La distribució límit $\{\pi(j), j \in E\}$ d'un procés de Màrkov irreduïble és l'única solució de l'equació

$$\pi A = 0$$

amb $\sum_{j \in E} \pi(j) = 1.$

La distribució límit està lligada a la distribució estacionària (o invariant).

Definició. Una distribució de probabilitat μ sobre E (és a dir, $\mu(j) \geq 0 \, \forall j \in E$ i $\sum_{j \in E} \mu(j) = 1$) direm que és **estacionària** si per a tot $t \geq 0$

$$\mu = \mu P_t$$

.

Podem veure la relació entre la distribució estacionària i la distribució límit:

- Sigui μ una distribució estacionària. Per tant, per a tot $t \geq 0$

$$\mu = \mu P_t.$$

Derivant respecte de la t,

$$0 = \frac{d}{dt}\mu = \frac{d}{dt}(\mu P_t) = \mu \frac{d}{dt}(P_t) = 0,$$

per a tot $t \geq 0$. I avaluant la derivada a $t = 0$, obtenim

$$0 = \mu\Big(\frac{d}{dt}(P_t)\Big)_{|t=0} = \mu A.$$

És a dir, que podem trobar la μ com a solució de l'equació que ens donava la distribució límit.

- Considerem ara la distribució límit

$$\pi(j) = \lim_{t\to\infty} P(Y_t = j).$$

Com que μ és la distribució invariant, satisfà per a tot $t \geq 0$

$$\mu = \mu P_t.$$

Fent ara tendir t cap a ∞ als dos costats de la igualtat, obtenim clarament

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \mu P_t = \pi.$$

Capítol 7

PROCESSOS DE NAIXEMENT I MORT

Es tracta d'una classe molt important dels processos de Màrkov per les seves aplicacions a la biologia, a la demografia i a la teoria de cues.

Les seves característiques fonamentals són les següents:

- L'espai d'estats és el conjunt dels nombres naturals $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Y_t indicarà la mida de la població a l'instant t.
- Un **naixement** incrementarà la mida de la població en un.
- Una **mort** disminuirà la mida de la població en un.

Si ens situem en el marc general dels processos de Màrkov, per definir un procés de naixement i mort, assumim que:

(a) $p_h(i, i+1) = \lambda_i h + o(h), \ \forall i \in \mathbb{N},$ amb $\lambda_i \geq 0.$

(b) $p_h(i, i-1) = \mu_i h + o(h), \ \forall i \in \mathbb{N},$ amb $\mu_0 = 0, \mu_i \geq 0.$

(c) $p_h(i, i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h).$

Observem que, com que

$$p_h(i, i-1) + p_h(i, i) + p_h(i, i+1) = 1 + o(h),$$

tindrem que (c) és equivalent a $p_h(i, j) = o(h)$ si $|i - j| \geq 2.$

Aleshores, podem calcular fàcilment

$$\begin{aligned} q_i &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_h(i,i) - 1}{h} = \lambda_i + \mu_i, \\ q_{i,j} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_h(i,j)}{h} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } j = i+1, \\ \mu_i & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

de manera que el generador infinitesimal és

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Per tant, quan tenim una població de mida i podrà haver-hi un naixement i, per tant, la població augmentarà en un, i la distribució del temps fins al naixement és una $\exp(\lambda_i)$, o podrà haver-hi una mort i, per tant, la població disminuirà en un, i la distribució del temps fins a la mort és una $\exp(\mu_i)$. A més, la probabilitat que el primer que hi hagi sigui un naixement serà de $\frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i}$ i la probabilitat que el primer que hi hagi sigui una mort serà de $\frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i}$.
Parlarem d'un **procés de naixement pur** quan tinguem un procés de naixement i mort amb $\mu_k = 0$ per a tot $k \geq 0$.
Parlarem d'un **procés de mort pur** quan tinguem un procés de naixement i mort amb $\lambda_k = 0$ per a tot $k \geq 0$.

Exemple. El procés de Poisson. El procés de Poisson de paràmetre λ és un procés de naixement pur amb $\lambda_k = \lambda$ per a tot $k \geq 0$.

Vegem ara com aplicar la teoria general de processos de Màrkov als processos de naixement i mort.
Clarament, tots els estats $i \in \mathbb{E}$ són regulars, ja que per a tot i

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j}.$$

Podem, per tant, escriue l'equació KBE —*Kolmogorov's backward equation*. Per a tot $j \geq 1$, podem escriure:

$$\begin{aligned} p_t'(0,j) &= \lambda_0 p_t(1,j) - \lambda_0 p_t(0,j), \\ p_t'(i,j) &= \mu_i p_t(i-1,j) - (\lambda_i+\mu_i) p_t(i,j) + \lambda_i p_t(i+1,j), \qquad \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

Clarament, també es compleix la condició $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_t(i,k) q_k < \infty$ per a tot i, de manera que també podem escriure la KFE —*Kolmogorov's forward equation*. Per a tot $i \geq 1$, podem escriure:

$$\begin{aligned} p_t'(i,0) &= -\lambda_0 p_t(i,0) + \mu_1 p_t(i,1), \\ p_t'(i,j) &= \lambda_{j-1} p_t(i,j-1) - (\lambda_j+\mu_j) p_t(i,j) + \mu_{j+1} p_t(i,j+1), \qquad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

Observem que la solució de la KFE no dependrà de i. Per tant, si diem $p_t(j) := P(Y_t = j)$, podem reconvertir la KFE en:

$$\begin{aligned} p_t'(0) &= -\lambda_0 p_t(0) + \mu_1 p_t(1), \\ p_t'(j) &= \lambda_{j-1} p_t(j-1) - (\lambda_j+\mu_j) p_t(j) + \mu_{j+1} p_t(j+1), \qquad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

Podem calcular també la distribució límit —o estacionària. Hem d'imposar

$$\pi A = 0, \qquad i \qquad \sum_{j\in E} \pi(j) = 1.$$

Tenim les relacions:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0\pi(0) + \mu_1\pi(1), \\ 0 &= \lambda_{n-1}\pi(n-1) - (\lambda_n + \mu_n)\pi(n) + \mu_{n+1}\pi(n+1), \end{aligned}$$

per a tot $n \geq 1$. Ho resoldrem per recursió. Clarament:

$$\pi(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi(0).$$

Per a $n = 1$, tenim que

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \mu_1)\pi(1) = \lambda_0\pi(0) + \mu_2\pi(2) \\ \Longrightarrow \quad & \lambda_1\pi(1) = \mu_2\pi(2) \\ \Longrightarrow \quad & \pi(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi(1) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi(0). \end{aligned}$$

Seguint la recursió, veurem que

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_{n+1}}\pi(0).$$

Per a $n + 1$, tenim

$$\begin{aligned} & (\lambda_n + \mu_n)\pi(n) = \lambda_{n-1}\pi(n-1) + \mu_{n+1}\pi(n+1) \\ \Longrightarrow \quad & \lambda_n\pi(n) = \mu_{n+1}\pi(n+1) \\ \Longrightarrow \quad & \pi(n+1) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}\pi(n) = \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_{n+1}}\pi(0), \end{aligned}$$

on en la primera implicació hem utilitzat que $\mu_n\pi(n) = \lambda_{n-1}\pi(n-1)$.
Imposem ara la condició

$$\sum_{j\in E} \pi(j) = 1$$

i obtenim que

$$\pi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_n}\pi(0) = 1,$$

de manera que

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_n}\right)^{-1}.$$

Per tant, la distribució límit existeix i és no nul·la només quan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_{n+1}} < \infty.$$

Vegem tot seguit alguns casos particulars i el tipus de càlculs que podem fer.

7.1 Exemple d'una cua. Una cua d'un servei

Considerem un servei —per exemple, una botiga— tal que:

- Els clients arriben al servei seguint un procés de Poisson, és a dir, els temps entre arribades són variables aleatòries $\exp(\lambda)$ independents.
- Els clients que arriben se serveixen directament —és a dir, suposem que el servei pot atendre alhora qualsevol nombre de clients— i els temps de servei són variables aleatòries $\exp(\mu)$ independents.

Considerem aleshores Y_t el nombre de clients que són servits —tots els que han arribat i encara no s'ha acabat el servei.

Podem assumir, per tant, que:

- $\lambda_i = \lambda$, ja que quan $Y_t = i$, la propera arribada vindrà després d'un temps $\exp(\lambda)$.
- $\mu_i = i\mu$, ja que quan $Y_t = i$, el temps del primer client en acabar correspondrà al mínim de i lleis $\exp(\mu)$ independents, que sabem que segueix una distribució $\exp(i\mu)$.

Observem
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \times \cdots \times \mu_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} < \infty.$$
Tindrem, per tant, una distribució límit. Diem $p_t(j) = P(Y_t = j)$ i per la igualtat KFE,

$$\begin{aligned} p_t'(0) &= -\lambda p_t(0) + \mu p_t(1), \\ p_t'(j) &= \lambda p_t(j-1) - (\lambda + j\mu)p_t(j) + (j+1)\mu p_t(j+1), \qquad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

En aquest cas resoldrem el sistema utilitzant la funció generatriu:

$$\Phi(t,u) = E\left(u^{Y_t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_t = k)u^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_t(k)u^k.$$

Si calculem la derivada parcial respecte de t, utilitzem les equacions KFE i reordenem els termes, podem obtenir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,u) = \sum_{j=0}^{\infty} p_t'(j)u^j \\ &\quad = -\lambda p_t(0) + \mu p_t(1) + \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda p_t(j-1) - (\lambda + j\mu)p_t(j) + (j+1)\mu p_t(j+1))u^j \\ &\quad = -\lambda p_t(0) + \mu p_t(1) + \lambda u \sum_{j=0}^{\infty} u^j p_t(j) - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} u^j p_t(j) - \mu \sum_{j=1}^{\infty} j u^j p_t(j) + \mu \sum_{j=2}^{\infty} j u^{j-1} p_t(j) \\ &\quad = \lambda u \sum_{j=0}^{\infty} u^j p_t(j) - \lambda \sum_{j=0}^{\infty} u^j p_t(j) - \mu \sum_{j=1}^{\infty} j u^j p_t(j) + \mu \sum_{j=1}^{\infty} j u^{j-1} p_t(j) \\ &\quad = -\lambda(1-u)\Phi(t,u) + \mu(1-u)\frac{\partial}{\partial u}\Phi(t,u). \end{aligned}$$

Tenim, per tant, l'equació

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,u) = -\lambda(1-u)\Phi(t,u) + \mu(1-u)\frac{\partial}{\partial u}\Phi(t,u).$$

Si assumim que $Y_0 = i_0$, es pot comprovar que la solució de l'equació anterior és

$$\Phi(t,u) = \left(1-(1-u)e^{-\mu t}\right)^{i_0} \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}(1-u)(1-e^{-\mu t})\right).$$

Però aquesta funció generatriu ens diu que $Y_t = Y_t^a + Y_t^b$ on

$$\begin{aligned} Y_t^a &\sim B(i_0, e^{-\mu t}), \\ Y_t^b &\sim Poiss(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})), \end{aligned}$$

i Y_t^a i Y_t^b són independents. Per veure-ho, només cal recordar que si $X \sim B(n,p)$ la seva funció generatriu és $\Phi_X(v) = (1-p+vp)^n$ i que si $Z \sim Pois(\beta)$ la seva funció generatriu és $\phi_Z(v) = \exp(-(1-v)\beta)$.
A partir d'aquí tenim que

$$E(Y_t) = i_0 e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$$

i que

$$P(Y_t = k) = \sum_{j=0}^{k\wedge i_0} P(Y_t^a = j)P(Y_t^b = k-j),$$

que té una expressió explícita.

7.2 Exemple d'una població. Un model de creixement lineal amb immigració

Considerem Y_t la mida d'una població a l'instant t. La població es comporta de la manera següent:

- Cada individu pot tenir descendents i la distribució del temps entre descendents són variables aleatòries $\exp(\lambda)$ independents.
- Cada individu pot morir i la distribució del temps fins a la mort és una $\exp(\mu)$ i és independent dels temps de reproducció.
- Cada individu és independent del que fan la resta d'individus.
- La població també pot creixer per immigració. Els temps entre les arribades d'individus per aquesta via són variables aleatòries $\exp(a)$ independents.

Podem assumir, per tant, que:

- $\lambda_i = i\lambda + a$, per a tot $i \geq 0$, ja que quan $Y_t = i$ la propera arribada pot ser per la immigració o pel descendent d'un dels i individus, de manera que tenim el mínim de i lleis $\exp(\lambda)$ i una $\exp(a)$, que segueix una distribució $\exp(i\lambda + a)$.
- $\mu_i = i\mu$ per a tot $i \geq 0$, ja que quan $Y_t = i$, el temps de la primera mort, correspondrà al mínim de i lleis $\exp(\mu)$ independents, que sabem que segueix una distribució $\exp(i\mu)$.

En aquest exemple, volem estudiar $\lim_{t\to\infty} M_t$ on, assumint que $Y_0 = i$,

$$M_t := E(Y_t) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_t(i,j).$$

Utilitzarem com a eina fonamental la KFE. Per a tot $i \geq 1$, podem escriure:

$$\begin{aligned} p_t'(i,0) &= -\lambda_0 p_t(i,0) + \mu_1 p_t(i,1), \\ p_t'(i,j) &= \lambda_{j-1} p_t(i,j-1) - (\lambda_j + \mu_j) p_t(i,j) + \mu_{j+1} p_t(i,j+1), \qquad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} M_t' = \sum_{j=1}^{\infty} j p_t'(i,j) = \sum_{j=1}^{\infty} (j(j-1)\lambda + ja) p_t(i,j-1) \\ - \sum_{j=1}^{\infty} (j^2(\lambda+\mu) + ja) p_t(i,j) + \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)\mu p_t(i,j+1). \end{aligned}$$

Si agrupem els termes:

1. Termes que multipliquen la λ:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1) p_t(i,j-1) - \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_t(i,j) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)^2 p_t(i,j-1) + \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) p_t(i,j-1) - \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_t(i,j) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) p_t(i,j-1) = M_t, \end{aligned}$$

2. Termes que multipliquen la μ:

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_t(i,j) + \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1) p_t(i,j+1) \\ &\quad = -\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1) p_t(i,j) - \sum_{j=1}^{\infty} j p_t(i,j) + \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1) p_t(i,j+1) \\ &\quad = -\sum_{j=1}^{\infty} j p_t(i,j) = -M_t. \end{aligned}$$

3. Termes que multipliquen la a:

$$\begin{aligned} M_t' &= \sum_{j=1}^{\infty} j p_t(i,j-1) - \sum_{j=1}^{\infty} j p_t(i,j) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) p_t(i,j) - \sum_{j=1}^{\infty} j p_t(i,j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_t(i,j) = 1. \end{aligned}$$

Suposant que podem intercanviar el sumatori amb la derivada (no ho demostrem) i que totes les expressions tenen sentit, tenim l'equació diferencial:

$$M_t' = a + (\lambda - \mu) M_t$$

amb condició inicial $M_0 = E(Y_0) = i_0$.
La solució d'aquesta equació és

- Si $\lambda = \mu$, aleshores
$$M_t = at + i_0.$$
- Si $\lambda \neq \mu$, aleshores
$$M_t = \frac{a}{\lambda - \mu}\left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right) + i_0 e^{(\lambda-\mu)t}.$$

De manera que

- Si $\lambda \geq \mu$, aleshores $\lim_{t\to\infty} M_t = \infty$,
- Si $\lambda < \mu$, aleshores $\lim_{t\to\infty} M_t = \frac{-a}{\lambda-\mu}$.

7.3 Exemple d'un procés de naixement pur. El procés de Yule

Considerem $\{Y_t, t \geq 0\}$ un procés de naixement pur, és a dir, amb $\mu_i = 0$ per a tot i. La KFE té la forma, per a tot $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_t'(i,0) &= -\lambda_0 p_t(i,0), \\ p_t'(i,j) &= \lambda_{j-1} p_t(i,j-1) - \lambda_j p_t(i,j). \end{aligned}$$

Com que la solució no dependrà de i, si diem $p_t(n) := p_t(0,n)$, podem reconvertir la KFE en

$$\begin{aligned} p_t'(0) &= -\lambda_0 p_t(0), \\ p_t'(j) &= \lambda_{j-1} p_t(j-1) - \lambda_j p_t(j), \qquad \forall j \geq 1, \end{aligned}$$

i amb les condicions inicials $p_0(0) = 1$ i $p_0(j) = 0, \forall j \geq 1$.

És clar que podem resoldre la primera equació directament

$$p_t(0) = e^{-\lambda_0 t},$$

i a partir d'aquí, podem anar resolvent les equacions iterativament i obtenim que

$$p_t(n) = \lambda_{n-1} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n s} p_s(n-1) ds.$$

Com que és clar que $p_t(n) \geq 0$ per a tot t i per a tot n, tindrem que la solució és una distribució si tenim que $\sum_{n\geq 0} p_t(n) = 1$.

Per veure-ho, tenim el resultat següent:

$$\sum_{n\geq 0} p_t(n) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Aquest resultat no el demostrarem però n'interpretarem el significat. Si anomenen T_0 el temps fins al primer naixement, $T_0 \sim \exp(\lambda_0)$. Si considerem T_k el temps transcorregut entre el k-èsim naixement i el $k+1$-èsim naixement, sabem que $T_k \sim \exp(\lambda_k)$. Per tant,

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k\geq 0} E(T_k),$$

que ho podem interpretar com el temps esperat fins que la població és infinita. Per tant, per tenir una distribució, cal que es necessiti un temps infinit per tenir una població infinita.

Com a cas particular de procés de naixement pur tenim el procés de Yule. En aquest procés cada individu de la població actua independentment de la resta de la població i es reprodueix amb un temps $\exp(\lambda)$. Tindrem, per tant, que:

- $\mu_i = 0$, per ser un procés de naixement pur.
- $\lambda_i = i\lambda$ ja que quan $Y_t = i$, el temps del primer naixement correspondrà al mínim de i lleis $\exp(\lambda)$ independents, que sabem que segueix una distribució $\exp(i\lambda)$.

Per a aquest procés, si comencem amb un població inicial $Y_0 = 1$, i adaptant els càlculs anteriors a quan comença amb un individu, obtenim que

$$\begin{aligned} p'_t(1) &= -\lambda p_t(1), \\ p'_t(n) &= (n-1)\lambda p_t(n-1) - n\lambda p_t(n), \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

I la solució és

$$p_t(1) = e^{-\lambda t},$$

i

$$p_t(n) = (n-1)\lambda e^{-n\lambda t} \int_0^t e^{n\lambda s} p_s(n-1) ds.$$

I per inducció s'obté fàcilment que

$$p_t(n) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Veiem clarament que és una distribució, ja que és una llei geomètrica. Podem comprovar, a més, que es compleix la condició:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k} = \infty.$$

Bibliografia

[1] Brezniak, Z.; Zastawniak, T., *Basic stochastic processes.* London Barcelona: Springer, 2005.

[2] Lawler, G.F., *Introduction to Stochastic Processes.* Boca Raton: Chapman Hall / CRC, 2006.

[3] Norris, J.R., *Markov Chains.* Cambridge : Cambridge University Press, 1997.

[4] Resnick, S.I., *Adventures in stochastic processes.* Boston: Birkhäuser, 1994.

[5] Todorovic, P., *An introduction to stochastic processes and their applications.* New York Barcelona: Springer, 1992.