Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Aprenentatge i Servei al grau de Matemàtiques

Autora: Gemma Ramírez Pruñonosa

Tutor: Dr. Sergi Muria Maldonado
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

The present work is the compilation of the undertaken tasks to promote Service-Learning projects in the degree of Mathematics in the Faculty of Mathematics and Computer Science of the University of Barcelona. Firstly, a methodological approach is done within the framework of University and Mathematical Science. Afterwards, the several implementations that have been accomplished during these last months are described: a Service-Learning pilot program carried out with the Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), the incorporation of some subjects of the degree in the *Compartir Idees* project and the creation of links with social organizations to start Service-Learning programs in the future.

Resum

El present treball és el recull de la feina realitzada per impulsar projectes d'Aprenentatge i Servei (ApS) des del grau de Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona. En primer lloc es contextualitza aquesta metodologia, en el marc universitari i en la disciplina matemàtica. Seguidament, s'exposen les concrecions que s'han realitzat en aquests mesos: una prova pilot d'ApS realitzada amb el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), la incorporació d'algunes assignatures del grau al projecte *Compartir Idees* promogut pel grup ApS UB i l'establiment de vincles amb entitats socials per engegar projectes d'aquest caire en un futur.

2010 Mathematics Subject Classification. 00A35, 97A40, 97C70

Agraïments

Per començar, vull expressar els meus sincers agraïments al Dr. Sergi Muria, tutor del treball, pel continu acompanyament i recolzament i per l'agradable equip de treball que hem creat.

En segon lloc, vull agrair la confiança dipositada en aquest treball per part de l'equip deganal, i en especial al Dr. Antoni Benseny: el reconeixement i el suport durant el procés han promogut un bon desenvolupament del treball.

En tercer lloc, vull donar les gràcies també al grup ApS (UB), i concretament, a les persones que van reunir-se amb nosaltres a l'inici del treball: Dra. Laura Rubio (Facultat d'Educació), Dr. Òscar Alonso (Facultat de Física), Dra. Mònica Martínez (Facultat de Química), Dr. Eloi Puertas (Facultat de Matemàtiques i Informàtica).

En quart lloc, gràcies al MMACA per haver apostat per aquesta prova pilot. En particular agraeixo a la Pura Fornals, el Guido Ramellini, el Josep Rey i el Manel Udina els recursos i suggeriments que m'han ofert durant tot el procés.

Seguidament, vull donar les gràcies a totes les persones d'entitats que han mostrat interès en les propostes de col·laboracions que hem proposat. Valoro profundament les hores de reunions virtuals que han dedicat per construir col·lectivament futurs vincles entre la Facultat i les entitats.

Voldria posar en valor també la predisposició que té la Biblioteca de Matemàtiques i Informàtica a contribuir en el que és del seu abast per a la nostra bona formació,

Per acabar, vull fer notar que el suport de la família, de les companyes de casa i de les xarxes d'amistat han estat imprescindibles al llarg dels anys del grau i en especial aquests mesos de pandèmia, confinament i elaboració del treball.

Índex

1 Introducció

Motivació

Aquest treball neix fruit de la determinació de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica d'implementar projectes d'Aprenentatge i Servei (ApS) al grau de Matemàtiques. Es va presentar la possibilitat que el present treball tingués aquesta direcció i es va decidir entomar la proposta.

Cal destacar que un dels al·licients principals a l'hora de dedicidir realitzar aquest treball Final de Grau va ser la voluntat personal de participar en projectes relacionats amb el servei a la comunitat. Em va semblar que explorar aquesta vessant des del grau que havia estudiat podia resultar certament interessant. Així mateix, considero que el plantejament d'obtenir resultats tangibles per incorporar al grau també va ser un estímul afegit per decidir efectuar aquest treball.

Objectius

Tal i com s'ha indicat prèviament, l'objectiu general del treball és engegar aquesta proposta educativa al grau de Matemàtiques. Els objectius específics per dur-ho a terme són:

1. Conèixer l'ApS, en particular experiències en l'educació superior i en la disciplina matemàtica.
2. Tenir coneixença de l'estat de l'ApS a la Universitat de Barcelona, fent especial èmfasi a les branques científiques.
3. Explorar si hi ha projectes ApS funcionals on s'hi podria participar des del grau de matemàtiques.
4. Investigar l'existència d'entitats interessades en engegar projectes ApS amb la Facultat de Matemàtiques i Informàtica.
5. Realitzar un projecte ApS com a prova pilot.

Estructura de la Memòria

L'apartat 2 presenta, en primer lloc, la contextualització de l'Aprenentatge i Servei en els diferents àmbits que concerneixen el nostre marc d'actuació: l'educació superior universitària, la Universitat de Barcelona i la disciplina matemàtica. En segon lloc, es comparteix l'anàlisi de la realitat del grau de Matemàtiques des de diferents òptiques: l'opinió de l'alumnat, les activitats ja presents a la Facultat, i els objectius del grau, entre d'altres.

En l'apartat 3 s'introdueixen les diferents concrecions que finalment s'han realitzat, i en els apartats 4, 5 i 6 s'expliquen les concrecions i es desenvolupen de forma més extensa.

2 L'Aprenentatge i Servei: Estat de la qüestió

L'aprenentatge i Servei (ApS) és una proposta educativa que combina processos d'aprenentatge i de servei a la comunitat en un sol projecte ben articulat. Les persones participants es formen tot treballant sobre necessitats reals de l'entorn amb l'objectiu de millorar-lo. L'aprenentatge servei és, doncs, un projecte educatiu amb utilitat social. En l'APS es fonen intencionalitat pedagògica i intencionalitat solidària. És una proposta innovadora que parteix d'elements tan coneguts com el servei voluntari a la comunitat i l'adquisició d'aprenentatges. [1]

2.1 L'Aprenentatge i Servei a la Universitat

Històricament, una àmplia majoria de pràctiques universitàries han respost al model tradicional universitari: la institució educativa entesa com a temple del saber. En aquest model, la ciència és un objectiu en si mateix, i les destinatàries de la producció científica són les persones membres de la pròpia comunitat acadèmica, relegant la divulgació científica a un segon pla. No és prioritari que el coneixement es vinculi amb l'entorn real, i les demandes d'aquest no han d'interferir en la puresa acadèmica.

Fa temps que es duen a terme moltes iniciatives per tal de poder connectar la universitat amb la societat. Tanmateix, actualment s'acostuma a entendre la vinculació universitària amb la societat com una relació amb el mercat: la recerca i transferència del coneixement s'orienta en funció de la demanda, el coneixement es mesura a través de la possibilitat de convertir-lo amb un producte amb valor econòmic. Tot i que la producció de coneixement s'aproxima més notablement a la realitat i s'articula la relació entre la teoria i la pràctica, l'impacte social ve donat a través de lògiques econòmiques i per tant la universitat s'allunya de la seva funció crítica i transformadora. [2]

A través d'aquestes iniciatives es pretén aconseguir una universitat complexa que es reconegui part del conjunt de la comunitat. Es vol investigar en base a problemes reals, i que aquestes iniciatives siguin font d'aprenentatge i investigació per a l'alumnat i per al professorat.
La missió universitària (docència, recerca, i transferència de coneixement) ha d'estar connectada, per tant, amb la responsabilitat social, és a dir, tenir un compromís cívic amb la societat. Aquesta idea es tradueix en la voluntat d'orientar la recerca i la docència en la resolució de problemes i necessitats que té la societat. La Universitat, doncs, ha de garantir la formació de professionals i de ciutadanes amb una perspectiva ètica tant en l'àmbit professional com en l'àmbit individual. Aquestes idees de responsabilitat i compromís han près importància en el món universitari perquè posen l'accent en el deute de retorn a la societat que té la universitat com a servei públic. (Puig, 2012, pg 8).

Per tal de consolidar aquestes iniciatives, és necessari que els models formatius de les universitats promoguin, a nivell pràctic, situacions on pugui haver-hi una implicació amb la comunitat i que possibilitin la millora de les condicions de vida de l'entorn.
Aquesta implicació comunitària en el marc de l'aprenentatge acadèmic es pot vincular a través de l'Aprenentatge i Servei, on es vincula el servei a la comunitat amb l'aprenentatge de les estudiants. Aquesta metodologia connecta el compromís cívic amb l'aprenentatge curricular, afegint valor als dos conceptes i generant nous significats i efectes. La combinació d'uns elements ja coneguts, com són el servei a la comunitat i la transmissió de coneixements, habilitats i valors, generen una nova realitat amb més efectivitat educativa.

Context a Catalunya

La Xarxa d'Aprenentatge Servei de les Universitats Catalanes (Xarxa ApS(U)CAT) neix amb la voluntat d'intercanviar experiències i construir nous coneixements respecte l'Aprenentatge i Servei en el context de les universitats catalanes. La Xarxa està formada per professorat de totes les universitats catalanes, que actualment estan incorporant o institucionalitzant aquesta metodologia com a línia de treball que engloba les missions de la Universitat. Des de l'any 2015 es realitza una jornada anual de treball i formació. A més, la Xarxa ApS(U)CAT pretén estendre l'experiéncia a altres universitats i donar a conéixer la proposta educativa als diferents equips de direcció, deganats i responsables de titulacions de les universitats catalanes. D'altra banda, des de l'any 2018 que hi ha establert un marc de col·laboració amb l'Associació Catalana d'Universitats Públiques, per tal de donar suport a la visibilització i consolidació de la Xarxa, ja que recentment el nombre de projectes d'Aprenentatge Servei i la institucionalització d'aquests ha augmentat considerablement a les universitats catalanes. [3]

El procés de creació d'un projecte ApS a la Universitat

Reflexions prèvies L'Aprenentatge i Servei és una barreja d'elements ja coneguts que ben combinats aporten nous significats i relacions. No només és una estratègia d'aprenentatge per tal que l'alumnat obtingui coneixements, tampoc és únicament un conjunt de tasques de voluntariat. És una metodologia que, en unir aprenentatge i servei, els transforma i afegeix valor a tots dos, i a més crea nous i inesperats efectes positius (Escofet, Freixa i Puig, 2012, pg 11). Cal que ambdós elements intervinguin en el projecte a parts iguals. [4]

1. Aprenentatge + **servei** = Voluntariat
2. **Aprenentatge** + servei = Treball de camp
3. **Aprenentatge** + **servei** = ApS

Passos Els elements claus per tal de realitzar un projecte ApS són els següents: [3]

1. **Necessitats socials**. L'ApS comença amb reptes de l'entorn que es puguin abordar des de l'ensenyament de la persona estudiant. Cal, doncs, realitzar un exercici de recerca i anàlisi de necessitats. Convé ressaltar que és enriquidor poder implicar l'alumnat en la diagnosi d'aquestes necessitats.
2. **Partenariat**. És essencial poder establir una ferma i considerada relació entre la Universitat i les entitats socials per tal de garantir el recíproc profit del projecte.
3. **Aprenentatge**. L'adquisició de continguts i de competències és un element fonamental de l'ApS. S'aposta per un aprenentatge significatiu i pràctic, i a la vegada es pretén que sigui ben fonamentat i amb rigorositat a nivell teòric.
4. **Servei**. Cal que hi hagi un impacte real en les necessitats detectades: es requereix participació i implicació. Alhora, es pretén defugir de propostes assistencials i de competències professionals.

5. **Reflexió**. Aquest element és indispensable per generar aprenentatges en base a l'experiència viscuda de forma conscient, tenint en compte la vessant social, emocional i personal que pot tenir l'acció realitzada.
6. **Reconeixement**. L'ApS es planteja com una proposta docent i per aquest motiu ha de tenir el mateix tracte que la resta d'activitats formatives. En conseqüència, les activitats ApS han de ser avaluades i han de garantir el respectiu reconeixement.

Espais d'incorporació L'Aprenentatge i Servei pot incorporar-se en qualsevol pla formatiu de la universitat, com ara assignatures, el Treball Final de Grau (TFG), el Treball Final de Màster (TFM), pràctiques curriculars, o bé projectes transversals o interdisciplinaris. En el cas de les assignatures, cal vincular-s'hi a través del seu pla docent.

2.2 ApS UB

En el marc de la Universitat de Barcelona, l'equip d'ApS treballa des de l'any 2013 per difondre i estendre aquesta metodologia a la UB. Engloba professorat de diverses facultats i àrees del coneixement.

Compartir idees: La universitat va a l'institut

Aquest és un projecte ApS interdisciplinari promogut pel grup ApS UB, transversal i compartit entre diferents Facultats de la UB. Els estudiants, tant de graus com de màsters, preparen conferències-taller sobre temes d'interès general relacionats amb els estudis que estan cursant, i les imparteixen en instituts d'Educació Secundària de Barcelona. El format es basa en 20 minuts d'informació i 30 minuts de taller i/o debat posterior. [7]

Les xerrades es realitzen en parella i en funció de la demanda dels instituts. Pel que fa a la temporització, els cicles de xerrades es realitzen tant al semestre de primavera com al semestre de tardor. El reconeixement del projecte es materialitza a través de l'avaluació, i és competència de la coordinació de l'assignatura planificar com s'hauria d'incloure la participació en el projecte *Compartir Idees* dins l'avaluació de l'assignatura.

Trobades amb diverses Facultats

A efectes de conèixer què s'estava fent en la pròpia Facultat i en altres Facultats de la Universitat de Barcelona, com a punt de partida ens va semblar enriquidor i útil el fet de poder parlar amb diferent professorat que hagués realitzat projectes ApS a les seves disciplines. És per aquest motiu que durant el mes de febrer vam realitzar les reunions descrites a continuació.

La primera reunió va ser amb el Dr. Eloi Puertas, coordinador de l'ApS de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica i cap d'estudis del grau d'Enginyeria Informàtica.

El Dr. Puertas ens va compartir com s'havia materialitzat l'ApS al grau d'Enginyeria Informàtica. Per un costat, va comentar hi ha hagut un seguit de TFGs en clau ApS, amb entitats que ja tenen relació amb la Facultat. Per l'altre, s'han incorporat al projecte *Compartir Idees. La universitat va a l'institut.* Des de l'assignatura d'Ètica i Legislació, obligatòria de 4t curs del grau d'Enginyeria Informàtica, s'hi va impulsar la participació aquest darrer semestre de tardor del curs 2019-2020. Es van realitzar un total de tres xerrades, de forma optativa hi van participar unes 4-5 persones del grau. En aquesta assignatura cal preparar una xerrada que s'exposa en una de les sessions del grau, i el valor afegit ApS era preparar la xerrada per a secundària. També es va intentar treballar conjuntament amb CodeClub, una iniciativa que pretén ensenyar a programar ordinadors a infants. L'ApS en aquest context va consistir en realitzar aquest servei a biblioteques i es va substituïr per unes pràctiques de programació d'una assignatura de 1r curs del grau.

Amb el Dr. Puertas també vam reflexionar sobre els diferents reptes que sorgeixen a l'hora d'incloure projectes ApS als graus. Dins el marc d'una assignatura, cal replantejar com s'efectua l'avaluació, ja que el projecte realitzat ha de reflectir-se en la nota d'aquesta. Considera que el *Compartir Idees* és una bona iniciativa perquè cada any es té alumnat nou i instituts nous. En canvi, valora que altres projectes ApS més concrets porten més feina i són puntuals de cada curs, i que per tant és més complicat poder establir-hi una continuïtat, ja que cada any es requereixen entitats diferents.

Finalment, vam fer un anàlisi de la realitat del grau de Matemàtiques. Vam observar que moltes aplicacions pràctiques quedaven fora dels plans docents de les assignatures del grau, fet que provocava que fos complicat lligar les assignatures amb projectes ApS.

Seguidament, vam reunir-nos amb la Dra. Laura Rubio, membre del Grup de Recerca en Educació Moral (GREM) de la UB essent l'Aprenentatge i Servei una de les seves línies de recerca principal, entre d'altres. És professora del Departament de Teoria i Història de l'Educació de la Facultat de Pedagogia i una de les membres responsables de l'Aps a la Facultat d'Educació.

Les conclusions de la trobada amb la Dra. Rubio van ser la importància de tenir una bona connexió amb les entitats socials i saber respondre a les seves necessitats, intentant no caure en el fet "d'inventar-se necessitats". Ens va suggerir que la pregunta clau a fer-nos com a Facultat és la següent: amb quines entitats té sentit realitzar la nostra tasca? També vam reflexionar sobre el fet d'obrir-nos a diferents grups d'edat (educació primària, educació secundària, gent gran...) per tal de poder vincular diferents entitats. La Dra. Rubio ens va suggerir algunes idees per poder implementar a la nostra Facultat. En primer lloc, va dir que la pròpia comunitat universitària pot ser un bon inici d'implementació d'ApS, ja que tot i que el servei quedi relegat dins la universitat, és una manera de treballar els continguts del grau de forma diferent. També ens va proposar que plantegéssim un itinerari formatiu on l'alumnat del grau tingués l'oportunitat de realitzar diferents ApS en algun moment dels quatre anys. Una manera seria, per exemple, plantejar ApS a assignatures de diferents cursos. Una altra proposta que va sortir va ser realitzar un catàleg de propostes per fer TFG en clau ApS, fet que requereix una recerca d'entitats amb les quals treballar.

Finalment, vam trobar-nos amb dues persones responsables de l'ApS de disciplines científiques, atès que vam considerar enriquidor tenir punts de vista d'àmbits de coneixement propers.

Per una banda, vam trobar-nos amb el Dr.Òscar Alonso, professor del Departament d'Enginyeria Electrònica i Biomèdica i un dels responsables ApS de la Facultat de Física. Des d'aquesta Facultat s'ha començat a implementar projectes ApS aquest curs 2019-2020 a través de realitzar una xerrada al *Compartir Idees: La Universitat va a l'Institut.* S'hi va participar des d'una assignatura obligatòria de 2n curs del grau dâEnginyeria Electrònica i Telecomunicacions, del qual el Dr. Alonso n'és coordinador. El Dr. Alonso va proposar el títol de la xerrada *Què hi ha dins el meu ordinador?*, 5 instituts s'hi van apuntar i 10 alumnes de grau les van realitzar. Per altra banda, vam reunir-nos amb la

Dra. Mònica Martínez, professora del Departament de Ciència de Materials i Química Física i responsable de l'ApS de la Facultat de Química. Des de la Facultat de Química s'han realitzat alguns TFGs en clau ApS, així com també s'han efectuat diverses xerrades al *Compartir Idees*.

Aquestes trobades ens van servir per tenir una visió general de la situació actual de l'Aprenentatge i Servei a la UB, en particular a disciplines científiques, i veure així quins camins podíem explorar a Matemàtiques.

2.3 ApS i Matemàtiques

Les diferents fonts d'informació consultades al llarg del treball coincidien en la dificultat de vincular projectes comunitaris amb l'educació matemàtica. [5] Moltes de les fonts, concentrades en experiències dels Estats Units, feien referència al mateix llibre: *Mathematics in Service to the Community. Concepts and Models for Service-Learning in the Mathematical Science.* [6]

Aquest llibre pretén ser un manual per a professorat que vol introduir l'ApS en els seus cursos de matemàtiques. El llibre comprèn un ampli ventall de continguts que van des d'exposar motius per incloure l'ApS en l'àmbit matemàtic, com d'especificar eines més concretes per dur-ho a terme.

Gràcies a la Biblioteca de Matemàtiques i Informàtica es va poder obtenir aquest llibre. La seva lectura completa va ser de gran utilitat per conèixer realitats d'experiències ApS relacionades amb les matemàtiques com també per trobar indicacions per introduir un projecte d'aquest caire a la Universitat.

Per començar, es remarquen algunes de les reflexions del llibre rellevants per al desenvolupament del treball.

A nivell metodològic, l'autor defensa fermament l'ApS com a eina per promoure el compromís cívic i la contribució social a través de la realització d'un servei que, alhora, permet a l'alumnat obtenir els coneixements curriculars d'una forma diferent a l'educació tradicional. Observa, també, que a través del procés de reflexió que comporta l'ApS s'aconsegueix un bon aprenentatge dels continguts.

Pel que fa a la didàctica de les matemàtiques, reflexiona sobre el fet que una de les limitacions que hi ha actualment en l'educació matemàtica superior és la manca d'adaptació a les circumstàncies canviants de l'entorn i a l'aïllament amb altres disciplines. Es pregunta quina ha de ser la manera per tal que l'alumnat reconegui el potencial que tenen les matemàtiques, i recull la constatació que totes les persones col·laboradores del llibre consideren que l'ApS pot ser una bona eina per abordar aquest repte. També deixa constància que el fet que el professorat de matemàtiques posi damunt la taula temes d'interès social capta l'atenció a l'alumnat, ja que, tradicionalment, aquest espera rebre aquests tipus d'estímuls des de branques socials.

A continuació s'exposen dos enunciats del llibre que caldria verificar fins a quin punt es compleixen en el cas concret del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. En seccions posteriors s'explica la metodologia d'anàlisi de les dues declaracions. Els enunciats són els següents:

1. Hi ha un elevat nombre d'estudiants que tenen motivació per invertir temps i esforç oferint un servei a la comunitat.

2. Hi ha un gran nombre d'organitzacions socials que tenen necessitats que es poden cobrir amb eines matemàtiques.

2.4 L'Anàlisi del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona

Els objectius del grau Analitzem els objectius que defineixen l'orientació general del títol de Matemàtiques de la UB per tal d'identificar quines possibles vinculacions existeixen amb l'ApS:[2]

- *Formar graduats que hagin adquirit una formació general i equilibrada dels diversos camps de la matemàtica -naturalesa, mètodes i finalitats més rellevants- i preparar-los perquè exerceixin alguna de les múltiples professions que s'associen a la titulació o perquè continuïn els estudis a un nivell superior amb un alt grau d'autonomia en disciplines científiques o tecnològiques.*

- *Desenvolupar en els estudiants les capacitats d'anàlisi, abstracció, intuïció i pensament lògic i rigorós a través de l'estudi de la matemàtica.*

- *Desenvolupar en els estudiants la capacitat de reconèixer la presència de la matemàtica en els fenòmens naturals, científics, tecnològics i socials.*

Alhora, es transmet a l'alumnat el respecte pels drets fonamentals i drets d'igualtat entre homes i dones, de no discriminació i d'accessibilitat universal a les persones amb discapacitat.

Pel que fa al primer objectiu, aquest queda cobert amb el contingut de les assignatures, que engloben diferents àrees de les matemàtiques. A més a més, cursar Pràctiques en Empresa permet una aproximació laboral a possibles professions associades a la titulació. A banda d'això, l'elevada exigència i aprofundiment en conceptes matemàtics condueix a tenir una base sòlida i estable per continuar els estudis superiors (màsters, doctorats) de manera autònoma. Respecte el segon objectiu, l'assoliment d'aquest es garanteix principalment amb la metodologia educativa duta a terme a la Facultat.

M'agradaria aprofundir en el tercer objectiu i en el darrer paràgraf. Tot i haver assignatures de caire més pràctic, on s'exemplifiquen i s'estudien casos pràctics, aquests queden englobats en les classes teòriques. El punt de partida del plantejament que presento, passa per considerar que la capacitat per reconèixer les matemàtiques en diversos fenòmens es treballaria de forma més efectiva i profunda si es pogués realitzar vivencialment. De la mateixa manera, es diversificaria la metodologia d'aprenentatge, fet que també seria enriquidor des d'una vessant pedagògica.

El darrer paràgraf parla sobre drets humans: l'equitat de gènere, la no discriminació i l'accessibilitat universal a les persones amb discapacitat. En una carrera tècnica i científica com és el grau de Matemàtiques és important posar atenció en com es transmeten aquests valors. En aquest punt es tracta explícitament el compromís cívic i la responsabilitat social, i és un dels objectius que es té com a grau.

Pels motius prèviament exposats, considero que l'Aprenentatge i Servei és una metodologia que permet treballar el tercer objectiu i el darrer paràgraf. Des del meu punt de vista, penso també que és fonamental donar a tots els objectius el mateix nivell d'importància. En la meva opinió, actualment els dos primers són més prioritaris en el grau

[2] https://mat.ub.edu/graumatematiques/

ja que fan referència explícita a la disciplina matemàtica en si mateixa. No obstant això, el tercer objectiu relaciona directament els estudis cursats amb la realitat i certament és eficaç en bona part de les sortides professionals que realitzarem com a persones que hem estudiat matemàtiques. De la mateixa manera, posar en valor la primordialitat del darrer paràgraf assegura la contribució per part de la Universitat a millorar els graus d'equitat i inclusió social en les seves àrees d'influència.

Les activitats de la Facultat Un exercici que s'ha realitzat a l'hora de contemplar les possibilitats d'implementació de projectes ApS ha estat analitzar les activitats ja presents a la Facultat de Matemàtiques. La gran majoria són activitats amb reconeixement de crèdits per a l'alumnat. Algunes d'elles estan relacionades amb la divulgació matemàtica, com el suport a les Xerrades-Taller, la col·laboració a la Matefest-Infofest o a la Festa de la Ciència. Altres estan dirigides a donar suport logístic a esdeveniments de la Facultat, com la jornada introductòria per a nous estudiants, l'automatrícula o la Install Party. També hi ha l'opció de donar suport tècnic a alumnat de secundària que realitza treballs de recerca relacionats amb les matemàtiques.

Certament algunes d'aquestes activitats podrien entrar dins el paraigües de l'Aprenentatge i Servei. Tant en les Xerrades-Taller, com en la Matefest-Infofest i l'acompanyament a treballs de recerca es realitza un servei social: en diferents graus d'aprofundiment, es promou la divulgació científica en alumnat de secundària. Per tal de realitzar aquests projectes, cal tenir els respectius continguts matemàtics assolits. Tots aquests continguts es treballen al grau, i a l'hora de preparar cada activitat (que seria el servei), es realitza un procés de consolidació d'aquests.

L'enquesta a l'alumnat Tal com s'ha explicitat en l'enunciat (1) de l'apartat 2.3, un dels elements essencials per realitzar un projecte en clau ApS és la motivació i la voluntat de l'alumnat en participar-hi. Per tal de saber quin era el grau de certesa d'aquest enunciat en l'alumnat de la UB, es va considerar necessari realitzar una enquesta a tot l'alumnat del grau de Matemàtiques per fer una bona anàlisi de la realitat i saber quina era l'opinió de l'alumnat respecte aquesta proposta.

Es va fer arribar l'enquesta a tot l'alumnat gràcies a la col.laboració de l'equip deganal, que té accés a la llista sencera de correus d'aquest.[3]

Un total de 88 alumnes van respondre l'enquesta, i es valora que els resultats són favorables a la implementació de projectes d'aquest caire a la Facultat. Pel que fa al *Compartir Idees*, 48 persones van respodre que sí que hi participarien, un 55% del total. Es va demanar a l'alumnat quines assignatures veien més viables a l'hora d'introduir aquest projecte. Els resultat van ser:

- 1r curs: Aritmètica i Llenguatge i Raonament Matemàtic, seguit d'Elements de Programació i Anàlisi de Dades i Introducció a la Probabilitat.
- 2n curs: Grafs i Història de les Matemàtiques.
- 3r curs: Probabilitats i Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies
- 4t curs: Didàctica i algunes optatives d'Informàtica i de Física.

També es va plantejar l'opció de realitzar projectes ApS vinculats amb entitats socials per tal de cobrir les seves necessitats, més enllà de realitzar projectes educatius com seria

[3]Enquesta completa a l'annex 1

en *Compartir Idees*. 54 persones van dir que sí que participarien a una proposta d'aquest tipus, un 61% del total.

Això no obstant, un nombre més reduït de persones va afirmar que realitzaria un Treball Final de Grau en clau ApS, un 34% del total (30 persones). Pel que fa a la participació a entitats socials a nivell individual, 28 alumnes de les enquestades hi participen (un 32% del total).

3 Concrecions

En aquesta secció es recullen el procés que s'ha seguit i les concrecions que s'han realitzat en aquest Treball Final de Grau.

Per començar, i havent fet l'anàlisi de les activitats ja existents a la Facultat, es va valorar l'opció d'apostar per impulsar noves oportunitats d'obertura i presentació de la Facultat a la societat. De fet, un aspecte de les activitats presents que dista de l'ApS és que és la ciutadania qui ve a la Facultat: la proposta d'aquest treball és que sigui la Facultat l'agent que s'acosta a la ciutadania.

Seguidament, a fi de veure si era veritat l'enunciat (2) de l'apartat 2.3, es va decidir fer un anàlisi de quines entitats del Tercer Sector podrien tenir interès en establir un marc col·laborador ApS amb la Facultat de Matemàtiques i Informàtica. A banda d'això, es va apostar per realitzar un primer contacte amb possibles entitats interessades.

Atenent el nombre d'alumnes que van respondre que sí que participarien al *Compartir Idees*, es va acordar impulsar l'adhesió d'algunes assignatures de matemàtiques en aquest projecte.

Finalment, es va prendre la decisió de realitzar una prova pilot d'ApS amb el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), consultada i aprovada per l'equip deganal i el Dr. Puertas, coordinador de l'ApS a la Facultat.

En conseqüència, en els següents apartats es mostren els punts tractats al llarg del treball i s'organitzen de la següent manera:

- En la secció 4 es mostra amb profunditat els passos realitzats per tal d'efectuar la prova d'ApS amb el MMACA, així com es presenta la fitxa d'aprofundiment de la cicloide, que és el servei realitzat.
- En la secció 5 i 6 es presenten els resultats obtinguts pel que fa a l'adhesió al *Compartir Idees*, com també els vincles establerts amb entitats, respectivament.

4 Projecte ApS amb el Museu de Matemàtiques de Catalunya

4.1 Contextualització: Necessitats socials i partenariat

A efectes de donar una aproximació històrica de la seva evolució, cal assenyalar que l'Associació per promoure i crear un Museu de Matemàtiques a Catalunya (MMACA) es constitueix formalment l'any 2008 com a fruit del treball previ realitzat dins el marc de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT). És una entitat sense ànim de lucre que va ser declarada d'utilitat pública l'any 2012. El projecte ha tingut des dels seus inicis una bona rebuda des de la comunitat matemàtica catalana, tant a nivell universitari com no universitari, i compta amb el suport de la Societat Catalana de Matemàtiques i del Departament d'Educació. El MMACA es considera hereu d'una llarga tradició pedagògica que ha apostat per divulgar i ensenyar les matemàtiques a través de la descoberta, el raonament i la manipulació. És per aquest motiu ha dedicat les sales de l'exposició a Martin Gardner, Emma Castelnuevo, Pere Puig Adam i Lluís Santaló. [8]

La missió d'aquesta associació es recull en la promoció i creació un Museu de Matemàtiques a Catalunya, la divulgació i l'estimulació d'una imatge social positiva d'aquesta disciplina i poder oferir suport a la tasca dels centres educatius. L'exposició permanent de Cornellà va registrar l'any passat el seu rècord de visitants, un total de 100.000 persones, la qual cosa representa un increment de 30.000 visitans addicionals respecte a l'any anterior.[9]

Durant la trobada amb la Dra. Rubio, ens va compartir que una persona del MMACA va ser present a una reunió sobre Aprenentatge i Servei impulsada pel Grup ApS (UB). Arran d'aquesta informació, es va plantejar la possibilitat de realitzar una col·laboració amb la Facultat. Posar-nos amb contacte amb el MMACA va ser senzill ja que ja s'hi havia col·laborat alguna vegada des de la Facultat, ja fos amb Treballs Finals de Grau o amb Pràctiques Curriculars. A principis de març, vam realitzar una trobada amb la Pura Fornals, presidenta del MMACA, per presentar-li la proposta.

L'exposició permanent del MMACA de Cornellà té una gran quantitat de mòduls manipulatius que permeten experimentar amb les matemàtiques. Tots permeten lectures a diferents nivells, però darrere de cada un d'ells hi ha un elevat contingut matemàtic. Addicionalment a la tasca que realitzen de divulgació dirigida a un públic general, una de les necessitats que tenen és poder oferir aquest contingut matemàtic de forma més extensa i profunda, que pugui adreçar-se a un públic especialitzat. Vam considerar que des del grau de Matemàtiques es pot abordar aquesta necessitat i aquesta feina podia ser un bon projecte ApS. Vam decidir tirar endavant la proposta i ser jo mateixa la primera alumna que realitzés aquest projecte pilot amb el mòdul de la cicloide.[4]

D'aquesta manera, el març de 2020, vaig orientar la meva principal tasca del treball en aquesta direcció. La feina que hem realitzat amb el MMACA aquests darrers mesos ha tingut dues vessants: Per una banda, hem estat treballant l'aprofundiment matemàtic i històric de la cicloide, del qual n'exposem a continuació el resultat. Per altra banda, hem estandaritzat com hauria de ser la fitxa d'aprofundiment per tal de tenir un punt de partida comú en futures col·laboracions de Treballs Final de Grau en clau ApS amb el MMACA.

[4] Imatge del mòdul a l'annex 2

4.2 Aprenentatge i Servei: Fitxa d'aprofundiment de la cicloide

4.2.1 Introducció

Motivació del mòdul Emma Castelnuovo, matemàtica i pedagoga italiana, conjuntament amb Mario Barra en el llibre *Matematica nella realtà*, [10] introdueix l'estudi de la cicloide amb la següent pregunta:

US HEU PREGUNTAT MAI QUINA CORBA DESCRIU UNA VÀLVULA DE RODA D'UNA BICICLETA?

Es refereix a la corba que descriu un punt fix d'una circumferència quan aquesta gira sobre una línia recta. Aquesta s'anomena **cicloide**, i té unes propietats molt sorprenents. L'estudi d'aquesta corba ha interessat a nombrosos matemàtics al llarg de la història d'aquesta disciplina, fet que analitzarem seguidament.
Calcularem la longitud i l'àrea d'un arc de cicloide, així com també n'estudiarem les seves propietats geomètriques: el càlcul de la recta tangent, la recta normal i l'evoluta. Veurem també les seves propietats físiques més rellevants: la propietat tautòcrona i braquistòcrona. Aquest estudi el farem a través dels ulls de grans matemàtics així com també farem un anàlisi més acadèmic d'aquesta corba.
En aquest enllaç de geogebra podem observar la construcció de la cicloide.

Primera aproximació: longitud, àrea i evoluta Per començar, volem acostarnos a aquesta corba d'una manera intuïtiva, i ens sembla una bona manera fer-ho a través de l'estudi que va fer Emma Castelnuovo al seu llibre *Matematica nella realtà* l'any 1976. Aquest llibre és fruit d'una Exposició de Matemàtiques que va realitzar la Scuola Meadia Tasso de Roma l'any 1974. L'exposició tenia diversos panells on hi havia la feina feta per l'alumnat al llarg del curs, i el material utilitzat per al desenvolupament dels diversos temes. Es pretenia vincular l'alumnat amb la matemàtica més concreta, propera i quotidiana, per tal de connectar-lo amb la mateixa essència que havia portat a la persona creadora matemàtica als respectius descobriments d'aquesta disciplina. Un dels capítols del llibre està dedicat a la cicloide. Es va construir un mecanisme que permetia comprovar que la longitud d'un arc de cicloide és 8 vegades el radi del cercle generador, i l'àrea sota un arc de cicloide és tres vegades l'àrea del cercle generador. Veiem-ho:

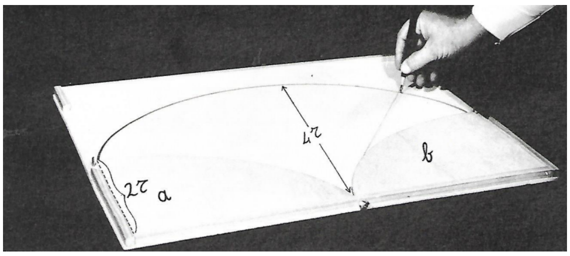


Figura 1: Imatge extreta de *Matematica nella realtà*: càlcul de la longitud d'un arc de cicloide

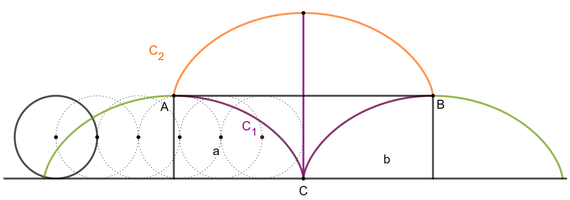


Figura 2: Reproducció del raonament al GeoGebra

Siguin a, b les dues meitats de la primera cicloide construïda. Tenim una corda que inicialment ressegueix el perfil de la primera meitat (a), i que té els extrems en A i C.

Imaginem-nos que l'extrem de la corda que toca A té tinta. Si mantenim tensa la corda i ens allunyem de A, construïm una nova corda: una cicloide.

Desplacem la corda fins que aquesta sigui recta, és a dir, fins que C s'uneixi amb el punt més alt d'aquesta nova corba. En aquest punt, la corda ha dibuixat la meitat de la corba. La longitud de la corda és $4r$: notem que tenim $2r$ de la primera circumferència generatriu i $2r$ de la segona. Per tant, quan dibuixi la corba sencera, haurà resseguit $2 \times 4r = 8r$. **La longitud d'un arc de cicloide és, doncs, 8r.**

Presentem dos conceptes: l'evolvent (o involuta) i l'evoluta d'una corba. Imaginem-nos que tenim una corba (C_1) amb un cordill embolicat al seu voltant. Si anem desplegant el cordill mantenint-lo tangent a aquesta, l'extrem del cordill descriu l'evolvent C_2. És a dir, l'evolvent d'una corba C_1 és una altra corba C_2 tal que les seves rectes normals són tangents a la C_1. El concepte complementari a l'evolvent és l'evoluta: Imaginem-nos una corba C_2 i la família de rectes normals a aquesta. L'evoluta d'aquesta corba és una corba C_1 tal que les seves tangents són les normals de la corba C_2.

Amb aquest mateix artefacte podem visualitzar una altra propietat de la cicloide: Si estudiem la corda en diverses posicions, és a dir, si el despleguem mantenint-lo tangent C_1, la corba resultant és C_2, la seva evolvent. Alhora, les rectes normals a C_2 són tangents a C_1, i per tant aquesta és l'evoluta de la primera. **L'evoluta i l'evolvent de la cicloide, doncs, coincideixen.**

En aquest enllaç de geogebra, realitzat per Manel Udina (membre del MMACA), pot observar-se la construcció de l'evoluta.

Emma Castelnuovo va dissenyar un aparell per obtenir una nova demostració del càlcul de l'àrea de la cicloide. Es tenen uns tubs "corredissos" que llisquen entre el cercle i la cicloide.

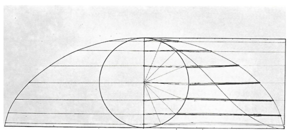


Figura 3: Imatge extreta de *Matematica nella realtà*

Per calcular l'àrea sota un arc de cicloide, l'autora raona de la següent manera:
Es vol determinar l'àrea de la part de la dreta. El primer pas és calcular la llargada d'alguns segments paral·lels a la base.

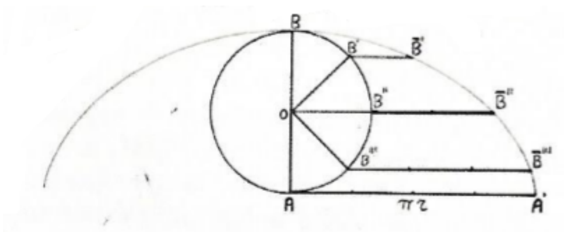


Figura 4: Imatge extreta de *Matematica nella realtà*: raonament del càlcul de l'àrea

Notem que amb una rotació d' $\frac{1}{4}$ de l'angle, B va a B'. Al mateix temps, el cercle ha avançat: B s'ha desplaçat fins a $\overline{B}'$.

De forma general, amb una rotació de 180° B arriba a A', i notem que la longitud de AA' és equivalent a la de la semicircumferència, és a dir, πr.

En el cas del primer segment, amb una rotació de $\dfrac{180°}{4}$, B' avança una longitud de $\dfrac{AA'}{4} = \dfrac{\pi r}{4}$ i arriba a $\overline{B}'$.
De forma anàloga, amb una rotació de $\dfrac{180°}{2} = 90°$ i $\dfrac{3 \cdot 180}{4} = 135°$ B es desplaça a B'' i B''' i avaną una longitud de $\dfrac{AA'}{2} = \dfrac{\pi r}{2}$ i $\dfrac{3AA'}{4} = \dfrac{3}{4}\pi r$, respectivament.

Emma nota que s'ha realitzat aquest exercici amb 4 segments però que es pot fer amb tants com es vulguin. Recordem que l'aparell està format de tubs corredissos, i que podem desplaçar els tubs dels segments, col·locats entre la part exterior al cercle i la part interior de la cicloide, cap a l'esquerra. Els tubs ara estan a l'interior del cercle, i la nova regió obtinguda (regió Y) és equivalent a la inical (regió X) a causa del mètode dels indivisibles. Aquest afirma que si dues figures planes estan entremig de rectes paral·leles i les longituds dels segments determinats per la intersecció de qualsevol paral·lela amb aquestes dues figures són iguals, les figures tenen la mateixa àrea. S'observa que la suma

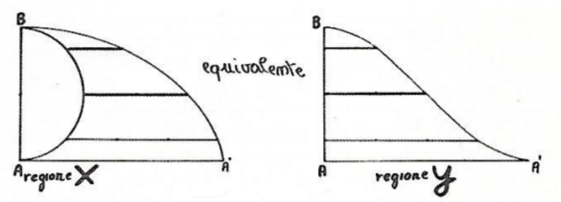


Figura 5: Imatge extreta de *Matematica nella realtà*: les àrees són equivalents

del segment superior de la regió X i el segment inferior de la regió Y és πr, com també ho és la suma del segment inferior de X amb el segment superior de Y, i la suma dels segments del mig. Per tant, si fem rotar la figura Y obtenim un rectangle de base πr i d'alçada $2r$, d'àrea doncs $2\pi r^2$.
Per tant, l'àrea de la cicloide és:

$$Area_x + Area_y + Area_{\bigcirc} = 3\pi r^2$$

És a dir, **l'àrea de la cicloide és tres vegades l'àrea del cercle generador**.

A la secció (4.2.4) es poden veure aquests resultats amb eines de càlcul. El raonament del càlcul de l'àrea d'Emma Castelnuovo és una adaptació del mètode que va usar Gilles Personne de Roberval, que també es presenta més endavant.

Aproximacions a les propietats físiques Un cop calculada l'àrea i la longitud d'un arc de cicloide i coneguda la seva evoluta, prosseguim a aproximar-nos més a aquesta corba a través de les sorprenents propietats físiques que compleix.

QUINA FORMA HA DE TENIR UN TOBOGAN PER ARRIBAR A BAIX DE EL MÉS AVIAT POSSIBLE?

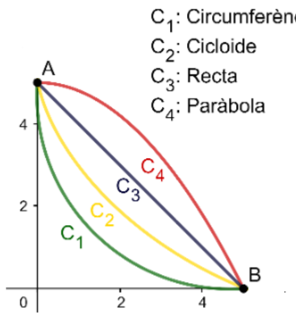


Figura 6: Possibles respostes a la pregunta

Aquesta pregunta es pot llegir des d'una òptica matemàtica així: Suposem que un cos només es regeix per l'acció de la gravetat, volem trobar el recorregut per anar de A fins a B tal que el temps sigui mínim. Aquesta propietat s'anomena braquistòcrona. Quina és la corba que ho compleix? Aquest plantejament, anomenat "el problema de la braquistòcrona", ha estat estudiat per considerables matemàtics al llarg de la història. A primera vista, pot semblar que el camí que garanteix el mínim temps de descens és el camí de mínima longitud, és a dir, la recta. Galileo Galilei va conjecturar que l'arc de circumferència era la solució. Durant el segle XVII, personatges com ara els germans Jakob i Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz i Isaac Newton, van seguir estudiant el problema. En aquest article veurem que **la corba braquistòcrona és la cicloide**. De fet, aquesta propietat es pot experimentar de forma manipulativa al mòdul de la cicloide del MMACA, on es deixen anar dues pilotes a la vegada des del punt més alt d'una cicloide invertida i d'una recta i es comprova que el recorregut de la primera és més ràpid.

QUINA BOLA ARRIBARÀ ABANS AL PUNT MÉS BAIX D'AQUEST SEMIARC DE CICLOIDE?

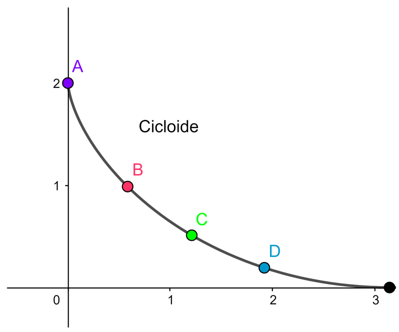


Figura 7: Possibles respostes a la pregunta

De forma intuitiva podem pensar que l'ordre d'arribada al punt més baix (el negre) serà D, C, B, A; ja que D és la bola més propera al punt negre i A la més llunyana, estant C i B entremig.

Aquesta afirmació és certa per a moltes corbes però no per a la cicloide: **La cicloide compleix la propietat tautòcrona**, és a dir, el temps de descens al llarg de la corba és independent a la posició inicial. Aquesta propietat també s'experimenta al mòdul del MMACA: es col·loquen les dues pilotes a diferents punts de la cicloide i es comprova que el temps d'arribada al punt central és el mateix.

En aquest enllaç de geogebra podem observar la propietat tautòcrona de la cicloide de forma dinàmica.

Christiaan Huygens va estudiar aquesta propietat amb deteniment a través d'una necessitat que tenia: trobar un pèndol tal que el període fos independent de l'amplitud. Huygens va descobrir que si la trajectòria que seguia el pèndol era cicloidal, aquesta propietat es complia.

De fet, al museu de matemàtiques *Il Giardino Di Archimede*, situat a Florència (Itàlia) [11] hi ha un mòdul dedicat al pèndol de Huygens. En aquest es comparen dos pèndols: el de l'esquerra és un pèndol simple, que realitza una trajectòria circular, i el de la dreta un pèndol cicloidal, que realitza una trajectòria cicloidal. Hi ha dues cèl·lules fotoelèctriques que mesuren els respectius períodes, que es mostren a la pantalla. Tan bon punt els pèndols comencen a oscil·lar, es veu com el període del pèndol simple decreix amb les amplituds de les oscil·lacions, així com el del cicloidal es manté constant.

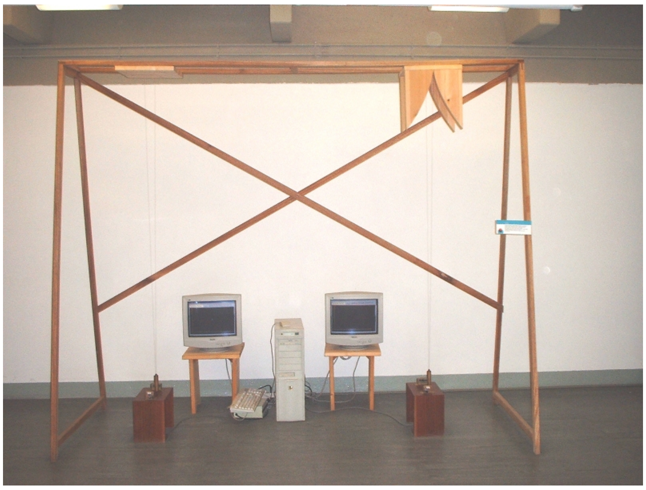


Figura 8: El mòdul: "Pèndol cicloidal"

4.2.2 Context històric

Com bé ja hem esmentat, la cicloide és una corba àmpliament coneguda per les seves diverses propietats i per haver estat motiu d'investigació i de disputa entre els matemàtics europeus del segle XVII. Det fet, aquesta corba també es coneix com *l'Helena de la Geometria*, fent referència al personatge mitològic grec Hèlena de Troia. Seguidament en farem un breu repàs històric. [13] [14]

Fins la primera part del segle XVII Hi ha diversos matemàtics als quals se'ls associa els estudis inicials de la cicloide, tot i no existir una evidència explícita. A finals de segle XVII, John Wallis otorga l'autoria a Nicolas Cusanus datant-la l'any 1450, i també menciona que Charles de Bouelles havia estudiat la corba cap l'any 1500. Pel que fa a Cusanus, els historiadors estan d'acord en afirmar que Wallis es va equivocar otorgant-li l'autoria, a menys que Wallis tingués accés a algun manuscrit inexistent a dia d'avui. En relació a Bouelles, sembla que va usar una corba generada per un punt fix en una circumferència amb voluntat d'estudiar la quadratura del cercle, en la seva publicació *Introductio in geometriam* l'any 1503.

La història comença a ser més clara amb Galileu Galilei. Gairebé un segle i mig més tard, aquest enviava una carta a Bonaventura Cavalieri, compartint que havia estat treballant en aquesta corba durant més de 50 anys. La carta data del 24 de febrer de l'any 1640 i diu així:

"Quella linea arcuata sono più di cinquanta anni che mi venne in mente di descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che la descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta."

"Aquella línia arquejada fa més de cinquanta anys que em va venir en ment descriure-la, i la vaig admirar per una corbatura suau per adaptar-la als arcs d'un pont. Vaig fer sobre seu, i sobre l'espai entre si mateixa i la seva corda, vàries proves per demostrar-ne alguna passió, i des del principi em va semblar que aquest espai pogués ser el triple del cercle que la descriu; però no va ser així, tot i que la diferència no sigui massa." [10]

Va ser Galileu qui la va nombrar i popularitzar, i també va intentar realitzar la seva quadratura (4.2.3) (és a dir, el càlcul de l'àrea) l'any 1599, tal i com podem veure a la carta i també pel que diu una publicació de l'any 1644 del seu alumne Evangelista Torricelli (*Opera Geometrica - 1644).*

A principis del segle XVII, el Pare Marin Mersenne va interessar-se per la corba. L'any 1628 aquest va encoratjar a Gilles Persone de Roberval a trobar la quadratura de la cicloide, fet que va aconseguir sis anys més tard. La quadratura de Roberval es basa en el Principi de Cavalieri i en el desenvolupament d'una nova corba, anomenada la corba companya de la cicloide. Roberval va descobrir que **l'àrea delimitada per la cicloide és tres vegades l'àrea del cercle generador.** (4.2.3)

A principis de l'any 1638, Mersenne va escriure a Pierre de Fermat i a René Descartes (4.2.3) i els va proposar que construïssin una tangent a la corba, i Roberval també va entrar en joc (4.2.3). A l'agost d'aquell mateix any, Mersenne va rebre tres maneres diferents de dibuixar la tangent a la cicloide. Va haver-hi bastanta disputa sobre els mèrits del descobriment ja que en aquella època la definició de la tangent com a "posició límit de rectes secants" encara no estava consensuada.

Mersenne va anunciar aquests resultats a Galileu, que els va fer arribar als seus alumnes Torricelli i Vincenzo Viviani. El primer va mostrar un gran interès i l'any 1644, en un apèndix al seu llibre *Opera Geometrica* va fer pública la seva quadratura i el seu mètode de dibuixar la tangent. Roberval el va acusar públicament de plagi, tot i que actualment se sap que ambdós van realitzar els seus descobriments de forma independent l'un de l'altre.

El següent episodi al voltant d'aquesta corba es centra en Blaise Pascal. Aquest havia deixat les matemàtiques en segon pla per dedicar-se a la teologia. Tot i així, va ser durant una nit de 1658 que tenia molt mal de queixal que va estar rumiant sobre aquesta corba. El dolor va cessar i Pascal va interpretar-ho com un senyal diví. Com a conseqüència, va estar-se vuit dies seguits estudiant la cicloide i les seves propietats geomètriques. Després d'això, l'any 1658, Pascal va publicar dos reptes al voltant de la cicloide oferint una recompensa per a qui els resolgués. Els reptes deien així:

- Determinar l'àrea i el centre de gravetat de l'arc de cicloide damunt una línia paral·lela a la base.
- Determinar el volum i el centre de gravetat del volum generat quan l'àrea tancada gira al voltant de la seva base i l'eix de simetria.
- Determinar el centre de gravetat del sòlid generat quan cada cos es talla per un pla paral·lel al seu eix de revolució.

Només dos matemàtics van respondre al repte: John Wallis i Antoine de Lalouère. Ambdues propostes van tenir bastants errors i per tant no van triomfar.

Paral·lelament, Christoper Wren va enviar a Pascal la seva proposta de rectificació de la cicloide, és a dir, trobar una línia recta equivalent en longitud d'arc a una corba. Fins l'any 1650, aquest problema era irresoluble per a molts matemàtics. Tot i així, Wren havia assegurat que **la longitud de l'arc de cicloide era exactament vuit vegades el radi del cercle generador**, sense proporcionar cap demostració. Roberval insistia en l'autoria de la descoberta. Tot i així, s'atribueix a Wren el mèrit de la primera publicació i la seva respectiva demostració, publicada per Wallis en el seu *Tractatus Duo* l'any 1659. Pascal també va publicar aquell mateix any *L'Histoire de la Roulette*, on compartia els seus estudis de la cicloide.

Amb aquestes dues publicacions, els problemes de quadratura, tangents, rectificacions, curvatura i centres de gravetat estaven substancialment resolts. Mètodes prèvis al càlcul de Newton van ser usats per tots els matemàtics nombrats prèviament que, durant 25 anys, van descobrir resultats importants al voltant d'aquesta corba.

Segona part del segle XVII cap endavant L'any 1657, el matemàtic Christiaan Huygens rumiava com podia fer un rellotge més precís i acurat. Mersenne havia suggerit usar un pèndol com a eina per mesurar el temps, però Huygens sabia que el període d'un pèndol circular depenia de la seva amplitud. Huygens buscava una rellotge de pèndol de manera que el període fos independent de les variacions d'amplitud en les oscil·lacions: necessitava una corba **tautòcrona**, és a dir, una corba tal que el temps que trigués un objecte en arribar al punt més baix d'aquesta, sotmès només a la força de gravetat i sense fregament, fos independent de la posició inicial.

L'any 1658, en el llibre *Horologium*, Huygens explica el seu procés de creació d'un rellotge. Intenta construir-ne un amb claus, una corda i un objecte suspès al final d'aquesta corda. A través de prova i error, Huygens va ser capaç de construir un sistema en el qual el període fos independent de l'amplitud. Va substituir els claus per "plats corbats", i després va realitzar un mètode més senzill on el pèndol es movia realitzant arcs circulars.

Inspirat en Pascal, va percebre que l'objecte suspès en el seu pèndol de plat corbat seguia una cicloide. Per tant, va veure que el període d'un objecte que seguia el camí d'una cicloide invertida era independent a la seva amplitud: comprovava així la propietat tautòcrona de la cicloide (4.2.3). El 1659, Huygens va estudiar com havia de ser la forma d'aquests plats corbats. A través d'aquest estudi va descobrir una altra propietat remarcable de la cicloide: **l'evoluta d'una cicloide és una cicloide**. Per tant, la forma que havien de tenir aquests plats era la cicloide. Tot i així, a nivell pràctic, a causa de la fricció, el pèndol cicloidal no va tenir èxit. Aquest descobriments els va publicar a *Horologium Oscillatorium* l'any 1673. En aquest llibre estudia profundament la cicloide: calcula la recta tangent (4.2.3), la recta normal (4.2.3) i l'evoluta (4.2.3).

Uns anys més tard, concretament l'any 1696, en *Acta Eruditorium* Johann Bernoulli va presentar el problema de la **braquistòcrona**, tot i que Galileu ja l'havia estudiat anys abans (4.2.3): Donat dos punts A i B i un mòbil M que només té la força del seu propi pes, quin és el camí més ràpid temporalment per anar de A fins a B? Abans que el problema fos publicat, els germans Jakob i Johann Bernoulli (4.2.3) i Gottfried Leibniz (4.2.3) ja tenien la solució al problema: el descens més ràpid es donava amb un arc de cicloide.

El maig de 1697, Johann va fer públic que hi havia quatre matemàtics que havien trobat la solució al problema de la braquistòcrona: Leibniz, el seu germà Bernoulli, Guillaume de L'Hôpital i un altre matemàtic anònim.

El repte formal semblava una invitació explícita a Isaac Newton a causa d'algunes desavinences personals. Diu la llegenda que Newton va rebre el problema una tarda i que el matí següent ja el tenia resolt. Aquest va publicar la seva solució (4.2.3) de forma anònima a *Philosophical Transactions of the Royal Society*, el gener de 1697. Bernoulli, al veure la resposta, va endevinar que aquesta era de Newton a través de la famosa frase "*tanquam ex ungue leonem*"(*Reconec el lleó per les seves urpes*).

Ambdós germans Bernoulli, moguts per la seva manca de complicitat, es van acusar mútuament de plagi. Tot i així, els mètodes que van utilitzar van ser font d'inspiració per Leonhard Euler, matemàtic que va generalitzar el problema l'any 1744. Euler conjuntament amb Joseph-Louis Lagrange, inspirats en el problema de la braquistòcrona, instaurarien les bases del càlcul de variacions. (4.2.4)

4.2.3 Aportacions històriques

El càlcul de la recta tangent

Segons Roberval *Plantejament que Roberval va enviar a Mersenne l'any 1638.*

És important contextualitzar com entén Roberval la construcció de la cicloide per entendre com descriu la recta tangent. Aquest descriu dos moviments que desemboquen en la cicloide:
Suposem que el diàmetre AD es mou de forma paral·lela a través de AB fins arribar a BO, on AB equival a la semicircumferència. Per altra banda, suposem que el punt A es mou a través del semicercle ACD de tal manera que la velocitat de AD a través de AB és equivalent a la velocitat de A a través del semicercle. Per tant, A arriba al punt D alhora que D arriba a BO. El punt A, doncs, es desplaça amb dos moviments, el propi a través de la semicircumferència i el del diàmetre AD. El camí obtingut és la cicloide demanada.

Per construir una tangent en qualsevol punt P de la cicloide, dibuixem PP' , paral·lel a AB tallant el semicercle en C. Aleshores, dibuixem CF, tangent al semicercle, i tracem PE, paral·lel a CF. La bisectriu de l'angle EPP' és la tangent demanada, ja que és la resultant de dos moviments equivalents. [12]

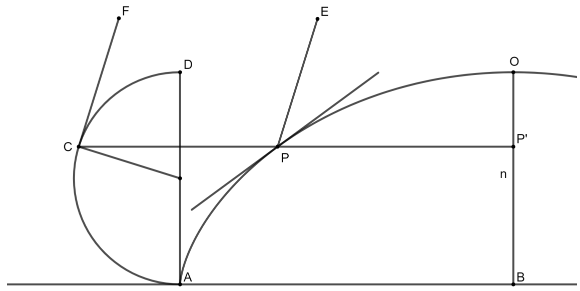


Figura 9: El raonament de Roberval

Segons Descartes *Plantejament que Descartes va enviar a Mersenne l'any 1638.*

Per tal de dibuixar la tangent en qualsevol punt P de la meitat de l'arc de la cicloide AGD, primer dibuixem PE, paral·lel a la base AC intersecant el cercle en E. Després, dibuixem PQ paral·lel a EC i PH perpendicular a PQ en P. PH és la tangent demanada.

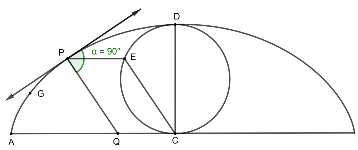


Figura 10: El raonament de Descartes

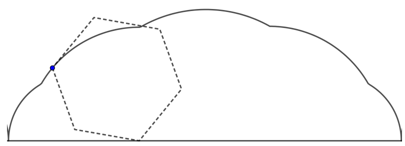


Figura 11: Exemple de l'-hexàgon, extrapolable a un polígon de més costats

Descartes va donar la següent justificació: Enlloc d'un cercle lliscant considerem un polígon lliscant, per exemple, l'hexàgon ABCDEF. A mesura que l'hexàgon llisqui a través del pla, el vèrtex A dibuixarà una seqüència d'arcs circulars els centres dels quals estaran als punts B, C', D', etc. Les tangents de cadascun d'aquests arcs seran perpendiculars a la línia que ajunta el punt de tangéncia amb el centre de l'arc. Descartes va enunciar: El mateix passaria amb un polígon de centenars de milers de milions de costats, i conseqüentment també amb un cercle. La seva construcció determina el punt Q en la figura, la localització del cercle generador a través de la recta que correspon al punt P. [12]

Segons Huygens *Horologium Oscillatorium - 1673*

Aquests raonaments es basen en proposicions de l'*Horologium Oscillatorium.* En particular, les que concerneixen la tangent són la proposició XIV i XV.[15]
Proposició XIV ABC és una cicloide la base de la qual és AC i l'eix BD. [...] En relació amb l'eix, BCE es descriu a través del cercle, i per qualsevol punt E de la cicloide, EF es dibuixa de forma paral·lela a la base AC, que creua l'eix BD en F i talla la circumferència en G. Es fa notar que la línia recta GE és equivalent a l'arc GB. De forma resumida,

Huygens indica que si és E un punt qualsevol de la cicloide, i es traça paral·lela a AD, (que talla la circumferència generatriu en G), aleshores, $EG = \widehat{GB}$.

Això és degut a què $AK = \widehat{EK}$ per la construcció de la cicloide. A més, $\widehat{EK} = \widehat{GD}$. De forma anàloga, $AD = \widehat{DGB}$. Per tant:

$KD = AD - AK = \widehat{DGB} - \widehat{GD} = \widehat{GB}$ A més, $KD = EG$.

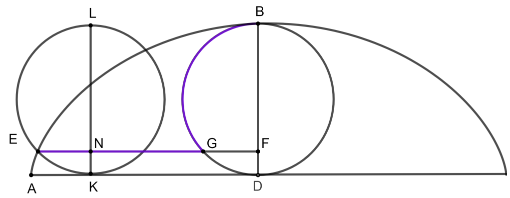


Figura 12: Raonament previ a la construcció de la tangent. Reproducció de la proposició XIV de l'*Horologium*

Fixem-nos ara en la figura 14. El càlcul de la recta tangent es troba en la proposició XV. La tangent a la cicloide en el punt B és la recta pel punt B paral·lela a la recta AE. La recta paral·lela a la base per B talla la circumferència en E. HBN és paral·lel a AE per B. Tracem la paral·lela a la base per H, que talla la cicloide en L, la circumferència generatriu en K i el segment AE en M.

$KL = \widehat{AK}$ $MK < \widehat{KE} \rightarrow ML = MK + KL < \widehat{KE} + \widehat{AK} = \widehat{AE} = BE = HM$.

Com que $ML < MH$, H és exterior a la cicloide, i el raonament és semblant per a N: Es traça la paral·lela a la base per N, que talla la cicloide en Q, el segment AE en P i la circumferència generatriu en O.

$OQ = \widehat{OA}$ $\widehat{OE} < OP$ $PQ < \widehat{EA} = EB = PN$. Com que $PQ < PN$, N és exterior a la cicloide.

Per tant, si escollim un punt a part de B de HBN serà exterior a la cicloide, i per tant aquesta recta és la seva tangent.

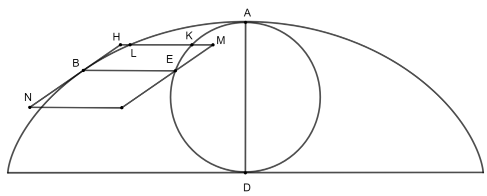


Figura 13: Reproducció de la proposició XV de l' *Horologium*

Just després d'acabar aquesta demostració, Huygens remarca que la seva demostració és molt semblant a la de Wren publicada al llibre de Wallis anomenat *Tractatus duo de Cycloide - 1659.* També considera que es pot generalitzar la proposició per tal que pugui aplicar-e a altres corbes generades a partir de les rotacions de figures.

El càlcul de la recta normal

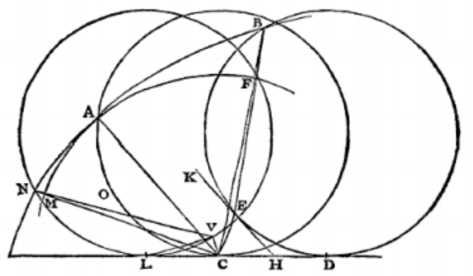


Figura 14: Gràfic de l'*Horologium.* Obtinguda a [16]

Segons Huygens *Horologium Oscillatorium - 1673*
En la mateixa proposició XV, Huygens raona quin és el càlcul per dibuixar la recta normal a la cicloide. En resum, s'uneix el punt de la cicloide al qual es vol traçar la normal amb el punt de contacte de la circumferència generatriu amb l'eix horitzontal. Exposem a continuació un fragment del seu enunciat:

CA creua la corba (NAB) amb un angle recte, o la circumferència MAF descrita amb centre C i radi CA toca la corba al punt A, i la perpendicular a AC dibuixada per A és tangent a la corba en aquest punt.
Per a més informació, consulteu [16].

El càlcul de l'evoluta

Segons Huygens *Horologium Oscillatorium - 1673*

La part III d'aquest llibre estudia les evolutes i la longitud de corbes. És aquí on Huygens fa un extens estudi sobre l'evoluta de la cicloide. A continuació exposem la proposició que exposa que l'evoluta d'una cicloide és una altra cicloide:

Proposició V Si una línia és la tangent a la cicloide al vèrtex, sobre la qual com a base es col·lolca una altra cicloide similar i equivalent a la primera, començant pel vèrtex esmentat; qualsevol tangent de la cicloide inferior creua la cicloide superior amb angle recte.

És a dir, Huygens dibuixa una cicloide traslladada damunt d'una altra de forma que el vèrtex de la cicloide superior sigui tangent a la cicloide inferior. La circumferència generatriu està desplaçada mig arc, Les rectes tangents a la cicloide inferior coincideixen amb les rectes normals de la cicloide superior.

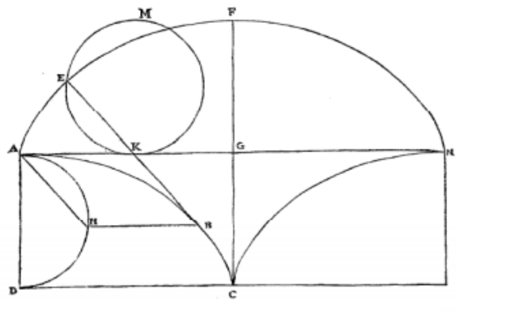


Figura 15: Gràfic de la proposició V. Obtinguda a [17]

Per demostrar aquesta proposició, Huygens utilitza les proposicions XIV i XV, que fan referència a la construcció de la recta tangent i la recta normal.

En la proposició VII, Huygens dedueix i demostra que la longitud d'un arc de cicloide és quatre vegades el diàmetre del cercle generador. El raonament matemàtic que ofereix ve acompanyat d'un recorregut històric on assenyala els diferents personatges que

han estudiat la cicloide i quins descobriments han realitzat.
Per a més informció respecte les demostracions de les proposicions precedents, consulteu [17].

El càlcul de l'àrea

Aportació de Galileu L'any 1599 va intentar fer la quadratura d'un arc cicloidal, segons diu Torricelli en una publicació de 1644. Galileu va usar una balança on va posar-hi l'arc cicloidal a una banda i el cercle generador, del mateix material, a l'altra. De forma experimental va descobrir que la relació d'àrees entre l'arc de cicloide i el cercle era 3 : 1. Li va semblar un resultat increïblement senzill, i és per aquest motiu que va decidir abandonar l'experiment, concloent que la ratio era incommensurable (és a dir, un nombre irracional proper a 3).

La quadratura de Roberval *Traité des Indivisibles - 1693*

La proposta de quadratura de Roberval es basa en el Teorema de Cavalieri, que diu el següent: Si dues regions acotades per línies paral·leles són tals que qualsevol línia paral·lela entre elles talla cada regió en segments de mateixa longitud, aleshores les regions tenen la mateixa àrea.

Aquest forma part de la teoria dels *indivisibles*, que va ser un nou mètode per trobar àrees sota corbes. Aquest mètode consistia en la divisió d'una figura corba en franges "infinitament" fines, les àrees de les quals podien ser calculades amb relativa facilitat i després sumades. Aquesta idea va precedir el càlcul integral.

La quadratura de Roberval depèn de l'anomenada corba companya. Aquesta es construeix de la següent manera: [12]

Sigui P qualsevol punt de la cicloide. A través d'una línia paral·lela a AC, dibuixem PQ, congruent a la semicorda EF. La corba companya és el lloc geomètric dels extrems dels segments congruents als de la semicircumferència que tenen un dels vèrtex a la cicloide. De fet, aquesta corba és una corba sinusoidal.

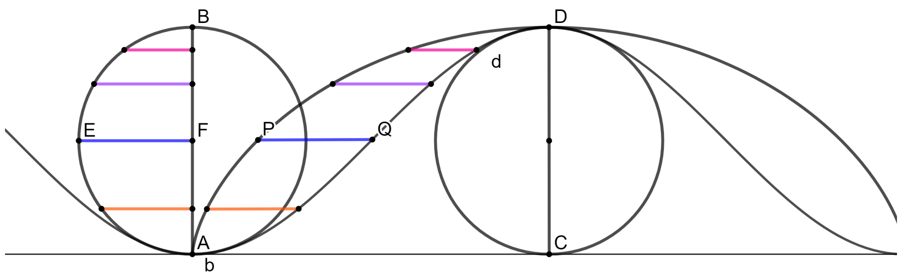


Figura 16: La corba companya de la cicloide

Roberval va demostrar que l'àrea de la regió entre la cicloide i la seva companya era la meitat de l'àrea del cercle generador, o bé $\frac{1}{2}\pi r^2$ (1). Això és degut a la versió bidimensional del principi de Cavalieri, esmentat prèviament: Les àrees són equivalents ja que les tires de les dues regions a les mateixes alçades (la regió interior de la semicircumferèmncia i la regió de la corba companya) són iguals.

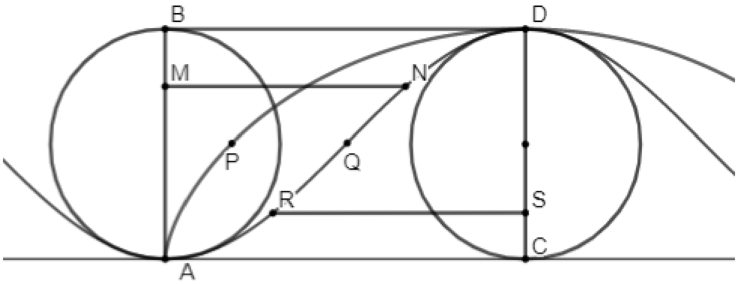


Figura 17: Raonament de Roverbal per al càlcul de l'àrea

Roberval va usar el principi de Cavalieri també per mostrar que la corba companya divideix el rectangle ABDC en dues parts iguals amb àrees iguals. Això és degut a que per a cada segment MN en la regió de l'esquerra hi ha un segment corresponent i congruent RS a la regió de la dreta. Per tant, l'àrea sota la corba companya és equivalent a la meitat de l'àrea del rectangle, o $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(2\pi r) \times 2r) = \pi r^2$ (2). Notem que 2r és el diàmetre de la circumferència i $\frac{1}{2}(2\pi r)$ és la longitud de la trajectòria que fa mitja circumferència, que coincideix amb la base del rectangle. Tot plegat, per (1) i per (2) és té que l'àrea sota un arc de cicloide és:

$$2(Area_{APDR} + Area_{AQDC}) = 2(\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2) = 2(\frac{3}{2}\pi r^2) = 3\pi r^2$$

En aquest enllaç de geogebra, realitzat per Manel Udina (membre del MMACA), es pot observar la construcció de la cicloide i de la corba companya.

La propietat tautòcrona

TAUTÒCRONA O ISÒCRONA.
DEL GREC TAUTO (mateix) o ISO (igual), i CHRONOS (temps).

El pèndol isocrònic En l'estudi de la mesura del temps, el pèndol ha tingut històricament un paper important. Els primers estudis del pèndol, on es fa palès la seva rellevància, van ser realitzats per Galileu. Aquest va descobrir de forma experimental l'isocronisme del pèndol, va suggerir-ne el seu ús per a la navegació i l'astronomia, i també va ser el primer que va intentar adaptar aquesta eina als rellotges mecànics.[26] Tot i que moltes de les seves declaracions tenien moltes ambigüitats i algunes d'elles eren incorrectes, Galileu va ser el predecessor del seu estudi més extens, que va entomar Christiaan Huygens.

Huygens va inventar el rellotge de pèndol: en va elaborar la teoria i va construir els primers rellotges d'aquest tipus. La seva obra *Horologium oscillatorium* recull els seus descobriments, alguns dels quals s'han anat presentant al llarg del treball.
Un dels rellotges de pèndol més conegut és el simple. Aquest descriu un arc de circumferència en la seva trajectòria, però té limitacions físiques a causa del fregament de l'aire: les oscil·lacions del pèndol disminueixen i conseqüentment el seu període.

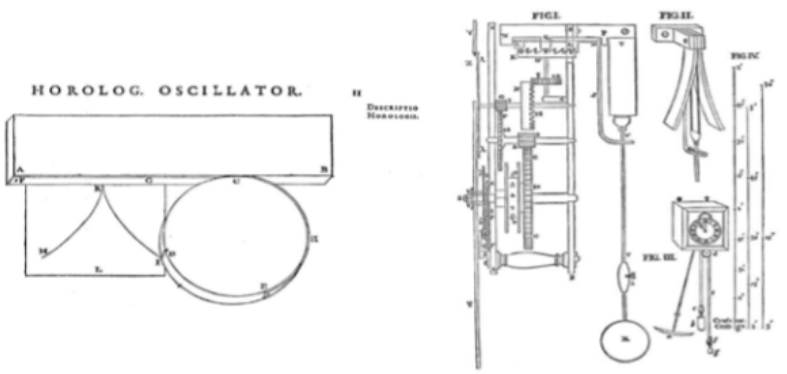


Figura 18: La construcció del pèndol isocrònic a l'*Horologium Oscillatorium*

Huygens va inventar l'accessori (dos contorns sòlids en forma d'arc de cicloide) per tal que les oscil·lacions fossin constants, com bé s'ha explicat a la part històrica. També va descobrir, amb la propietat que l'evoluta d'una cicloide és una altra cicloide, que amb una corda de longitud $4r$ (on r és el radi de la circumferència generatriu) la trajectòria que realitza el pèndol és un arc de cicloide.

L'estudi de Huygens *Horologium Oscillatorium - 1673*

Tot seguit s'exposen algunes de les proposicions relacionades amb la propietat tautòcrona. La proposició XXIII està relacionada amb la caiguda lliure d'un cos a través d'un arc de cicloide invertida, i desenvolupa una extensa descripció del seu plantejament. De forma resumida, Huygens compara el temps de descens d'un cos a través de la cicloide i de segments fruits de les rectes tangents de diferents punts de la cicloide. Aquesta proposició precedeix les proposicions XXIV a la XXVI, que ofereixen resultats més globals i són els que parlen explícitament de la propietat tautòcrona. [19]

<u>Proposició XXIV</u> Tenim un arc de cicloide invertit ABC, amb eix vertical $\overline{AD}$. Escollim un punt qualsevol B de la corba i dibuixem la recta horitzontal $\overline{BF}$, la semicircumferència FHA i la tangent $\overline{B\Theta}$, que talla la recta horitzontal $\overline{A\Theta}$ en Θ. Sigui $\overline{GE}$ qualsevol línia horitzontal sota $\overline{BF}$, que talla la cicloide en E, la tangent $\overline{B\Theta}$ en I, la semicircumferència FHA en H i l'eix $\overline{AD}$ en G. Sota aquestes condicions, es té el següent resultat: El quocient del temps per anar a través de l'arc $\widehat{BE}$ caient de B, amb el temps per anar a través de la tangent $\overline{B\Theta}$ amb la velocitat que s'obté d'anar de B a Θ és equivalent al doble del quocient de $\widehat{FH}$ amb $\overline{FG}$.

$$\frac{t_B(\widehat{BE})}{t_{\overline{B\Theta}(\overline{BI})}} = 2\frac{\widehat{FH}}{\overline{FG}}$$

La demostració d'aquest resultat és llarga però interessant des d'un punt de vista històric ja que precedeix les tècniques d'integració de Leibniz i Newton. Per a més informació, consulteu [16].

Aquesta precedeix a la proposició XXV, relacionada relacionada amb la propietat isocrònica de la cicloide. Diu així:

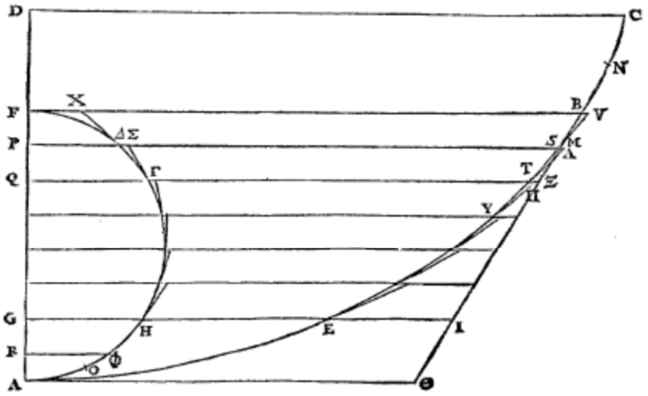


Figura 19: Proposició XXIV de l'*Horologium Oscillatorium*, obtinguda a [16]

Proposició XXV En una cicloide amb un eix vertical, essent el vèrtex el punt més baix, els temps de descens de cossos des de qualsevol punt, partint del repòs fins que arriben a baix de tot són equivalents. La proporció d'aquest temps respecte el temps de descens de l'eix és proporcional a la semicircumferència respecte el diàmetre.

Com bé s'observa a la figura 20, el vèrtex inferior és A, l'eix vertical és AD i escollim un punt qualsevol de la cicloide, per exemple B. El temps de descens de l'arc $\widehat{BA}$ és equivalent al temps de descens a través de l'eix $\overline{DA}$ com ho és la semicircumferència amb el diàmetre.

Es descriu un semicercle en l'eix DA, la cirumferència de l qual talla $\overline{BF}$ en E, és paral·lel a la base $\overline{DC}$; s'uneix $\overline{EA}$ i es traça $\overline{BG}$, que és tangent a la cicloide en B. La mateixa línia creua la línia dibuixada a través de l'horitzontal que va de A a G: també en FA es dibuixa el semicercle FHA.

Per una banda, per la proposició XXIV, es té:

$$\frac{t_B(\widehat{BA})}{t_{\overline{BQ}(\overline{BQ})}} = 2\frac{\widehat{FHA}}{\overline{FA}} = 2\frac{\pi r}{2r} = \pi$$

Per altra banda, el temps de descens a través de de $\overline{BQ}$ és equivalent al temps de descens de $\overline{EA}$, que és paral·lel i equivalent al temps de descens accelerat a través de $\overline{DA}$. Això és degut a la Llei de Cordes de Galileu, exposat a 4.2.3.

Proposició XXVI Sota les mateixes condicions, si dibuixem una línia HI a sota que talla l'arc BA en I, i la circumferència FHA en H, el temps de passar a través de l'arc BI, al temps de passar l'arc IA després de BI és proporcional a l'arc de circumferència FH a HA.

La braquistòcrona

BRAQUISTÒCRONA.
DEL GREC BRACHISTOS (el més curt) I CHRONOS (temps)

Segons Galileu Galileu va ser el primer que va estudiar el problema de la braquistòcrona: 60 anys abans que Bernoulli ho proposés.

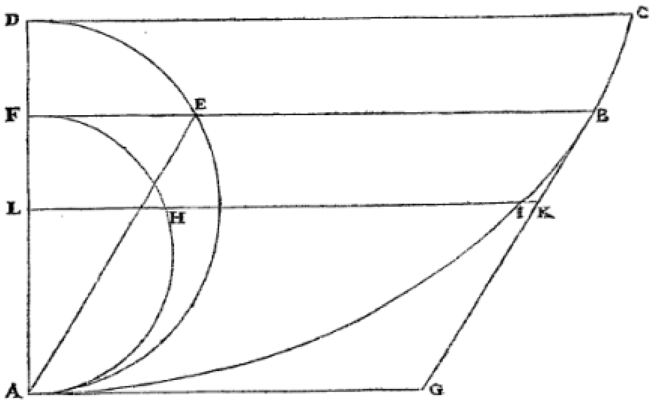


Figura 20: Gràfic de la Proposició XXV i XXVI de l'*Horologium Oscillatorium*, obtinguda a [16]

Galileu planteja, com es mostra a la figura 21 que si al llarg de l'arc de circumferència fem una corda vertical (AC) i després unim C (cal que C estigui damunt la circumferència) amb l'extrem més baix (B), el temps de descens és menor. Altre cop, si fem AC, CD, DB, el temps de descens és menor. La trajectòria que descriuen aquestes cordes s'aproxima a una circumferència i per tant, ell conclou que el camí més curt de descens és la circumferència. Per Galileu, una circumferència era un polígon amb un nombre infinit de petits costats. Per una banda, realitza aquesta deducció estudiant la trajectòria de descens al llarg de poligonals, i el "límit" de la família de poligonals és un arc de circumferència. Per altra banda, si el temps amb dues cordes és menor que amb una, el temps amb un nombre més elevat de cordes serà, doncs, encara menor.

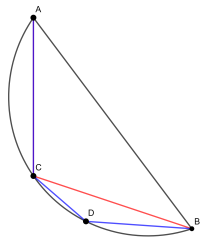
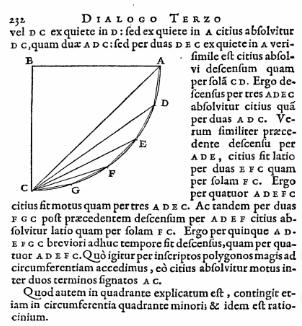


Figura 21: El raonament de Galileu



232 DIALOGO TERZO

vel D C ex quiete in D: ſed ex quiete in A citius abſolvitur D C, quam duæ A D C: ſed per duas D E C ex quiete in A veriſimile eſt citius abſolvi deſcenſum quam per ſolã C D. Ergo deſcenſus per tres A D E C abſolvitur citius quã per duas A D C. Verum ſimiliter præcedente deſcenſu per A D E, citius fit latio per duas E F C quam per ſolam F C. Ergo per quatuor A D E F C citius fit motus quam per tres A D E C. Ac tandem per duas F G C poſt præcedentem deſcenſum per A D E F citius abſolvitur latio quam per ſolam F C. Ergo per quinque A D E F G C breviori adhuc tempore fit deſcenſus, quam per quatuor A D E F C. Quò igitur per inſcriptos polygonos magis ad circumferentiam accedimus, eò citius abſolvitur motus inter duos terminos ſignatos A C.

Quod autem in quadrante explicatum eſt, contingit etiam in circumferentia quadrante minori; & idem eſt ratiocinium.

Figura 22: Escolis de la proposició XXXVI. Obtingut de [22]

Un dels temes que Galileu va estudiar a la seva obra *Discorsi e dimostrazioni mathematiche intoro a due nuove scienze* l'any 1638 va ser els temps de descens de certes corbes. La proposició XXXVI, en el marc del *Dialogo Terzo* demostra el resultat prèviament exposat. Més concretament, en un escolis a aquesta proposició, Galileu intenta demostrar que la manera més ràpida d'anar d'un punt a un altre, connectats per un arc de circumferència, és en si l'arc, i no la línia recta entre els dos punts. Galileu precedeix l'estudi del càlcul de la braquistòcrona. Òbviament, Galileu estava equivocat i certs historiadors matemàtiques [20] associen l'error a assumir per vertaders certes assumpcions no demostrades.

En la Proposició V de *De motu* (1590), demostra que el temps de descens d'un cos en un pla inclinat és proporcional a la llargada del pla, i inversament proporcional a l'arrel quadrada de la seva alçada. Per tant, si T és el temps, L la llargada i H l'alçada, tenim:

$$T = \frac{kL}{\sqrt{H}} \qquad (1)$$

on k és una constant de proporcionalitat. A la Proposició VI, Galileu estableix la llei de cordes: [21]

Definim un cercle de diàmetre D que té una corda de llargada L i alçada H. Sigui T el temps de descens al llarg de la corba. Per semblança de triangles,

$$L/H = D/L \rightarrow L^2/H = D.$$

Aleshores, per (1),

$$T = \frac{kL}{\sqrt{H}} = k\sqrt{D}$$

que és una expressió constant, com volíem veure.

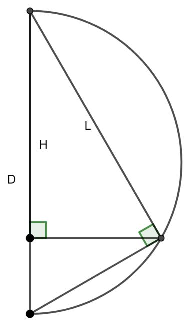


Figura 23: La llei de cordes

Estudiar aquest problema és equivalent a estudiar com cau una partícula per seu propi pes al llarg d'un pla inclinat de longitud L i alçada H. Galileu va trobar l'expressió de forma experimental, i aquest descobriment va permetre a altres matemàtiques seguir investigant les propietats cicloidals.

Segons Newton *Acta Eruditorium - 1697*

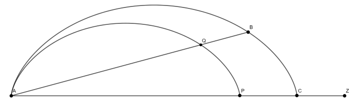


Figura 24: Reproducció del raonament de Newton

No hi ha cap referència del mètode que va usar Newton per abordar el repte de Bernoulli. Tot i així, es valora que els seus raonaments van ser fonamentalment geomètrics, sense tècniques analítiques. Aquest supòsit es deu al fet que va enviar la seva resposta en aquests termes i també va escriure un teorema estretament relacionat amb el problema de la braquistòcrona a la seva obra *Opera Quae Exstant Omnia (1779-1785)* . La solució anònima que es va publicar a *Philosophical Transactions of the Royal Society* el gener de 1697, i que mesos més tard va exposar-se a *Acta Eruditorium* mostra la manera de construir una cicloide unint dos punts qualsevol. Hi va incloure el dibuix de la Figura 24 i prossegueix de la següent manera: [23]

Demostració. Es dibuixa la línia recta infinita $\overline{APCZ}$ que passa per A, paral·lela a la base, i damunt d'aquesta es traça qualsevol cicloide AQP, que interseca la línia recta $\overline{AB}$ en el punt Q, com també la cicloide ADC, on la base i l'alçada son proporcionals a la base i l'alçada de la primera cicloide com ho és $\overline{AB}$ amb $\overline{AQ}$. L'última cicloide passarà per B i aquesta serà la braquistòcrona. □

Per a més informació, consulteu [24].

Segons Leibniz

Acta Eruditorium - 1697

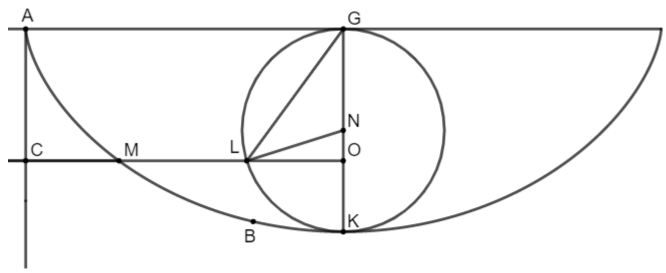


Figura 25: El Raonament de Leibniz. Obtingut de [19]

Al maig de 1697 l'*Acta Eruditorium* contenia la solució de Leibniz a la pàgina 205, la de Johann Bernoulli a les pàgines 206-211, la de Jakob Bernoulli a les pàgines 211-214 i una versió en llatí de la solució de Newton a la pàgina 223.

Hi ha la possibilitat que els detalls matemàtics de les solucions fossin opcionals, ja que ni Newton ni Leibniz exposen les demostracide forma minuciosa. Leibniz explicita que són les eines de càlcul les que li han permès trobar la corba demanada. Seguidament s'exposa una part del raonament que va usar a la seva publicació de l'*Acta Eruditorium*

Certament, si la corba ABK és de tal naturalesa que, havent dibuixat el cercle, talla el seu punt més baix en K, "toca" la línia recta que passa per A en G i, havent dibuixat normalment la intersecció amb l'eix vertical AC en C, amb la corba en M, amb el cercle en L, amb el seu diàmetre vertical GK en O, que les seves ordenades CM són proporcionals al segment delimitat entre l'arc $\widehat{GL}$ i la corda GL, aleshores AB, l'arc interceptat entre els dos punts donats, és la corba pel qual un cos, sota la gravetat, arribarà més ràpidament de A a B.
Que aquesta corba és la cicloide pot mostrar-se fàcilment. Com que el segment OC és equivalent al semicercle GLK, i el segment LM és equivalent a l'arc LK, la suma dels segments OL + CM serà igual a l'arc $\widehat{GL}$ (que és la part restant). Des de N, el centre

del cercle, dibuixeu NL. És obvi que el rectangle sota el semiradi i OL+CM és equivalent al sector circular GNLG, i que el rectangle sota el semiradi i sota OL és equivalent al triangle GNL. Aleshores, el rectangle sota el semiradi i sota CM és quivalent al segment GLG, és a dir, a la diferència del sector circular amb el triangle GNL.

Segons Johann Bernoulli *Acta Eruditorium - 1697*
Seguidament es mostra una traducció d'una part de la demostració que va oferir Johann Bernoulli a *Acta Eruditorium.* Sigui FGD el medi, delimitat per l'horitzontal FG; A el

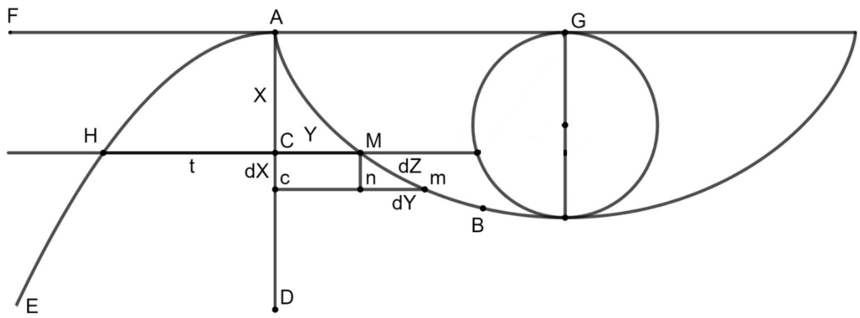


Figura 26: El Raonament de Bernoulli. Obtingut de [19]

punt de propagació; AD la vertical; AHE, l'eix de la corba donada, tal que HC es troba en el medi amb profunditat AC, o la velocitat del raig de llum o de la partícula en M, i AMB el camí buscat. Sigui x la distància per AC; t per HC; y per CM; dx pel diferencial Cc; dy pel nm; dz pel Mm; i a per una constant arbitrària. L'arc $\widehat{Mm}$ representa el raig de llum corbat; mn el sinus de l'angle de refracció, és a dir, la inclinació de la corba mesurada des de la vertical. Amb tot això, mn és directament proporcional a Hc, per tant $\frac{dy}{t} = \frac{dz}{a}$, fet que implica l'equació $ady = tdz$ o bé $aady^2 = ttdz^2 = ttdx^2 + ttdy^2$, que dona l'equació diferencial general $dy = t\frac{dx}{\sqrt{aa-tt}}$ per la corba buscada.
Sota la hipòtesi de Galileu, Bernoulli prossegueix: La corba donada AHE és una paràbola, això és.$tt = ax$ i $t = \sqrt{ax}$, que si ho substituïm a l'equació general obtenim $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, pel qual concloc que la corba demanada, la braquistòcrona, és la cicloide. Sigui el cercle GLK de diàmetre a i el fem lliscar a través de AG, començant en A. El punt K del cercle descriurà una cicloide, que té la mateixa equació diferencial $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, després de substituir x per AC i y per CM. Es pot descobrir analíticament de la següent manera:

$$dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{-adx+2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} + \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$$

Tot i així, $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$ és una equació diferencial la suma de la qual ve donada per $\sqrt{ax-xx}$, és a dir, LO, i $\frac{2dx}{2\sqrt{ax-xx}}$ és la diferencial mateixa de l'arc $\widehat{GL}$, per tant l'equació suma de $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ tindrà y o $CM = \widehat{GL} - LO$, és a dir, $MO = CO -$

$\widehat{GL} + LO$. Però $CO - \widehat{GL} = \widehat{LK}$, ja que CO equival al semicercle GLK, per tant tenim $MO = \widehat{LK} + LO$, i traient LO comú obtenim $ML = \widehat{LK}$, mostrant que la corba KMA és una cicloide.
Encara hem de demostrar, per resoldre del tot el problema, com descriure des d'un punt donat la braquistòcrona o tautòcrona passant per un altre punt donat. Prosseguim de la següent manera: Dibuixeu dos punts A, B i la línia recta AB i, al llarg de l'horitzontal AL, qualsevol cicloide que comenci en A i intersequi AB en R. De la mateixa proporció que AR és a AB, agafem el diàmetre del cercle generador de la cicloide ARS un quart, que serà el diàmetre del cercle generador de la cicloide buscada ABL, que passarà per B.

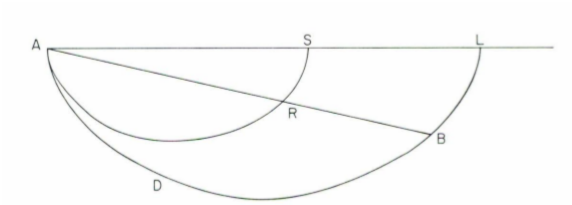


Figura 27: El raonament de Bernoulli. Obtingut de [19]

4.2.4 Amb eines matemàtiques actuals

Definicions prèvies [25]

Definició 4.1. Una corba parametritzada de R^n és una aplicació diferenciable α: I $\rightarrow R^n$ definida en un interval obert I de R. La variable $\theta \in I$ s'anomena el paràmetre de la corba.

Definició 4.2. Sigui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada. El vector α'$(\theta) \in R^n$ s'anomena vector velocitat de α en el punt θ. El punt θ_0 es diu singular si $\alpha'(\theta_0) = 0$, i regular si α'$(\theta_0) \neq 0$. Si θ és un punt regular, el vector $\mathbf{t}(\theta) = \dfrac{\alpha'(\theta)}{|\alpha'(\theta)|}$ s'anomena el vector tangent unitari de α a θ. La recta que passa per $\alpha(\theta)$ i té com a vector director $\mathbf{t}(\theta)$ s'anomena la recta tangent a α en el punt θ.

Definició 4.3. Una corba $\alpha : I \rightarrow R^n$ està parametritzada per l'arc si $\forall$ $\theta \in$ I es compleix $||\alpha'(\theta)|| = 1$

Definició 4.4. Sigui $\alpha : I \rightarrow$R^n una corba. El punt $\theta \in I$ és regular si $\alpha'(\theta) \neq 0$. Altrament, diem que és un punt singular. La corba α és 1-regular si tots els seus punt són regulars.

Definició 4.5. Una corba 1-regular $\alpha : I \rightarrow R^n$ és 2-regular si $k(\theta) \neq 0$ $\forall \theta \in I$. En general, α és k-regular si els vectors $\alpha'(\theta), \alpha''(\theta), ..., \alpha^(k)(\theta)$ són linealment independents $\forall \theta \in I$. Per tant, $\alpha : I \rightarrow R^3$ és 2-regular en θ si $\alpha'(\theta) \times \alpha''(\theta) \neq (0, 0, 0)$.

Definició 4.6. Sigui α: I $\rightarrow \mathbb{R}^n$ una corba regular. El vector normal de α a $\theta_0 \in$ I és l'únic vector $\mathbf{n}(\theta_0) \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a $\mathbf{t}(\theta_0)$. La recta que passa per $\alpha(\theta_0)$ i té com a vector director $\mathbf{n}(\theta_0)$ s'anomena la recta normal a α en el punt θ.

Definició 4.7. Sigui α una corba no necessàriament parametritzada per l'arc. Aleshores, la curvatura de α és:

$$k_\alpha(\theta) = \frac{||\alpha'(\theta) \wedge \alpha''(\theta)||}{||\alpha'(\theta)||^3}$$

.

Si la corba està parametritzada per l'arc, aleshores la curvatura és $||\alpha'(\theta)|| = k(\theta)$.

Definició 4.8. Sigui $\alpha : I \to R^3$ una corba parametritzada per l'arc. La funció $\tau_\alpha : I \to R$ definida
$$\tau_\alpha(\theta) = \frac{det(\alpha'(\theta), \alpha''(\theta), \alpha'''(\theta))}{||\alpha''(\theta)||^2}$$
s'anomena la torsió d'una corba.

Definició 4.9. Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc. Per a cada $\theta \in I$ es defineix

- El vector tangent $t(\theta) = \alpha'(\theta)$
- El vector normal $n(\theta) = \dfrac{\alpha''(\theta)}{|\alpha''(\theta)|}$
- El vector binormal $b(s) = t(s) \times n(s)$

La terna $t(\theta), n(\theta), b(\theta)$ s'anomena Triedre de Frenet en el punt θ.

Teorema 1. Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba 2-regular parametritzada per l'arc. Es compleix:

1. $t'(\theta) = k_\alpha(\theta) \times n(\theta)$
2. $n'(\theta) = -k_\alpha(\theta) \times t(\theta) + \tau_\alpha(\theta) \times b(\theta)$

Demostració. 1. Per definició $t(\theta) = \alpha'(\theta)$ i per tant $t'(\theta) = \alpha''(\theta)$. Per altra banda es té $k(\theta) = ||\alpha'(\theta)||$ i $n(\theta) = \dfrac{\alpha''(\theta)}{|\alpha''(\theta)|}$. Tot plegat, doncs:
$$n(\theta) = \frac{\alpha''(\theta)}{||\alpha''(\theta)||} = \frac{t'(\theta)}{k(\theta)} \to t'(\theta) = k(\theta)n(\theta)$$

S'omet la demostració del punt 2. □

La cicloide La cicloide és la corba descrita per un punt fix d'una circumferència (circumferència generatiu) quan aquesta gira sobre una línia recta. (recta directriu). [27]

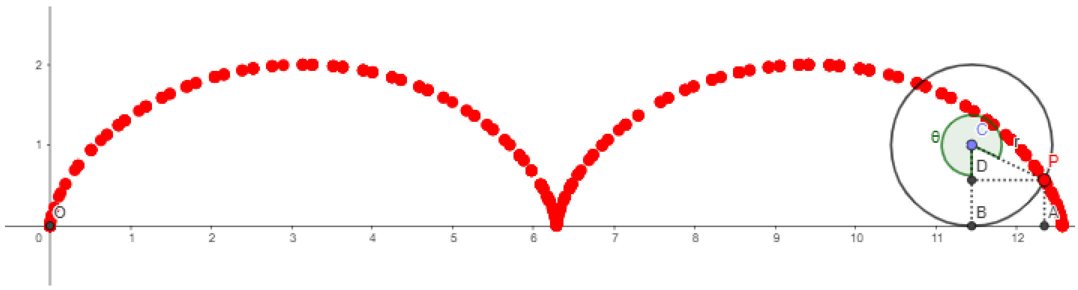


Figura 28: Construcció de la cicloide

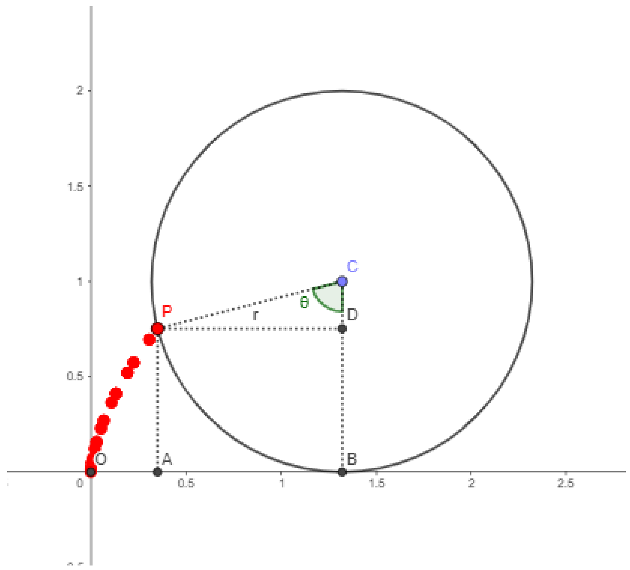


Figura 29: Obtenció de les equacions paramètriques

Equacions paramètriques Es considera un punt P de la circumferència situat a l'origen de coordenades (0,0). Es fa girar la circumferència fins que el punt P es trobi a $(2\pi R, 0)$, essent R el radi de la circumferència. S'obtenen les equacions paramètriques de la corba descrita. Es remarca que $R = CP$, i θ és l'angle format per DCP. Sigui C el centre de la circumferència, i siguin A i B les coordenades de les abscisses i les ordenades del punt P, respectivament. PD és la recta perpendicular al radi $R = CB$.

Aleshores:

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \widehat{PB} - \overline{PD} \qquad y = \overline{PA} = \overline{CB} - \overline{CD}$$

L'angle θ és l'angle comprès entre el segment vertical que passa pel centre C perpendicular a l'eix d'abscisses i el radi r. Les coordenades (x, y) per a un punt qualsevol s'obtenen de la següent manera:

$$x(\theta) = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - sin\theta) \qquad y(\theta) = r - r\cos\theta = r(1 - cos\theta)$$

Per tant, la parametrització $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R^2}$ ve donada per:

$$\alpha(\theta) = (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta) = r(\theta - sin\theta, 1 - cos\theta)$$

La longitud i l'àrea

Definició 4.10. Si $\alpha[a, b] \to \mathbf{R}^2$ és una corba diferenciable amb $\alpha'(\theta)$ contínua a $[a, b]$, la següent expressió s'anomena longitud de α:

$$L(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(\theta)||dt = \int_a^b \sqrt{\frac{dx}{d\theta}^2 + \frac{dy}{d\theta}^2}\, d\theta$$

El mòdul del vector velocitat ens permet calcular la longitud d'una corba. En el cas de la cicloide, tenim:

$$x'(\theta) = r(1 - cos(\theta)) \qquad y'(\theta) = rsin(\theta) \qquad ||\alpha'(\theta)||^2 = 2r^2(1 - cos(\theta))$$

Teorema 2. La longitud d'un arc de cicloide és $8r$, on r és el radi del cercle generador.

Demostració. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(1-cos(t))^2 + (rsin(t))^2}dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-cos(t))^2 + sin(t))^2}dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2cos(t)}dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-cost(t))}dt = 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-cost(t)}{2}}dt = 2r\int_0^{2\pi} sin(\frac{t}{2})dt = 2r[-2cos(\frac{t}{2})]_0^{2\pi} = 8r$ □

Definició 4.11. Sigui C una corba definida per $x = x(\theta), y = y(\theta)$ amb $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Si les equacions defineixen entre els punts d'abscisses $a = x(\theta_1)$ i $b = x(\theta_2)$ una funció $y = f(x)$ integrable, aleshores l'àrea tancada entre la corba C i l'eix OX és:

$$Area = \int_a^b |f(x)|dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |y(\theta)x'(\theta)|d\theta$$

En el cas de la cicloide, es té:

$$x(\theta) = r(\theta - sin(\theta)) \qquad y(\theta) = r(\theta - cos(\theta)) \qquad x'(\theta) = r(1 - cos(\theta))$$

Teorema 3. L'àrea definida sota un arc de cicloide és $3\pi r^2$, on r és el radi del cercle generador.

Demostració. $Area = \int_0^{2\pi} r^2(1-cos(\theta))(1-cos(\theta))dt = r^2\int_0^{2\pi}(1-2cos(\theta)+cos^2(\theta))d\theta = r^2[\int_0^{2\pi} d\theta - 2\int_0^{2\pi} cos(\theta)dt + \int_0^{2\pi} cos^2(t)d\theta = r^2[2\pi + 0 + \pi] = 3\pi r^2$ □

El càlcul de la recta tangent i la recta normal Basant-nos en la definició 4.2, calculem la recta tangent a la cicloide. Es té:

$$\alpha'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = r - cos(\theta) \\ y'(\theta) = rsin(\theta) \end{cases}$$

Recordem que la recta tangent és de la forma $\{\alpha(\theta) + \lambda\alpha'(\theta), \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Sigui r és el radi de la circumferència generatriu. Procedim:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - sin(\theta) + \lambda r(1 - cos(\theta)) \\ y(\theta) = r(1 - cos(\theta) + \lambda r(sin(\theta)) \end{cases}$$

Aquestes són les equacions paramètriques de la recta tangent a la cicloide. Expressades en forma general, s'obté:

$$\frac{x - r(\theta - sin(\theta))}{r(1 - cos(\theta))} = \frac{y - r(1 - cos(\theta))}{rsin(\theta)}$$

$$xsin(\theta) - r\theta sin(\theta) - y + ycos(\theta) - 2rcos(\theta) = 0$$

Calculem la recta normal a la cicloide. Sigui m el pendent de la recta normal en aquest cas. Aleshores $m = \frac{1}{\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}}$.

Per tant:
$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dy} = \frac{r - rcos\theta}{rsin\theta} = \frac{cos\theta - 1}{sin\theta}$$
Usant l'expressió contínua de la recta,la normal en qualsevol punt de la cicloide és de la forma:

$$\begin{aligned} y - (r - rcos\theta) &= \frac{cos\theta - 1}{sin\theta}(x - (r\theta - r\sin\theta)) \\ \frac{y - (r - rcos\theta)}{x - (r\theta - r\sin\theta)} &= \frac{cos\theta - 1}{sin\theta} \\ ysin\theta - rsin\theta + rcos\theta sin\theta &= xcos\theta - r\theta cos\theta + rsin\theta cos\theta - x + r\theta + rsin\theta \\ xcos\theta - ysin\theta - r\theta cos\theta - x + r\theta &= 0 \\ x(cos\theta - 1) - ysin\theta + r\theta(1 - cos\theta) &= 0 \end{aligned}$$

En el següent enllaç de geogebra es poden veure gràficament les dues rectes.

El càlcul de l'evoluta

Definicions prèvies [28] [29]

Definició 4.12. Sigui $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ $\theta \in I$. Definim a cada punt regular de α $\theta_0 \in I$ la seva recta normal. És la recta que passa per $\alpha(\theta_0)$ i és perpendicular a la tangent en el punt, per tant el vector director és $\perp\alpha'(\theta_0)$. Les rectes normals a la corba estan situades en el pla normal de α en θ_0, que és de la forma $\{\alpha(\theta_0) + \delta n(\theta_0) + \gamma b(\theta_0) | \delta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Definició 4.13. Una corba $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ les tangents de la qual constitueixen una família uniparamètrica de normals a la corba α, essent el vector director de les normals una funció diferenciable, s'anomena evoluta de α.

Es dedueix l'equació de les evolutes d'una corba de classe C^3 de la següent manera:

Teorema 4. Si una evoluta existeix, el vector posició dels seus punts és de la forma $\beta(\theta) = \alpha(\theta) + \lambda(\theta)n(\theta) + \mu(\theta)b(\theta)$ on λ, μ són funcions del paràmetre θ.

Demostració. Se suposa que aquestes són diferenciables i es vol determinar-les. El vector tangent a la corba és de la forma
$$\beta'(\theta) = \alpha'(\theta) + \lambda'(\theta)n(\theta) + \lambda(\theta)n'(\theta) + \mu'(\theta)b(\theta) + \mu(\theta)b'(\theta)$$
Es substitueix $t'(\theta)$ $n'(\theta)$ i $b'(\theta)$ per les respectives expressions de les fórmules de Frenet i s'obté
$$\beta'(\theta) = t(\theta) + \lambda'(\theta)n(\theta) + \lambda(\theta)(-kt(\theta) + \tau b(\theta) + \mu'(\theta)b(\theta) - \mu(\theta)\tau n(\theta)$$
$$\beta'(\theta) = (1 - \lambda(\theta)k)t(\theta) + (\lambda'(\theta) - \mu(\theta)\tau)n(\theta) + (\lambda(\theta)\tau + \mu'(\theta))b(\theta)$$

El vector tangent és paral·lel al vector $\lambda(\theta)n(\theta) + \mu(\theta)b(\theta)$ per definició d'evoluta.D'aquesta forma, el vector $t(\theta)$ és nul i per tant $1 - \lambda k = 0$. Alhora, es substitueix $n(\theta)$ i $b(\theta)$ per λ i μ, al ser aquests dos vectors linealment independents. S'obté:
$$\begin{aligned} 1 - \lambda(\theta)k &= 0 \\ \mu(\theta)(\lambda'(\theta) - \mu(\theta)\tau) - \lambda(\theta)(\lambda(\theta)\tau + \mu'(\theta)) &= 0 \end{aligned}$$

La primera equació implica que $\lambda(\theta) = \dfrac{1}{k}$. Tenim doncs que $\lambda(\theta)$ és el radi de curvatura de la corba donada i per tant el punt del vector posició $\alpha(\theta) + \lambda(\theta)n(\theta)$ és el centre de curvatura. No ens centrarem en la resolució de la segona expressió ja que concerneix corbes que tenen la torsió no nul·la i no és el cas de la cicloide.

$\square$

El previ raonament de la demostració ens condueix a la següent observació:

Observació. Si la corba és plana, aleshores $\tau = 0$ i entre les evolutes de la corba n'existeix una que està al mateix pla de la corba. En aquest cas, l'equació de l'evoluta és de la forma

$$\beta(\theta) = \alpha(\theta) + \frac{1}{k(\theta)}n(\theta)$$

$\theta \in I \qquad k(\theta) \neq 0,$

Lemma 5. Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una corba 2-regular. $\tau(\theta) = 0 \ \forall\theta \in I \iff$tr$(\alpha)$ està continguda en un pla.

Demostració. $\Longrightarrow$ Usant la tercera fórmula de Frenet, $\tau(\theta) = 0 \ \forall\theta \in I$, llavors $b'(\theta) = 0$ i $b(\theta) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Ara cal comprovar que la corba està continguda en un pla perpendicular al vector binormal, que és constant. Es comprova que el vector que uneix qualsevol punt de la corba a un punt fix d'aquesta és perpendicular al binormal. Per fer-ho, es deriva l'expressió $\langle\alpha(\theta), b_0\rangle$:

$$\frac{d}{d\theta}(\langle\alpha(\theta), k\rangle) = \langle\frac{d}{d\theta}(\alpha(\theta), k\rangle + \langle\alpha(\theta), \frac{d}{d\theta}k\rangle = \langle t(\theta), k\rangle + \langle\alpha(\theta), 0\rangle = 0 \to \langle t(\theta), k\rangle = 0.$$

Per tant, $\langle\alpha(\theta), k\rangle$ és constant $\to$ $\langle\alpha(\theta), k\rangle = \langle\alpha(\theta_0), k\rangle \to \langle\alpha(\theta) - \alpha(\theta_0), k\rangle = 0 \to$ $\alpha(\theta) - \alpha(\theta_0)$ és ortogonal a $k \to \alpha(\theta)$ pertany al pla ortogonal a k que passa per $\alpha(\theta_0)$. És cert $\forall\theta \in I$, per tant $tr(\alpha)$ està contingudan en un pla.
$\Longleftarrow$ Si la corba és plana, es troba en un pla. Es pren una base tal que α estigui continguda al pla $z = 0$ i per tant s'expressa com $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta), 0)$. Els vectors tangent i normal a la corba es troben en aquest pla. Es té que el vector binormal és perpendicular al pla i és constant: $b'(\theta) = 0$. Per la tercera fórmula de Frenet, $b'(\theta) = -\tau n(\theta) \to \tau = 0$ ja que $n(\theta) \neq 0$ al ser la corba 2-regular. $\square$

Definició 4.14. S'anomena centre de curvatura de la corba $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ en un punt $\alpha(\theta)$ on la curvatura és no nul·la al punt $c(\theta) = \alpha(\theta) + \dfrac{1}{k(\theta)}n(\theta)$. El radi de curvatura és la distància $\rho(\theta)$ de $c(\theta)$ a $\alpha(\theta)$ i és de la forma $\rho(\theta) = \dfrac{1}{|k(\theta)|}$.

Definició 4.15. La circumferència de radi $\rho(\theta)$ i centre $c(\theta)$, on ρ és el radi de curvatura i c el centre de curvatura, s'anomena circumferència osculatriu del punt regular θ. Aquesta circumferència està situada al pla osculador, determinat pels vectors unitaris tangent i normal. La circumferència osculatriu és aquella que té l'ordre de contacte més gran possible en un punt.

Per les definicions prèviament exposades, observem que l'evoluta d'una corba és el lloc geomètric dels seus centres de curvatura. En aquest enllaç, prèviament presentat, s'observa la construcció de l'evoluta a partir de la circumferència osculatriu.

Definició 4.16. Una corba C_1 que interseca amb angle recte a les tangents de una corba C s'anomena involuta o evolvent de C. Es dedueix que C_1 és involuta de C si, i només si, C es evoluta de C_1.

Teorema 6. Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una corba de classe C^2. L'equació d'una involuta, si existeix, és de la forma $\gamma(\theta) = \alpha(\theta) + \lambda(\theta)t(\theta)$.

Demostració. Com que el vector tangent γ' és ortogonal al vector tangent t de la corba original, tenim:
$\gamma'(\theta) = \alpha' + \lambda' t + \lambda t' = (1 + \lambda')t + \lambda kn$.
Com que $\gamma' t = 0$ s'obté $1 + \lambda' = 0 \longrightarrow \lambda' = -1 \longrightarrow \lambda = s_0 - s$, $s_0 \in \mathbb{R}$.
Per tant, l'equació de la involuta és $\gamma(\theta) = \alpha(\theta) + (s_0 - s)(\theta)$. □

Donada una corba plana, si a cada punt hi associem el seu centre de curvatura, s'obté una nova corba anomenada evoluta, i la corba original s'anomena involuta. La normal a la involuta és la tangent a l'evoluta.

Teorema 7. L'evoluta d'una cicloide és una cicloide.

Amb eines analítiques

Demostració. L'equació del feix de rectes normals és

$$x(cos\theta - 1) - ysin\theta + r\theta(1 - cos\theta) = 0$$

La derivada d'aquesta equació respecte θ és

$$-xsin\theta - ycos\theta + r(1 - cos\theta) - r\theta = xsin\theta + ycos\theta - r(1 + \theta sin\theta - cos\theta) = 0.$$

Eliminem la variable y d'ambdues expressions amb una reducció:

$$\begin{aligned} cos\theta[x(cos\theta - 1) - ysin\theta + r\theta(1 - cos\theta)] &= 0 \\ sin\theta[xsin\theta + ycos\theta - r(1 + \theta sin\theta - cos\theta)] &= 0 \end{aligned}$$

Sumem les dues expressions:

$$\begin{aligned} xcos^2\theta - xcos\theta + r\theta cos\theta - r\theta cos^2\theta + xsin^2\theta - rsin\theta - r\theta sin^2\theta - rsin\theta cos\theta &= 0 \\ x - xcos\theta + r\theta cos\theta - r\theta - rsin\theta - rsin\theta cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

Si expressem x en funció de θ, obtenim:

$$x = r\frac{\theta + sin\theta - \theta cos\theta + sin\theta cos\theta}{1 - cos\theta}$$

Simplificant, obtenim:

$$x(\theta) = r(\theta + sin\theta)$$

Realitzem el mateix procediment per a la variable y. Eliminem la variable x d'ambdues expressions amb una reducció:

$$\begin{aligned} sin\theta[x(cos\theta - 1) - ysin\theta + r\theta(1 - cos\theta)] &= 0 \\ (cos\theta - 1)[xsin\theta + ycos\theta - r(1 + \theta sin\theta - cos\theta)] &= 0 \end{aligned}$$

Sumem les dues expressions:

$$\begin{aligned}
xsin\theta(cos\theta - 1) - ysin^2\theta + r\theta - r\theta sin\theta cos\theta - xsin\theta(cos\theta - 1) - ycos^2\theta \\
+ycos\theta + rcos\theta + r\theta sin\theta cos\theta - rcos^2\theta - r - r\theta sin\theta + rcos\theta = 0 \\
-y + ycos\theta + 2rcos\theta - rcos^2\theta - r = 0
\end{aligned}$$

Si expressem y en funció de θ, obtenim:

$$y = r\frac{1 - 2cos\theta + cos^2\theta}{cos\theta - 1}$$

Simplificant, obtenim:

$$y(\theta) = r(-1 + cos\theta)$$

Tot plegat, obtenim les equacions

$$x(\theta) = r\theta + rsin\theta$$
$$y(\theta) = -r + rcos\theta$$

Fixem-nos que aquestes equacions són una reparametrització de la cicloide. □

Calculem l'evoluta de la cicloide usant l'observació teorema 4. [30]

$$||\alpha'(\theta)|| = \sqrt{2}r\sqrt{(1 - cos(\theta))} \qquad ||\alpha'(\theta)|| = 2r\sqrt{\frac{1 - cos(\theta)}{2}} \qquad ||\alpha'(\theta)|| = 2rsin(\frac{t}{2})$$

Calculem el vector tangent unitari:

$$t = \frac{\alpha'(\theta)}{||\alpha'(\theta)||} = \frac{r(1 - cos\theta, sin\theta)}{2rsin(\theta/2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1 - cos(\theta)}{sin(\theta/2)}, \frac{sin\theta}{sin(\theta/2)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2sin^2(\frac{\theta}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}, \frac{2sin(\frac{\theta}{2})cos(\frac{\theta}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}\Big)$$

$$t = (sin(\frac{\theta}{2}), cos(\frac{\theta}{2})).$$

El vector normal unitari és

$$n = (-cos(\frac{\theta}{2}), sin(\frac{\theta}{2}))$$

Recuperem la definició 4.7 i obtenim la curvatura:

$$k_\alpha(\theta) = \frac{r^2((1 - cos(\theta)cos\theta - sin^2\theta)}{||\alpha'(\theta)||^3} = \frac{r^2(cos\theta - cos^2\theta - sin^2\theta)}{(2rsin(\frac{\theta}{2}))^3} = \frac{r^2(cos\theta - 1)}{8r^3sin^3(\frac{\theta}{2})} =$$

$$= \frac{cos^2(\frac{\theta}{2}) - sin^2(\frac{\theta}{2}) - 1}{8rsin^3(\frac{\theta}{2})} = \frac{-2sin^2(\frac{\theta}{2})}{8rsin^3(\frac{\theta}{2})} = -\frac{1}{4rsin(\theta/2)}$$

Tot plegat, obtenim que l'evoluta és efectivament una reparametrització de la cicloide:

$$\beta(\theta) = r(\theta - sin\theta, 1 - cos\theta) - (4rsin(\frac{\theta}{2}))(-cos(\frac{\theta}{2}), sin(\frac{\theta}{2}) = r(\theta + sin\theta, -1 + cos\theta))$$

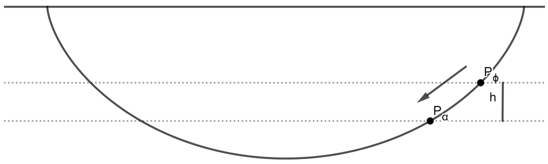


Figura 30: Plantejament del problema de la tautòcrona

La propietat tautòcrona

Teorema 8. La cicloide compleix la propietat tautòcrona.

Demostració. Sigui la velocitat expressada de la següent manera: $v = \dfrac{ds}{dt}$
Regint-nos amb la caiguda lliure, tenim $v = \sqrt{2gh}$ Per tant:$\sqrt{2gh} = \dfrac{ds}{dt}$
Cal resoldre la següent integral:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}} \rightarrow t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{\sqrt{2gh}}$$

La longitud ds ha estat calculada prèviament i és $ds = 2rsin(\dfrac{\alpha}{2})d\alpha$. Calculem l'alçada h:

$$h = y_\phi - y_\alpha = r(cos\phi - 1) - r(cos\alpha - 1) = r(cos\phi - cos\alpha)$$

Per la fórmula de l'angle doble, s'obté

$$cos(2\phi) = cos^2(\phi) - sin^2(\phi) \longrightarrow cos\phi = cos^2(\frac{\phi}{2}) - sin^2(\frac{\phi}{2}) = 2cos^2(\frac{\phi}{2}) - 1$$

Tot plegat:

$$\mathrm{h=r}[(2\mathrm{cos}^2(\frac{\phi}{2}) - 1) - (2cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1)] = r[2(cos^2(\frac{\phi}{2}) - cos^2(\frac{\alpha}{2}))]$$

Podem expressar la velocitat de la següent manera:

$$v_\alpha = \sqrt{2g}\sqrt{r(2(cos^2(\frac{\phi}{2}) - cos^2(\frac{\alpha}{2}))} = 2\sqrt{gr}\sqrt{cos^2(\frac{\phi}{2}) - cos^2(\frac{\alpha}{2})}$$

Tot plegat, tenim:

$$dt = \frac{2rsin(\frac{\alpha}{2})}{2\sqrt{gr}\sqrt{cos^2(\frac{\phi}{2}) - cos^2(\frac{\alpha}{2})}}d\alpha \rightarrow dt = \sqrt{\frac{r}{g}}\frac{sin(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{cos^2(\frac{\phi}{2}) - cos^2(\frac{\alpha}{2})}}d\alpha$$

Es prossegueix a integrar des del punt d'on cau la bola, $\alpha = \phi$, fins al punt més baix de la cicloide, que és on la circumferència ha fet mitja volta i per tant $\alpha = \pi$.

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_\phi^\pi \frac{sin(\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{cos^2(\frac{\phi}{2}) - cos^2(\frac{\alpha}{2})}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{cos\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{cos^2\frac{\beta}{2} - u^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}[arcsin(x)]_0^1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

S'ha usat el canvi de variable $u = cos(\frac{\alpha}{2}) \rightarrow du = -\frac{1}{2}sin(\frac{\alpha}{2})$
Efectivament, el temps de descens ve determinat tan sols pel radi del cercle generador de la cicloide i per l'acceleració de la gravetat. Aquest és independent del punt de la cicloide on la bola comença a moure's. $\square$

El pèndol isocrònic: longitud Les coordenades de la cicloide són $\alpha(\theta) = (r(\theta - sin(\theta)), r(cos(\theta) - 1))$. Les de la seva evoluta, com hem vist, són $\beta(\theta) = (r(\theta + sin(\theta)), r(-1 + cos(\theta))$.

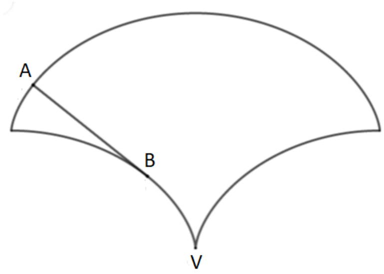


Figura 31: Representació gràfica

La longitud del segment de recta tangent és:

$$AB = \sqrt{[(rsin(\theta) + r\theta) - (r\theta - rsin(\theta)]^2 + [(-rcos(\theta) + r) - (rcos(\theta) - r)]^2} =$$
$$\sqrt{(2rsin(\theta))^2 + (2r - 2rcos(\theta)^2} = \sqrt{4r^2sin^2(\theta) + 4r^2cos^2(\theta) - 8r^2cos(\theta) + 4r^2} =$$
$$\sqrt{8r^2 - 8r^2cos(\theta)} = \sqrt{8r^2(1 - cos(\theta))} = \sqrt{16r^2\frac{1 - cos(\theta)}{2}} = 4rsin(\frac{\theta}{2})$$

Per altra banda, es calcula la longitud de l'arc $\widehat{BV}$:

$$\frac{dx_\beta}{d\theta} = r + rcos(\theta) \qquad (\frac{dx_\beta}{d\theta})^2 = r^2 + 2r^2cos(\theta)$$
$$\frac{dy_\beta}{d\theta} = rsin(\theta) \qquad (\frac{dy_\beta}{d\theta})^2 = r^2sin^2(\theta)$$

$$L(\beta_{BV}) = \int_\theta^\pi \sqrt{r^2 + 2r^2cos(\theta) + r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta)}d\theta = \int_\theta^\pi \sqrt{2r^2(1 + cos(\theta))}d\theta =$$
$$= \int_\theta^\pi \sqrt{4r^2\frac{1 + cos(\theta)}{2}}d\theta = 2r\int_\theta^\pi cos(\frac{\theta}{2})d\theta = 4r[sin(\frac{\theta}{2})]_\theta^\pi = 4r - 4rsin(\frac{\theta}{2})$$

Se sumen els dos resultats i s'obté:

$$AB + \widehat{BV} = 4rsin(\frac{\theta}{2}) + 4r - 4rsin(\frac{\theta}{2}) = 4r$$

Aquest resultat permet concloure, doncs, que la trajectòria d'un cordill de longitud $4r$ és una cicloide.

Amb eines matemàtiques actuals

Realitzem el càlcul adaptant el raonament de Bernoulli amb eines actuals [31]. Considerem un raig de llum que viatja del punt A al punt P amb una velocitat v_1 i després del punt P al punt B amb una velocitat v_2. Entre A i B hi ha un canvi de medi. Sigui a la coordenada vertical del primer medi, i sigui b la del segon. El desplaa̧ment horitzontal és c. Sabem que el temps és distància entre velocitat. Definim la següent funció:

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

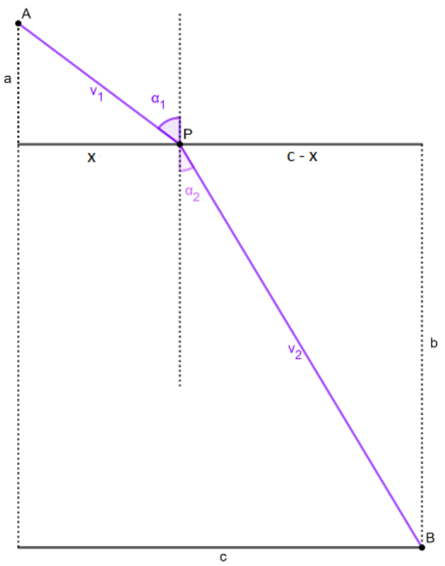


Figura 32: Un raig de llum que canvia de medi

Procedim a derivar la funció donada:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}\right) =$$

$$= \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

El nostre objectiu és minimitzar el temps de descens. Igualem doncs la funció derivada a zero: $\frac{dT}{dx} = 0$

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \tag{4.1}$$

Alhora, notem que

$$sin(\alpha_1) = \frac{d}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$$

$$sin(\alpha_2) = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Substituint aquestes dues equacions a (4.1), s'obté

$$\frac{sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{sin(\alpha_2)}{v_2}$$

Aquesta darrera equació és coneguda com la *Llei de Refracció de Snell* i demostra el *Principi de Mínima Acció de Fermat.*

Definició 4.17. El principi de mínima acció de Fermat afirma que la trajectòria que relitza un raig de llum entre dos punts és aquella en la que emplea un temps mínim en recórrer-la.

Definició 4.18. Si una ona incideix sobre una superfície que separa dos medis diferents, a més de reflectir una part, la resta penetra en el segon medi. En genereal, la velocitat de l'ona en aquest segon medi és diferent que en el primer, i com a conseqüència l'ona canviarà de direcció. Aquest fenomen s'anomena refracció. La llei que regeix aquest fenomen s'anomena llei de Snell i s'enuncia de la següent manera:

- El raig incident, el raig refractat i la normal estan els tres en un mateix pla.
- Siguin v_i i v_r són les velocitats en el primer i segon medi, i siguin α_i i α_r els angles de reflexió i de refracció (angles respecte la normal), aleshores:
  $\frac{sin\alpha_i}{sin\alpha_r} = \frac{v_i}{v_r}$

Si dividim el raig de llum en n substrats, obtenim:

$$\frac{sin(\alpha_i)}{v_i} \qquad i \in 1, ..., n$$

A mesura que dividim els substrats en seccions cada vegada menors, el camí obtingut és una corba i la velocitat decreix consntantment tal que

$$\frac{sin\alpha}{v} = K \qquad K \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

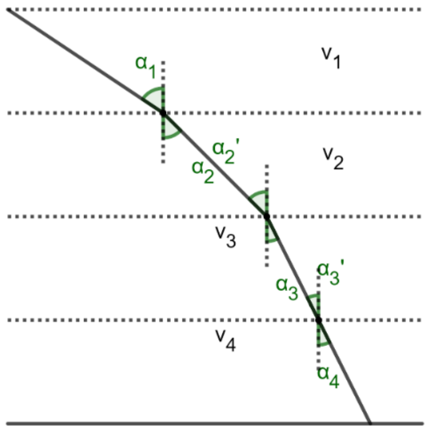


Figura 33: Representació gràfica

Tornem al problema de la braquistòcrona. Suposem que la partícula es desplaça de A a B amb el menor temps possible. Si assumim que no hi ha fricció, podem aplicar el principi de conservació de l'energia mecànica i obtenim que $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$, on la part esquerra és l'energia potencial de la partícula al punt A i la dreta és l'energia cinètica de la partícula en B. Si aïllem la velocitat, obtenim:

$v = \sqrt{2gy}$

Com que α i β de la figura 34 són angles complementaris, $sin(\alpha) = cos(\beta) = \frac{1}{sec(\beta)}$.

Sabent que $sec^2(\alpha) = 1 + tan^2(\alpha)$ s'obté $\frac{1}{sec(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + tan(\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$

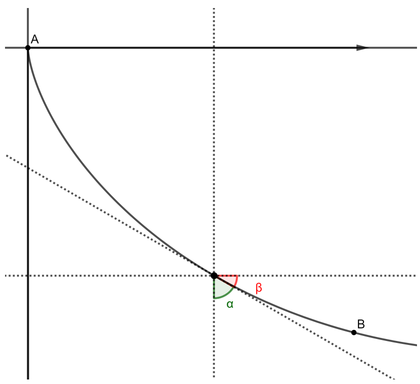


Figura 34: Representació gràfica

Si substituïm aquest resultat i l'expressió de la velocitat a (4.2), obtenim

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = k \qquad \sqrt{2g}\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{k}$$

$$\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{k\sqrt{2g}} \qquad y[1+(y')^2] = \frac{1}{2gc^2}$$

Notem que l'expressió de la dreta és constant. Tenim doncs que l'equació diferencial de la braquistòcrona és:

$$y[1+(y')^2] = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Es procedeix a resoldre l'equació diferencial de la braquistòcrona:

$$y[1+(\frac{dy}{dx})^2] = C \qquad 1+(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{C}{y} \qquad (\frac{dy}{dx})^2 = \frac{C}{y} - 1$$

$$(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{C-y}{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}} \qquad dx = \sqrt{\frac{y}{C-y}}dy$$

Introduïm una nova variable:

$$\frac{y}{C-y} = tan(\phi)^2 \tag{4.3}$$

Operant:

$$y = (C-y)\tan(\phi)^2 \qquad y = Ctan(\phi)^2 - ytan(\phi)^2$$

$$y(1+tan(\phi)^2) = Ctan(\phi)^2 \qquad ysec(\phi)^2 = Ctan(\phi)^2 \qquad y = Csin(\phi)^2$$

Si es deriva respecte ϕ s'obté

$$dy = 2Csin(\phi)cos(\phi)d(\phi) \tag{4.4}$$

Substituint (4.3) i (4.4) a l'expressió inicial $dx = \sqrt{\frac{y}{C-y}}dy$, s'obté

$$dx = (tan(\phi))(2Csin(\phi)cos(\phi)d\phi) \qquad dx = 2Csin(\phi)^2 d\phi$$

(Ja que $tan(\phi)cos(\phi) = sin(\phi)$). S'integra a ambdós costats i s'usa que $sin(\phi)^2 = \frac{1-cos2\phi}{2}$:

$$\int dx = \int 2Csin(\phi)^2 d\phi \qquad x = 2C\int \frac{1-cos2\phi}{2}d\phi \qquad x = C\int d\phi - C\int cos2\phi d\phi$$

$$x = C\phi - \frac{1}{2}Csin2\phi + c_1 \qquad x = \frac{C}{2}(2\phi - sin2\phi) + c_1$$

Amb la condició inicial (0,0) per a (4.3) es té $\phi = 0$. Per tant, c_1 és 0 i

$$x = \frac{C}{2}(2\phi - sin2\phi)$$

$$y = Csin(\phi)^2 \qquad y = C(\frac{1-cos2\phi}{2}) \qquad y = \frac{C}{2}(1-cos2\phi)$$

Si $a = \frac{C}{2}$ i $\theta = 2\phi$, les equacions passen a ser

$$x = a(\theta - sin\theta) \qquad y = a(1-cos\theta)$$

que són les equacions paramètriques de la cicloide.

El càlcul de variacions

Definicions prèvies

Els funcionals són un tipus determinat de funcions els valors dels quals es determinen a partir dels valors d'altres funcions, són funcions on la variable independent és una funció. [32]

Definició 4.19. Anomenem M a una certa classe de funcions (i.e $M = C^r([0,1], R^n)$). Definim una funció J sobre M a valors reals:
$J : M \to R$
$y \to J(y)$
Aquesta funció J s'anomena funcional.

Definició 4.20. El funcional J és diferenciable a y_0 si $J(y_0 + \delta y) = J(y_0) + L(y_0, \delta y) + R(y_0, \delta y)$.
Es té que $L(y_0, \delta y)$ és un funcional lineal respecte δy i $R(y_0, \delta y) = O((\delta y)^2)$. $(DJ)_y$ s'anomena variació o derivada del funcional J a y.

El càlcul de variacions és una de les branques amb les quals es treballa amb funcionals. L'objectiu d'aquest és cercar les funcions per les quals una determinada magnitud és màxima o mínima. EL problema de la braquistòcrona és un exemple clàssic de problema de càlcul de variacions ja que cal minimitzar el temps de la funció que determina el moviment de caiguda de la partícula.[33] En aquest apartat es prescindeixen de certes demostracions.

Teorema 9. Condició necessària d'extrem d'un funcional.
Si J és un funcional derivable definit a M i pren el seu valor extrem a la funció y de l'interior de M, aleshores $DJ(y) = 0$.

Sigui $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Definim l'acció associada a la funció F a través del funcional: $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y, \dot{y}, x)dx$. El nostre objectiu és trobar una funció diferenciable que ens doni un extrem d'aquesta integral.

Teorema 10. L'acció associada a F és diferenciable i la seva derivada a y val

$$(DJ)_y(\delta) = \int_{x_0}^{x_1} [\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}]\delta dx + (\frac{\partial F}{\partial \dot{y}})\delta\Big|_{x_0}^{x_1}$$

Lemma 11. Si $f(x)$ és contínua en $[x_0, x_1]$ i $\int_{x_0}^{x_1} f(x)h(x)dx = 0$ per qualsevol funció contínua real $h(x)$ que verifica $h(x_0) = h(x_1) = 0$, aleshores $f(x) = 0$ per a $x \in [x_0, x_1]$.

Definició 4.21. Sigui y una corba tal que $(DJ)_y(\delta) = 0$ per a tota corba δ. Aquesta corba y s'anomena extremal.

Teorema 12. Una condició necessària i suficient perquè una corba y sigui extremal de J associada a F és que la corba verifiqui

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y}) = 0$$

Definició 4.22. Les equacions $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y}) = 0$ s'anomenen equacions d'Euler-Lagrange. Són n equacions diferencials de segon ordre. Els extremals són les funcions que compleixen les equacions d'Euler.

Observació. Un cas concret de les equacions d'Euler-Lagrange es dona quan F és independent de x. En aquest cas, multipliquem l'equació per $\dot{y}$:

$$0 = [\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}]\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y}$$

Si derivem F respecte x, obtenim:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\ddot{y} \qquad \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\ddot{y} = \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}$$

Notem que $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Si substituïm aquesta expressió a l'anterior, resulta:

$$0 = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\ddot{y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y} = \frac{d}{dx}(F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y}) \to F - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{y} = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Aquesta expressió s'anomena identitat de Beltrami.

Cas concret: la braquistòcrona

Sigui s la longitud d'arc de corba que uneix A amb P. En el punt P, la velocitat de la partícula vindrà determinada per $v = ds/dt$, on $s(t)$ és la posició. Obtenim doncs $dt = ds/v$. [34]

El temps que la partícula tarda en desplaçar-se d'A a P ve donat per la següent integral:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v}$$

S'escull un sistema de coordenades amb l'origen al punt A i l'eix d'oordenades orientat negativament. Definim l'energia potencial i cinètica:

$$V(y) = -mgy \qquad T(y) = \frac{1}{2}mv^2$$

Volem expressar v i ds en funció de x i de y(x). Suposem que la partícula parteix del repòs. Com que no hi ha fricció, es compleix el principi de conservació de l'energia. L'energia cinètica al punt A és 0 ja que la partícula està en repòs. En el punt P, l'energia cinètica serà equivalent a la variació de l'energia potencial entre A i P:

$$T(y) = -V(y) \qquad \frac{mv^2}{2} = mgy \to v(y) = \sqrt{2gy}$$

Per altra banda, tenim els punts $P(x, y)$ i $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ de la corba y = y(x). Sigui Δs la variació de la longitud d'arc al passar d'un punt a un altre. Notem el següent:

$$\Delta s \cong 0 \to \Delta s \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$

Si $\Delta x \cong 0$ es té

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx$$

Per tant, el temps que la partícula tarda d'anar de A fins a B val

$$J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+\dot{y}}}{2gy}dx \qquad on \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

J és un funcional de y. Es vol trobar el mínim d'aquest funcional respecte les possibles funcions y: s'obtindran les equacions de la braquistòcrona com a extremal d'aquest funcional.

És un cas concret de les equacions d'Euler-Lagrange, on la funció $F(y,\dot{y},x) = \frac{\sqrt{1+\dot{y}}}{\sqrt{2gy}}$ és independent del paràmetre x, i per tant $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ (Identitat de Beltrami: $F - \dot{y}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = C$). En aquest cas, es té:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

Se substitueix aquesta expressió a la identitat de Beltrami:

$$C = \frac{\sqrt{1+\dot{y}}}{\sqrt{2gy}} - \frac{\dot{y}}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+\dot{y}^2}} \qquad C\sqrt{2g} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

Elevant aquesta expressió al quadrat, s'obté:

$$2gC^2 = \frac{1}{y(1+\dot{y}^2)} \qquad y(1+\dot{y}^2) = \frac{1}{2gC^2}$$

Si denotem $k = \frac{1}{2gC^2}$ es té:

$$k = y(1+\dot{y}^2) \qquad k = y(1+(\frac{dy}{dx})^2) \qquad \frac{k}{y} - 1 = (\frac{dy}{dx})^2$$

$$\sqrt{\frac{k-y}{y}} = \frac{dy}{dx} \qquad dx = \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy \qquad x = \int \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy$$

Fent el canvi de variable $y = \frac{k}{2}(1-cos\theta) = ksin^2\frac{\theta}{2}$, s'obté:

$$x = \int \sqrt{\frac{sin^2\frac{\theta}{2}}{1-sin^2\frac{\theta}{2}}}ksin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}d\theta = k\int sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{k}{2}(\theta - sin\theta) + B$$

Sigui $\theta = 0$ en $y = 0$ on Les coordenades són tals que $x_a = y_a = 0$, per tant $B = 0$. Determinem k a través el punt B. S'obté com a solució les equacions paramètriques de la cicloide:

$$x = \frac{k}{2}(\theta - sin\theta) \qquad y = \frac{k}{2}(1-cos\theta)$$

Hem resolt, doncs, el problema de la braquistòcrona usant el càlcul de variacions.

4.2.5 Corbes relacionades amb la cicloide

La cicloide és la corba descrita per un punt fix d'una circumferència (circumferència generatiu) quan aquesta gira sobre una línia recta. (recta directriu).

Trocoides S'ha estudiat el cas particular on el punt fix que genera una corba pertany a la circumferència generatriu. De manera natural es pot plantejar quines corbes descriuen els punts que són exteriors i/o interiors a la circumferència generatriu. De manera general, es fa la següent classificació:

Siguin les equacions generals

$$\begin{cases} x(\theta) = r\theta - Bsin(\theta) \\ y(\theta) = r - Bcos(\theta) \end{cases}$$

Aleshores, es té:

- La cicloide escurçada si $B < r$
- La cicloide comú si $B = r$
- La cicloide allargada si $B > r$

Tots aquests tipus de corbes s'anomenen trocoides i la cicloide n'és un cas particular.

Epicicloides i hipocicloides [18] Una altra pregunta natural que es pot plantejar és quines corbes descriuen punts fixos en circumferències que roden en altres corbes que no siguin una recta.
Una epicicloide és la corba descrita per un punt fix a una circumferència que gira per l'exterior d'una circumferència. De la mateixa manera, una hipocicloide és la corba descrita per un punt fix a una circumferència que gira a l'interior d'aquesta.En funció de la relació entre els radis de la circumferència, es produeixen diferents tipus de corbes. Adjuntem a continuació la imatge del mòdul de les epicicloides i les hipocicloides del MMACA amb la descripció de l'apartat de la web de la sala Pere Puig Adam, sala de geometria.

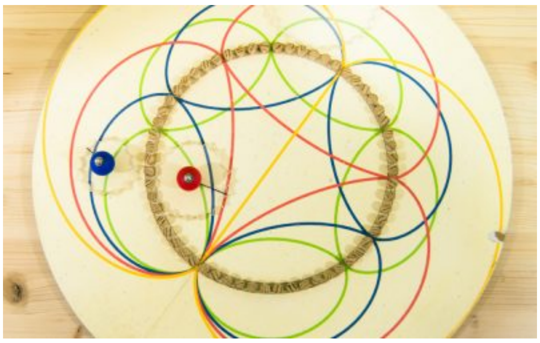


Figura 35: Tauler amb un engranatge circular fix i un conjunt de peces circulars dentades. Si es fan rodar per l'interior, obtenim diverses hipocicloides. Si es fan rodar per l'exterior, obtenim les epicicloides

4.3 Reflexió i reconeixement

En aquesta secció es presenta el treball desenvolupat coordinadament amb el MMACA al llarg d'aquests mesos i també s'exposa el guió a seguir per possibles futures col·laboracions.

Per començar, convé recalcar que durant el mes de març i abril es va realitzar un primer esborrany de fitxa. Tot seguit, durant el mes de maig, es van fer un seguit de trobades amb la Pura Fornals, el Guido Ramellini, el Manel Udina i el Josep Rey, que són membres del MMACA. En aquestes trobades es van compartir indicacions i suggeriments sobre la fitxa. Paral·lelament, des del MMACA es van oferir recursos bibliogràfics per treballar algunes de les demandes que tenien.

Les reunions es van realitzar de forma virtual el dia 8 de maig, 21 de maig i 4 de juny, i van ser espais de reflexió i d'aprenentatge molt profitosos per a l'adequada elaboració de la fitxa. Aquest procés també va permetre una avaluació formativa pròpia, atès que tots els comentaris rebuts per part de les persones del MMACA, així com també del tutor del treball, eren font de coneixement i de revisió del material que s'estava consolidant.

Una de les demandes explícites que es va formular va ser fer una introducció de caire divulgador i didàctic respecte la cicloide. És per aquest motiu que es va realitzar l'apartat 4.2.1, que d'entrada no es contemplava. Aquesta sol·licitud venia motivada per la visió que té el MMACA a nivell pedagògic a l'hora de relacionar-se amb les matemàtiques. Per aquest motiu, es va considerar oportú estandaritzar tant la fitxa de la cicloide com possibles altres fitxes seguint el fil conductor que es presenta a continuació:

1. Part intuitiva. Causes i motivació del naixement del mòdul.
2. Part comprensiva. Context històric i contextualització.
3. Part acadèmica. Formalització de l'estudi.

Finalment, convé subratllar també que es va acordar realitzar un apartat que mostrés la relació amb el mòdul treballat i altres presents al MMACA, com es fa a l'apartat 4.2.5.

Com a reflexió posterior al servei, es destaca que el mòdul de la cicloide és particularment interessant i rellevant des d'un punt de vista històric. Si bé és cert que hi ha altres mòduls que no disposen d'un recorregut temporal tan extens, s'entén que cada mòdul té potencialitats diverses i per això es considera que aquests punts orientatius poden estandarditzar -se en la seva totalitat.

Es proposa també oferir el material realitzat durant el Treball Final de Grau en un format editable al MMACA per tal de poder realitzar correcions, millores i/o ampliacions. Alhora, s'intentarà, dins les circumstàncies actuals, que la fitxa es faci pública abans d'haver realitzat la defensa oral del Treball Final de Grau.

Finalment, cal fer esment específic en la impossibilitat de dur a terme la signatura presencial del conveni de col·laboració per a la realització d'accions formatives inscrites en el programa d'Aprenentatge i Servei del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona i el programa individual d'Aprenentatge i Servei per als estudiants de graus i màsters de la Universitat de Barcelona. Aquesta situació és deguda a les circumstàncies d'excepcionalitat que s'han viscut els darrers mesos, tot i que ambdues institucions han omplert els respectius camps del conveni i estan d'acord en signar-lo tant aviat com sigui possible.

5 Incorporació d'assignatures al projecte *Compartir Idees*

A continuació s'exposen les consideracions realitzades sobre la utilitat de particpar al *Compartir Idees* per treballar específicament les següents competències generals del grau de Matemàtiques de la UB:[5]

- *Tenir i comprendre els coneixements bàsics de la matemàtica.* L'alumnat que realitza la xerrada requereix tenir assolits adequadament els continguts d'aquesta.
- *Ser capaç de tramsmetre informació, idees, problemes i solucions matemàtiques a un públic tant especialitzat com no especialitzat.* En aquest cas, entenem que estudiants d'ESO i batxillerat, que assistiran a la xerrada, són públic no especialitzat.
- *Capacitat per treballar en equip.* La xerrada s'organitza entre dues persones i cal una bona coordinació amb el professorat de l'Institut, així com també amb la persona que ho coordina des de la Facultat.
- *Utilitzar recursos bibliogràfics físics i virtuals.* Aquest punt fa referència a la necessitat de realitzar una bona recerca per dissenyar els continguts i el format de la xerrada.
- *Organitzar i administrar el temps i recursos disponibles.* Aquest projecte té una temporalitat concreta i cal que l'alumnat s'hi adapti adequadament.

Aquests darrers mesos s'ha establert un contacte periòdic amb l'equip de coordinació del projecte *Compartir Idees* i el respectiu professorat coordinador de les assignatures.[6] Finalment, les dues assignatures del grau de Matemàtiques que s'incorporaran el proper curs al *Compartir Idees* són Grafs, assignatura obligatòria de segon curs, i Didàctica, assignatura optativa de quart curs.

Pel que fa a Grafs, el títol de la xerrada que es presentarà és *"Descobreix aplicacions de la teoria de grafs"*. La proposta de text al pla docent d'aquesta assignatura on es fa palesa aquesta incorporació és el següent:

"En substitució de la darrera tasca de programació (10 punts) l'alumnat podrà realitzar una activitat d'Aprenentatge Servei (ApS). Aquesta activitat consisteix a preparar una xerrada per alumnes de batxillerat, amb el compromís d'impartir-la en el grup classe que s'assigni en un futur. La temàtica de la xerrada s'acordarà amb al professorat de l'assignatura que revisarà i avaluarà, sobre 10 punts, el treball realitzat."

En relació a Didàctica, el plantejament d'incorporació al pla docent és el següent:

"[...] Alternativament s'oferirà la possibilitat de canviar les tasques del NP3 per la preparació d'una xerrada en grups de 2 persones dintre del programa d'Aprenentatge Servei *Compartir idees*, amb el compromís de dur-la a terme en un centre de Secundària de Barcelona en el segon semestre del curs. El títols proposats per al curs 2020/2021 són: *"Probabilitats sorprenents"*, *"Geometria de revolució"* i *"Tallant cons"*."

Convé ressaltar que degut a la situació de pandèmia actual, el projecte s'ha aturat de cara el primer semestre del curs 2020 - 2021. Durant el mes de setembre del 2020 es té programada una reunió amb les persones responsables de l'ApS de les Facultats per veure com s'adapta el projecte en funció de les indicacions donades i la modalitat de docència, tant a l'educació secundària com a l'educació superior.

[5] https://mat.ub.edu/graumatematiques/#competencies

[6] Correu estàndard enviat al professorat a l'annex 3. Cas concret de *Grafs*.

6 Contactes amb entitats socials

La Taula d'entitats del Tercer Sector Social de Catalunya és una institució que agrupa 33 federacions i organitzacions del Tercer Sector Social de Catalunya [7]. En primer lloc, a través del seu mapa interactiu es va fer un filtratge de persones ateses, com ara gent gran, infants i joves, i àmbits d'intervenció principal, com ara formació i educació formal. Tot seguit, es va contactar amb la llista d'entitats resultants per presentar la proposta de col·laboració.[8]

Una de les entitats que va mostrar interès en la proposta va ser la Federació Catalana de Voluntariat Social. Es va establir el vincle amb la Berta Barquer, tècnica de la Promoció Comunitària del Voluntariat, amb la qual es van realitzar dues reunions virtuals el 24 d'abril i el 14 de maig. A la primera reunió es van plantejar possibles entitats que formessin part de la Federació i que els pogués interessar la proposta. A la segona reunió es van concretar algunes entitats relacionades amb l'educació matemàtica, com també es van fer reflexions interessants sobre les diferències entre l'ApS i el voluntariat.

A través de la Berta Varquer es va contactar amb la Fundació Catalunya La Pedrera. Amb la Responsable del Voluntariat Social, Isabel Román, es van realitzar dues trucades, el dia 27 de maig i 11 de juny. En aquestes trucades la Isabel Román ens va presentar el Programa d'Acompanyament Educatiu (PAE) que desenvolupen,[9] així com també va compartir les necessitats identificades en relació amb les matemàtiques:

- Elaboració de materials de i/o guies didàctiques matemàtiques per a les educadores que fan el reforç escolar.
- Elaboració de materials didàctics pels quals, a través del joc, puguin aproximar les matemàtiques als infants i joves.

Tot i així, de cara el curs vinent hi haurà un replantejament del PAE a causa de l'adaptació de la docència després de la crisi del coronavirus. Es formula la possibilitat de realitzar un Treball Final de Grau en clau ApS de l'àmbit de didàctica que respongui a aquestes necessitats sempre que es tinguin en compte els objectius d'aprenentatge i les competències que cal desenvolupar en relació amb el Treball Final de Grau. Comentar, al respecte, que es resta a l'espera de reestablir el contacte el curs 2020 - 2021.

Una altra Federació que es va interessar per la proposta va ser FATEC - Federació d'Associacions de Gent gran de Catalunya[10]. Es van fer dues reunions el dia 26 de maig i 12 de juny amb el Josep Carner, President de la Federació, i el Ramon Tubella, Vicepresident. Aquestes reunions van servir per explorar possibilitats de col·laboració, d'entre les quals va sorgir la idea de fer una aplicació mòbil per a gent gran que permetés mantenir activa l'activitat cerebral d'aquest col·lectiu. Conseqüentment, es va contactar amb el Dr. Puertas i la Dra. Anna Puig, del grau d'Enginyeria Informàtica, i es va fer una trobada el dia 2 de juny on es va exposar la proposta. A la darrera reunió amb els responsables de FATEC es va acordar que a finals del primer trimestre del curs vinent es tornaria a parlar de la proposta. Aquests propers mesos serviran a FATEC per veure com es readapta la seva tasca, i més en un col·lectiu especialment vulnerable pel que fa al coronavirus com és la gent gran. També faran un anàlisi sobre l'interès que pot tenir aquesta aplicació mòbil al conjunt de Casals de Gent Gran amb els quals treballen.

[7] http://www.tercersector.cat/qui-som/presentacio

[8] Correu estàndard enviat a les entitats a l'annex 4. Cas concret de FATEC.

[9] https://www.fundaciocatalunya-lapedrera.com/ca/programa-dacompanyament-educatiu

[10] https://www.fatec.cat/

7 Conclusions

A tall de recapitulació, es procedeix a valorar qualitativament el grau d'assoliment dels objectius presentats a l'inici d'aquest treball.

Es considera que a través de les fonts bibliogràfiques consultades i les trobades amb persones expertes s'ha pogut fer una aproximació teòrica i pràctica a l'Aprenetatge i Servei. L'apropament conceptual ens ha servit per ubicar-nos constantment al llarg del treball. De la mateixa manera, la coneixença d'experiències realitzades ens ha permès promoure projectes coherents i en consonància amb iniciatives que ja s'estaven duent a terme i a la vegada formular noves propostes.

Per una banda, s'ha assolit l'objectiu de participar des del grau de Matemàtiques a projectes ja existents, ja que dues assignatures de cursos diferents s'incorporen el curs vinent al *Compartir idees*, un projecte ApS a nivell gobal de la Universitat de Barcelona. Per l'altra, es valora molt positivament el fet d'haver obert camins amb entitats socials que engloben diferents agents i necessitats socials. Tenint en compte la dificultat inicial que ens plantejàvem, considerem que hem establert ponts on hi ha un potencial recorregut a explorar.

Finalment, considerem que la prova pilot amb el MMACA ha estat certament exitosa. A través de la fitxa de la cicloide s'ha cobert una necessitat concreta (servei) i a la vegada a nivell personal m'ha permès consolidar el meu coneixement matemàtic (aprenentatge). És important destacar que no només hem après què era l'Aprenentatge i Servei a través de llegir i escoltar, sinó que el fet d'efectuar-ne una prova ha comportat un aprenentatge significatiu especialment valuós d'aquesta metodologia educativa.

En síntesi, esperem que a llarg termini l'Aprenentatge i Servei pugui ser una metodologia consolidada al grau de Matemàtiques. S'avançarà en l'objectiu d'ascendir a un esglaó superior de l'aprenentatge i servei a la universitat si el considerem alhora una filosofia, una metodologia i un programa organitzatiu. (Puig, 2012, pg 9). L'ApS no només és una metodologia innovadora a l'hora de trasmetre i produir coneixement, sinó que també és una filosofia perquè posa la recerca i la formació al servei de la comunitat, i, a la vegada, és un programa organitzatiu ja que requereix d'un contacte directe i constant entre la universitat i la comunitat per cooperar en la resolució problemes reals.

En definitiva, a banda de ser una excel·lent oportunitat per donar encara més sentit a la formació de l'alumnat de grau, al llarg d'aquest treball hem comprovat que l'Aprenentatge i Servei és una destacada eina per introduir el compromís cívic en els estudis superiors. Cal tornar a recordar la importància de posar en valor l'exercici de responsabilitat social que té la Universitat en relació amb la comunitat.

Seria de bon grat que a curt termini hi hagués alumnat que realitzés Treballs Final de Grau en clau ApS amb el MMACA, així com participés des de Grafs i Didàctica amb el *Compartir Idees*. Alhora, a mitjà termini seria també molt satisfactori que altres assignatures s'animessin a participar al *Compartir Idees*, així com que els primers vincles amb entitats socials establerts en aquest treball s'anessin consolidant i que en última instància n'apareguessin de nous.

En darrer terme, voldria compartir que a nivell personal he gaudit sincerament el procés de realització d'aquest treball. El fet d'haver articulat la conclusió del grau amb un enfocament vital que tinc clar, com és la importància de la comunitat i el compromís amb aquesta, ha estat una experiència veritablement engrescadora i rellevant.

Referències

[1] Associació Centre Promotor d'Aprenentatge Servei. *Què és l'ApS? Definició.*[en línia]. 2019. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Disponible a https://aprenentatgeservei.cat/que-es-laps/#definicio

[2] Martínez, Miquel. Aprendizaje Servicio y construcción de ciudadania activa en la universidad: la dimensión social y cívica de los aprendizajes académicos. A: Martínez, Miquel. *Aprendizaje Servicio y responsabilidad social de las universidades.* Barcelona: Octaedro/ICE-UB. 2008, pg 11-26. ISBN 978-84-8063-969-9

[3] Xarxa d'Aprenentatge Servei de les Universitats Catalanes. (2019). *Fer aprenentatge servei a la universitat.* [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de http://www.acup.cat/sites/default/files/2019-05/GUIA%200_Fer%20aprenentatge%20servei%20a%20la%20universitat_DEF.pdf

[4] Escofet, A; Freixa, M; Puig, J.M. Aprenentatge servei: una metodologia per a la universitat. A: Puig, Josep M (coord.). *Compromís cívic i aprenentatge a la universitat.* Barcelona: Graó. 2012, p 11-20. ISBN 978-84-9980-455-2

[5] Crisman, K-D. (21 de juliol de 2014). Service-Learning and Making a Difference [Missatge en un blog]. Recuperat de http://maamathedmatters.blogspot.com/2014/07/service-learning-and-making-difference.html

[6] The Mathematical Association of America. *Mathematics in service to the community: Concepts and Models for Service-Learning in the Mathematical Sciences.* Hadlock, Charles R. Washington: Mathematical Association of America, 2005. MMA Notes 66. ISBN 0-88385-176-8

[7] Grup ApS(UB) (2016). *Compartir ideas, la universidad va al instituto. Análisis de la primera edición de un proyecto de aprendizaje servicio transversal a la Universidad de Barcelona.* [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Recuperat de http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/99182/1/Compartiridees_20152016_Memoria.pdf

[8] Associació per promoure i crear un Museu de Matemàtiques a Catalunya (MMACA). *Qui som? Què fem?* Dins de *L'associació MMACA.* [En línia] 2020. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Disponible a https://mmaca.cat/lassociacio-mmaca/

[9] Redacció de El Periódico. (6 febrer 2020). El Museu de Matemàtiques de Cornellà registra su récord de visitantes anuales. *El Periódico.* Recuperat de https://bit.ly/2NiXYdi

[10] Castelnuovo, Emma; Barra, Mario. La cicloide. Castelnuovo, Emma, Barra, Mario. *Matematica nella realtà.* Turín: Bollati Boringhieri, 1976, pg 231-236. ISBN 88-339-5650-4

[11] Il giardino di Archimede. *Pendolo cicloidale* [en línia] 2020. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Disponible a https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/visita/pendolocicloidale.htm

[12] Martin, John (2010). The Helen of Geometry. *The College Mathematics Journal 41*(1), 17-28. doi: 10.4169/074683410X475083

[13] Whitman, E. A. (1943). Some Historical Notes on the Cycloid. *The American Mathematical Monthly 50*(5), 309-315. doi: 10.2307/2302830

[14] School of Mathematics and Statistics University of St Andrews. *Cycloid* [en línia] 2020. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Disponible a https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Cycloid/

[15] Reventós, A. (2018). Evolutes.*Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM* (43) 8-23. Recuperat de https://www.raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/102849

[16] Bruce, Ian. (2007). *Christiaan Huygens' Horologium Oscillatorium; Part Two B.* [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart2b.pdf

[17] Bruce, Ian. (2007). *Christiaan Huygens' Horologium Oscillatorium; Part III.* [Darrera consulta: 21 de juny de 2020].Recuperat de http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart3.pdf

[18] Rey, J., Udina, M. (2014) El Racó del mmaca: Epicicloides, hipocicloides i engranatges. *Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM.* (35) 131-137. Recuperat de https://www.raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/86954

[19] de Icaza Herrera, M. (1994). Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problema. *Revista Mexicana de Fśica. 40*(3), 459-475. Recuperat de https://rmf.smf.mx/pdf/rmf/40/3/40_3_459.pdf.

[20] Erlichson, H. (1998). Galileo's Work on Swiftest Descent from a Circle and How He Almost Proved the Circle Itself Was the Minimum Time Path. *The American Mathematical Monthly*, 105(4), 338-347. doi:10.2307/2589709

[21] Babb, J., Currie, J. (2008). The Brachistochrone Problem: Mathematics for a Broad Audience via a Large Context Problem.*The Mathematics Enthusiast. 5*(2) 169-184.[Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1099&context=tme

[22] Departamento de Física Aplicada, Universidad de Granada. (2020) *Galilei, Galileo. Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze.* Recuperat de https://www.ugr.es/~physicaadlitteram/Galileo/N0003354_PDF_1_330.pdf

[23] O'Connor, J J., Robertson, E F. *The Brachistochrone Problem*[en línia].2002.[Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Disponible a https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone/

[24] Weinstock, R. (1994). Isaac Newton: Credit where Credit Won't Do. *The College Mathematics Journal*, 25(3), 179-192. doi:10.2307/2687646

[25] Apunts de l'assignatura *Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies* del curs 2019-2020 del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

[26] Ariotti, P. (1968). Galileo on the Isochrony of the Pendulum. *Isis*, 59(4), 414-426. doi: 10.1086/350426

[27] de Guzmán, M. Universidad Complutense de Madrid. *Ecuaciones y demostraciones de las propiedades de la cicloide.*[En línia] 1999.[Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Disponible a http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/geometriahoy/experimentosgeom/ecua.htm

[28] Lafuente, J. Apunts de l'assignatura *Geometría diferencial de curvas en el plano* del curs 1998 de la Universidad Complutense de Madrid.[Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Recuperat de http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Curvas%20y%20Superficies/cp.pdf

[29] Montesdeoca, Á. *Apuntes de geometría diferencial de curvas y superfícies* del curs 2004 de la Universidad de La Laguna. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020] Recuperat de https://amontes.webs.ull.es/apuntes/gth.pdf

[30] Vargas, R. *Geometria diferencial. Problemas resueltos* del curs 2010 de la Pontificia Universidad Católica de Chile [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de https://vargasmat.files.wordpress.com/2011/05/apuntes-de-geometria-diferencial1.pdf

[31] Macdonald, P. (2014). *The Brachistochrone Problem* [Diapositives]. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]Recuperat de https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEproj/sp14/PaigeMcDonald/FinalDraft.pdf

[32] Gómez, G. Apunts de l'assignatura *Modelització* del curs 2018-2019 del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

[33] Haro Delicado, M.J., Pérez Haro, M.J. (2012).El problema de la braquistócrona y otros problemas de la Física como introducción al cálculo de variaciones. *Suma+*, 70(43-63). Recuperat de https://revistasuma.es/IMG/pdf/70/043-063.pdf

[34] Porter, F.(2018).*Calculus of Variations*. [Darrera consulta: 21 de juny de 2020]. Recuperat de http://www.hep.caltech.edu/~fcp/math/variationalCalculus/variationalCalculus.pdf

8 Annexos

1. L'enquesta a l'alumnat

L'enquesta conté 14 preguntes, agrupades en diferents seccions. A la part introductòria, es fa un breu resum del projecte i del concepte de l'ApS. Es demana el curs que es realitza i també si s'ha participat en activitats organitzades per la Facultat amb reconeixement de crèdits. Es considera que el perfil d'alumnat que participa a aquest tipus d'activitats pot ser que mostri un major interès per propostes com l'ApS, i és per aquest motiu que es va posar aquesta pregunta.

Seguidament, s'explica el projecte *Compartir Idees*, es pregunta si l'alumnat hi participaria i es demana en quines assignatures es veia viable engegar el projecte.

Finalment, s'explica que la voluntat del TFG era obrir altres possibilitats i per això es demana a l'alumnat si participen en alguna entitat social i si veuen viable iniciar un projecte ApS amb aquestes. També es demana si es farien pràctiques curriculars o TFGs en clau ApS.

Les preguntes

L'aprenentatge servei (ApS) és una proposta docent i de recerca que integra el servei a la comunitat i l'aprenentatge acadèmic en un sol projecte. Aquest permet a l'alumnat formar-se tot treballant sobre necessitats reals de l'entorn, amb l'objectiu de millorar-lo. L'ApS és una bona metodologia per incorporar la responsabilitat social en els estudis superiors i exercir el compromís cívic de la Universitat.

Aquesta metodologia ja és present en diversos graus de la Universitat de Barcelona (UB), impulsada pel grup ApS UB, que treballa per estendre i fer difusió de lâApS a la UB. Des de la Facultat de Matemàtiques i InformÃ tica s'aposta per introduir aquesta metodologia al grau de Matemàtiques, i el present TFG pretén explorar quines possibilitats tenim des de la nostra Facultat.

Un dels elements essencials per realitzar un projecte en clau ApS és la motivació i la voluntat de l'alumnat en participar-hi. És per aquest motiu que considerem primordial realitzar una enquesta a tot l'alumnat del grau de Matemàtiques per fer una bona an`alisi de la realitat i saber quina és l'opinió de l'alumnat respecte aquesta proposta.

Agraïm sincerament la teva col·laboració responent aquesta enquesta. Només trigaràs uns minuts i ens permetrà tenir una visió objectiva de quina és la manera més efectiva i coherent d'implementar l'ApS a la nostra Facultat en base a les necessitats i voluntats de l'alumnat.

Introducció

1. Quin curs estàs realitzant?
    - 1r
    - 2n
    - 3r
    - 4t

2. Has participat en alguna de les activitats amb reconeixement de crèdits organitzada per la Facultat?
   - Sí
   - No
3. En cas afirmatiu, podries indicar-nos quina/es i en quin/s curs/os? També ens agradaria saber quin rol has assumit en aquesta/es.
   - Suport en automatrícula
   - Suport en jornada introductòria
   - Coordinació de la Install Party
   - Organització de la Install Party
   - Col·laboració en les Xerrades-Taller
   - Suport en treballs de recerca de secundària
   - Col·laboració en la Matefest - Infofest
   - Coordinació de la Matefest - Infofest
   - Organització de la Matefest - Infofest
   - Participació en la Matefest - Infofest
   - Suport en la Festa de la Ciència
   - Competicions Universitàries Matemàtiques
   - Participació en la Fira d'Empreses
4. Aquí pots escriure en quin/s curs/os hi has participat (per exemple 2017-2018, 2018-2019, 2019-2020)

Compartir Idees - La universitat va a l'institut Una de les possibles opcions per integrar l'ApS al grau de Matemàtiques és a través del Compartir Idees - La universitat va a l'institut. Es tracta d'un projecte ApS interdisciplinari promogut pel grup ApS UB, transversal i compartit entre diferents Facultats de la UB. Les estudiants preparen conferències-taller sobre temes d'interès general relacionats amb els estudis que estan cursant, i les imparteixen en instituts d'Educació Secundària de Barcelona. El format es basa en 20 minuts d'informacióì 30 minuts de taller i/o debat posterior.

La participació en aquest projecte, de caire opcional, requereix d'una tutoria amb el professorat responsable d'una assignatura del grau per elaborar la proposta de xerrada-taller, una reunió amb l'institut en qüestió, el disseny i l'efectuació de la xerrada-taller així com una reflexió posterior d'aquesta. L'avaluació es reflecteix en un percentatge de la nota final de l'assignatura.

1. Participaries al Compartir Idees - La universitat va a l'institut?
   - Sí
   - No
2. En quines assignatures del grau consideres que és més viable la col·laboració en aquest projecte?
3. Escriu qualsevol inquietud, comentari i/o suggeriment que tinguis respecte aquesta proposta.

Altres opcions També ens agradaria dur a terme projectes en clau ApS que no estiguessin explícitament relacionats en àmbits educatius, com seria el cas del Compartir Idees. Volem vincular-nos amb entitats socials i a través dels continguts que treballem al grau de Matemàtiques cobrir les seves necessitats.

1. Participaries en un projecte ApS d'aquest caire?
   - Sí
   - No
2. Si coneixes alguna entitat que consideres que compleix les característiques esmentades prèviament, sisplau fes-nos-la saber i explica'ns per què.
3. Participes en alguna entitat de caire social? (ONGs, lleure educatiu, col·lectius de barri, voluntariat...)
   - Sí
   - No
4. En cas afirmatiu, pots explicar-nos quina/es i la tasca que hi desenvolupes?
5. Creus que es podria engegar un projecte ApS amb el grau de Matemàtiques en aquesta/es entitat/s? De quina manera?
6. Més enllà de fer ApS a través dâassignatures, es pot fer en altres formats. Faries un TFG en clau ApS?
   - Sí
   - No
7. Faries unes pràctiques curriculars en clau ApS?
   - Sí
   - No
8. Escriu aquí qualsevol suggeriment, comentari de millora, opinió que tinguis.

Moltes gràcies! Moltes gràcies per haver dedicat aquest temps en respondre el qüestionari. La teva participació ens ajuda a seguir avançant amb aquest TFG.

2. El mòdul de la cicloide

Figura 36: El mòdul de la cicloide del MMACA

3. El contacte amb el professorat

Què és l'ApS?

L'aprenentatge servei és una proposta docent i de recerca que integra el servei a la comunitat i l'aprenentatge acadèmic en un sol projecte que permet a l'alumnat formar-se tot treballant sobre necessitats reals de l'entorn amb l'objectiu de millorar-lo. L'aprenentatge servei és una bona metodologia per incorporar la responsabilitat social en els estudis superiors i exercir el compromís cívic.

ApS UB

El grup ApS de la UB és un equip interdisciplinari de professorat de diferents facultats i àrees de coneixement que treballen per difondre i estendre l'ApS a la UB.

ApS a la Facultat de Matemàtiques de la UB

Des de la Facultat de Matemàtiques s'aposta per introduir aquesta metodologia al grau de Matemàtiques, i aquest TFG pretén explorar quines possibilitats tenim des de la nostra Facultat. Una proposta que ens sembla engrescadora i senzilla de tirar endavant és sumar-nos al següent projecte: *Compartir idees: La universitat va a lâinstitut.* És un projecte ApS interdisciplinari promogut pel grup ApS UB, transversal i compartit entre diferents Facultats de la UB. Els estudiants, tant de graus com de màsters, preparen conferències-taller sobre temes d'interès general relacionats amb els estudis que estan cursant, i les imparteixen en instituts d'Educació Secundària de Barcelona. El format es basa en 20 minuts d'informació i 30 minuts de taller i/o debat posterior, tot i que es pot adaptar de formada consensuada amb l'institut.

Les xerrades es realitzen en parella i en funció de la demanda dels instituts. Pel que fa a la temporització, els cicles de xerrades es realitzen tant al semestre de primavera com al semestre de tardor, i es poden presentar xerrades a la coordinació del Compartir Idees fins a finals de maig del 2020. A principis de curs els instituts escullen quines xerrades voldrien realitzar i un cop la demanda està gestionada, s'inicia la planificació de la xerrada. El reconeixement del projecte es materialitza a través de l'avaluació, ja que es considera que és una activitat formativa com qualsevol altra. Seria competència de la coordinació de l'assignatura planificar com s'hauria d'incloure la participació al Compartir Idees en l'avaluació d'aquesta. Tot i així, per altres experiències de Compartir Idees que ens han compartit des d'altres Facultats, es suggereix substituir una activitat formativa, com podria ser una entrega de laboratori, per l'avaluació al Compartir Idees, o bé agafar la nota màxima entre ambdues.

T'escrivim com a coordinador de l'assignatura de *Grafs* es perquè considerem que aquesta pot tenir un bon encaix en el projecte del Compartir Idees. Hem fet un anàlisi global dels continguts de l'assignatura i hem valorat que es podria organitzar una xerrada-taller sobre *El problema del viatjant/ El problema del carter / El Teorema dels Quatre Colors*, o bé alguna altra temàtica que es considerés oportuna. Hem realitzat una enquesta a l'alumnat del grau i *Grafs* ha sortit com una de les assignatures més adients per al Compartir Idees. A més, a nivell general la meitat de l'alumnat que ha respòs l'enquesta han marcat que sí que participarien al projecte Compartir Idees (en aquest cas sense especificar l'assignatura).

Considerem que impulsar l'adhesió al Compartir Idees és profitós per treballar específicament les següents competències generals del grau de Matemàtiques de la UB:

- Tenir i comprendre els coneixements bàsics de la matemàtica, ja que l'alumnat que realitza la xerrada requereix tenir assolits adequadament els continguts d'aquesta.

- Ser capaç de tramsmetre informació, idees, problemes i solucions matemàtiques a un públic tant especialitzat com no especialitzat. En aquest cas, entenem que estudiants d'ESO i batxillerat, que assistiran a la xerrada, són públic no especialitzat.
- Capacitat per treballar en eqiup, ja que la xerrada s'organitza entre dues persones i cal una bona coordinació amb el professorat de l'Institut, així com també amb la persona que ho coordina des de la Facultat.
- Utilitzar recursos bibliogràfics físics i virtuals. Caldrà fer una bona recerca per dissenyar els continguts i el format de la xerrada.
- Organitzar i administrar el temps i recursos disponibles. Aquest projecte té una temporalitat concreta i cal que l'alumnat sâhi adapti adequadament.

Per tots els motius exposats, et convidem a valorar la proposta presentada. Estem a la teva disposició per a qualsevol dubte o inquietud que et pugui sorgir.[11]

Atentament,

Gemma

[11]En el correu es van adjuntar enllaços d'interès del projecte *Compartir Idees* i de l'Aps UB, presents a les referències del treball.

4. El primer contacte amb les entitats

FATEC

Benvolgudes companyes de la Federació d'Associacions de Gent Gran de Catalunya,

Em dic Gemma Ramírez i sóc estudiant de matemàtiques a la Universitat de Barcelona. Aquest semestre realitzo el meu Treball Final de Grau, que consisteix en explorar quines possibilitats tenim des de la nostra Facultat per introduir la metodologia Aprenentatge i Servei al grau.

L'Aprenentatge Servei (ApS) és una proposta docent i de recerca que integra el servei a la comunitat i l'aprenentatge acadèmic en un sol projecte que permet a l'alumnat formar-se tot treballant sobre necessitats reals de l'entorn amb l'objectiu de millorar-lo. L'ApS és una bona metodologia per incorporar la responsabilitat social en els estudis superiors i exercir el compromís cívic.

Us enviem aquest correu després d'haver fet una recerca d'entitats a les quals els hi podria interessar engegar un projecte ApS amb la Facultat de Matemàtiques i Informàtica. Estem realitzant un primer contacte amb entitats per identificar necessitats que tinguin que es puguin cobrir des de la nostra disciplina i que tinguin interès en iniciar un projecte en clau ApS amb nosaltres.

Hem pensat en vosaltres ja que hem pensat que es podria vincular un acompanyament de divulgació matemàtica amb gent gran.

Entenem que degut a la situació actual de la crisi del coronavirus les prioritats són unes altres. Tot i així, us agrairíem que consideréssiu la proposta i que ens féssiu un retorn, tant si us encaixa com si no. En cas afirmatiu, agrairíem que ens féssiu arribar els contactes de les entitats identificades.

Resto a la vostra disposició per a qualsevol informació o aclariment.

Us expresso els meus sincers agraïments,

Gemma