Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

TEOREMA D'EXISTÈNCIA DE RIEMANN

Autor: Oriol Belmonte Alcalà

Director: Dr. Joan Carles Naranjo del Val
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2021

Abstract

The main objective of this project, is to enunciate and prove the Riemann's existence theorem from a topological point of view. For this, basic concepts of Riemann surfaces and of covering spaces are given. Finally, one of the many applications it has is presented, the classification of compact and connected Riemann surfaces of genus 2.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball, és enunciar i demostrar el teorema d'existència de Riemann des d'un punt de vista topològic. Per això, es donen unes nocions bàsiques sobre superfícies de Riemann, i d'espais recobridors per poder arribar a entendre'l. Finalment, es presenta una de les moltes aplicacions que té, la classificació de les superfícies de Riemann compactes i connexes de gènere 2.

2010 Mathematics Subject Classification. 14H55, 30F30, 32G15

Agraïments

Voldria agrair primerament al meu tutor, el Dr. Joan Carles Naranjo, haver-me proposat el treball, haver-me empentat a aprofundir i aprendre cada dia una mica més, les hores dedicades, i sobretot, el tracte personal. També voldria agrair a la Laura, els dibuixos d'aquest treball, i el seu suport incondicional. A la meva família, per brindar-me l'oportunitat d'estudiar aquest grau i en especial a la meva mare, per ajudar-me en la correcció final, i per últim, als meus amics, tant del grau com de fora, per fer d'aquests anys una etapa inoblidable.

Índex

1 Introducció **1**

2 Preliminars **3**

2.1 Superfície de Riemann 3

2.2 Exemples de superfícies de Riemann 5

2.3 Morfismes entre superfícies de Riemann 8

2.4 La fórmula de Riemann-Hurwitz 12

3 Acció de grups en superfícies de Riemann **15**

3.1 Acció de grups finits 15

3.2 La superfície de Riemann quocient 17

3.3 Teorema de Hurwitz sobre automorfismes 19

3.4 Accions de grups infinits 20

4 Espais recobridors i monodromia **21**

4.1 Espais recobridors 21

4.2 Elevació de camins 21

4.3 Recobridor universal 23

4.4 Monodromia d'un recobridor finit 25

5 Connexió de les corbes planes afins irreductibles **26**

6 El Teorema d'existència de Riemann **31**

6.1 Monodromia d'un morfisme holomorf 31

6.2 Recobridors a partir de la monodromia d'un morfisme 32

6.3 Morfismes holomorfs a partir de la monodromia 33

6.4 Teorema d'existència de Riemann 34

7 Classificació de les superfícies de Riemann compactes de gènere 2 **36**

7.1 Formes diferencials en superfícies de Riemann 36

7.2 Operadors amb formes diferencials 38

7.3 Conseqüències del Teorema de Riemann-Roch 39

7.4 Digressió als tors complexos 40

7.5 Estudi de les 6-tuples sobre $\mathbb{CP}^1$ 41

7.6 Construcció de l'espai $\mathcal{M}_2$ 42

1 Introducció

La noció de superfícies de Riemann donada per Riemann, és la culminació d'una sèrie d'investigacions fetes abans, per Cauchy entre d'altres, sobre la teoria de funcions en variable complexa. Dels conceptes i resultats de les superfícies de Riemann se'n deriven moltes direccions de recerca en les matemàtiques, com per exemple en camps de la geometria algebraica, la geometria de Riemann, la topologia algebraica...

El teorema d'existència de Riemann és un resultat que s'origina en l'estudi de les superfícies de Riemann i que té connexions entre la topologia, l'anàlisi complexa, la geometria algebraica i la teoria de nombres. Riemann hi arriba com a resultat de la seva consideració de funcions multivaluades en l'esfera de Riemann com a funcions ben definides en una superfície de Riemann.

El teorema ens diu que donat un conjunt finit $\mathcal{D} \subset \mathbb{CP}^1$, i donada una representació de la permutació del grup fonamental del complementari de $\mathcal{D}$, llavors hi ha una superfície de Riemann X i un morfisme holomorf $F : X \to \mathbb{CP}^1$ tal que fora de $\mathcal{D}$ és un espai recobridor amb la representació de la permutació com a monodromia.

Podem veure aquest teorema com una instrucció sobre com construir una superfície de Riemann associada a un grup fonamental i a una sèrie d'elements en ell, i a més a més, obtenir un morfisme holomorf de la superfície en $\mathbb{CP}^1$. Per tant, el que ens permet el teorema, és construir exemples de superfícies de Riemann que en principi no són obvis.

Tot i que la presentació clàssica del teorema, vist des d'un punt de vista topològic, és l'anterior, també es pot tractar en termes de recobridors ramificats per a superfícies de Riemann més generals que $\mathbb{CP}^1$.

Una conseqüència del teorema, és que en aplicar transformacions projectives sobre aquest conjunt finit de punts $\mathcal{D}$ en $\mathbb{CP}^1$, obtenim superfícies de Riemann isomorfes, i per tant, és normal plantejar-se si hi ha alguna forma de classificar-les. El cas dels recobriments dobles de $\mathbb{CP}^1$, anomenats superfícies de Riemann hiperel·líptiques, és especialment accessible, ja que com totes les superfícis de Riemann de gènere 2 són hiperel·líptiques, podem donar una idea intuïtiva de com construir l'espai que les classifica.

El projecte

La idea inicial d'aquest projecte, era trobar una confluència entre geometria, anàlisi i topologia, i les superfícies de Riemann era un tema que s'ajustava.

Aquesta memòria, està centrada principalment en l'estudi, des d'un punt de vista topològic, del teorema d'existència de Riemann, tot i que també es tracten eines fonamentals que ens són necessàries per fer-ho, com són les accions de grups en superfícies de Riemann i els espais recobridors.

Encara que aquest teorema té moltes aplicacions, aquesta memòria està centrada en entendre una mica millor les superfícies de Riemann hiperel·líptiques.

Al llarg del treball, molts dels temes tractats voregen tècniques de geometria algrebaica, però, tot i que queden una mica fora de l'abast d'aquesta memòria, s'han tingut en compte si han estat necessàries.

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està estructurada en sis seccions. En primer lloc, es dóna una noció bàsica sobre les superfícies Riemann des d'un punt de vista topològic, així com alguns exemples fonamentals d'aquestes, i es tracten els morfismes sobre superfícies de Riemann.

En la segona secció, es tracta la construcció de superfícies de Riemann a partir del quocient d'una superfície de Riemann per accions de grups, i es dóna un resultat important sobre la cota del cardinal del grup d'automorfismes d'una superfície de Riemann de gènere com a mínim dos.

La tercera secció, pretén introduir el concepte d'espais recobridors i el concepte de la monodromia d'un recobridor finit.

En la quarta secció, es dóna una prova sobre la connexió de les corbes planes afins irreductibles, tractades en la primera secció com un dels exemples fonamentals de superfícies de Riemann.

A continuació, en la cinquena secció, es presenta i es prova el teorema d'existència de Riemann, i també conceptes previs necessaris per fer-ho.

Per finalitzar, es tracta les superfícies de Riemann des d'un punt de vista diferencial per mostrar una de les possibles aplicacions d'aquest teorema, la classificació de les superfícies de Riemann connexes i compactes de gènere dos o hiperel·líptiques.

2 Preliminars

2.1 Superfície de Riemann

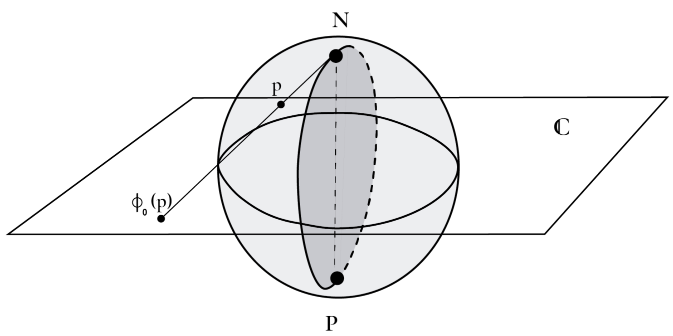
La idea bàsica d'una superfície de Riemann és que és un espai topològic que, localment, sembla un conjunt obert al pla complex i tal que les seves funcions de transició són holomorfes. A continuació formalitzarem aquesta idea.

Sigui X un espai topològic.

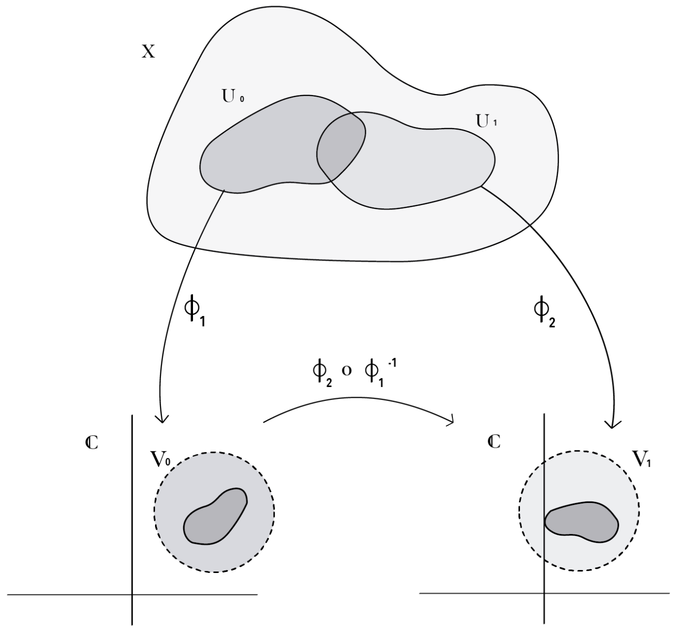
Definició 2.1. *Una carta complexa en X és un homeomorfisme $\phi : U \to V$ on $U \subset X$ i $V \subset \mathbb{C}$ són oberts.*

Pensem que una carta en X dóna una coordenada (local) complexa al seu domini.

Exemple 2.2. Sigui $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1) \in S^2$ i $U_0 = S^2 - \{N\}$. Llavors $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ definida per la projecció estereogràfica des del punt N és una carta complexa en S^2 , i $\phi_0(x, y, z) = \dfrac{x}{1 - z} + i\dfrac{y}{1 - z}$.



Definició 2.3. *Siguin $\phi_0 : U_0 \to V_0$ i $\phi_1 : U_1 \to V_1$ dues cartes complexes a X. Diem que ϕ_0 i ϕ_1 són compatibles si o bé $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ o bé $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_1) \to \phi_1(U_0 \cap U_0)$ és holomorfa.*



Exemple 2.4. Sigui ϕ_0 la carta de l'*Exemple 2.2*, $P = (0,0,-1) \in S^2$, $U_1 = S^2 - \{P\}$, i $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ la carta definida per la projecció estereogràfica des del punt P, on $\phi_0(x,y,z) = \dfrac{x}{1+z} + i\dfrac{y}{1+z}$. Llavors $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} = 1\backslash z$ és holomorfa, i per tant, ϕ_0 i ϕ_1 són compatibles.

Definició 2.5. *Un atles complex $\mathcal{A}$ en X és una col·lecció $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i\}$ de cartes complexes compatibles les quals el seu domini cobreix X, i.e., $X = \bigcup_i U_i$.*

Exemple 2.6. $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{C}\}$ per $i = 1,2$, on ϕ_0 i ϕ_1 són les cartes de l'*Exemple 2.4*, és un atles d'S^2.

Definició 2.7. *Dos atles complexos $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són equivalents si cada carta d'un és compatible amb cada carta de l'altre.*

Podem demostrar fàcilment que la relació anterior és d'equivalència, això ens permet classificar-los en classes.

Definició 2.8. *Una estructura complexa a X és un atles complex maximal en X, o equivalentment, una classe d'equivalència d'atles complexos a X.*

Definició 2.9. *Una superfície de Riemann és un parell $(X, \mathcal{A})$ on X és un espai topològic connex, Hausdorff i II-numerable, i $\mathcal{A}$ és un atles complex maximal (equivalentment una estructura complexa) en X.*

Exemple 2.10. L'extensió dels nombres complexos $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (compactificació d'Alexandroff del pla), pot ser identificada geomètricament amb l'esfera unitat. Notem que és trivialment compacta, connexa i Haussdorf. Dotant a l'esfera de l'estructura complexa proporcionada per l'atles de l'*Exemple 2.6* obtenim una superfície de Riemann, que s'anomena *Esfera de Riemann.*

2.2 Exemples de superfícies de Riemann

Tor complex: Suposem que w_1 i w_2 són nombres complexos linealment independents sobre $\mathbb{R}$. Definim $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{m_1w_1 + m_2w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$.

L és un subgrup discret de $\mathbb{C}$ generat per w_1 i w_2, i és isomorf a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Sigui $X = \mathbb{C}/L$ el grup quocient. Amb la projecció $\pi : \mathbb{C} \to X$ dotem a X de la topologia quocient, fent encara, que π sigui continu i X connex. L'espai quocient $X = \mathbb{C}/L$ s'anomena *tor complex*, i és fàcil veure que és un espai topològic compacte, connex i Hausdorff.

Si agafem un ϵ suficientment petit, trobem sempre un punt en l'intersecció entre qualsevol disc $D_{z_0} = D(z_0, \epsilon) \in \mathbb{C}$ i qualsevol classe d'equivalència. Notem que podem establir una correspondència bijectiva entre aquests discs i un obert a X, i per tant podem introduir coordenades locals holomorfes a X (via π) i per tant podem definir un atles. Llavors X és una superfície de Riemann compacta.

Corbes planes afins no-singulars:

Definició 2.11. *Una corba plana afí és el lloc geomètric dels zeros a $\mathbb{C}^2$ d'un polinomi $f(z, w)$. Un polinomi $f(z, w)$ és no-singular en un punt p si o bé $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, o bé $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. La corba plana afí X de punts d'f és no-singular a p si f és no-singular a p. Diem que la corba X és no-singular si és no-singular en tots els seus punts.*

Podem obtenir cartes complexes en una corba plana afí no-singular usant el Teorema de la Funció Implícita per veure que, localment, la corba és un graf, però primer veurem que el graf d'una funció holomorfa, és una superfície de Riemann.

Sigui $V \subset \mathbb{C}$ un subconjunt obert i connex del pla complex, i sigui g una funció holomorfa definida en tot V. Sigui $X = \{(z, g(z)) | z \in V\}$ el graf de g.

Definim:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X & \longrightarrow & V \\ & (z, g(z)) & \to & z \end{array}$$

la projecció sobre la primera component i dotem a X de la topologia induïda. Notem que π és un homeomorfisme, i per tant, una carta complexa en X tal que el seu domini cobreix X. Llavors tenim un atles complex en X i així X és una superfície de Riemann com volíem veure.

Sigui ara X una corba plana afí no-singular definida pel polinomi $f(z, w)$ i sigui $p = (z_0, w_0) \in X$. Si $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ trobem una funció g_p tal que en un entorn U de p, X és el graf $w = g_p(z)$. La projecció $\pi_z : U \to \mathbb{C}$ que envia (z, w) a z ens dóna una carta complexa en X. Si en canvi $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, podem fer la mateixa construcció per obtenir una carta complexa mitjançant la projecció π_w.

El domini d'aquestes cartes cobreix X, ja que com X és no-singular, alguna de les parcials en tots els seus punts serà diferent de zero. A més a més, es pot comprovar que per qualsevol dues cartes, es compleix que són compatibles, i per tant, ens dóna un atles complex en X.

Com X és subespai de $\mathbb{C}^2$, és II-numerable i Hausdorff. Podria passar que el polinomi f descompongués en dos factors lineals amb la mateixa pendent, i llavors X no seria connex, per complir també amb la condició de connexitat hem de demanar que el polinomi f sigui irreductible.

Teorema 2.12. *Si $f(z,w)$ és un polinomi irreductible, aleshores el lloc geomètric de les arrels d'X és connex. Si f és no-singular i irreductible, X és una superfície de Riemann.*

El lloc geomètric de les arrels d'un polinomi irreductible f s'anomena *corba plana afí irreductible.*

La demostració d'aquest teorema la veurem més endavant.

Les corbes projectives: Recordem que anomenem espai projectiu complex, a l'espai de les línies complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ que passen per l'origen, i que habitualment es denota per $\mathbb{CP}^n$.

Veiem primer que qualsevol espai projectiu complex té una topologia natural: Sigui $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la projecció que porta cada z a la seva classe d'equivalència, i per tant podem dotar a $\mathbb{CP}^n$ de la topologia quocient, i.e., $U \subset \mathbb{CP}^n$ és obert si i només si $\pi^{-1}(U)$ és obert.

Siguin $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{CP}^n$ les coordenades homogènies de $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Sabem que $\mathbb{CP}^n$ està cobert per $n+1$ conjunts oberts de la forma $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ per $i = 0, \ldots, n$. Cada U_i és isomorf a $\mathbb{C}^n$ via el morfisme que envia les $n+1$ coordenades homogènies $[x_0 : \ldots : x_n]$ a $(x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i)$. No és difície veure que la topologia sobre aquests oberts és la topologia habitual.

Aquests morfismes de U_i a $\mathbb{C}^n$ són cartes en $\mathbb{CP}^n$ i formen un atles complex.

Veiem la construcció de l'estructura complexa en el cas d'estar en $\mathbb{CP}^1$.

La recta projectiva: Sigui $\mathbb{CP}^1$ la recta projectiva, és a dir, el conjunt dels subespais de dimensió 1 de $\mathbb{C}^2$. Un punt (z,w) de $\mathbb{CP}^1$, amb z i w no iguals a 0 alhora, pot ser representat per coordenades homogènies $[z : w]$ i a més a més $[z : w] = [\lambda z : \lambda w]$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Definim $U_0 = \{[z : w] \,|z \neq 0\}$ i $U_1 = \{[z : w] \,|w \neq 0\}$ i veiem que cobreixen $\mathbb{CP}^1$.

Definim ara:

$$\begin{array}{rccc} \phi_0\colon & U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [z:w] & \to & w/z \end{array} \quad \begin{array}{rccc} \phi_1\colon & U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [z:w] & \to & z/w \end{array}$$

Podem comprovar que ϕ_0 i ϕ_1 són cartes complexes compatibles, obtenint una estructura complexa, que $\phi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$, podent definir una topologia en $\mathbb{CP}^1$ i que $\mathbb{CP}^1$ és connex, compacte i Hausdorff.

De fet, la recta projectiva la podem pensar com una recta dintre del pla projectiu.

El pla projectiu: Sigui $\mathbb{CP}^2$ el pla projectiu. La construcció és anàloga al cas de la recta projectiva. $\mathbb{CP}^2$ és el conjunt dels subespais de dimensió 1 de $\mathbb{C}^3$. Sigui $[x : y : z]$ la representació en coordenades homogènies del punt $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$. Com abans $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ per a $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

L'espai $\mathbb{CP}^2$ pot ser cobert per tres conjunts oberts $U_0 = \{[x : y : z] \mid x \neq 0\}$, $U_1 = \{[x : y : z] \mid y \neq 0\}$ i $U_2 = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\}$.

En U_0 definim $\phi_0([x : y : z] = (y/x, z/x)$, que és un homeomorfisme d'U_0 a $\mathbb{C}^2$ tal que la seva inversa envia $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ a $[1 : a : b] \in \mathbb{CP}^2$. Les definicions de ϕ_1 i ϕ_2 en U_1 i U_2 són anàlogues.

Podem obtenir superfícies de Riemann compactes mirant els conjunts zero d'aquest espai, que seran compactes en ser subconjunts tancats.

Definició 2.13. *Sigui $f(x, y, z)$ un polinomi en 3 variables. Diem que és homogeni de grau d si*
$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d f(x, y, z).$$

Notem que per a aquest polinomi $f([x : y : z]) = 0$ està ben definit, i defineix un subconjunt X de $\mathbb{CP}^2$. Sigui $X_i = X \cap U_i = \{[x : y : z] \mid x \neq 0, F(x, y, z) = 0\}$, que és homeomorf a $\{(y, z) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, y, z) = 0\}$. Aquest segon conjunt és una corba plana afí.

Definició 2.14. *Un polinomi homogeni F és no-singular si no hi ha una solució igual a zero al sistema d'equacions*
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Amb tot això veiem que cadascun dels 3 oberts X_i d'X són cobes planes afins no-singulars i per tant superfícies de Riemann pel *Teorema 2.12*. Les cartes per als X_i donen cartes compatibles que cobreixen X.

Enganxant superfícies de Riemann: En aquest exemple descriurem breument com enganxar dues superfícies de Riemann, per obtenir-ne una de nova.

Siguin X i Y dos espais topològics, amb dos oberts $U \subset X$ i $V \subset Y$ i suposem que tenim un homeomorfisme $\phi : U \to V$.

En fer la unió disjunta $X \amalg Y$, obtenim una partició en tres subconjunts: $\{x\}$ on $x \in X - U$, $\{y\}$ on $y \in Y - V$ i $\{u, \phi(u)\}$ on $u \in U$.

Sigui Z el conjunt d'aquests suconjunts, i definim $\pi : X \amalg Y \to Z$. Clarament π és exhaustiva, ja que és el morfisme que envia un element de la unió disjunta al seu subconjunt de la partició. Si dotem a Z de la topologia quocient per aquest morfisme π, obtenim un espai topològic que és l'enganxat d'X i Y per U i V via ϕ, i es denota per $X \amalg Y/\phi$

Proposició 2.15. *Siguin X i Y superfícies de Riemann, amb dos oberts no buits $U \subset X$ i $V \subset Y$ i suposem que tenim un isomorfisme $\phi : U \to V$. Llavors tenim una única estructura complexa a $X \amalg Y/\phi$ tal que les inclusions naturals d'X i Y a $X \amalg Y/\phi$ són holomorfes. En particular, si $X \amalg Y/\phi$ és Hausdorff, és una superfície de Riemann.*

Demostració. Sigui $Z = X \amalg Y/\phi$, i siguin $\varphi_X : X \to Z$, $\varphi_Y : Y \to Z$ inclusions. Per a cada carta $\psi : U_i \to \psi(U_i)$ en X, agafem l'obert $\varphi_X(U_i) \subset Z$ i definim una carta usant $\psi \circ \phi^{-1}$, i fem el mateix per les cartes d'Y. Aquest procés ens dóna un conjunt de cartes en Z que el cobreixen, i que a més a més, són dos a dos compatibles.

Com X i Y són connexos, aleshores també ho és Z, i per tant Z serà una superfície de Riemann si és Hausdorff. □

Tapant forats en superfícies de Riemann: Si tenim una superfície de Riemann, i li treiem un punt, seguim tenint una superfície de Riemann. Ara volem fer el procés invers, i per això, hem de definir formalment què és un forat.

Definició 2.16. *Sigui X una superfície de Riemann. Una carta foradada en X, és una carta complexa $\phi : U \to V$ en X tal que V conté un disc punxat obert $D_0 = \{z \mid 0 < \|z - z_0\| < \epsilon\}$ amb l'adherència en X de $\phi^{-1}(D_0)$ dintre d'U, i aquesta es pot transportar via ϕ al disc tancat $D_1 = \{z \mid 0 < \|z - z_0\| \leq \epsilon\}$.*

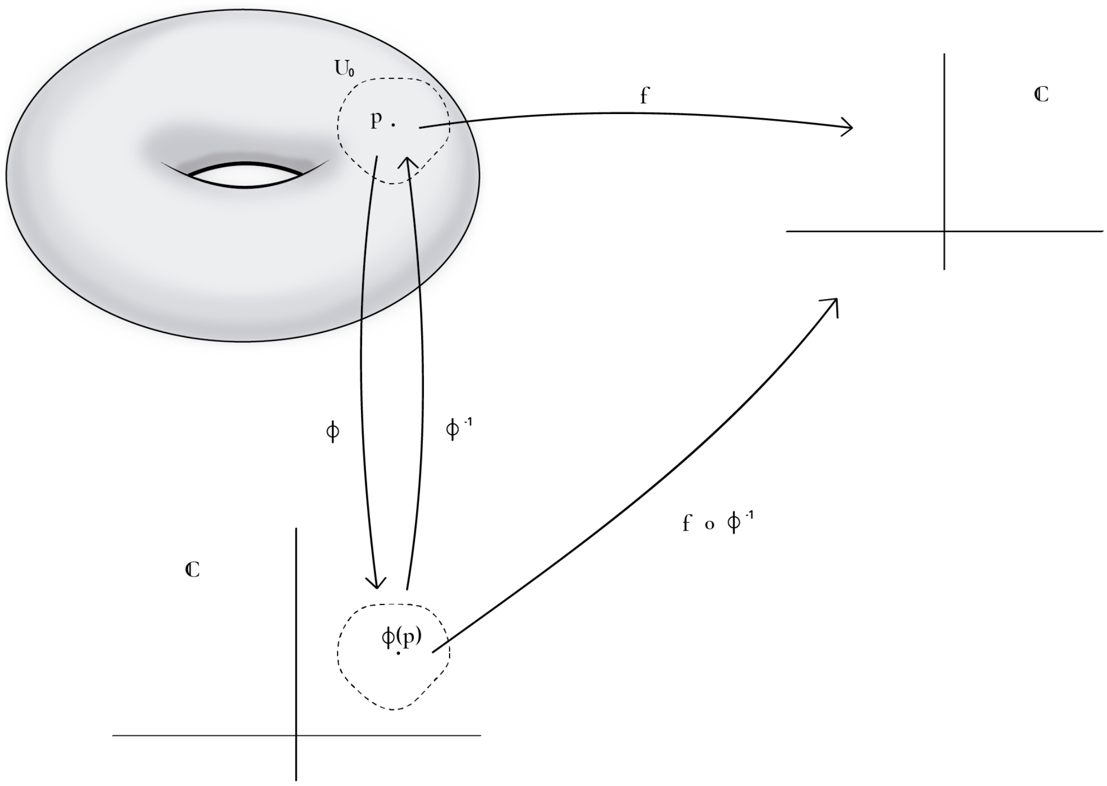
Suposem ara que tenim una superfície de Riemann amb una carta foradada $\phi : U \to V$. Sigui D_0 el disc foradat anterior, i sigui D un disc obert. Notem que D és una superfície de Riemann i que D_0 és un subconjunt obert de D isomorf a l'obert $\phi^{-1}(D_0) \subset X$ usant una restricció adequada a ϕ. Notem ara que $Z = X \amalg D/\phi$ és Hausdorff, ja que l'adherència de $\phi^{-1}(D_0)$ no té cap punt corresponent a z_0. Llavors Z és una superfície de Riemann i és l'obtinguda tapant el forat a la carta foradada ϕ.

2.3 Morfismes entre superfícies de Riemann

Podem traslladar la definició habitual de funció holomorfa en $\mathbb{C}$ a superfícies de Riemann. Ho podem fer mitjançant la composició amb cartes locals com s'explica seguidament.

Sigui X una superfície de Riemann i f una funció complexa definida en un entorn $U \subset X$ del punt $p \in X$.

Definició 2.17. *Diem que la funció f és holomorfa en p si existeix una carta $\phi : U_0 \to V$ amb $p \in U_0$ tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ és holomorfa en $\phi(p)$, i diem que f és holomorfa en U si ho és en tot punt d'U.*



Exemple 2.18. Sigui X una corba plana afí definida per un polinomi no-singular $f(z, w) = 0$. Llavors, les dues projeccions (als eixos z i w) són funcions holomorfes en X.

Definició 2.19. *Sigui ara f una funció holomorfa definida en un entorn punxat*[2] *de $p \in X$.*

[2] Entorn punxat de p: és un entorn de la forma $U - \{p\}$ on U és un entorn de p.

1. *Diem que f té una singularitat evitable a p si i només si existeix una carta $\phi : U \to V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té una singularitat evitable a $\phi(p)$.*

2. *Diem que f té un pol a p si i només si existeix una carta $\phi : U \to V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té un pol a $\phi(p)$.*

3. *Diem que f té una singularitat essencial a p si i només si existeix una carta $\phi : U \to V$ amb $p \in U$, tal que la composició $f \circ \phi^{-1}$ té una singularitat essencial a $\phi(p)$.*

Definició 2.20. *Diem que una funció f en X és meromorfa en $p \in X$ si és holomorfa, té una singularitat evitable o té un pol a p. Diem que f és meromorfa en un obert W si ho és en tots els seus punts.*

Definició 2.21. *Siguin X i Y superfícies de Riemann, $F : X \to Y$ un morfisme i $p \in X$ un punt. Direm que F és holomorf a p si existeixen cartes complexes $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X i $\phi_2 : U_2 \to V_2$ en Y, amb $p \in U_1$ i $F(p) \in U_2$, tals que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ és holomorf en $\phi_1(p)$.*

Diem que F és holomorf en un obert $W \subset X$, si F està definit i és holomorf en cada punt de W, i direm que F és un morfisme holomorf si i només si F és holomorf en tot X.

És important notar que un morfisme serà o no holomorf, independentment del parell de cartes triades.

Definició 2.22. *Un isomorfisme (o biholomorfisme) entre superfícies de Riemann és un morfisme holomorf $F : X \to Y$ bijectiu i tal que la seva inversa $F^{-1} : Y \to X$ és holomorfa. Direm que X i Y són isomorfs, si existeix un isomorfisme entre ells.*

Lema 2.23. *L'esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ i la recta projectiva $\mathbb{CP}^1$ són isomorfes.*

Demostració. El morfisme $\phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}$ tal que

$$[z : w] \mapsto \frac{(2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}), 2\,\mathrm{Im}(z\bar{w}), |z|^2 - |w|^2)}{(|z|^2 + |w|^2)}$$

és un isomorfisme. □

A continuació veurem un seguit de proposicions, la majoria heredades dels corresponents teoremes sobre funcions holomorfes en el sentit usual de variable complexa.

Proposició 2.24. *Sigui $F : X \to Y$ un morfisme no constant entre superfícies de Riemann. Llavors el morfisme F és obert.*

Proposició 2.25. *Sigui $F : X \to Y$ un morfisme bijectiu entre superfícies de Riemann. Llavors F és un isomorfisme entre X i la seva imatge $F(X)$.*

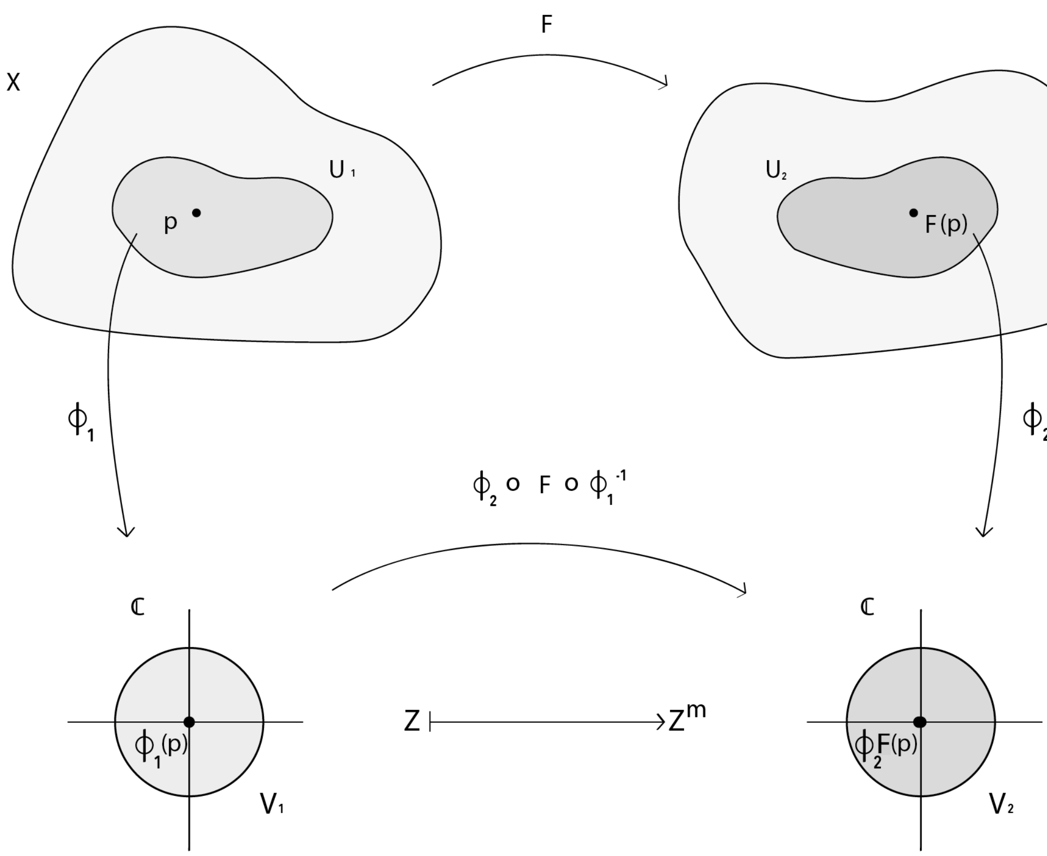
Proposició 2.26. *Sigui X una superfície de Riemann compacta, i sigui $F : X \to Y$ un morfisme holomorf no constant. Llavors Y és compacta i F és exhaustiu.*

Demostració. Com F és holomorf i X és obert, $F(X)$ és obert per la *Proposició 2.24*. A més a més, com X és compacte, també ho és $F(X)$, i com Y és Hausdorff, $F(X)$ ha de ser tancat en Y. Per tant, com $F(X)$ és obert i tancat, i Y és connex, $F(X)$ ha de ser tot Y. Llavors F és exhaustiu i Y compacta. □

Proposició 2.27. *Sigui $F : X \to Y$ un morfisme holomorf no constant entre superfícies de Riemann. Aleshores $\forall y \in Y$, $F^{-1}(y)$ és un conjunt discret d'X. En particular, si X i Y són compactes, $F^{-1}(y)$ és un conjunt no buit i finit $\forall y \in Y$*

D'entre les propietats dels morfismes holomorfs, la següent és molt important, ja que ens diu que un morfisme holomorf, localment, es comporta com un morfisme potència.

Proposició 2.28. *Siguin $F : X \to Y$ un morfisme holomorf no constant i $p \in X$, llavors existeix un únic $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que per a cada carta $\phi_2 : U_2 \to V_2$ d'Y centrada*[3] *en $F(p)$, existeix una carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ d'X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*



Demostració. Fixem una carta ϕ_2 en Y centrada en $F(p)$, i escollim qualsevol carta $\psi : U \to V$ en X centrada en p. Aleshores la sèrie de Taylor per la funció $T(w) = \phi_2(F(\psi^{-1}(w)))$ serà de la forma:

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$$

amb $c_m \neq 0$, i $m \geq 1$, ja que $T(0) = 0$. Llavors tenim $T(w) = 2^m S(w)$ on $S(w)$ és una funció holomorfa en $w = 0$, i $S(0) \neq 0$. En aquest cas existeix una funció $R(w)$ holomorfa

[3]Carta centrada en un punt: Si $\phi : U \to V$ és una carta en un espai topològic X i $p \in U$, direm que la carta està centrada en p, si $\phi(p) = 0$.

a prop de 0 tal que $R(w)^m = S(w)$, i per tant $T(wR(w))^m$. Sigui $\eta(w) = wR(w)$; com $\eta'(0) \neq 0$, veiem que a prop de 0 la funció η és invertible i holomorfa. Per tant, la composició $\phi_1 = \eta \circ \psi$ és també una carta en X definida i centrada a prop de p. Si pensem en η com definir una nova coordinada z (via $z = \eta(w)$), veiem que z i w estan relacionades per $z = wR(w)$. Així:

$$\begin{aligned}
\phi_2(F(\phi_1^{-1})) &= \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\
&= T(\eta^{-1}(z)) \\
&= T(w) \\
&= (wR(w))^m \\
&= z^m.
\end{aligned}$$

La unicitat d'm és consequüència de que hi ha coordenades locals en p i $F(p)$ tal que el morfisme F té la forma $z \mapsto z^m$ i llavors, a prop de p hi ha exactament m preimatges de punts a prop de $F(p)$. □

Observació. L'exponent m és independent de la tria de cartes.

Definició 2.29. *Anomenem multiplicitat d'F a p a l'enter m donat per la proposició anterior i el denotem per $mult_p(F)$.*

Definició 2.30. *Sigui $F : X \to Y$ un morfisme holomorf no constant, direm que $p \in X$ és un punt de ramificació d'F si $mult_p(F) \geq 2$, i direm que un punt $y \in Y$ és un punt discriminant si és la imatge d'un punt de ramificació d'F.*

Una de les propietats més importants entre superfícies de Riemann és la següent:

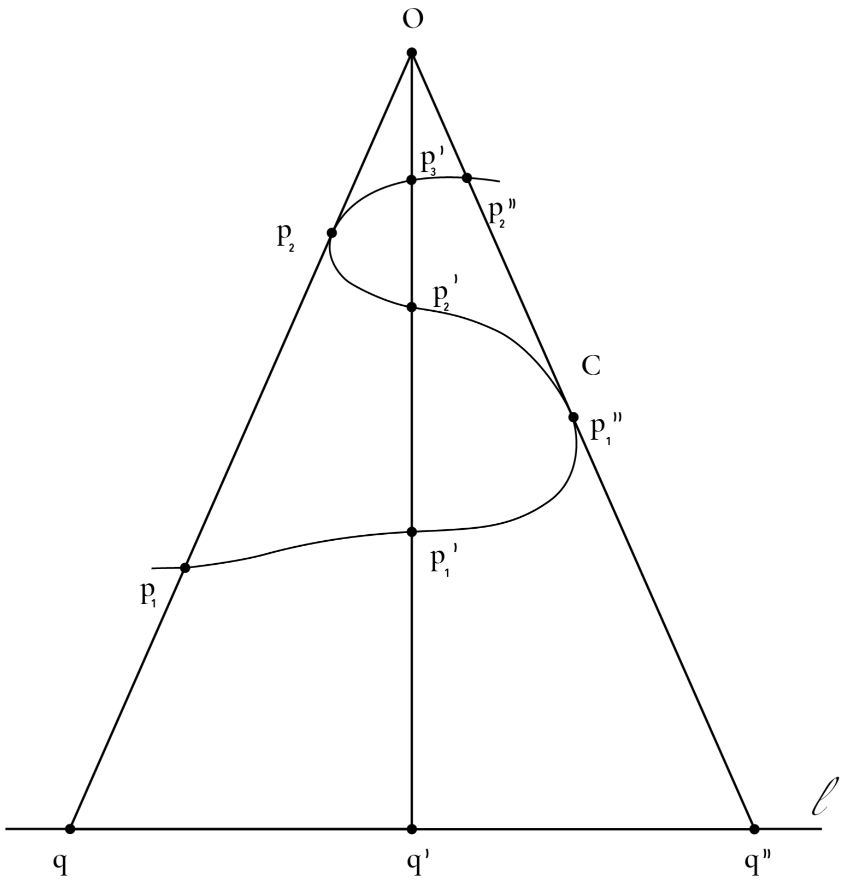
Proposició 2.31. *Siguin X i Y superfícies de Riemann compactes i sigui $F : X \to Y$ un morfisme holomorf no constant. Per a cada $y \in Y$,*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p F$$

llavors $d_y(F)$ és constant i independent d'y.

Definició 2.32. *Sigui $F : X \to Y$ un morfisme holomorf no constant entre superfícies de Riemann. Anomenem grau d'F a l'enter $d_y(F)$ de la proposició anterior. Denotem per $gr(F)$ el grau d'F.*

Exemple 2.33.



En aquest exemple, veiem un projecció (anomenem-la π) des del punt O a la recta l de la corba C (de grau 3). Veiem també que els punts p_2 i p_1'' tenen multiplicitat 2 i tots el altres multiplicitat 1, que $d_q(\pi) = \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} mult_p(\pi) = mult_{p_1}(\pi) + mult_{p_2}(\pi) = 1 + 2 = 3$, i per tant π té grau 3. De fet, podem veure la projecció com un morfisme del tor T a la recta projectiva $\mathbb{CP}$.

2.4 La fórmula de Riemann-Hurwitz

Aquesta fórmula és sovint utilitzada en l'estudi de superfícies de Riemann i connecta el grau d'un morfisme holomorf entre superfícies de Riemann compactes amb la característica d'Euler i el nombre de punts de ramificació del morfisme.

Donarem per enteses les definicions de gènere topològic, triangulacions, orientabilitat i característica d'Euler, ja que aquestes són donades en cursos prèvis de topologia. Tot i així fem un petit recordatori de la següent proposició:

Proposició 2.34. *La característica d'Euler, $\mathcal{X}(S)$, d'una varietat S, és independent de la triangulació triada. Si S és una 2-varietat de gènere g, compacta, orientable i sense frontera, llavors la seva característica d'Euler és $\mathcal{X}(S) = 2 - 2g$*

Teorema 2.35. *Siguin X i Y superfícies de Riemann compactes i $F : X \to Y$ un* *morfisme holomorf no constant, llavors:*

$$2g(X) - 2 = gr(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1]$$

on $g(X)$ i $g(Y)$ denoten el gènere d'X i d'Y respectivament.

Demostració. Notem primerament, que la suma és finita, ja que com X és compacta, el conjunt de punts de ramificació és finit i són els únics punts que tindrem en compte ja que com que per als punts que no són de ramificació tenim que $mult_p(F) = 1$, i per tant $mult_p(F) - 1 = 0$.

Agafem ara una triangulació d'Y de forma que cada punt discriminant d'F sigui un vèrtex i suposem a més a més, que tenim v vèrtex, a arestes i t triangles.

Ara construirem una triangulació per X de forma que els vèrtex dels seus triangles, siguin les preimatges via F dels vèrtex de la triangulació d'Y i les arestes les prenem també en funció de les d'Y, de forma que la triangulació d'X té v' vèrtex, a' arestes i t' triangles.

Com no tenim punts de ramificació dins de qualsevol triangle, per a cada triangle d'Y en tenim $gr(F)$ per X i per tant $t' = gr(F)t$. Podem veure que passa el mateix per les arestes, i.e., $a' = gr(F)a$ però no amb els vèrtex, ja que si fixem un vèrtex $q \in Y$, tenim $|F^{-1}(q)|$ preimatges de q en X. Això ho podem escriure de la següent forma:

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = gr(F) + |F^{-1}(q)| = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 - mult_p(F),$$

ja que treiem punts en funció de la multiplicitat del punt discriminant. Per tant, el nombre total de preimatges dels vèrtex de les triangulacions d'Y és:

$$v' = \sum_{q \in V} \big(gr(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)]\big) = gr(F)v + \sum_{q \in Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)].$$

on $q \in Y$ són els vèrtex q en Y.

A més a més, sabem que $\mathcal{X}(X) = a' - v' + t'$ és a dir $2 - 2g(X) = a' - v' + t'$, i per tant:

$$\begin{aligned} 2 - 2g(X) &= gr(F)a - gr(F)v + \sum_{q \in Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)] + gr(F)t \\ &= gr(F)(a - v + t) + \sum_{p \in X} [1 - mult_p(F)] \\ &= gr(F)(2 - 2g(Y) + \sum_{p \in X} [1 - mult_p(F)]. \end{aligned}$$

i aleshores:

$$2g(X) - 2 = gr(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1].$$

□

Una de les aplicacions d'aquest teorema és que ens imposa condicions sobre la definició de morfismes holomorfs entre superfícies de Riemann.

Exemple 2.36. Si $Y = \mathbb{CP}^1$ i F té almenys grau 2, llavors F és ramificada.

Com $g(Y) = 0$, per la fórmula de Riemann-Hurwitz tenim:

$$\begin{aligned}\sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1] &= (2g(X) - 2) - gr(F)(-2) \\ &\geq 2g(X) - 2 + 4 \\ &\geq 2,\end{aligned}$$

obtenint que F és ramificada.

3 Acció de grups en superfícies de Riemann

En aquesta secció veurem la construcció d'una superfície de Riemann a partir del quocient d'una superfície de Riemann per una acció d'un grup finit, que més endavant ens serà molt útil. Començarem fent un recordatori ràpid d'alguns conceptes.

Al llarg d'aquesta secció suposarem que G és un grup finit.

3.1 Acció de grups finits

Definició 3.1. *Sigui G un grup i X una superfície de Riemann. Una acció (per l'esquerra) de G en X és una aplicació $G \times X \to X$, que denotem per $(g, x) \mapsto g \cdot x$, que satisfà:*

- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ *per* $g, h \in G$ *i* $x \in X$, *i*
- $e \cdot x$ *per* $x \in X$, *on* $e \in G$ *és la identitat.*

A partir d'aquests dos axiomes, podem deduir que $\forall g \in G$, l'aplicació que envia $x \in X$ a $g \cdot x$ és una funció bijectiva d'X en X, i que té per inversa l'aplicació que envia x a $g^{-1} \cdot x$.

Anàlogament, podem definir acció de grup per la dreta ($X \times G \to X$).

Definició 3.2. *L'orbita d'un punt $x \in X$ és el conjunt d'elements d'X als quals es pot aplicar l'acció dels elements de G a x, i.e., $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$. Si $A \subset X$ és qualsevol subconjunt, denotem per $G \cdot A$ el conjunt d'orbites dels punt d'A, i.e., $G \cdot A = \{g \cdot a \mid g \in G$ i $a \in A\}$*

Per definició de grup, el conjunt d'òrbites d'X sota l'acció de G formen una partició d'X. Definint la relació $x \sim y$ si i només si existeix un $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$, veiem que la relació y pertany a l'orbita d'x és reflexiva, simètrica i transitiva i que per tant és una relació d'equivalènva, i.e., les òrbites són classes d'equivalència d'aquesta relació; dos elements són equivalents si i només si les seves òrbites són iguals (i.e. $G \cdot x = G \cdot y$).

Definició 3.3. *L'estabilitzador (o subgrup d'isotropia) d'un punt $x \in X$ és el subgrup d'elements de G que fixen x, i.e., $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.*

Notem que punts de la mateixa òrbita tenen estabilitzadors conjugats per l'element que porta un punt en l'altre: si $y \in G \cdot x$ llavors $G_y = gG_xg^{-1}$, on $g \cdot x = y$.

Per veure-ho notem que $h \in G_y$ si i només si $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$. Aplicant g^{-1} als dos costats obtenim $(g^{-1}hg) \cdot x = x$, i.e., $(g^{-1}hg) \in G_x$.

Definició 3.4. *El nucli d'una acció de G en X és el conjunt de tots els elements de G que actuen trivialment sobre tot punt d'X, i.e., $N = \{g \in G \mid g \cdot x = x \ \forall x \in X\}$, i és la intersecció de tots els subgrups estabilitzadors.*

És sabut que un subgrup és normal en un cert G, si i només si, és el nucli d'algun homeomorfisme de G. En particular, el nucli és un subgrup normal de G.

El grup quocient G/N actua en X amb nucli trivial i òrbites idèntiques a l'acció de G.

Definició 3.5. *Una acció és efectiva si el nucli de l'acció és trivial, és a dir, l'element identitat de G és l'únic que actua trivialment sobre tot punt d'X.*

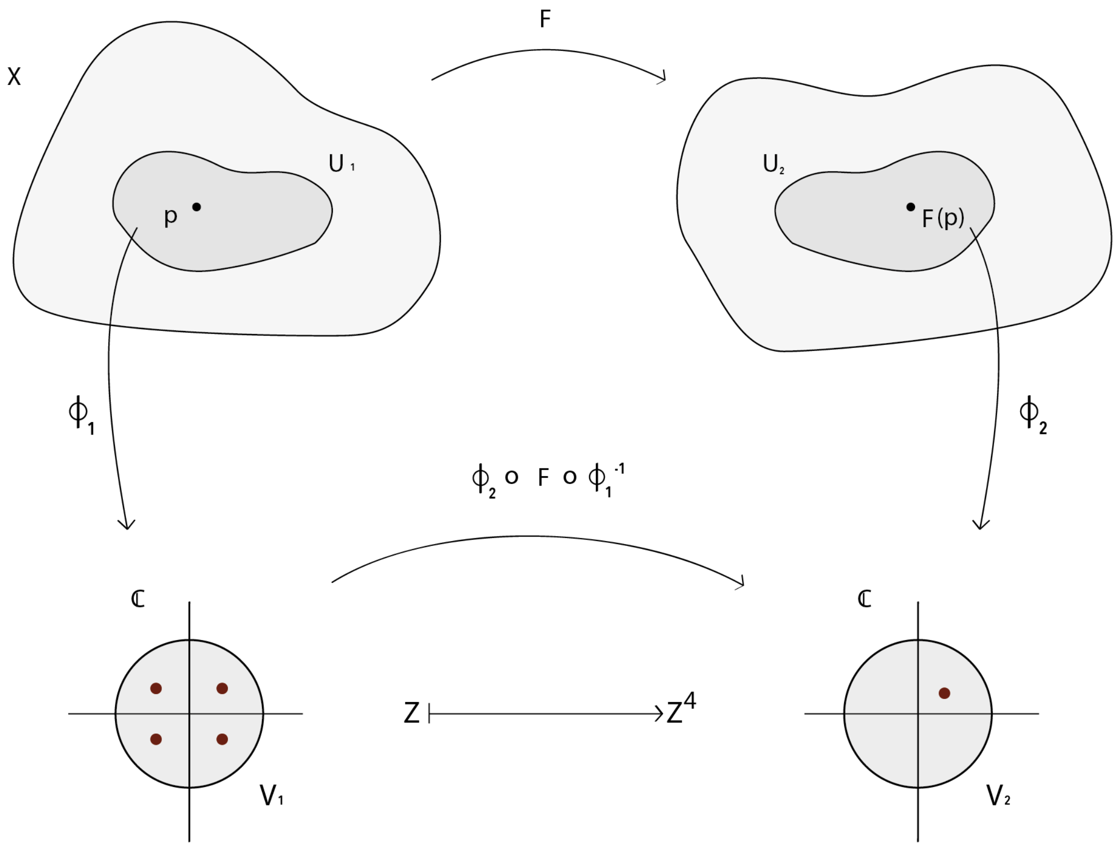
Definició 3.6. *Una acció és contínua, respectivament holomorfa, si per a cada $g \in G$, la bijecció que envia x a $g \cdot x$ és una aplicació contínua, respectivament holomorfa, d'X en X.*

Definició 3.7. *L'espai quocient X/G és el conjunt de les òrbites. Hi ha un morfisme quocient natural $\pi : X \to X/G$ que envia un punt a la seva òrbita, i per tant podem dotar a X/G de la topologia quocient.*

Exemple 3.8. Veiem que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ actua sobre $\mathbb{C}$ enviant (i, z) a $\zeta_n^i \cdot z$ on ζ_n és l'arrel n-èsima primitiva de la unitat. Geomètricament podem veure aquesta acció com una rotació del pla complex respecte l'origen.

El grup de quatre elements $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ actua sobre el pla complex de la següent forma: $(0, x) \mapsto x$, $(1, x) \mapsto \zeta x$, $(2, x) \mapsto \zeta^2 x$ i $(3, x) \mapsto \zeta^3 x$. Per tant, un estabilitzador per un punt $x \neq 0$ és $\{g \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \mid g \cdot x = x\} = \{0\}$ i $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Podem transportar aquest exemple al cas en que tenim un morfisme entre superfícies de Riemann i localment podem veure-ho com un morfisme potència (per la *Proposició 2.28*).



Podem veure el dibuix com una acció de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\} =< \zeta >$ sobre V_1 enviant z a $\zeta_4^i \cdot z$ on ζ_4 és una arrel 4-èsima primitiva de la unitat.

L'estabilitzador d'un punt $x \in V_1 - \{0\}$ és $G_x = \{\zeta^4 = 1\}$, i $G_0 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, i per tant, $N = \{\zeta^4 = 1\}$ veient que l'acció és efectiva. Finalment, veiem que $V_2 = V_1/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

3.2 La superfície de Riemann quocient

Volem ara, trobar cartes complexes per dotar al nostre quocient X/G d'una estructura complexa. La idea més intuïtiva és la de compondre les cartes que ja tenim de l'atles en X amb l'inversa del morfisme quocient $\pi : X \to X/G$ per obtenir cartes en X/G. A continuació veurem que aquesta idea és encertada.

Per veure-ho, hem de definir correctament π^{-1}, i per això, necessitem que π sigui bijectiva, com a mínim quan restringim π a un obert d'X. Per tant, necessitem trobar entorns U amb no més d'un element per a cada òrbita, per a tot punt d'X.

Això és conseqüència de que per un obert $U \subset X$, si $\pi_{|U} : U \to X/G$ fos bijectiu, tenim que per $\pi_{|U}(x_1) = \pi_{|U}(x_2)$ llavors $x_1 = x_2$, i com $\pi_{|U}(x_1) = \pi_{|U}(x_2)$, x_1 i x_2 estarien en la mateixa òrbita sota l'acció de G. Aleshores $\pi_{|U}$ serà bijectiu si U no conté elements diferents de la mateixa òrbita.

En aquest aspecte, la següent proposició ens serà de gran utilitat.

Proposició 3.9. *Sigui G un grup finit actuant holomorfament i efectivament en una superfície de Riemann X. Fixem un punt $x \in X$. Llavors existeix un entorn U d'x tal que:*

1. *U és invariant per l'estabilitzador G_x, i.e., $g \cdot u \in U$ $\forall g \in G_x$ i $u \in U$;*
2. *$U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ $\forall g \notin G$;*
3. *$\alpha : U/G_x \to X/G$ induït per enviar un punt d'U a la seva òrbita, és un homeomorfisme i un subconjunt obert d'X/G;*
4. *Cap punt d'U, excepte x, és fixat per cap element de G_x.*

Demostració. 1. Siguin $\{g_1, \dots, g_n\}$ els elemens de G que no fixen x. Com X és Hausdorff, per a cada i, podem trobar entorns oberts V_i d'x i W_i de $g_i \cdot x$ amb intersecció buida. Notem que $g_i^{-1} \cdot W_i$ és un entorn obert d'x per a cada i. Sigui $R_i = V_i \cap (g_i \cdot W_i)$, $R = \bigcap_i R_i$ i $U = \bigcap_{g \in G_x} g \cdot R$. Llavors cada R_i és un entorn obert d'x i per tant R i U també ho són. A més a més $g \cdot U = U$ per $g \in G_x$.

2. Notem que $R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset$, i per tant $R \cap (g_i \cdot R) = \emptyset$ i $U \cap (g_i \cdot U) = \emptyset$ $\forall i$.

3. $\alpha : U/G_x \to X/G$ és bijectiva, contínua i oberta ja que la composició amb el morfisme quocient d'U a U/G_x ens dóna $\pi_{|U}$, que és continu i obert. Per tant és un homeomorfisme de U/G_x en $\alpha(U/G_x)$.

4. És causa de que el conjunt de punts amb isotropia no trivial és discret:

Suposem que tenim una seqüència que convergeix a x tal que cada x_i és fixat per un element trivial g_i. Com G és finit, podem traslladar-nos a una subseqüència i pensar que cada x_i és fixat pel mateix element no trivial g. Per la continuïtat de g, també fixa el punt límit x. Com g és un automorfisme holomorf d'X, i pel principi d'identitat (heredat de la variable complexa) tenim que g és exactament la identitat. Aquesta contradicció ens confirma que els punts amb estabilitzador no trivial no es poden acumular, i per tant formen un conjunt discret.

Llavors, agafem un U com l'apartat anterior, i com és discret podem reduir-lo tant com sigui necessari per aconseguir el que volíem. $\square$

Gràcies a aquesta proposició, tenim un mètode per definir cartes en X/G, definint-les primer a U/G_x i transportant-les via α a X/G.

Escollim una òrbita $\bar{x} \in X/G$ d'un punt $X \in X$. Suposem que $|G_x| = 1$, i.e., l'estabilitzador d'x és trivial. Per la proposició anterior tenim un entorn U d'x tal que $\pi_{|U} : U \to W \subset X/G$ és un homeomorfisme en un entorn W d'$\bar{x}$. Manipulant U podem suposar que U és el domini d'una carta $\phi : U \to V$ en X. Agafem com a carta en X/G la composició $\psi = \phi \circ \pi_{|U}^{-1} : W \to V$ ja que tant ϕ com $\pi_{|U}$ són homeomorfismes.

Per al cas en que $m = |G_x| \geq 2$, usant la proposició anterior, escollim un entorn U d'x tal que $\alpha : U/G_x \to W \subset X/G$ és un homeomorfisme en un entorn W d'$\bar{x}$, i assumim que en aquest entorn, p té exactament m preimatges. Com abans, busquem una carta ϕ en X/G.

En aquest cas, la composició amb α serà de la forma $h : U \to U/G_x \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$. Trobarem, doncs, ϕ trobant primer h.

Sigui z una coordenada local centrada en x. Per a cada $g \in G_x$, tenim una funció $g(z)$, amb multiplicitat 1 a x. Definim $h(z) = \prod_{g \in G_x} g(z)$. Notem que h té multiplicitat m en x i està definida en un entorn invariant per G_x d'x. Podem modificar U i pensar que h està definida en U. Com h és holomorfa i G_x-invariant, tenim la funció contínua $\bar{h} : U/G_x \to \mathbb{C}$, i com h és oberta, $\bar{h}$ també.

Per veure que h és bijectiva, ens fixem en que h té multiplicitat m, obtenint que h és contínua, oberta i bijectiva, i per tant és un homeomorfisme i composant-la amb l'inversa d'α ens dóna una carta en W, $\phi : W \xrightarrow{\alpha^{-1}} U/G_x \xrightarrow{\bar{h}} V \subset \mathbb{C}$

Teorema 3.10. *Sigui G un grup finit actuant holomorfament i efectivament en una superfície de Riemann X. Llavors, la construcció anterior de cartes complexes en X/G, dota a X/G d'estructura complexa i per tant, X/G és una superfície de Riemann. A més a més, $\pi : X \to X/G$ és holomorf de grau $|G|$ i $mult_x(\pi) = |G_x|$ $\forall x \in X$.*

Demostració. Volem comprovar que les cartes són compatibles i donen un atles complex, ja que ja sabem que les cartes cobreixen X/G.

Com els punts amb estabilitzadors trivials són discrets, assumim que en el cas $m \geq 2$ els dominis de dues cartes coincideixen, llavors no és necessari comprovar res. Si les dues cartes són construïdes en el cas $m = 1$, aleshores són compatibles per construcció. Finalment, suposem que tenim una carta $\phi_1 : \bar{U_1} \to V_1$ construïda en el cas $m = 1$ i una $\phi_2 : \bar{U_2} \to V_2$ construïda en el cas $m \geq 2$, i siguin U_1 i U_2 els oberts d'X utilitats per construir aquestes cartes. Escollim un punt $\bar{u}$ de l'intersecció $\bar{U_1} \cap \bar{U_2}$ i l'elevem a un punt u d'$U_1 \cap U_2$ (si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, podem traslladar U_1 perquè intersequin). Sigui w la coordenada local en U_1 i z la coordenada local en U_2. La coordenada local en $\bar{U_1}$ és també w però en $\bar{U_2}$ és la $h(z)$ definida abans. Veiem que ϕ_1 i ϕ_2 són compatibles, ja que les cartes en U_1 i U_2 ho són.

X és Hausdorff, en ser-ho X i ser G finit. Com X és connex i $\pi : X \to X/G$ exhaustiu, X/G és també connex. Llavors X/G és una superfície de Riemann.

Que π és holomorf ve de la definició de les cartes en X/G. El grau de π és immediat, i la multiplicitat al punt x és la multiplicitat de la funció $h(z)$ que és $|G_x|$ □

3.3 Teorema de Hurwitz sobre automorfismes

Lema 3.11. *Sigui G un grup finit actuant holomorfament i efectivament en una superfície de Riemann compacta X, amb $\pi : X \to Y = X/G$. Llavors, per a cada punt discriminant $y \in Y$ tenim un enter $r \geq 2$ tal que $\pi^{-1}(y)$ està format per exactament $|G|/r$ punts d'X, i en cadascuna de les seves preimatges, π té multiplicitat r.*

La demostració d'aquest lema, és conseqüència de que les preimatges per π en Xd'un punt discriminant $y \in Y$ formen una única òrbita per l'acció de G en X i per tant tenen estabilitzadors conjugats i en particular cada grup estabilitzador té el mateix ordre, r, i el nombre de punts en aquesta òrbita és l'índex de l'estabilitzador ($|G|/r$).

Aplicant la fòrmula de Hurwitz obtenim el següent corol·lari:

Corol·lari 3.12. *Sigui G un grup finit actuant holomorfament i efectivament en una superfície de Riemann compacta X, amb $\pi : X \to X/G$. Suposem que tenim k punts discriminants $y_1, \ldots, y_k$ en Y, amb π tenint multiplicitat r_i als $|G|/r_i$ punts sobre y_i. Llavors,*

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= gr(\pi)(2g(X/G) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(\pi) - 1] \\ &= |G|(2g(X/G) - 2) + \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1) \\ &= |G| \left[(2g(X/G) - 2) + \sum_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{r_i}) \right] \end{aligned}$$

On de la primera a la segona igualtat només ens interessen els k punts discriminants, i com tenim $|G|/r_i$ preimatges per a cada punt discriminant i cadascun té multiplicitat r_i, obtenim que $\sum_{p \in X} [mult_p(\pi) - 1] = \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{r_i}(r_i - 1)$.

Si tenim superfícies de Riemann de gènere $g \geq 2$, gràcies al corol·lari anterior, obtenim una cota de l'ordre del grup G.

Teorema 3.13. *Sigui G un grup finit actuant holomorfament i efectivament en una superfície de Riemann compacta de gènere $g \geq 2$. Llavors,*

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Demostració. Pel corol·lari anterior tenim,

$$2g - 2 = |G| [2g(X/G) - 2 + R]$$

per $R = \sum_i 1 - \frac{1}{r_i}$.

Veiem que per $g(X/G) \geq 1$, si $R = 0$ no tenim ramificació en el morfisme quocient. Per tant $g(X/G) \geq 2$ que implica $|G| \leq g - 1$. Si $R \neq 0$ ha de ser $R \geq 1/2$. Aleshores,

$$2g(X/G) - 2 + R \geq 1/2,$$

i per tant $|G| \leq 4(g - 1)$.

Suposem ara que $g(X/G) = 0$. Llavors, com $2g - 2 = |G|\,[-2 + R]$, tenim $R > 2$ i per tant $R - 2 \geq 1/42$.

Això és causa de que per $\sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{r_i}) > 2$, com a mínim tenim $k = 3$ i $\{r_i\} = \{2, 3, 7\}$ i aleshores,

$$\sum_{i=1}^{3}(1 - \frac{1}{r_i}) = 3 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}) = \frac{85}{42} = 2 + \frac{1}{42}.$$

Per tant, $|G| \leq 84(g - 1)$. □

De fet, es pot veure que el grup de tots els automorfismes d'una superfície de Riemann compacte de gènere com a mínim 2, és un grup finit, però això queda una mica lluny d'aquesta memòria (veure demostració al capítol 5 del llibre Riemann Surfaces [2]). Per tant per una superfície de Riemann com aquesta tenim,

$$|Aut(X)| \leq 84(g(X) - 1),$$

ja que és evident que el nucli de de l'acció de $Aut(X)$ sobre X és la identitat, donat que en ser un automorfisme no fixa cap punt, fent a l'acció efectiva, i que la bijecció que envia $x \in X$ a $g \cdot x$, per $g \in Aut(X)$, és holomorfa per definició d'$Aut(x)$, que és el conjunt d'aplicacions biholomorfes d'X en X, fent l'acció holomorfa.

3.4 Accions de grups infinits

En aquesta secció veurem breument, que en alguns casos podem dotar d'estructura complexa al quocient d'una superfície de Riemann per un grup infinit.

Definició 3.14. *Sigui G un grup discret actuant efectivament en un espai X Hausdorff. Diem que G actua pròpiament de manera discontínua si per a cada parell $(p, q) \in X$ existeixen entorns U i V d'x i y respectivament tal que $\{g \in G \mid (g \cdot U) \cap V \neq 0\}$ és finit.*

Aquesta definició força a l'espai quocient a ser Hausdorff, i si X és una superfície de Riemann i G actua pròpiament de manera discontínua en X, llavors els punts s'X amb estabilitzadors no trivials formen un grup discret, i tots els estabilitzadors són grups cíclics finits. Per tant, podem usar l'argument anterior per dotar X/G d'estructura complexa.

Exemple 3.15. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ actua en $\mathbb{C}$ per translació en dues direccions linealment independents, per exemple, agafem un $\tau \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ i l'acció seria (n, m) actua enviant z a $z + n + m\tau$. El grup quocient és homeomorf a un tor complex.

En aquest exemple el que veiem és que l'$(1, 0)$ l'enviem a l'1 de la recta real, i el $(0, 1)$ l'enviem a τ, i per tant estem estenent linealment de manera que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dintre del pla complex és la xarxa L definida en l'exemple del tor complex, i per tant el quocient per definició és el tor complex.

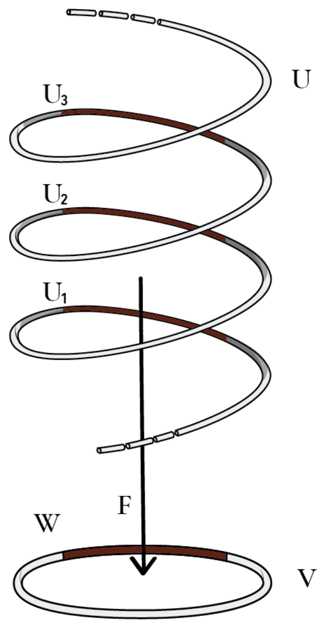
4 Espais recobridors i monodromia

4.1 Espais recobridors

Els espais recobridors, estan estretament relacionats amb els grups fonamentals, i ens poden ajudar a calcular alguns que no són trivials.

Definició 4.1. *Sigui V un espai topològic arc-connex. Un espai recobridor de V és un parell (U, F) on U és un espai topològic i $F : U \to V$ és una aplicació contínua i exhaustiva tal que es compleix que per a cada punt $v \in V$ existeix un entorn W de $v \in V$ tal que $F^{-1}(W)$ consisteix en la unió disjunta de conjunts oberts U_i tals que $F_{|U_i}$ és homeomorf a W. Si F és prou clara per context, anomenarem a U espai recobridor, a V espai base i a F l'aplicació recobridora o recobridor de V.*

Exemple 4.2. La recta real enrotllant-se a la circumferència unitat és un espai recobridor: Tindríem $U = \mathbb{R}$, $V = S^1$ i $F : \mathbb{R} \to S^1$ amb $F(t) = (\cos t, \sin t)$



Exemple 4.3. Per a qualsevol enter $n \neq 0$, siqui $F_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definit per $F_n(z) = z^n$. Llavors (U, F_n) per $U = \mathbb{C} - \{0\}$ és un espai recobridor de n fulles de $V = \mathbb{C} - \{0\}$.

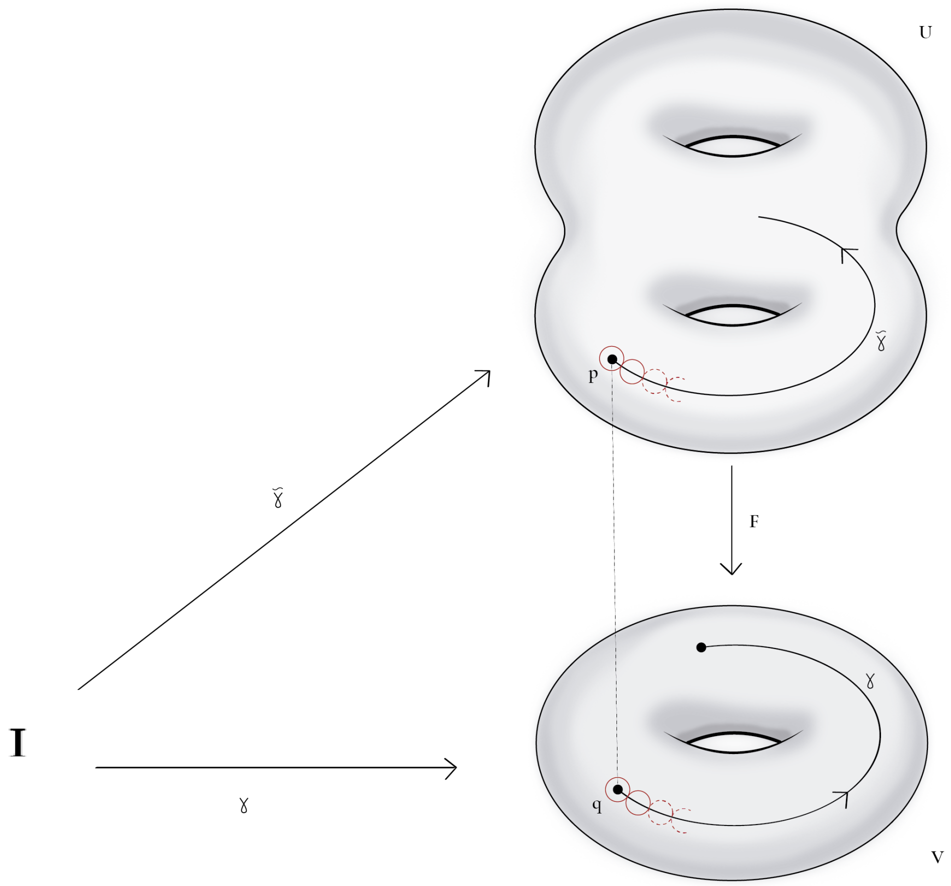
Podem veure-ho com que la preimatge d'un punt són les n arrels n-èssimes, i per això cada punt té n preimatges. Si agafem un disc centrat en un punt de radi prou petit, en fer la preimatge d'aquest entorn acabem obtenint n discs petits al voltant de les n arrels del punt, cadascun d'ells homeomorf a l'entorn del punt.

4.2 Elevació de camins

El que volem veure ara, és que no només podem elevar camins de l'espai base a l'espai recobridor, sinó que si tenim dos camins homòtops a l'espai base també podem elevar aquesta homotopia a l'espai recobridor.

Lema 4.4. *Sigui $F : U \to V$ un recobridor de V, $p \in U$ i $q = F(p)$. Llavors, per a qualsevol camí $\gamma : [0,1] \to V$ amb $q = \gamma(0)$ existeix un únic $\tilde{\gamma}$ en U amb $p = F^{-1}(\gamma(0))$, tal que $\tilde{\gamma}(0) = p$ i $F \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

La idea de la demostració d'aquest lema és conseqüència de que podem elevar isomòrficament entorns de punts del camí de l'espai base, i la finitud ve perquè el camí és compacte, i per tant recobrim amb finits oberts.

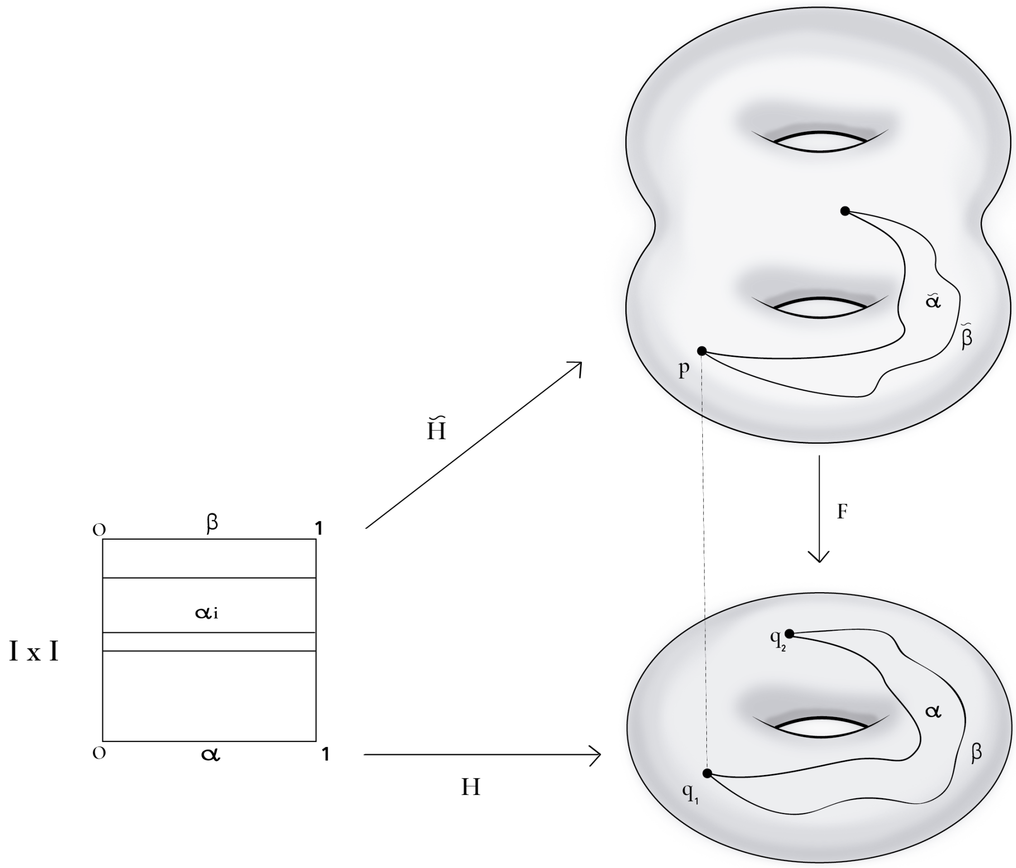


En aquest dibuix, l'espai U és un esboç d'un l'espai recobridor, i aquest diagrama commuta.

Lema 4.5. *Sigui $F : U \to V$ un recobridor de V, i α, β, dos camins homotòpicament equivalents en V que van d'un punt inicial q_1, fins a un q_2, amb una homotopia H. Llavors, existeix una única homotopia $\tilde{H}$ entre les elevacions en $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ de α i β en U començant en algun p amb $F(p) = q_1$.*

Aquest lema ens diu que si tenim dos camins α i β homòtops a l'espai base, podem elevar l'homotopia a l'espai recobridor.

La idea de la demostració s'origina en que podem elevar els camins intermitjos de l'homotopia H entre els camins de l'espai base.



En aquest dibuix, l'espai U és un esboç d'un espai recobridor, i aquest diagrama commuta.

Lema 4.6. *Si $F : U \to V$ és un recobridor, llavors, els conjunts $F^{-1}(q)$ $\forall q \in V$ tenen el mateix cardinal.*

Demostració. Siguin q_1, q_2 dos punts en V, i un camí γ tal que $\gamma(0) = q_1$ i $\gamma(1) = q_2$. Usant F podem definir una funció $F^{-1}(q_1) \to F^{-1}(q_2)$ de la forma següent. Prenent qualsevol punt $p_1 \in F^{-1}(q_1)$, elevem γ a un camí $\tilde{\gamma}$ en U amb punt inicial p_1 tal que $F \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Sigui p_2 el punt final de $\tilde{\gamma}$. Aleshores, $p_1 \to p_2$ és la funció definida.

Usant el camí invers de γ podem definir de la mateixa forma una funció $F^{-1}(q_2) \to F^{-1}(q_1)$. Clarament, aquestes funcions són l'una inversa de l'altre i, per tant, és una funció bijectiva. $\square$

Definició 4.7. *Siguin $F : U \to V$ un recobridor i q un punt en V. Anomenem fibra de q al conjunt $F^{-1}(q)$.*

4.3 Recobridor universal

Definició 4.8. *Diem que dos recobridors $F_1 : U_1 \to V$, $F_2 : U_2 \to V$ són isomorfs si existeix un homeomorfisme $G : U_1 \to U_2$ tal que $F_2 \circ G = F_1$.*

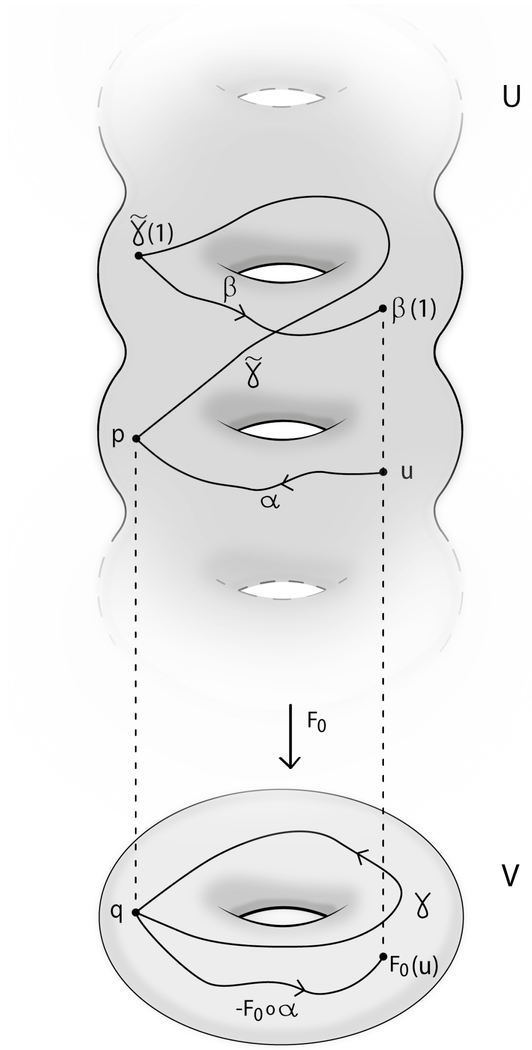
Definició 4.9. *Anomenem recobridor universal a un recobridor $F_0 : U_0 \to V$ tal que U_0 és simplement connex.*

Exemple 4.10. L'*Exemple 4.2* és de fet un recobridor universal, en ser $\mathbb{R}$ contràctil.

Sabem que el recobridor universal existeix i és únic llevat d'isomorfisme (veure capítol 5 del llibre Algebraic topology, an introduction [8]). Una propietat important del recobridor universal F_0, és que si $F : U \to V$ és qualsevol altre recobridor de V, aquest factoritza per F_0 de forma única, de manera que hi ha un únic recobridor $G : U_0 \to U$ tal que $F_0 = F \circ G$.

Acció del grup fonamental en el recobridor universal

Sigui $\pi_1(V, q)$ el grup fonamental de V, i $F_0 : U \to V$ el recobridor universal. Fixem $p \in U$ tal que $q = F_0(p) \in V$ i escollim un llaç γ en V amb punt base q, i un punt $u \in U$. Escollim ara un llaç α en U començant en u i acabant en p. Llavors $F_0 \circ \alpha$ és un camí en V que comença en $F_0(u)$ i acaba en q. Considerem ara les elevacions $\tilde{\gamma}$ de γ i l'elevació β de $-F_0 \circ \alpha$ que comença en $\tilde{\gamma}(1)$. Aleshores, $F_0(\beta(1)) = F_0(u)$.



Això ens diu, per exemple, que el punt $\beta(1)$ depén només del punt u i de la classe d'homotopia $[\gamma]$ del llaç γ ($\beta(1) = [\gamma] \cdot u$). Això ens dóna una acció de $\pi_1(V, q)$ en el recobridor universal $F_0 : U \to V$, i l'acció preserva les fibres del recobridor. A més a més, l'espai de les òrbites $U_0/\pi_1(V,q)$ és homeomorf a l'espai original V.

Ho podem interpretar com que ens desplacem una "fulla"en l'espai recobridor universal per l'acció d'un llaç en l'espai base.

Veient com actua el grup fonamental sobre l'espai recobridor universal, podem construir altres espais recobridors. Donat un subgrup H del grup fonamental $\pi_1(V,q)$, l'aplicació $F : U_0/H \to V$ és un recobridor de V.

Proposició 4.11. *Sigui V una superfície connexa i $q \in V$. Llavors tenim una correspondència bijectiva entre:*

- *Classes d'equivalència de recobridors $F : U \to V$, amb U connex.*
- *Classes de conjugació de subgrups de $\pi_1(V,q)$.*

Per tant, si tenim un subgrup H del grup fonamental $\pi_1(V,q)$, podem obtenir l'espai recobridor fent el quocient U_0/H, on U_0 és l'espai recobridor universal, i si en canvi tenim un recobridor $F : U \to V$, escollim un punt $p \in U$ tal que $F(p) = q$ (on q punt base de V), i agafem el subgrup $H \subset \pi_1(V,q)$ de les classes $[\gamma]$ tal que $[\gamma] \cdot p = p$. El grau del recobridor és exactament l'índex del subgrup H en el grup fonamental.

4.4 Monodromia d'un recobridor finit

Sigui $f : U \to V$ un recobridor amb U connex i de grau d finit, tal que tots els punts tenen exactament d preimatges. Considerem la fibra $\{p_1, \ldots, p_d\} = F^{-1}(q)$ sobre q.

Cada llaç γ amb punt base q el podem elevar a d camins on $\tilde{\gamma}_i$ és l'elevació única de γ tal que $\tilde{\gamma}_i(0) = p_i$.

Si ens fixem ara en els punts finals $\tilde{\gamma}_i(1)$, veiem que aquests també cauen via F sobre q (i.e. $\tilde{\gamma}_i(1) \in F^{-1}(q)$), i cadascun d'aquests punts finals són algun p_j per algun j.

Definició 4.12. *A aquests punts $\tilde{\gamma}_i(1)$ els denotarem per $p_{\sigma(i)}$, on σ és la funció permutació dels índexos $\{1, \ldots, d\}$*

σ només depén de la classe d'homotopia del llaç γ. Hem vist que un llaç $\alpha \in \pi_1(V,q)$ indueix una permutació de $F^{-1}(q)$, i obtenim un morfisme de grups $\rho : \pi_1(V,q) \to S_d$, on S_d és el grup de permutacions de d elements.

Definició 4.13. *Anomenem monodromia del recobridor $F : U \to V$ de grau d finit al morfisme $\rho : \pi_1(V,q) \to S_d$ anterior.*

Definició 4.14. *Diem que un subgrup $H \subset S_d$ és transitiu, si per a qualssevol dos índexos i, j tenim una permutació σ en el grup H que envia i a j (i.e. $\sigma(i) = j$).*

Lema 4.15. *Sigui $\rho : \pi_1(V,q) \to S_d$ la monodromia d'un recobridor $F : U \to V$ de grau finit, amb U connex. Llavors la imatge de ρ és un grup transitiu de S_d.*

Demostració. Fixem dos índexos i, j i considerem els punts p_i, p_j de la fibra $F^{-1}(q)$ per $q \in V$. Com U és connex, podem trobar un camí entre qualssevol dos punts n U, i en particular entre p_i i p_j. Anomenarem el camí que comença a p_i i acaba a p_j $\tilde{\gamma}$. Sigui γ la imatge de $\tilde{\gamma}$ per F (i.e. $\gamma = F \circ \tilde{\gamma}$). Veiem que γ és un llaç en V, ja que tant p_i com p_j cauen via F en q. Llavors tenim que $\rho([\gamma])$ és la permutació que envia i a j. $\square$

5 Connexió de les corbes planes afins irreductibles

En aquesta secció veurem la demostració de la connexitat esmentada en el *Teorema 2.12* en $\mathbb{CP}^2$.

Podem identificar $\mathbb{C}^2$ amb el subconjunt $U = \{[x:y:z] \in \mathbb{CP}^2 \mid z \neq 0\}$ de $\mathbb{CP}^2$ mitjançant l'homeomorfisme $\phi([x:y:z]) = (x/z, y/z)$, $\phi^{-1}(x,y) = [x:y:1]$.

Veiem que $\mathbb{CP}^2 \setminus U$ és homeomorf a $\mathbb{CP}^1$ per l'homeomorfisme $\psi([x:y:0]) = [x:y]$

Donada una corba projectiva C definida per un polinomi homogeni $f(x,y,z)$ el conjunt $C \cap U$ definit pels zeros del polinomi $f(x,y,1)$ forma una corva afí que serà del mateix grau si z no és un factor de $f(x,y,z)$, i.e., si C no conté la recta $z=0$.

Si $p(x,y)$ és un polinomi de grau n de la forma $\sum\limits_{i+j\leq n} \alpha_{ij}x^iy^j$ llavors la corba afí C definida per p és la intersecció amb U de la corba projectiva $\tilde{C}$ definida per $\sum\limits_{i+j\leq n} \alpha_{ij}x^iy^jz^{n-i-j}$. La intersecció de la corba $\tilde{C}$ amb la recta $z=0$ (la recta de l'infinit) serà un conjunt finit si f és irreductible, com veurem més endavant.

Començarem demostrant un lema que ens serà util per facilitar la notació.

Lema 5.1. *Sigui X una corba algebraica plana de grau n. Llavors existeix un sistema de coordenades en $\mathbb{CP}^2$ tal que l'equació que defineix X es pot escriure de la següent forma:*

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0$$

on $a_j(x) \in \mathbb{C}[X]$ amb $gr(a_1) \leq j$, o $a_j(x) = 0$.

Demostració. Sigui $g(x,y) = 0$ l'equació afí de la corba X, i sigui n el seu grau. Si g no és de la forma desitjada, podem escriure $g(x,y) = g_0(x,y) + \cdots + g_n(x,y)$ on $g_i(x,y)$ designa la seva forma de grau i, recordem que li diem forma als polinomis homogenis, i fem el següent canvi de coordenades:

$$x = x' + \lambda y'$$
$$y = y'.$$

Ens fixem ara en què passa en $g_n(x,y)$ que és de la forma $\sum_{i+j=n} \alpha_{ij}x^iy^j$ abans de fer el canvi i de la forma $b(\lambda)y'^n$ (on $b(\lambda)$ s'obté extraient factor comú respecte y'^n) després de fer el canvi. Veiem que és un polinomi no zero en λ i, per tant, pot ser zero en un nombre finit de valors de λ. Podem escollir sempre λ tal que $b(\lambda) \neq 0$ i llavors podem escriure $f(x',y') = (1/b(\lambda))g(x'+\lambda y', y')$. Aleshores, en el sistema de coordenades afí (x',y'), l'equació d'X és $f(x',y') = 0$. □

Recordem que una recta interseca en un nombre finit de punts amb una corba irreductible i de grau com a mínim 2, ja que en un sistema de referència convenient podem suposar que la nostra recta és, per exemple, la recta $x=0$. Per tant, amb la funció que defineix la corba i la recta obtenim un polinomi en $\mathbb{CP}^1$ en dos variables, i que per tant, té un nombre finit d'arrels.

Recordarem ara la definició de punt singular en corba algebraica plana.

Definició 5.2. *Sigui C la corba definida per $f(z,w) = 0$. Direm que un punt $p \in C$ és singular si les derivades parcials de f en p s'anul·len, i.e., $\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{\partial f}{\partial w}(p) = 0$.*

Teorema 5.3. *Una corba algebraica plana irreductible X té un nombre finit de punts singulars.*

Demostració. Escollim un sistema de coordenades perquè l'equació $f(x,y)$ satsfaci el lema anterior. Considerem f com un element de $\mathbb{C}[X][Y]$, i calculem el determinant de la matriu formada entre els coeficients d'f i els de la seva derivada parcial $f_y = \partial f/\partial y$ i l'anomenem $\mathcal{D}(f)(x) \in \mathbb{C}[X]$. Sabem que $\mathcal{D}(f)(x) \not\equiv 0$ en ser f irreductbile.

Sigui ara S el conjunt de punts singulars d'X. Veiem que $S \cap \mathbb{C}^2 \subset \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = f_y(x,y)\}$ i que la projecció a l'eix x és $D = \{x \in \mathbb{C} \mid \mathcal{D}(f)(x) = 0\}$.

Aquest conjunt D és el conjunt nul de polinomis no zero i està format per un nombre finit de punts. A més a més, per a cada $x_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{D}(f)(x) = 0$, només hi ha un nombre finit d'y tal que $f(x_0, y) = 0$. Per tant $S \cap \mathbb{C}^2$ és un conjunt finit.

Com X és irreductible, i la recta a l'infinit L_∞ interseca en un nombre finit de punts, $S \cap L_\infty$ conté un nombre finit de punts.

Per tant un corba plana afí irreductible té un nombre finit de punts singulars. □

Sigui ara $X^* = X \setminus S$, és a dir, el conjunt punts no-singulars d'X. Com sabem que X té un nombre finit de punts singulars i que X i L_∞ intersequen en un nombre finit de punts, tenim que $\overline{X^* \cap \mathbb{C}^2} = X$. Volem usar el següent resultat de topologia:

Sigui A connex i $A \subset B \subset \overline{A}$, llavors B és connex i en particular ho és $\overline{A}$.

Així, per provar la connexitat d'X, només hem de provar la connexitat d'$X^* \cap \mathbb{C}^2$, ja que $X^* \cap \mathbb{C}^2 \subset X^* \subset X = \overline{X^* \cap \mathbb{C}^2}$.

Per veure-ho, necessitem uns conceptes que explicarem a continuació:

Definició 5.4. *Un element d'una funció analítica és un parell (Δ, f), on Δ és un disc obert en $\mathbb{C}$ i f és una funció analítica definida en aquest disc.*

Definició 5.5. *Dos elements de funcions analítiques (Δ_1, f_1), (Δ_2, f_2) són prolongacions analítiques directes l'un de l'altre si $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$ i en $\Delta_1 \cap \Delta_2$ tenim $f_1 \equiv f_2$.*

Definició 5.6. *Una cadena de prolongacions analítiques és una col·lecció d'elements de funcions analítiques $(\Delta_1, f_1), (\Delta_2, f_2), \ldots, (\Delta_N, f_N)$ en que qualssevol parelles successives són continuacions analítiques directes l'una de l'altre.*

Definició 5.7. *Sigui α un camí connex en $\mathbb{C}$ amb punt inicial a i final b. Sigui (Δ_0, f_0) un element d'una funció analítica tal que $a \in \Delta_0$). Diem que (Δ_0, f_0) pot ser analíticament prolongat a través d'α, si existeix una partició d'α, i.e., $\alpha = \bigcup_{j=0}^{N} \alpha_j$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N + 1 = b$, on α_j és la restricció d'α a $[x_j, x_j + 1]$, i una cadena de prolongacions analítiques $(\Delta_0, f_0), (\Delta_1, f_1), \ldots, (\Delta_N, f_N)$ que comença en (Δ_0, f_0) tal que $\alpha_j \subset \Delta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.*

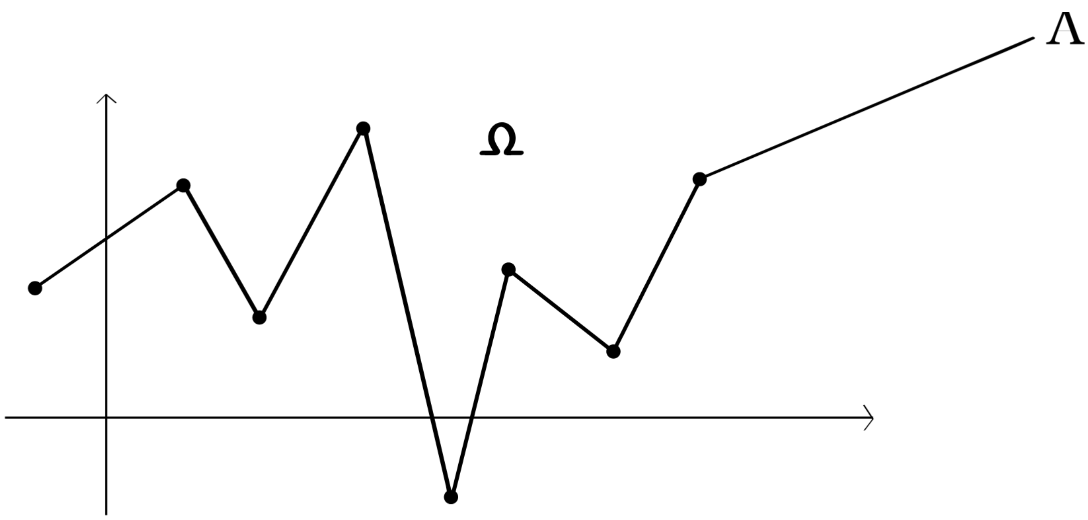
Podem suposar que $X \cap \mathbb{C}^2$ està definida per una equació $f(x,y) = 0$. Sigui $D = \{x \in \mathbb{C} \mid \mathcal{D}(f)(x) = 0\}$, i sigui $\pi : X \cap \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la projecció de $X \cap \mathbb{C}^2$ a la coordenada x. Com $\pi^{-1}(D)$ és finit pel teorema anterior, aleshores per $x \in \mathbb{C} \setminus D$ tenim n punts diferents $(x, y_i(x)) \in X \cap \mathbb{C}^2 \setminus \pi^{-1}(D)$ per $i = 1, \ldots, n$, tal que $f(x, y_i(x)) = 0$. A més a més, pel teorema de la funció implícita, els punts de $X \cap \mathbb{C}^2 \setminus \pi^{-1}(D)$ tal que $f_y \neq 0$ es poden veure com a elements de funcions analítiques definides en un disc.

Sigui Λ la unió de segments que uneixen els punts de D i que va a l'infinit.

Utilitzarem el següent resultat d'anàlisi complexa:

Teorema 5.8. *Suposem $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un conjunt obert simplement connex. Si un element d'una funció analítica pot ser prolongat a través de qualsevol camí en Ω, llavors aquest element d'una funció analítica es pot estendre a una funció holomorfa ben definida en tot Ω.*

Si tallem el pla complex a través de Λ, i fem el complementari de Λ obtenim una regió simplement connexa Ω. Pel teorema anterior, podem prolongar les n funcions $y_i(x)$ en tot Ω, seguirem anomenant les prolongacions com $y_i(x)$. Pel principi d'identitat seguim tenint $f(x, y_i(x)) = 0$ per les funcions prolongades $y_i(x)$.



Ara prolonguem $y_j(x)$ per algun j a través d'α que creua $\Lambda \setminus D$. La prolongació de $y_j(x)$ hem vist que satisfarà $f(x, y_j(x)) = 0$, i si $y_j(x) \neq y_k(x)$ les prolongacions seguiran sent diferents, ja que sinó obtindríem $y_j(x) = y_k(x)$ fent una prolongació a través de $-\alpha$.

Direm que $y_i(x) \sim y_j(x)$ si existeix un camí α en $\mathbb{C} \setminus D$ tal que $y_i(x)$ i $y_j(x)$ són prolongables a través d'α. Usant que $\sim$ és una relació d'equivalència podem dividir els $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ en classes d'equivalència E_k on $k = 0, \ldots, l$.

Volem veure que qualssevol dos punts $(x_0, y_i(x_0))$, $(x_1, y_j(x_1))$ en $X \cap \mathbb{C}^2 \setminus \pi^{-1}(D)$ poden ser connectats per un camí, provant que $X \cap \mathbb{C}^2 \setminus \pi^{-1}(D)$ és connex, i això ho veurem provant que per a cada E_k tenim,

$$\prod_{y_i(x) \in E_k} (y - y_i(x)) \in \mathbb{C}[x, y],$$

i que,

$$f(x, y) = \prod_{k=1}^{l} \prod_{y_i(x) \in E_k} (y - y_i(x))$$

i si $f(x, y)$ és irreductible, només pot ser $l = 1$, això vol dir que tots els $y_i(x)$ pertànyen a la mateixa classe d'equivalència.

Suposem que $E = \{y_1(x), \ldots, y_m(x)\}$ és una classe d'equivalència i per tant

$$\prod_{y_i(x) \in E_m} (y - y_i(x)) = \prod_{j=1}^{m} (y - y_j(x)) = y^m + b_1(x) y^{m-1} + \cdots + b_m(x)$$

on b_i s'obté traient factor comú d'y^{m-i}.

Aquests coeficients b_i defineixen una funció holomorfa en $\mathbb{C} \setminus D$ ja que la prolongació de qualsevol camí en $\mathbb{C} \setminus D$ només porta a permutacions en E.

Pel teorema de Rouché vist en cursos previs d'anàlisi complexa i que recordem, tractava el nombre d'arrels en una regió, si els coeficients del polinomi $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n$ satisfan $|a_i| \leq M$ per $i = 1, \ldots, n$, llavors cada arrel del polinomi satisfarà $|y_i| \leq 1 + M$ per $i = 1, \ldots, n$, i aleshores cada $b_j(x)$ per $i = 1, \ldots, m$ està acotat en un entorn de cada punt en D. Pel *Teorema 5.8* podem prolongar cada $b_j(x)$ a una funció holomorfa en tot $\mathbb{C}$.

Anem a veure ara que cada prolongació $b_j(x)$ és una polinomi. De fet, només cal veure que el punt de l'infinit és un pol per cada $b_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Agafem el polinomi original $f(x, y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$. Fent el canvi de variables $x = 1/x', y = y'/x'$ obtenim,

$$x'^n f(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}) = y'^n + (x' a_1(\frac{1}{x'}))y'^{(n-1)} + \cdots + x'^n a_n(\frac{1}{x'}).$$

Ens adonem que $x'^i a_i(\frac{1}{x'}) \in \mathbb{C}[x']$ ja que $f(x, y)$ satisfà la condició del *Lema 5.1* i per tant $gr(a_i) \leq i$ o $a_i = 0$ per $i = 1, \ldots, n$. Llavors,

$$y'^n + (x' a_1(\frac{1}{x'}))y'^{(n-1)} + \cdots + x'^n a_n(\frac{1}{x'}) \in \mathbb{C}\left[x', y'\right]$$

.

Fixem x' i veiem el polinomi com un polinomi en $\mathbb{C}[y']$. Per tant, r serà arrel d'aquest polinomi en $\mathbb{C}[y']$ si i només si $x'^n f(1/x', r/x') = 0$, que és equivalent a $f(x, r/x') = 0$, i això només passa si $r/x' = y_i(x)$ per algun $i = 1, \ldots, n$, que és el mateix que tenir $r = x' y_i(1/x')$ per algun $i = 1, \ldots, n$.

En el conjunt de les x' tal que $1/x'$ està en $\mathbb{C} \setminus D$, les arrels del polinomi en $\mathbb{C}[y']$ donen lloc a n funcions holomorfes $y'_i(x') = x' y_i(1/x')$ per $i = 1, \ldots, n$, i m d'aquestes es permuten quan les prolonguem a través de qualsevol camí que eviti el conjunt $\{x' \mid x' = 0o1/x' \in D\}$. Veiem ara, que com hem argumentat anteriorment, cada $y'_i(x)$ està acotada en un entorn d'x', i

$$\begin{aligned}
x' b_1(\frac{1}{x'}) &= -x' \sum_{j=1}^{m} y_j(\frac{1}{x'}) = -\sum_{j=1}^{m} y'_j(x') \\
x'^2 b_2(\frac{1}{x'}) &= x'^2 \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} y_j(\frac{1}{x'}) y_k(\frac{1}{x'}) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} y'_j(x') y'_k(x') \\
&. \\
&. \\
&. \\
x'^m b_m(\frac{1}{x'}) &= (-1)^m x'^m y_1(\frac{1}{x'}) \cdots y_m(\frac{1}{x'}) = (-1)^m y'_1(x') \cdots y'_m(x')
\end{aligned}$$

Si tenim que, $x'^i b_i(\frac{1}{x'})$ per $i = 1, \ldots, m$, són funcions holomorfes acotades en un entorn d'$x' = 0$, això ens diu que cada $b_j(x)$ té un pol en $x' = 0$ de multiplicitat com a mínim j, i que $b_j(x)$ és un polinomi de grau com a màxim j.

Per tant, hem provat que $X \setminus \pi^{-1}(D)$ és connex, i com he vist abans, també ho són $X \setminus S$ i X.

Aleshores, si tenim una corba algebraica plana irreductible X, aleshores X i $X \setminus S$ (conjunt de punts no singulars de la corba) són connexos en $\mathbb{CP}^2$.

6 El Teorema d'existència de Riemann

El nostre objectiu en aquest apartat, és comprendre i demostrar com, sota certes condicions, podem construir una superfície de Riemann.

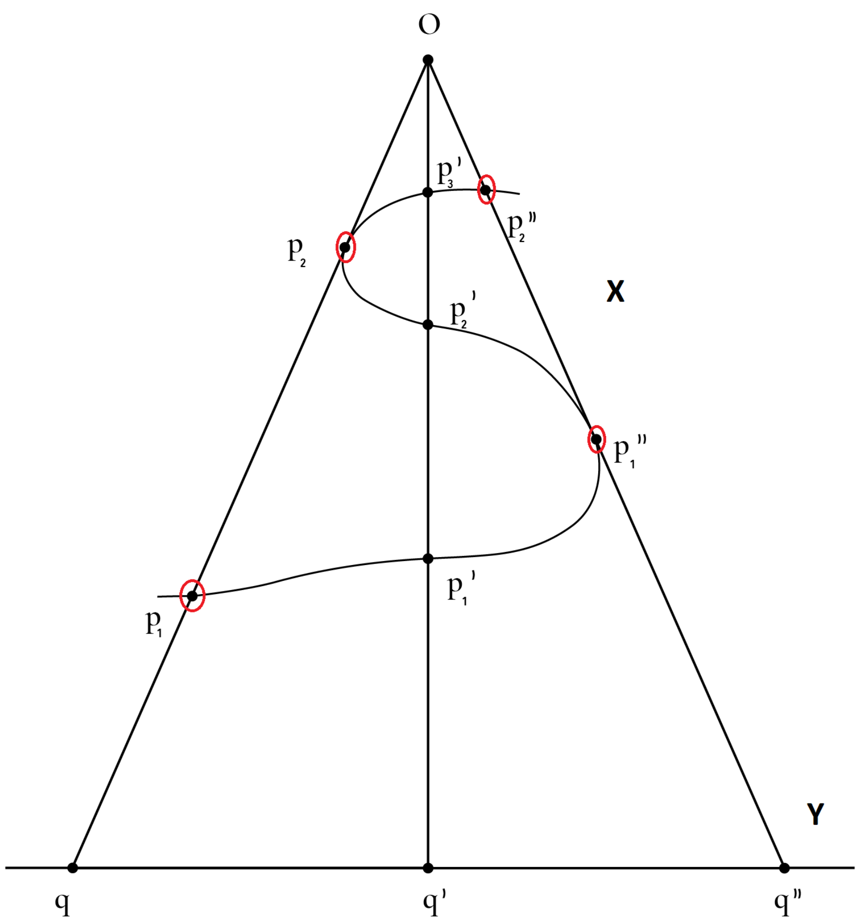
6.1 Monodromia d'un morfisme holomorf

Anteriorment hem vist la monodromia d'un recobridor, i ara volem veure el cas de la monodromia per a morfismes no constants i holomorfs entre superfícies de Riemann, però, degut a la ramificació, en general un morfisme $F : X \to Y$ entre superfícies de Riemann no constant i holomorf no és un recobridor. Anem doncs, a descriure un procés per obtenir un recobridor a partir d'aquest morfisme F.

Sigui $R \subset X$ el conjunt de punts de ramificació que hi ha en $F : X \to Y$, un morfisme entre superfícies de Riemann no constant i holomorf, i sigui $\mathcal{D} = F(R) \subset Y$ el conjunt de punts discriminants. Definim els conjunts $V = Y \setminus \mathcal{D}$ i $U = X \setminus F^{-1}(\mathcal{D})$.

Ens fixem que en Y treiem tots els punts discriminants, i en X treiem totes les preimatges, i no només els punts de ramificació.

Exemple 6.1. Imaginem el morfisme $F : X \to Y$ representat per:



En aquest exemple, els punts p_2 i p_1'' són de ramificació, però tant p_1 com p_2'' no ho són.

Veiem ara que per a qualsevol punt de V, la seva preimatge en U està formada per d punts, cadascun dels quals té multiplicitat 1 per F, i $F_{|U} \to V$ és un recobridor de grau d.

Definició 6.2. *La monodromia d'aquest recobridor és $\rho : \pi_1(V, q) \to S_d$, i s'anomena la monodromia del morfisme holomorf F.*

Veiem que $\rho(\pi_1(V, q)) \subset S_d$ és un subgrup transitu, ja que U és connex en ser-ho també X.

Volem conèixer ara l'estructura de la permutació σ. Per a cada punt discriminant $y \in Y$, agafem un entorn obert W d'y en Y. Ens fixem que per un punt discriminant $y \in Y$ tenim $k < d$ (on d és el grau del morfisme) preimatges per F en X, ja que almenys una de les preimatges serà un punt de ramificació. Anomenarem $u_1, \ldots, u_k$ les preimatges d'y per F.

Sigui $y \in Y$ un punt discriminant. Fem ara un camí γ que és la concatenació de tres camins. El primer, α des del punt base $q \in Y$ fins a un punt q_0 en $W - \{y\}$, el segon, un llaç β des del punt q_0 i que dóna una volta al voltant d'y, i el tercer, $-\alpha$ que retorna al punt q. Anomenarem a γ com a petit llaç al voltant d'y.

Si elevem aquest camí via el recobridor $F : U \to V$, veiem que la permutació σ de la fibra d'F sobre q (via la monodromia ρ) induïda pel llaç γ, està determinada realment pel llaç β al volant d'y, i que tant α com $-\alpha$ ens donen informació sobre la relació entre les fibres de q i q_0.

Escollim ara un entron obert W d'y prou petit, tal que $F^{-1}(W)$ descomposi en una unió disjunta de k entorns oberts $U_1, \ldots, U_k$ de $u_1, \ldots, u_k$, respectivament.

Per la *Proposició 2.28*, tenim coordenades z_j ens els entrons U_j i z en W tal que podem veure F com un morfisme potència de la forma $z = z_j^{m_j}$ en U_j on $m_j = mult_{u_j}(F)$.

Siguin ara $U_j - \{u_j\}$ i $W - \{y\}$. Veiem que els dos conjunts són oberts de U_j i W, respectivament, i isomorfs a un disc punxat, i que F envia $U_j - \{u_j\}$ a $W - \{y\}$ via el m-èsim morfisme potència. La monodromia per a cada recobridor $F_j : U_j - \{u_j\} \to W - \{y\}$ és una permutació cíclica de les m_j preimatges de q_0 en U_j. De fet, β indueix una permutació cíclica d'aquests punts i, per tant, γ ho fa per als punts de la fibra d'F sobre q.

Lema 6.3. *Suposem que tenim k preimatges $u_1, \ldots, u_k$ per F d'un punt discriminant $y \in Y$, amb $mult_{u_j}(F) = m_j$. Llavors, amb la notació anterior, l'estructura cíclica de la permutació σ representant un petit llaç al voltant d'y és $(m_1, \ldots, m_k)$.*

6.2 Recobridors a partir de la monodromia d'un morfisme

Fins ara hem aconseguit trobar la monodromia a partir d'un morfisme holomorf no constant, i un conjunt de punts de l'espai d'arribada del morfisme. A continuació volem fer el procés contrari.

Per tant, suposem que tenim una varietat real V amb un punt base q, i un morfisme $\rho : \pi_1(V, q) \to S_d$, des del grup fonamental de V al grup simètric S_d, amb imatge transitiva.

Sigui ara $H \subset \pi_1(V, q)$ el subgrup format per les classes d'homotopia $[\gamma]$ tal que $\rho\,[\gamma]$ fixa un índex, per exemple l'1, és a dir, $H = \{[\gamma] \in \pi_1(V, q) \mid \rho\,[\gamma]\,(1) = (1)\}$. Llavors, H té índex d i indueix un recobridor $F_\rho : U_\rho \to V$ connex amb monodromia ρ. Aleshores, tenim la proposició següent:

Proposició 6.4. *Sigui V una varietat real connexa. Llavors, tenim una correspondència bijectiva entre:*

- *Classes d'equivalència de recobridors $F : U \to V$ de grau d, amb U connex.*
- *Morfismes de grups $\rho : \pi_1(V, q) \to S_d$ amb imatge transitiva (llevat de conjugació en S_d).*

La conjugació és pel canvi d'índex dels punts de la fibra en l'espai recobridor sobre el punt base.

Suposem ara que V és una superfície de Riemann. Veurem en general, que un espai recobridor d'una superfície de Riemann, és una superfície de Riemann. Les cartes en l'espai recobridor s'obtindrien composant el morfisme recobridor amb cartes de la superfície de Riemann base. Construint les cartes d'aquesta manera, el morfisme recobridor serà holomorf. A més a més, tenim:

Lema 6.5. *Sigui $F : U \to V$ un morfisme recobridor d'una superfície de Riemann V amb U connex. Llavors existeix una única estructura complexa en U tal que F és un morfisme holomorf.*

En particular, l'espai recobridor universal per a qualsevol superfície de Riemann, és una superfície de Riemann. Resumint, tenim el següent:

Corol·lari 6.6. *Sigui V una superfície de Riemann. Aleshores tenim una correspondència bijectiva entre:*

- *Classes d'equivalència de morfismes holomorfs $F : U \to V$ de grau d sense ramificació.*
- *Morfismes de grups $\rho : \pi_1(V, q) \to S_d$ amb imatge transitiva (llevat de conjugació en S_d).*

6.3 Morfismes holomorfs a partir de la monodromia

Aquesta secció pretén ampliar la construció anterior al cas de recobridors amb ramificació. Prèviament hem vist, que un morfisme holomorf amb ramificació no és en general un recobridor, i com obtenir un morfisme a partir d'aquest morfisme ramificat. A continuació es mostra un procés semblant:

Sigui Y una superfície de Riemann, i sigui $\mathcal{D} \subset Y$ un subconjunt finit. Per tant el conjunt $V = Y \setminus \mathcal{D}$ és un obert en Y.

Fixem un punt base $q \in Y$ i suposem que tenim un morfisme de grups $\rho : \pi_1(V, q) \to S_d$ amb imatge transitiva, i sigui $F_\rho : U_\rho \to V$ el recobridor induït per ρ, per tant, com hem vist prèviament, U_ρ és una superfície de Riemann, i F_ρ és un morfisme holomorf de grau d.

Sigui ara W un entorn obert d'$y \in \mathcal{D}$ tal que $W - \{b\}$ és isomorf a un disc punxat i que $F_\rho^{-1}(W - \{b\})$ descomposa en una unió disjunta d'espais recobridors $\tilde{U_j}$ de $W - \{b\}$. Anem a veure que si volem recobridors de grau finit, com $W - \{b\}$ és isomorf a un disc punxat, els espais $\tilde{U_j}$ han de ser també isomorfs a discs punxats i el morfisme recobridor $F_{\rho|\tilde{U_j}} : \tilde{U_j} \to W - \{b\}$ ha de ser un morfisme potència:

Sigui V un disc punxat, i.e, $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, i sigui $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ el semiplà superior. El morfisme $F : \mathbb{H} \to V$ definit per $F(z) = (2\pi iz)$ és el recobridor universal de V. El grup fonamental de V és un grup cíclic infinit general per qualsevol llaç en V que doni una volta al voltant de l'origen. L'acció del grup fonamental en l'espai recobridor $\mathbb{H}$ envia z a $z + n$ per a $n \in \mathbb{Z}$. Si identifiquem el grup fonamental de V amb $\mathbb{Z}$, veiem que els únics subgrups són els generats per enters no negatius $N \geq 0 : N\mathbb{Z}$. Si $N = 0$ tenim el subgrup trivial que es correspon amb l'espai recobridor universal, per $N = 1$ tenim el total del grup fonamental, i es correspon amb l'espai recobridor trivial, és a dir V via la identitat, i si $N \geq 2$, l'espai recobridor es correspon amb el quocient de l'espai recobridor universal $\mathbb{H}$ per la translació $z \mapsto z + N$. Aquest quocient és també un disc punxat D_N, i el morfisme quocient $\pi_N : \mathbb{H} \to D_N$ envia z a $exp(2\pi iz/N)$. Si denotem per w_N una coordenada del disc D_N, veiem que el morfisme recobridor es pot expressar per $w_N = exp(2\pi iz/N)$, on z és una coordenada en $\mathbb{H}$. En particular, la coordenada en l'espai V és w_1 i el recobridor $F_N : D_N \to V$ ve donat per $w_1 = w_N^N$. Suposarem, doncs, que això es compleix i que la potència per al domini $\tilde{U_j}$ és m_j.

Si pensem que W és prou petita, com per estar continguda en el domini d'una carta per Y, veiem que per a cada $\tilde{U_j}$ tenim una carta foradada per U_ρ, i per tant, tapant aquests forats en U_ρ (com hem descrit en un dels exemples del punt *2.2 Exemples de superfícies de Riemann*), obtenim una superfície de Riemann X_ρ i podem estendre $F_\rho : U_\rho \to V$ a un morfisme holomorf $F_\rho : X_\rho \to Y$.

Aquesta extensió és possible ja que podem estendre els morfismes potència $F_{\rho|\tilde{U_j}}$: $\tilde{U_j} \to W - \{b\}$ entre discs punxats a morfismes potència $F_{\rho|U_j} : U_j \to W$ entre discs, i a més a més, si U_j s'obté tapant el forat d'$\tilde{U_j}$, aquesta extensió és holomorfa.

Ens fixem en que X_ρ és compacte, en ser unió de conjunts compactes (la preimatge del compacte $Y \setminus W$, i les clausures dels U_j) i si eliminem el conjunt $\mathcal{D}$ d'Y i les seves preimatges en X_ρ, obtenim un recobridor amb monodromia ρ. Per tant, hem provat el següent:

Proposició 6.7. *Sigui Y una superície de Riemann compacta, sigui $\mathcal{D}$ un subconjunt finit d'Y i siqui q un punt base d'$Y \setminus \mathcal{D}$. Llavors, tenim una correspondència bijectiva entre:*

- *Classes d'equivalència de morfismes holomorfs $F : U \to V$ de grau d tal que els seus punts discriminants estan en $\mathcal{D}$.*
- *Morfismes de grups $\rho : \pi_1(Y\setminus\mathcal{D}, q) \to S_d$ amb imatge transitiva (llevat de conjugació en S_d).*

A més a més, en un punt $y \in \mathcal{D}$, si γ és un petit llaç en $Y\setminus\mathcal{D}$ al voltant d'y que comença i acaba en q, i si $\rho([\gamma])$ té una estructura cíclica $(m_1, \ldots, m_k)$, llavors hi ha k preimatges $u_1, \ldots, u_k$ d'y en el corresponent recobridor $F_\rho : X_\rho \to Y$, amb $mult_{u_j}(F_\rho) = m_j\ \forall j$.

Observació. L'última part d'aquesta proposició ve donada pel *Lema 6.3*.

6.4 Teorema d'existència de Riemann

Aquest teorema tracta el cas particular de la construcció d'una superfície de Riemann juntament amb un morfisme holomorf des d'aquesta superfície a l'esfera, seguint la proposicó anterior.

Teorema 6.8. *Fixem un conjunt finit $\mathcal{D} = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathbb{P}^1$. Llavors, tenim una correspondència bijectiva entre:*

- *Classes d'equivalència de morfismes holomorfs $F : U \to \mathbb{P}^1$ de grau d tal que els seus punts discriminants estan en $\mathcal{D}$.*
- *Classes de conjugació de n-tuplas $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de permutacions en S_d tal que $\sigma_1 \cdots \sigma_n = 1$ i el subgrup generat pels σ_i és transitiu.*

A més a més, si σ_i té estructura cíclica $(m_1, \dots, m_k)$, hi ha k preimatges $u_1, \dots, u_k$ d'y_1 en el recobridor corresponent $F : X \to Y$ amb $mult_{u_j}(F) = m_j$ $\forall j$.

Demostració. Fixem n punts $y_1, \dots, y_n$ en $\mathbb{P}^1$, i un punt base q diferents dels y_i. Sigui $V = \mathbb{P}^1 - \{y_1, \dots, y_n\}$. Llavors, V és una superfície de Riemann tal que el seu grup fonamental és un grup lliure generat per n generadors $[\gamma_1], \dots, [\gamma_n]$ tal que $[\gamma_1] \cdots [\gamma_1] = 1$ en S_d. Aleshores, el morfisme de grups $\rho : \pi_1(V, q) \to S_d$ podem determinar-lo escollint n permutacions $\sigma_i = \rho([\gamma_i])$, amb la condició $\sigma_1 \cdots \sigma_n = 1$ en S_d. La imatge de ρ serà el subgrup generat per els σ_i. Aplicant la *Proposició 6.7* obtenim el que volíem demostrar. $\square$

7 Classificació de les superfícies de Riemann compactes de gènere 2

En aquesta secció es dóna una idea bàsica d'una de les conseqüències que pot tenir el Teorema d'Existència de Riemann, la classificació de les superfícies de Riemann de gènere dos. Abans però, es fa una petita introducció a les formes diferencials en superfícies de Riemann, que ens seran necessàries per utilitzar resultats obtinguts a partir del Teorema de Riemann-Roch.

7.1 Formes diferencials en superfícies de Riemann

Definició 7.1. *Una 1-forma holomorfa en un conjunt obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió de la forma*

$$\omega = f(z)dz$$

on f és una funció holomorfa en V. Diem que ω és una 1-forma holomorfa en la coordenada z.

Definició 7.2. *Suposem que tenim $\omega_1 = f(z)dz$ una 1-forma holomorfa en la coordenada z, definida en un conjunt obert V_1, i $\omega_2 = g(w)dw$ una 1-forma holomorfa en la coordenada w en un conjunt obert V_2. Sigui $z = T(w)$ un morfisme holomorf de V_2 en V_1. Diem que ω_1 es transforma en ω_2 sota T si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.*

Veiem que si T és invertible amb inversa S, quan ω_1 es transforma en ω_2 sota T, ω_2 es transforma en ω_1 sota S.

Ara, transportem aquestes construccions a una superfície de Riemann.

Definició 7.3. *Sigui X una superfície de Riemann. Una 1-forma holomorfa en X és una col·lecció de 1-formes holomorfes $\{\omega_\phi\}$, una per a cada carta $\phi : U \to V$ en la coordenada en V, tal que si dues cartes $\phi_i : U_i \to V_i$ (per $i = 1, 2$) tenen dominis superposats, llavors la 1-forma holomorfa associada ω_{ϕ_1} es transforma en ω_{ϕ_2} sota $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$*

Per definir una 1-forma holomorfa en una superfície de Riemann, no cal que donem 1-formes holomorfes per a cada carta, a continuació veurem que donant 1-formes holomorfes per les cartes d'un atles és suficient.

Lema 7.4. *Sigui X una superfície de Riemann i $\mathcal{A}$ un atles complex en X. Suposem que tenim 1-formes per a cada carta en $\mathcal{A}$, i que es transformen unes en altres en els dominis superposats. Llavors existeix una única 1-forma holomorfa en X estenent aquestes 1-formes holomorfes de cada carta en $\mathcal{A}$.*

Demostració. Sigui ψ una carta que no és de l'atles $\mathcal{A}$ i p un punt en el domini de ψ amb coordenada local associada w. Triem una carta ϕ en $\mathcal{A}$ que contingui p en el seu domini, i sigui z la coordenada local associada. Sigui $f(z)dz$ la 1-forma holomorfa respecte ϕ. Llavors, definim la 1-forma holmorfa repecte ψ com $f(T(w))T'(w)dw$, com $z = T(w)$ descriu el canvi de coordenades $\phi \circ \psi^{-1}$. Per tant, aquesta definició és independent de la carta triada ϕ, i ens dóna una 1-forma holomorfa respecte ψ en cada punt del seu domini. Tal i com ho hem definit, és immediat que totes aquestes 1-formes holomorfes es transformen en els dominis superposats, i per tant, defineixen una 1-forma en X única. □

Definició 7.5. *Una 1-forma meromorfa en un conjunt obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió de la forma*

$$\omega = f(z)dz$$

on f és una funció meromorfa en V. Diem que ω és una 1-forma meromorfa en la coordenada z.

Definició 7.6. *Suposem que tenim $\omega_1 = f(z)dz$ una 1-forma meromorfa en la coordenada z, definida en un conjunt obert V_1, i $\omega_2 = g(w)dw$ una 1-forma meromorfa en la coordenada w en un conjunt obert V_2. Sigui $z = T(w)$ un morfisme holomorf de V_2 en V_1. Diem que ω_1 es transforma en ω_2 sota T si $g(w) = f(T(w))T'(w)$.*

Aquestes construccions es transporten a una superfície de Riemann de manera equivalent a com ho hem fet prèviament en el cas de 1-formes holomorfes.

L'exemple fonamental de forma diferencial consisteix en prendre una funció meromorfa i calcular la seva diferencial. Per tant, sigui f i una funció meromorfa en una superfície de Riemann X. Podem pensar f com que sobre cada obert U tenim una funció f_U. Sigui T la funció de transició entre U i V. Observem que en derivar la relació $f_U \circ T = f_V$ n'obtenim una altra on apareix un T' i que no correspon a una funció, sinó a un nou objecte que no satisfà les relacions que teníem abans però que en satisfà unes de noves on apareix aquesta T'. Aquest nou objecte és la diferencial en X. Aquesta forma associada a f es denota per df.

Notem que quan treballem amb superfícies de Riemann, podem pensar-les com a objectes de dimensió 1 dintre dels complexos, i treballem amb la variable z, o com a superfícies diferenciables en els reals, i treballem amb les parts real i imaginària x i y.

Seguidament, donarem la definició de 1-formes C^∞, que són expressions de la forma $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ on x i y són les variables locals reals, i.e., $z = x + iy$. Aquesta definició serà donada canviant les parts real i imaginària x i y de la variable complexa z, per z i el seu conjugat $\bar{z}$, ja que ens facilitaran aquesta definició.

Recordem que $x = (z + \bar{z})/2$ i $y = (z - \bar{z})/2$, i que $z = x + iy$ i $\bar{z} = x - iy$. Per tant $dx = (dz + d\bar{z})/2$ i $dy = (dz - d\bar{z})/2$, ja que $dz = dx + idy$ i $d\bar{z} = dx - idy$.

Llavors, una funció de la forma $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ es pot escriure de la forma $r(z,\bar{z})dz + s(z,\bar{z})d\bar{z}$.

Veiem que si tenim una funció $f(x,y)$ C^∞, aleshores

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y},$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Per tant, podem definir els operadors $\partial/\partial z$ i $\partial/\partial \bar{z}$ com

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}),$$

i

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Definició 7.7. *Una 1-forma C^∞ en un conjunt obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió de la forma*

$$\omega = f(z,\bar{z})dz + g(z,\bar{z})d\bar{z}$$

on f i g són funcions C^∞ en V. Diem que ω és una 1-forma C^∞ en la coordenada z.

Definició 7.8. *Suposem que tenim $\omega_1 = f_1(z,\bar{z})dz + g_1(z,\bar{z})d\bar{z}$ una 1-forma C^∞ en la coordenada z, definida en un conjunt obert V_1, i $\omega_2 = f_2(w,\bar{w})dw + g_2(w,\bar{w})d\bar{w}$ una 1-forma C^∞ en la coordenada w en un conjunt obert V_2. Sigui $z = T(w)$ un morfisme holomorf de V_2 en V_1. Diem que ω_1 es transforma en ω_2 sota T si $f_2(w,\bar{w}) = f_1(T(w)\overline{T(w)})T'(w)$ i $g_2(w,\bar{w}) = g_1(T(w),\overline{T(w)})\overline{T'(w)}$.*

Definició 7.9. *Una 2-forma C^∞ en un conjunt obert $V \subset \mathbb{C}$ és una expressió de la forma*

$$\eta = f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}$$

on f és una funció C^∞ en V. Diem que η és una 2-forma C^∞ en la coordenada z.

Definició 7.10. *Suposem que tenim $\eta_1 = f(z,\bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ una 2-forma C^∞ en la coordenada z, definida en un conjunt obert V_1, i $\eta_2 = g(w,\bar{w}) \wedge d\bar{w}$ una 1-forma C^∞ en la coordenada w en un conjunt obert V_2. Sigui $z = T(w)$ un morfisme holomorf de V_2 en V_1. Diem que η_1 es transforma en η_2 sota T si $g(w,\bar{w}) = f(T(w),\overline{T(w)})\,\|T'(w)\|^2$.*

Aquestes construccions també es transporten a una superfície de Riemann de manera equivalent a com ho hem fet prèviament.

7.2 Operadors amb formes diferencials

Definició 7.11. *Siguin h una funció C^∞ i ω una 1-forma C^∞ en una superfície de Riemann X. Definim el producte $h\omega$ com la 1-forma C^∞ tal que si $\omega = fdz + gd\bar{z}$, llavors $h\omega = hfdz + hgd\bar{z}$.*

En ser h una funció C^∞, veiem que el producte ens dóna una 1-forma $h\omega$ ben definida en X.

Definició 7.12. *Sigui f una funció C^∞ definida en una superfície de Riemann X. Llavors podem definir les 1-formes C^∞ df, ∂f i $\overline{\partial} f$ en X de la forma següent: Sigui $\phi : U \to V$ una carta en X que dóna una coordenada local z. Escrivim f en U en termes de la coordenada local com $f(z,\bar{z})$. Definim,*

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz,\, \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

i

$$df = \partial f + \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

Com a conseqüència directa d'aquestes definicions, tenim el següent lema.

Lema 7.13. *Les 1-formes estan ben definides en X, i els operadors d, ∂, $\overline{\partial}$ són $\mathbb{C}$-lineals i satisfan:*

$$d(fg) = fdg + gdf;\ \partial(fg) = f\partial g + g\partial f;\ \overline{\partial}(fg) = f\overline{\partial} g + g\overline{\partial} f.$$

Definició 7.14. *Sigui ω una 1-forma C^∞ en una superfície de Riemann X. Llavors podem definir les 2-formes C^∞ $d\omega$, $\partial\omega$ i $\overline{\partial}\omega$ en X de la següent forma: Sigui $\phi : U \to V$ una carta en X que dóna una coordenada local z. Escrivim ω en U en termes de la coordenada local com $f(z,\bar{z}) + g(z,\bar{z})d\bar{z}$. Definim*

$$\partial\omega = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}, \; \overline{\partial}\omega = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z},$$

i

$$d\omega = \partial\omega + \overline{\partial}\omega = (\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}) dz \wedge d\bar{z}.$$

Com a conseqüència directa d'aquestes definicions, tenim el lema següent.

Lema 7.15. *Les 2-formes C^∞ estan ben definides en X.*

Per tant, si definim $\Omega^1(U) = \{\omega \mid \omega \text{ 1-forma holomorfa en } U\}$, amb les definicions donades, és immediat veure què és un $\mathbb{C}$-espai vectorial, ja que la suma de 1-formes holomorfes és una 1-forma, i el producte d'una 1-forma per una constant també.

7.3 Conseqüències del Teorema de Riemann-Roch

Tot i que la demostració del teorema de Riemann-Roch queda una mica lluny d'aquesta memòria (Enunciat i demostració al llibre Algebraic curves and Riemann surfaces [5] i també al llibre Introduction to algebraic curves [3]), n'usarem algunes conseqüències d'aquest.

Conseqüència 1. El $\mathbb{C}$-espai vectorial $\Omega^1(X)$ té dimensió igual al gènere d'X, i.e., $\dim \Omega^1(X) = g(X)$.

Això ens diu que el gènere de la superfície de Riemann X es pot definir com la dimensió de l'espai de les 1-formes holomorfes sobre X.

Ens situem ara en el cas que ens interessa, és a dir, suposem que ens trobem en una superfície de Riemann compacta i connexa X de gènere 2.

Definició 7.16. *Sigui ω_1, ω_2 una base de $\Omega^1(X)$. Donat $p \in X$ considerem ψ una carta centrada en p, en la seva coordenada local tenim que $\omega_i = f_i(\psi(p))d\psi$ per $i = 1, 2$. Llavors, definim un morfisme $\phi : X \to \mathbb{CP}^1$ que envia p a $\phi(p) = [f_1(\psi(p)) : f_2(\psi(p))]$. Freqüentment es denota per $\phi(p) = [\omega_1(p) : \omega_2(p)]$. Aquest morfisme s'anomena morfisme canònic.*

Si canviem la base escollida, és el mateix que compondre amb una projectivitat de $\mathbb{CP}^1$, i.e., mòdul projectivitats, el morfisme no varia, i per això li diem canònic.

Com més endevant veurem que tot tor té un morfisme de grau 2 sobre l'esfera, i una altra conseqüìnecia de Riemann-Roch és:

Conseqüència 2. Les corbes de gènere 1 són isomorfes a corbes planes cúbiques.

A les corbes de gènere 1 se les anomena el·líptiques, per tant és natural donar la següent definició.

Definició 7.17. *Direm que X és una superfície de Riemann hiperel·líptica si té un morfisme de grau 2 sobre $\mathbb{CP}^1$.*

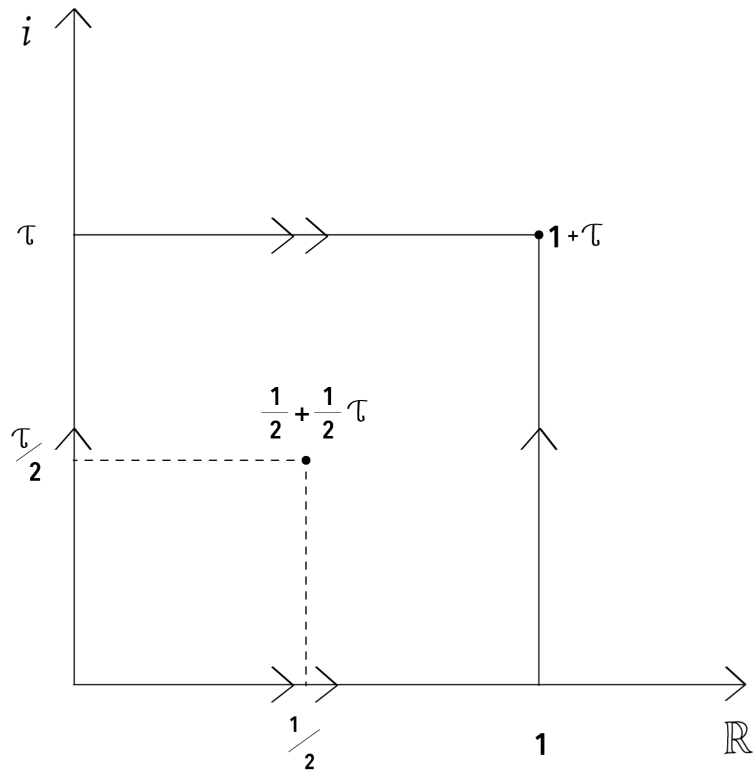
Conseqüència 3. Totes les superfícies de Riemann de gènere 2 són hiperel·líptiques.

Se sap que per superfícies de Riemann de gènere més gran o igual que 3, això ja no és cert.

7.4 Digressió als tors complexos

El cas de gènere 1 és ben conegut i no el tractarem exhaustivament, però en farem un recordatori.

Sigui X un tor, i definim l'automorfisme $F : X \to X$ tal que $F(z) = -z$. Veiem que F és holomorf, ja que és un isomorfisme en $\mathbb{C}$, el seu recobridor universal, que deixa invariant la xarxa L amb la que fem el quocient per obtenir el tor. Per tant tenim una acció de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre X, i podem fer un morfisme $\pi : X \to Y = X/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que per definició serà un morfisme de grau 2. Els punts de ramificació venen donats per els punts tal que $F(z) = -z$, és a dir, puns que van de z a $-z$, que és equivalentment a enviar $2z$ a 0.



Per tant tenim 4 punts de ramificació, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ i $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, i per la fórmula de Riemann-Hurwitz tenim:

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= gr(F)(2g(Y) - 2) + 4 \\ 0 &= 2(2g(Y) - 2) + 4 \\ 0 &= g(Y). \end{aligned}$$

I per tant tot tor és una corba hiperel·líptica que ramifica en 4 punts. Amb aquests 4 punts, mirant la raó doble, obtenim una forma de classificar els tors.

Recordem però, que el nostre objectiu es classificar les corbes de gènere 2.

7.5 Estudi de les 6-tuples sobre $\mathbb{CP}^1$

Sabem que si X és una superfície de gènere 2, és hiperel·líptica. A més a més, per la fórmula de Riemann-Hurwitz sabem que ramificarà en 6 punts diferents sobre l'esfera.

Volem veure ara que hi ha una equivalència entre estudiar superfícies de Riemann de gènere 2 i estudiar col·leccions de 6 punts diferents en $\mathbb{CP}^1$, que anomenarem 6-tuples.

El Teorema d'existència de Riemann ens diu que si tenim l'esfera i triem 6 punts en ella, podem reconstruir una superfície de Riemann que té un morfisme de grau 2 sobre l'esfera que ramifica en aquests 6 punts, i si apliquem una transformació projectiva en aquests 6 punts, la superfície de Riemann que obtenim és isomorfa.

Veiem ara que si tenim dues superfícies de Riemann isomorfes, si apliquem una transformació projectiva sobre els 6 punts de ramificació d'una de les superfícies, obtenim els 6 punts de ramificació de l'altre.

Primer observem que un isomorfisme F entre dues superfícies de Riemann compactes de gènere 2 X i Y indueix a un isomorfisme entre els espais $\Omega^1(X)$ i $\Omega^1(Y)$, ja que un morfisme envia formes diferencials a formes diferencials, simplement composant el morfisme amb cartes, i podem veure l'isomorfisme com un canvi de coordenades. Per tant aquest isomorfisme ens porta una base d'$\Omega^1(X)$ a una d'$\Omega^1(Y)$. Obtenim doncs, el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ \mathbb{CP}^1 \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

Sabem que tant f_1 com f_2 tenen grau 2, i que F té grau 1, per tant, ψ ha de tenir grau 1, és a dir, ψ és un automorfisme en $\mathbb{CP}^1$.

Proposició 7.18. *Sigui f una funció meromorfa en X. Definim una funció $F : X \to \mathbb{CP}^1$ tal que*

$$F(x) = \begin{cases} \infty & x\, pol\, d'f \\ f(x) \in \mathbb{C} & altrament. \end{cases}$$

Llavors F indueix una correspondència bijectiva entre les funcions meromorfes f en X i els morfismes holomorfs $F : X \to \mathbb{CP}^1$ que no són identicament ∞.

Per altra banda sabem que tota funció meromorfa sobre $\mathbb{CP}^1$ és un quocient de dos polinomis homogenis del mateix grau, per tant ψ ve donada per $P(z)/Q(z)$. Si el grau d'aquests polinomis és major o igual que 2, tindrem com a mínim 2 punts amb imatge 0 i dos punts amb imatge ∞ i per tant no seria un automorfisme. Aleshores, tant P com Q han de ser lineals i podem escriure l'automorfisme com $[P : Q]$ formes lineals, obtenint que és una transformació projectiva.

Els automorfismes en $\mathbb{CP}^1$ són anomenats transformacions de Möbius, i com hem vist, són transformacions projectives.

Per tant, hem obtingut que classificar superfícies de Riemann de gènere dos mòdul isomorfisme és el mateix que classificar 6-tuples en $\mathbb{CP}^1$ mòdul transformacions lineals.

Definició 7.19. *Definim PGL_2 com el conjunt de transformacions projectives sobre la recta projectiva, i.e., matrius 2×2 invertibles, mòdul multiplicar per constant.*

Definició 7.20. *Direm que dues 6-tuples $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_6)$ i $\mu' := (\mu'_1, \ldots, \mu'_6)$ estan relacionades si existeix un automorfisme $M \in \mathbb{CP}^1$ tal que $(M\mu_1, \ldots, M\mu_6) = (\mu_1, \ldots \mu_6)$. Ho denotarem per $\mu \sim \mu'$*

Aquesta relació és d'equivalència, ja que és reflexiva en tenir que $Id_2 \in PGL_2$, simètrica ja que qualsevol matriu en PGL_2 és invertible i és transitiva per la multiplicació matricial estàndard.

7.6 Construcció de l'espai $\mathcal{M}_2$

Volem donar ara algunes idees intuïtives sobre l'espai que classifica les superfícies Riemann de gènere 2 mòdul isomorfisme. La forma natural de construir-lo és usant el teorema d'existència de Riemann per buscar un espai que parametritzi aquestes superfícies. Definim $\mathcal{M}_2 = \{X \mid X \text{ superfície de Riemann de gènere 2 connexa i compacta}\}/\cong$.

Tornant al cas on haviem arribat a la secció anterior, hem d'estudiar 6 punts desordenats en $\mathbb{CP}^1$, la qual cosa no és trivial, però estudiar aquestes 6-tuples és el mateix que estudiar polinomis homogenis de grau 6 en dues variables, anomenada forma binària, amb 6 arrels diferents. D'aquí deduirem que el quocient del producte de sis còpies de $\mathbb{CP}^1$ per l'acció del grup de les permutacions és isomorf a $\mathbb{CP}^6$

Per veure-ho, agafem 6 punts en $\mathbb{CP}^1$, en un sistema de referència tal que els punts són de la forma

$$[a_1 : a_2], [b_1 : b_2], [c_1 : c_2], [d_1 : d_2], [e_1 : e_2], [f_1 : f_2],$$

i aleshores, construim el polinomi que resulta en multiplicar les seves equacions associades. Per exemple, diem que el punt $[\alpha : \beta] \in \mathbb{CP}^1$ té per equació associada $\alpha x - \beta z = 0$. Per tant, obtenim 7 coeficients, la qual cosa ens diu que ens trobem en $\mathbb{CP}^6$.

Definició 7.21. *Sigui $f(x,z) = \lambda_0 x^6 + \lambda_1 x^5 z + \lambda_2 x^4 z^2 + \lambda_3 x^3 z^3 + \lambda_4 x^2 z^4 + \lambda_5 x z^5 + \lambda_6 z^6 \in \mathbb{C}[x,z]$, i sigui $f(x,1)$ el polinomi deshomogeneïtzat. Anomenem a $f(x,z)$ i $f(x,1)$ sextets binaris i denotarem per $\mathcal{B}_6$ el conjunt de sextets binaris.*

Per imposar que les 6 arrels siguin diferents, necessitem una condició més per a la qual usarem la següent proposició que deriva de resultats de l'assignatura d'equacions algebràiques:

Proposició 7.22. *Sigui $f \in \mathcal{B}_6$ i siguin $\mu_1, \ldots, \mu_6$ els seus zeros. Els discriminant $D(\lambda)$ d'f no s'anul·la si i només si tots els zeros d'f són diferents.*

Si calculem el discriminant de $f(x,1) \in \mathcal{B}_6$, obtenim una equació en funció dels coeficients, que és un tancat de $\mathbb{CP}^6$, i és el lloc on coincideixen les arrels. Per tal de tenir 6 arrels diferents ens trobem treballant en $\mathbb{CP}^6 \setminus H$, on H és el tancat generat per l'equació obtinguda en fer el discriminant.

Sigui $f(x,z)$ un polinomi de grau 6 en dues variables mòdul multiplicar per constant, obtingut multiplicant les equacions associades a 6 punts de $\mathbb{CP}^1$ en una referència. Com ja sabem, $M \in PGL_2$ actúa sobre les coordenades dels punts, per exemple, si tenim un punt de coordenades $[\alpha : \beta]$:

$$PGL_2 \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta)$$

Aleshores, els 6 punts que teniem van a 6 punts nous. Per tant, en construir de nou el polinomi multiplicant les equacions associades a aquests nous 6 punts i igualant coeficients, obtenim la relació que ens descriu com actua PGL_2 sobre $\mathbb{CP}^6 \setminus H$.

Exemple 7.23. Mirarem com actúa en el coeficient de x^6: Siguin

$$[a_1 : a_2], [b_1 : b_2], [c_1 : c_2], [d_1 : d_2], [e_1 : e_2], [f_1 : f_2],$$

6 punts de $\mathbb{CP}^1$, i sigui

$$f(x, z) = (a_2x - a_1z)(b_2x - b_1z)(c_2x - c_1z)(d_2x - d_1z)(e_2x - e_1z)(f_2x - f_1z)$$

el producte de les seves equacions associades. Si anomenem λ_i el coeficient que acompanya al terme $x^{6-i}z^i$ per $i = 0, \ldots, 6$ obtenim:

$$\lambda_0 = a_1b_1c_1d_1e_1f_1$$

$$\lambda_1 = -a_1b_1c_1d_1e_1f_2 - a_1b_1c_1d_1e_2f_1 - a_1b_1c_1d_2e_1f_1 - a_1b_1c_2d_1e_1f_1 - a_1b_2c_1d_1e_1f_1 - a_2b_1c_1d_1e_1f_1$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = {} & a_1b_1c_1d_1e_2f_2 + a_1b_1c_1d_2e_1f_2 + a_1b_1c_2d_1e_1f_2 + a_1b_2c_1d_1e_1f_2 + a_2b_1c_1d_1e_1f_2 \\ & + a_1b_1c_1d_2e_2f_1 + a_1b_1c_2d_1e_2f_1 + a_1b_2c_1d_1e_2f_1 + a_2b_1c_1d_1e_2f_1 + a_1b_1c_2d_2e_1f_1 \\ & + a_1b_2c_1d_2e_1f_1 + a_2b_1c_1d_2e_1f_1 + a_1b_2c_2d_1e_1f_1 + a_2b_1c_2d_1e_1f_1 + a_2b_2c_1d_1e_1f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 = {} & -a_1b_1c_1d_2e_2f_2 - a_1b_1c_2d_1e_2f_2 - a_1b_2c_1d_1e_2f_2 - a_2b_1c_1d_1e_2f_2 - a_1b_1c_2d_2e_1f_2 \\ & - a_1b_2c_1d_2e_1f_2 - a_2b_1c_1d_2e_1f_2 - a_1b_2c_2d_1e_1f_2 - a_2b_1c_2d_2e_1f_2 - a_2b_2c_1d_2e_1f_2 \\ & - a_1b_1c_2d_2e_2f_1 - a_1b_2c_1d_2e_2f_1 - a_2b_1c_1d_2e_2f_1 - a_1b_2c_2d_1e_2f_1 - a_2b_1c_2d_1e_2f_1 \\ & - a_2b_2c_1d_1e_2f_1 - a_1b_2c_2d_2e_1f_1 - a_2b_1c_2d_2e_1f_1 - a_2b_2c_1d_2e_1f_1 - a_2b_2c_2d_1e_1f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 = {} & a_1b_1c_2d_2e_2f_2 + a_1b_2c_1d_2e_2f_2 + a_2b_1c_1d_2e_2f_2 + a_1b_2c_2d_1e_2f_2 + a_2b_1c_1d_2e_2f_2 \\ & + a_2b_2c_1d_1e_2f_2 + a_1b_2c_2d_2e_1f_2 + a_2b_1c_2d_2e_1f_2 + a_2b_2c_1d_2e_1f_2 + a_2b_2c_2d_1e_1f_2 \\ & + a_1b_2c_2d_2e_2f_1 + a_2b_1c_2d_2e_2f_1 + a_2b_2c_1d_2e_2f_1 + a_2b_2c_2d_1e_2f_1 + a_2b_2c_2d_2e_1f_1 \end{aligned}$$

$$\lambda_5 = a_1b_2c_2d_2e_2f_2 - a_2b_1c_2d_2e_2f_2 - a_2b_2c_1d_2e_2f_2 - a_2b_2c_2d_1e_2f_2 - a_2b_2c_2d_2e_1f_2 - a_2b_2c_2d_2e_2f_1$$

$$\lambda_6 = a_2b_2c_2d_2e_2f_2$$

Llavors, apliquem una matriu de PGL_2 als nostres punts inicials de $\mathbb{CP}^1$ com fem a continuació amb $[a_1 : a_2]$:

$$PGL_2 \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto (\alpha a_1 + \beta a_2, \gamma a_1 + \delta a_2)$$

Seguidament, construim el polinomi multiplicant els polinomis associats. Per exemple, el polinomi associat de la coordenada $[a_1 : a_2]$ és:

$$(\gamma a_1 + \delta a_2)x - (\alpha a_1 + \beta a_2)z$$

Mirem ara el coeficient de x^6 que anomenarem $\bar{\lambda_0}$:

$$\bar{\lambda_0} = (\gamma a_1 + \delta a_2)(\gamma b_1 + \delta b_2)(\gamma c_1 + \delta c_2)(\gamma d_1 + \delta d_2)(\gamma e_1 + \delta e_2)(\gamma f_1 + \delta f_2)$$

i obtenim:

$$\bar{\lambda_0} = \lambda_6\delta^6 - \lambda_5\gamma\delta^5 + \lambda_4\gamma^2\delta^4 - \lambda_3\gamma^3\delta^3 + \lambda_2\gamma^4\delta^2 - \lambda_1\gamma^5\delta + \lambda_0\gamma^6$$

En general, si a una forma binària $f(x, y)$ li apliquem una transformació tal que

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{f}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = f(x, y),$$

els seus coeficients estan relacionats per:

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^{n} \bar{\lambda_k} \{ \sum_{j=\max\{0,i+k-n\}}^{\min\{i,k\}} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k-j} \alpha^j \beta^{k-j} \gamma^{i-j} \delta^{n+j-i-k} \},$$

per $i = 0, \ldots, n$.

I per tant, veiem que tenim una acció sobre el polinomi i ja no sobre les coordenades, ja que els coeficients d'un, només depenen dels coeficients de l'altre i dels elements de la matriu.

Definició 7.24. *Un invariant d'un forma binària $f(x, z)$ de grau 6, és una funció $F(\lambda) = F(\lambda_0, \ldots, \lambda_6)$, depenent dels 6 coeficients λ_i, llevat de factor determinant, que no varia respecte les transformacions anteriors, i.e., $F(\lambda) = (\det M)^{6k} F(\bar{\lambda})$, on $\bar{\lambda} = \bar{\lambda_0}, \ldots, \bar{\lambda_6}$ són els coeficients del polinomi transformat.*

El nostre problema inicial de classificació de superfícies de Riemann connexes i compactes de gènere 2, s'ha convertit en l'estudi de l'acció del grup PGL_2 sobre $\mathbb{CP}^6 \setminus H$ i usant teoria relacionada als invariants podem estudiar l'espai quocient $(\mathbb{CP}^6 \setminus H)/PGL_2$, els elements del qual acaben sent qui parametriza a $\mathcal{M}_2$.

L'estudi dels invariants de les formes binàries és un tema clàssic (veure [4]) que permet demostrar que el quocient esmentat tingui estructura de varietat de dimensió 3, aquest estudi, però, escapa una mica als objectius d'aquest TFG. No obstant això, no és sorprenent que la dimensió sigui 3, ja que si agaféssim els punts ordenats, podríem suposar que els tres primers punts són $0, 1, \infty$, i el quocient ens donaria tres paràmetres lliures.

Per finalitzar, fer notar que el quocient d'aquesta acció és un espai topològic que en un obert dens té estructura de varietat complexa de dimensió tres. Els punts on no tenim estructura de varietat s'anomenen singulars. Una construcció semblant es pot fer per estudiar les superfícies de Riemann hiperel·líptiques de gènere $g > 2$ i s'obté una varietat, singular, de dimensió $2g - 1$.

Conclusions

La principal motivació per triar aquest tema, va ser intentar augmentar els meus coneixements sobre algunes de les branques que durant el grau més m'havien interessat, com són la topologia i la geometria. El fet d'haver marxat d'Erasmus, i no haver pogut fer algunes de les optatives que hagués volgut, no em permetia utilitzar alguns dels arguments necessaris per tractar temes encara més complexos.

Aquest treball és una primera aproximació a l'estudi de les superfícies de Riemann, que han estat i són objectes d'interès tant en el món matemàtic com fora d'ell. Per això, aquest treball es podria completar aprofundint tant en els temes tractats, com en aquells que només s'han mencionat, com ara el teorema de Riemann-Roch o teoria sobre els invariants entre d'altres.

Finalment, jo crec que la forma natural de seguir amb el treball, seria arribar a entendre el quocient esmentat en la darrera secció, així com estudiar espais de moduli de superfícies hiperel·líptiques per a gèneres superiors.

Referències

[1] Harbater D.; *Riemann's Existence Theorem.* University of Pennsylvania.

[2] Farkas, H. M., Kra, I.; *Riemann Surfaces.* Graduate studies in mathematics, 71, Springer-Verlag New York, 1992.

[3] Griffiths, P. A.; *Introduction to algebraic curves.* Translations of mathematical monographs, 76, American Mathematical Society, 1989.

[4] Krishnamoorthy, V., Shaska, T., Volkein, H.; *Invariant of binary forms.*

[5] Miranda, R.; *Algebraic curves and Riemann surfaces.* Graduate studies in mathematics, 5, American Mathematical Society, 1995.

[6] S. Donaldson; *Riemann Surfaces.* Oxford Graduate Texts in Mathematics, 22, Oxford University Press, USA, 2011.

[7] van der Valk, M.; *On moduli of hyperelliptic curves of genus two.* Master's thesis in Mathematics University of Groningen, 2011.

[8] W. S. Massey; *Algebraic topology, an introduction.* Graduate texts in mathematics, 56, Springer-Verlag, 1977.