Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# La consistencia del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo

Autor: Raúl Martínez Martínez

Director: Dr. Enrique Casanovas Ruiz-Fornells
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 23 de enero de 2021

## Abstract

In this work we will prove that the axiom of choice (AC) and the generalized continuum hypothesis (GCH) are consistent with the axioms of Zermelo-Freankel if these are already consistent. For that we will define the concepts of model and relativized formula. With these tools we will be able to give a general proof of relative consistency. Once we have achieved that our purpose will be to find an adequate model so we can apply the general proof and obtain the relative consistency of AC and GCH. The model will be the constructible universe, which is what Gödel originally used to give the consistency proof.

## Resumen

En este trabajo demostraremos que el axioma de la elección (AC) y la hipótesis generalizada del continuo (GCH) son consistentes con los axiomas Zermelo-Fraenkel, si estos mismos lo son. Para ello definiremos los conceptos de modelo y fórmula relativizada. Con estos instrumentos podremos dar una demostración general de consistencia relativizada. Una vez hayamos logrado esto, nuestro objetivo será encontrar un modelo adecuado parar poder aplicar la demostración general y obtener la consistencia relativa de AC y GCH. El modelo será el universo construible, que fue el que Gödel usó originalmente para la prueba de consistencia.

2010 Mathematics Subject Classification. 03E17, 03E25, 03E35, 03E45

# Agradecimientos

A mi tutor Enrique Casanovas, siempre disponible.

# Índice

# 1. INTRODUCCIÓN

La hipótesis del continuo surgió como respuesta a la pregunta: ¿Cuántos puntos hay en una línea recta de un espacio euclídeo? El interés en conjuntos de puntos tiene su origen en el análisis funcional. La teoría de conjuntos surgió en parte como respuesta a los múltiples resultados de Bernhard Riemann sobre series trigonométricas y el estudio de funciones discontinuas. El interés en tales funciones llevó a examinar los conjuntos de puntos en el dominio de definición en los que se producían las discontinuidades. Los primeros en tratar el tema fueron Dirichlet, Riemann, y en mayor grado, Lipschitz y Hankel, los cuales se centraron en conjuntos de puntos en los que ciertas funciones eran discontinuas o las cuestiones de convergencia resultaban complicadas. Estos avances, sin embargo, estaban destinados a su aplicación en el análisis y debido a esto no se desarrolló una teoría formal. El mátematico Georg Cantor enfocó el problema de un modo distinto. Decidió desarrollar una teoría rigurosa sobre los números reales de modo que los conjuntos de puntos de estructura más compleja pudiesen ser descritos, analizados e identificados con facilidad. Fue así como Cantor empezó a desarrollar la teoría de conjuntos, lo cual le llevó a observar la diferencia de magnitud entre conjuntos infinitos. Esto fue un punto de inflexión para Cantor, que se centró en el estudio de dichos conjuntos. De este modo la teoría de conjuntos pasó a ser un tema independiente del análisis funcional.

Para poder comparar conjuntos infinitos, Cantor extendió el concepto de número para poder contar los elementos de un conjunto infinito mediante la teoría de cardinales. Cantor definió la cardinalidad mediante la equipotencia, de tal manera que dos conjuntos A y B tienen el mismo “número de elementos” si y sólo si existe una biyección entre ambos. De este modo se puede comparar la cardinalidad de dos conjuntos cualquiera pero no determinar la cardinalidad de un conjunto concreto. Pero esto no supone un problema pues se puede demostrar que para cada cardinal y para cada conjunto de cardinales existe un cardinal inmediatamente siguiente en magnitud y que todos los cardinales se obtienen de ese modo, es decir, como el siguiente cardinal de otro cardinal o de un conjunto de cardinales. Gracias a este teorema, podemos denotar $\aleph_0$ como el primer cardinal tras la números naturales (que también se denota por $\omega$), $\aleph_1$ como el siguiente, $\aleph_2$ como el siguiente, .... Luego $\aleph_\omega$ como el siguiente cardinal tras $\aleph_i$, con $i \in \omega$, el siguiente mediante $\aleph_{\omega+1}$... (la serie se puede prolongar mediante los ordinales, que el propio Cantor desarrolló).

De este modo el problema original consiste en determinar cual de los $\aleph_\alpha$ corresponde a la cardinalidad de una línea recta en un espacio euclídeo. Cantor demostró que tal cardinal es mayor que $\aleph_0$ y conjeturó que es $\aleph_1$, que es lo que llamamos hipótesis del continuo(CH). Cantor también demostró que la cardinalidad del continuo es igual a $2^{\aleph_0}$, que es el cardinal del conjunto de funciones de $\aleph_0$ en 2 (2 es el cojunto que tiene por elementos 0 y 1). Esto permite replantear de nuevo el problema en términos de la cardinalidad del conjunto potencia, puesto que se puede demostrar fácilmente que la cardinalidad de $P(\omega)$ (conjunto potencia de $\omega$) es $2^{\aleph_0}$. Además la hipótesis se puede generalizar a todos los cardinales, afirmando que $\forall \alpha \in \mathbf{ON}$ (la clase de los ordinales), $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$(GCH).

Cantor planteó el problema en 1878 y durante varias décadas no hubo ningún avance significativo, a pesar de que en el 1900 pasara a formar parte de la lista de los problemas de Hilbert y muchos matémationos trabajaran en ello. Uno de ellos era Ernst Zermelo, quien en 1904 introdujo el axioma de la elección(AC) para demostrar el teorema del buen orden (un buen orden de un conjunto $A$ es aquél que es total y para cualquier subconjunto no vacío existe un elemento mínimo en el orden). Con ello había logrado el primer paso que Hilbert había sugerido para resolver la hipótesis del continuo. Sin embargo su demostración no fue aceptada por toda la comunidad matemática, pues en aquel entonces la teoría de conjuntos carecía aún de una axiomatización. En 1908 ofreció una nueva demostración que tubo una mayor aceptación. Desafortunadamente su resultado era incompleto pues el axioma de la elección y el teorema del buen orden son en realidad equivalentes. A pesar de esto, Zermelo logró dar una primera axiomatización de la teoría de conjuntos, que fue perfeccionada en 1922 por Adolf Fraenkel dando lugar a los axiomas de Zermelo-Fraenkel, que son los más usados en teoría de conjuntos.

Finalmente en la década de 1930 Gödel logró avanzar en la resolución del problema mediante la clase $\mathbf{L}$ de los conjuntos construibles. Gödel la construyó por recursión transfinita mediante el uso de la función def y demostró que en $\mathbf{L}$ se satisfacen los axiomas de Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de la elección y la hipótesis generalizada del continuo. Con ello obtuvo la prueba de la consistencia relativa de AC y GCH, es decir, si ZF es consistente también debe ser consistente ZF añadiendo AC y GCH pues partiendo ZF, Gödel había construido un modelo de ZF + AC + GCH.

Sin embargo ese no fue el fin del problema. En 1963, Paul Cohen demostró mediante el uso de la técnica de "forcing"que la negación de la hipótesis generalizada del continuo también es consistente con ZF. Actualmente el problema se considera resuelto parcialmente, pues aunque no se ha determinado la cardinalidad del continuo, los resultados de Gödel y Cohen demuestran que no se puede probar ni refutar únicamente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel.

## Estructura de la Memoria

En este trabajo nos centraremos en la demostración de la consistencia de la hipótesis generalizada del continuo de Gödel. Para ello nos hemos basado principalmente en el libro de Kunen [1], añadiendo las demostraciones que aparecen sólo indicadas y modificando aquellas que se podían simplificar o eran incompletas. Sin embargo en la construcción de la clase $\mathbf{L}$ de los conjuntos construibles se ha optado por el libro de Jech [2], que presenta $\mathbf{L}$ de modo muy similar a como Gödel lo hizo originalmente usando la terminología actual. Esto ha llevado a rehacer las demostraciones de 4.17 y 5.2, que son necesarias para la prueba de consistencia.

En el capítulo 2 introducimos la jerarquía de los conjuntos bien fundados. Esta se construye mediante recursión ordinal mediante el conjunto potencia y servirá de guía en el capítulo 4 cuando introduzcamos una nueva jeraquía. También se trata el concepto de relaciones bien fundadas, así como inducción y recursión en ellas.

En el capítulo 3 definimos los conceptos de modelo y fórmula relativizada a un modelo. La prueba de consistencia se basa en estos dos conceptos. Debemos hallar una clase que satisfaga los axiomas de ZF relativizados a dicha clase (a esto lo denominaremos ser modelo de dichos axiomas) e igualmente con la hipótesis generalizada del continuo. Los conceptos de noción absoluta y fórmula $\Delta_0$ nos permitirán determinar con mayor facilidad si un modelo cumple una determinada fórmula. También en este capítulo presentamos el Teorema de Reflexión.

En el capítulo 4 introducimos el concepto de definibilidad y construimos la jerarquía de los conjuntos construibles. De nuevo construiremos esta jerarquía mediante recursión ordinal usando la función def(en vex de $P(x)$) que definiremos previamente en el mismo capítulo. Dado un conjunto $x$, $\mathrm{def}(x)$ será el conjunto formado por los subconjuntos de

$x$ que son definibles en $x$. Para poder trabajar más fácilmente con def usaremos las operaciones de Gödel, que nos permiten caracterizar $\mathrm{def}(x)$ cuando $x$ es transitivo. Una vez introducida la jerarquía estudiaremos sus propiedades, algunas de las cuales comparte con la jerarquía de los conjuntos bien fundados. Finalmente comprobaremos que la clase de los conjuntos construibles $\mathbf{L}$ es modelo de ZF.

Para acabar en el capítulo 5 introducimos el axioma de constructibilidad. Veremos que de este axioma se deducen AC y la hipótesis generalizada del continuo. Después deduciremos que éstos se cumplen en $\mathbf{L}$, pues esta cumple el axioma de constructibilidad. Una vez visto esto aplicaremos la prueba de consistencia relativa vista en el capítulo 3 para deducir que GCH y AC son consistentes con ZF.

# Previos

## Los axiomas de ZF

A continuación enunciamos los axiomas que conforman la teoría de conjuntos ZF. Cuando nos refiramos a una fórmula entenderemos que se trata de una expresión construida usando el lenguaje formal de la lógica de primer orden.

1. Existencia de conjuntos: $\exists x(x = x)$
2. Extensionalidad: $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
3. Regularidad: $\forall x[\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))]$
4. Esquema de separación: para cada fórmula $\varphi$ cuyas variables libres se hallan entre $x, z, w_1, \dots, w_n$,: $\forall z \forall w_1, \dots, w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi)$
5. Par: $\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z)$
6. Unión: $\forall Z \exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in Z \to x \in A)$
7. Esquema de reemplazo: para cada fórmula $\varphi$ cuyas variables libres se hallan entre $x, z, w_1, \dots, w_n$,: $\forall A \forall w_1, \dots, w_n[\forall x \in A \exists! y \varphi \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi]$

A partir de estos axiomas podemos definir los conceptos de subconjunto, conjunto vacío (que denotaremos por 0), el conjunto unitario de $x(\{x\})$, la función sucesor S ($\mathrm{S}(x) = x \cup \{x\}$) y la gran unión $\bigcup(\bigcup x = \{z : \exists y \in x(z \in y)\})$. Con ellos se definen los siguientes axiomas:

1. Infinito: $\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$
2. Conjunto potencia: $\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$
3. Elección (no forma parte de ZF pero como los dos anteriores se necesitan los axioma del para poder definir el concepto de orden):$\forall A \exists R(R$ bien ordena $A)$

No todos los enunciados requerirán del uso de todos los axiomas. Por ello previo a algunos enunciados se indica cuáles se usan (implícita o explícitamente). $\mathrm{ZF}^-$ abrevia "todos los axiomas de ZF excepto Regularidad", ZF - P abrevia "todos los axiomas excepto el de conjunto potencia"y ZF - Inf abrevia "todos los axiomas de ZF menos el axioma del infinito". En caso de que se use el axioma de la elección se indica añadiendo AC previo al enunciado.

## Clases

Una clase es una colección descrita mediante una expresión del tipo $\{x : \varphi(x)\}$, donde $\varphi$ es una fórmula con $x$ como una de sus variables. Todo conjunto es una clase (puesto que $A = \{x : x \in A\}$) pero no todas las clases son conjuntos. Por ejemplo, si $A = \{x : x \notin x\}$ fuera conjunto, entonces $A \in A \leftrightarrow A \notin A$(es la conocida paradoja de Russell). Tales clases se denominan propias. Entre ellas se encuentran la clase universal $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$, la clase de los ordinales **ON** y la clase de los conjuntos bien fundados **WF**. A fin de distinguir cuando tratamos con clases y cuando solamente conjuntos, nombraremos a las primeras en negrita.

## Teoría de ordinales y cardinales

Damos las definiciones de ordinal y de cardinal junto con algunos resultados básicos:

**Definición 1.1.** *El conjunto de los números naturales $\omega$ es el menor conjunto que contiene al 0 y es cerrado por la función sucesor* $\mathrm{S}$*. Los números naturales son los elemntos de $\omega$.*

**Definición 1.2.** *Un conjunto $A$ es transitivo si $\forall x, y(x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A$.*

**Definición 1.3.** *Un conjunto $\alpha$ es un ordinal si es transitivo y bien ordenado por la pertenencia.*

**Proposición 1.4.** *El conjunto de los números naturales $\omega$ es un ordinal.*

**Proposición 1.5.** *Si $\alpha$ es ordinal,* $\mathrm{S}(\alpha)$ *también.*

**Proposición 1.6.** *Todo conjunto $X$ de ordinales está totalmente ordenado por la pertenencia. Si $X$ es no vacío tiene menor elemento y si es transitivo entonces es un ordinal.*

**Definición 1.7.** *La clase* $\mathbf{ON}=\{\alpha : \alpha$ *es ordinal*$\}$ *es la clase de los ordinales.*

**Definición 1.8.** *Un conjunto $\kappa$ es un cardinal si es un ordinal y no existe ningún ordinal $\alpha<\kappa$ tal que $\kappa$ es biyectable con $\alpha$.*

**Definición 1.9.** *Dado un cardinal $\kappa$, definimos $\kappa^+ = \{\alpha \in \mathbf{ON} : \alpha \preccurlyeq \kappa\}$, donde $\alpha \preccurlyeq \kappa$ significa que existe una función inyectiva de $\alpha$ en $\kappa$.*

**Proposición 1.10.** *Para cada cardinal $\kappa$, $\kappa^+$ es un cardinal. Además $\kappa < \kappa^+$ y no existe ningún cardinal $\mu$ tal que $\kappa < \mu < \kappa^+$.*

**Definición 1.11.** *(AC) Dado un conjunto $A$, definimos $|A|$ la cardinalidad de $A$ clomo el único cardinal $\kappa$ tal que $A$ es biyectable con $\kappa$.*

**Teorema 1.12.** (AC) *Sea $\kappa$ un cardinal infinito y sean $A$, $B$ conjuntos. Suponemos que $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$. Entonces para cualquier conjunto $G$ de funciones finitarias en $A$ cuya cardinalidad es $\leq \kappa$, la clausura de $B$ bajo $G$ tiene cardinalidad $\leq \kappa$.*

**Definición 1.13.** *Una prueba por inducción ordinal es aquella que establece que si para todos los $\beta$ menores o iguales que un determinado ordinal $\alpha$ se cumple una propiedad P($\beta$) y entonces la propiedad se cumple para $\alpha$, entonces todos ordinales cumplen dicha propiedad.*

**Teorema 1.14.** *(Recursión ordinal) Dados un conjunto $A$ y dos funciones* $\mathbf{G}$ *y* $\mathbf{H}$ *existe una única función* $\mathbf{F}$ *cuyo dominio es* $\mathbf{ON}$ *tal que:*

1. $\mathbf{F}(0) = A$
2. $\mathbf{G}(\mathrm{S}(\alpha)) = \mathbf{G}(\alpha)$
3. *Si $\alpha$ es límite,* $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{H}(\{\mathbf{F}(\beta) : \beta<\alpha\})$

**Definición 1.15.** *Dado un conjunto $A$ con un buen orden $R$, decimos que $\alpha$ es el tipo de orden de $A$, Type($A$, $R$), si existe un isomorfismo de $A$ en $\alpha$.*

# 2. CONJUNTOS BIEN FUNDADOS

## 2.1. La jerarquía de los conjuntos bien fundados

**Definición 2.1.** *Por recursión ordinal definimos* $\mathrm{V}_\alpha$ *para* $\alpha \in \mathbf{ON}$.

*a)* $\mathrm{V}_0 = 0$

*b)* $\mathrm{V}_{\alpha+1} = P(\mathrm{V}_\alpha)$

*c) Si* $\alpha$ *es límite,* $\mathrm{V}_\alpha = \bigcup_{\zeta<\alpha} \mathrm{V}_\zeta$

**Definición 2.2.** *Definimos la clase de los conjuntos bien fundados:*

$$\mathbf{WF} = \bigcup \{\mathrm{V}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$$

**Lema 2.3.** *Para todo ordinal* $\alpha$*:*

*a)* $\mathrm{V}_\alpha$ *es transitivo*

*b) Para todo* $\zeta \leq \alpha$, $\mathrm{V}_\zeta \subseteq \mathrm{V}_\alpha$

*Prueba*: Por inducción en $\alpha$. Suponemos que se cumple para $\beta < \alpha$ y lo probamos para $\alpha$.

a) Caso $\alpha = 0$ es inmediato.

b) Caso $\alpha$ límite:

- Inclusión: sea $\zeta$, $\zeta \leq \alpha$. Como $\mathrm{V}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathrm{V}_\xi$, $\mathrm{V}_\zeta \subseteq \mathrm{V}_\alpha$.
- Transitividad: sea $x \in \mathrm{V}_\alpha$ y sea $y \in x$. Como $x \in \mathrm{V}_\alpha$, existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in \mathrm{V}_\beta$. Como por hipótesis inductiva $\mathrm{V}_\beta$ es transitivo, $y \in \mathrm{V}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ y por lo tanto $y \in \mathrm{V}_\alpha$.

c) Caso $\alpha = \beta + 1$. Vemos que si $\mathrm{V}_\beta$ es transitivo entonces $P(\mathrm{V}_\beta)$ también es transitivo.

Sea $x \in P(\mathrm{V}_\beta)$ y sea $y \in x$. Como $x \subseteq \mathrm{V}_\beta$, $y \in \mathrm{V}_\beta$ y como suponemos que $\mathrm{V}_\beta$ es transitivo, $y \subseteq \mathrm{V}_\beta$. Por lo tanto $y \in P(\mathrm{V}_\beta)$.

Esto demuestra, dado que $\mathrm{V}_\alpha = P(\mathrm{V}_\beta)$, que $\mathrm{V}_\alpha$ es transitivo y además $\mathrm{V}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\alpha$.

Además, suponíamos que para todo $\zeta \leq \beta$, $\mathrm{V}_\zeta \subseteq \mathrm{V}_\beta$ lo cual implica que para todo $\zeta \leq \alpha$, $\mathrm{V}_\zeta \subseteq \mathrm{V}\alpha$ ya que o $\zeta = \alpha$ (y entonces $\mathrm{V}_\zeta = \mathrm{V}_\alpha \subseteq \mathrm{V}_\alpha$) o $\zeta \leq \beta$ (y entonces $\mathrm{V}_\zeta \subseteq \mathrm{V}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\alpha$). □

**Definición 2.4.** *Dado* $x \in \mathbf{WF}$ *definimos el rango de* $x$, $\rho(x)$, *como el menor ordinal* $\beta$ *tal que* $x \in \mathrm{V}_{\beta+1}$. (*Observamos que si* $x \in \mathbf{WF}$ *entonces el menor ordinal* $\alpha$ *tal que* $x \in \mathrm{V}_\alpha$ *tiene que ser un ordinal sucesor por la Definición 2.1.c*)

**Lema 2.5.** *Para cada ordinal* $\alpha$*,* $\mathrm{V}_\alpha = \{x \in \mathbf{WF} : \rho(x) < \alpha\}$*.*

*Prueba*: Si $x \in \mathbf{WF}$, $\rho(x) < \alpha$ si y sólo si $\exists\, \beta < \alpha\ (x \in \mathrm{V}_{\beta+1})$ si y sólo si $x \in \mathrm{V}_\alpha$. □

**Lema 2.6.** *Si* $y \in \mathbf{WF}$ *entonces:*

*a)* $\forall x \in y\ (x \in \mathbf{WF} \wedge \rho(x) < \rho(y))$

*b)* $\rho(y) = \sup\{\rho(x)+1 : x \in y\}$

*Prueba*: Para el apartado a), sea $\alpha = \rho(y)$, entonces $y \in \mathrm{V}_{\alpha+1} = P(\mathrm{V}_\alpha)$. Si $x \in y$, entonces $x \in \mathrm{V}_\alpha$ así que $\rho(x) < \alpha$ por el Lema 2.5.

Para el apartado b), sea $\alpha = \sup\{\rho(x) + 1 : x \in y\}$. Por el apartado a), $\alpha \leq \rho(y)$. Como para todo $x \in y$, $\rho(x) < \alpha$, $y \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ y por lo tanto $y \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$. Esto implica $\rho(y) \leq \alpha$. Por lo tanto $\alpha = \rho(y)$. □

**Lema 2.7.** *a) Para todo ordinal* $\alpha$*,* $\alpha \in \mathbf{WF}$ *y* $\alpha = \rho(\alpha)$*.*

*b) Para todo ordinal* $\alpha$*,* $\mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{ON} = \alpha$*.*

*Prueba*:

a) Por inducción ordinal. Suponemos que se cumple para todo $\beta < \alpha$ y lo probamos para $\alpha$.

Entonces para todo $\beta < \alpha$, $\beta \in \mathrm{V}_{\beta+1}$ por hipótesis de inducción. Como $\beta+1 \leq \alpha$ por el Lema 2.3, $\mathrm{V}_{\beta+1} \subseteq \mathrm{V}_\alpha$. Así que $\alpha \subseteq \mathrm{V}_\alpha$, o sea que $\alpha \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$ y por lo tanto $\alpha \in$ **WF.**

Además por el Lema 2.6**,** $\rho(\alpha) = \sup\{\rho(\beta) + 1 \colon \beta \in \alpha\} = \sup\{\beta + 1 \colon \beta \in \alpha\} = \alpha$.

b) Se deduce del apartado a) y el Lema 2.5 usando de nuevo inducción ordinal. Probamos la doble inclusión:

$\subseteq$: Sea $\beta \in \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{ON}$, entonces $\rho(\beta) < \alpha$ y $\beta \in \mathbf{ON}$. Por el apartado a), $\rho(\beta) = \beta$ con lo cual $\beta < \alpha$ y por lo tanto $\beta \in \alpha$.

$\supseteq$: Sea $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in \mathbf{ON}$ y $\rho(\beta) = \beta < \alpha$ y por lo tanto $\beta \in \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{ON}$. □

**Lema 2.8.** *a) Si* $x \in \mathbf{WF}$*, entonces* $\bigcup x$*,* $P(x)$ *y* $\{x\}$ *también pertenecen a* **WF** *y el rango de estos es menor que* $\rho(x)+ \omega$*.*

*b) Si* $x, y \in \mathbf{WF}$*,* $x \times y$*,* $x \cup y$*,* $x \cap y$*,* $\{x, y\}$*,* $\langle x,y\rangle$ *y* $x^y$ *están todos en* **WF***, y el rango de todos estos es menor que* $\max\{\rho(x), \rho(y)\} + \omega$*.*

*Prueba*:

a)
- $P(x)$ : Sea $\alpha = \rho(x)$; entonces $x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ lo cual implica que $P(x) \subseteq P(\mathrm{V}_\alpha)$.
  Por lo tanto $P(x) \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+1}$, es decir, $P(x) \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$ .
  En conclusión: $P(x) \in \mathbf{WF}$ **y** $\rho(P(x)) \leq \alpha + 1 < \alpha + \omega$.
- $\{x\}$*:* Sea $\alpha = \rho(x)$; entonces $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$.
  Por lo tanto $\{x\} \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+1}$, es decir, $\{x\} \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$.
  En conclusión: $\{x\} \in \mathbf{WF}$ y $\rho(\{x\}) \leq \alpha + 1 < \alpha + \omega$.

- $\bigcup x$: Sea $\alpha = \rho(x)$; entonces $x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ .
  Sea $z \in \bigcup x$, entonces existe $y \in x$ tal que $z \in y$.
  Como $y \in \mathrm{V}_\alpha$ y $\mathrm{V}_\alpha$ es transitivo, $z \in \mathrm{V}_\alpha$ y en consecuencia $\bigcup x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$.
  Por tanto $\bigcup x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$.
  En conclusión $\bigcup x \in \mathbf{WF}$ y $\rho(\bigcup x) \leq \alpha < \alpha + \omega$.

b) Sea $\alpha = \max\{\rho(x), \rho(y)\}$:

- $\{x, y\}$: Observamos que $x, y \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$.
  Por lo tanto $\{x, y\} \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+1}$, es decir, $\{x, y\} \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$.
  En conclusión $\{x, y\} \in \mathbf{WF}$ y $\rho(\{x, y\}) \leq \alpha + 1 < \alpha + \omega$.
- $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$: Como $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$, por el apartado a), $\{x\} \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$.
  Por el anterior punto, como también $y \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$, $\{x, y\} \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$.
  Por lo tanto $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+2}$, es decir, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathrm{V}_{\alpha+3}$.
  En conclusión $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathbf{WF}$ y $\rho(\{\{x\}, \{x, y\}\}) \leq \alpha + 2 < \alpha + \omega$.
- $x \cup y$ : Hemos visto que $\{x, y\} \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$. Por el apartado a), $\bigcup\{x, y\} \in \mathrm{V}_{\alpha+3}$.
  En conclusión $\bigcup\{x, y\} \in \mathbf{WF}$ y $\rho(\bigcup\{x, y\}) \leq \alpha + 2 < \alpha + \omega$.
- $x \cap y$ : Como $x \cap y \subseteq x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ , $x \cap y \subseteq \mathrm{V}_\alpha$ .
  Por lo tanto, $x \cap y \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$.
  En conclusión $x \cap y \in \mathbf{WF}$ y $\rho(x \cap y) \leq \alpha < \alpha + \omega$.
- $x \times y$ : Sea $\langle a, b\rangle \in x \times y$. Entonces $a \in x$ y $b \in y$. Como $x, y \subseteq \mathrm{V}_\alpha$, $a, b \in \mathrm{V}_\alpha$. Por lo tanto $\{a\}, \{a, b\} \subseteq \mathrm{V}_\alpha$, con lo cual $\{a\}, \{a, b\} \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$ y $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$. Así pues, $x \times y \in \mathrm{V}_{\alpha+3}$, con lo cual $x \times y \in \mathbf{WF}$ y $\rho(x \times y) \leq \alpha + 2 \leq \alpha + \omega$
- $x^y$: Sea $f \in x^y$, Entonces $f \subseteq x \times y \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+2}$ (visto en el ítem anterior).
  Por lo tanto, $f \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+2}$, es decir, $f \in \mathrm{V}_{\alpha+3}$.
  Así pues, $x^y \subseteq \mathrm{V}_{\alpha+3}$, o $x^y \in \mathrm{V}_{\alpha+4}$.
  En conclusión $x^y \in \mathbf{WF}$ y $\rho(x^y) \leq \alpha + 3 < \alpha + \omega$. □

**Lema 2.9.** *Para todo $x$, $x \in \mathbf{WF}$ si y sólo si $x \subseteq \mathbf{WF}$.*

*Prueba:* Si $x \in \mathbf{WF}$ entonces $x \subseteq \mathbf{WF}$ por la transitividad de $\mathbf{WF}$ (Lema 2.6 apartado a). Si $x \subseteq \mathbf{WF}$**,** sea $\alpha = \sup\{\rho(y){+}1\colon y \in x\}$; entonces $x \subseteq \mathrm{V}_\alpha$, así que $x \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$. □

**Lema 2.10.** *Para todo $n \in \omega$, $|\mathrm{V}_n| < \omega$.*

*Prueba*: Por inducción en $n$:

- El caso $n = 0$ es trivial.
- Suponemos que se cumple para $n$ y lo probamos para $n{+}1$.

  Como $\mathrm{V}_n = P(\mathrm{V}_n)$, $|\mathrm{V}_n| = |P(\mathrm{V}_n)| = 2^{|\mathrm{V}_n|} < \omega$ ya que por hipótesis de inducción $|\mathrm{V}_n| < \omega$. □

**Lema 2.11.** $|\mathrm{V}_\omega| = \omega$

*Prueba*: Como $\omega \subseteq \mathrm{V}_\omega$ ($\omega = \mathrm{V}_\omega \cap \mathrm{ON}$, por el Lema 2.7), sólo falta ver que $\mathrm{V}_\omega$ es numerable.

Con AC: es inmediato del Lema 2.10.

Sin AC: Definimos por inducción en $n$ un buen orden de $\mathrm{V}_n$, por ejemplo, dado un buen orden de $\mathrm{V}_n$, identificando $\mathrm{V}_{n+1}$ con $2^{\mathrm{V}_n}$ y ordenándolo lexicográficamente.

- $n = 1$: definimos un buen orden simplemente con $0 < \{0\}$ ya que estos son los únicos elementos de $\mathrm{V}_1$.
- Suponemos dado un buen orden de $\mathrm{V}_n$ y construimos uno para $\mathrm{V}_{n+1}$. Primeramente identificamos $\mathrm{V}_{n+1}$ con $2^{\mathrm{V}_n}$. Como los elementos de $\mathrm{V}_{n+1}$ son subconjuntos de $\mathrm{V}_n$ tienen un buen orden inducido por el buen orden de $\mathrm{V}_n$. Ahora usando estos buenos órdenes y la identificación previa podemos ordenar lexicográficamente $\mathrm{V}_n$. □

## 2.2. Relaciones bien fundadas

**Definición 2.12.** (*ZF⁻ - P*): *Una relación $R$ es bien fundada en un conjunto $A$ si y sólo si :*

$$\forall\ X \subseteq A\ [\ X \neq 0 \to \exists y \in X\ (\neg \exists z \in X\ (zRy))\ ]$$

*Tal elemento $y$ se llama elemento $R$-minimal en $X$.*

**Lema 2.13.** (*ZF⁻*) *Si $A \in \mathbf{WF}$, $\in$ es bien fundada en $A$.*

*Prueba*: Sea $X \subseteq A$, $X \neq 0$. Sea $\alpha = \min\{\rho(y)\colon y \in X\}$ (todo conjunto de ordinales tiene mínimo). Fijamos $y \in X$ tal que $\rho(y) = \alpha$ . Por el Lema 2.6, $y$ es $\in$ -minimal en $X$. Si $\exists z \in X$ tal que $z \in y$, entonces $\rho(z) < \rho(y)$ lo cual lleva a contradicción con la elección de $y$. □

**Lema 2.14.** (*ZF⁻*) *Si $A$ es transitivo y $\in$ es bien fundada en $A$, entonces $A \in \mathbf{WF}$.*

*Prueba*: Por el Lema 2.9, es suficiente demostrar que $A \subseteq \mathbf{WF}$. Si $A \nsubseteq \mathbf{WF}$, sea $X = A \setminus \mathbf{WF} \neq 0$ y sea $y \in$ -minimal en $X$. Si $z \in y$ entonces $z \notin X$, pero $z \in A$ ya que $A$ es transitivo; así que $z \in \mathbf{WF}$. Por tanto, $y \subseteq \mathbf{WF}$, así que $y \in \mathbf{WF}$ por el lema mencionado, contradiciendo el hecho de que $y \in X = A \setminus \mathbf{WF}$. □

Ahora veremos que $A \in \mathbf{WF}$ si y sólo si $\in$ es bien fundada en la clausura transitiva de $A$ que es el menor conjunto transitivo que contiene a $A$.

**Definición 2.15.** (*ZF⁻ - P*)

*a) Por recursión en $n$ definimos $\bigcup^0 A = A$, $\bigcup^{n+1} A = \bigcup\ (\bigcup^n A)$.*

*b) Definimos la clausura transitiva,* $\mathrm{trcl}(A) = \bigcup\ \{\ \bigcup^n A : n \in \omega\ \}$.

**Lema 2.16.** (*ZF⁻- P*)

*a)* $A \subseteq \operatorname{trcl}(A)$

*b) La clausula transitiva es transitiva.*

*c) Si* $A \subseteq T$ *y* $T$ *es transitivo entonces* $\operatorname{trcl}(A) \subseteq T$.

*d) Si* $A$ *es transitivo entonces* $A = \operatorname{trcl}(A)$.

*e) Si* $x \in A$ *entonces* $\operatorname{trcl}(x) \subseteq \operatorname{trcl}(A)$.

*f)* $\operatorname{trcl}(A) = A \cup \bigcup\{\operatorname{trcl}(x) : x \in A\}$.

*Prueba*:

a) Es obvio.

b) Sea $x \in \operatorname{trcl}(A)$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in \bigcup^n A$. Por tanto $x \subseteq \bigcup^{n+1} A$. Así pues para todo $y \in x$, $y \in \bigcup^{n+1} A$. En conclusión para todo $y \in x$, $y \in \operatorname{trcl}(A)$.

c) Vemos por inducción en $n$ que $\bigcup^n A \subseteq T$, para todo $n \in \omega$:

- Si $n = 0$, $\bigcup^0 A = A \subseteq T$ por hipótesis.
- Suponemos que se cumple para un $n$ y lo probamos para $n+1$:
  Sea $x \in \bigcup^{n+1} A$ . Como $\bigcup^{n+1} A = \bigcup \left(\bigcup^n A\right)$, existe $z \in \bigcup^n A$ tal que $x \in z$. Pero $z \in T$, ya que por hipótesis inductiva $\bigcup^n A \subseteq T$. Finalmente, como $T$ es transitivo, $x \in T$ y por lo tanto $\bigcup^{n+1} A \subseteq T$.

d) Por c), tenemos que, con $T = A$, $\operatorname{trcl}(A) \subseteq A$ y por a) $A \subseteq \operatorname{trcl}(A)$. Por lo tanto $A = \operatorname{trcl}(A)$.

e) Si $x \in A$, $x \in \operatorname{trcl}(A)$ y por transitividad $x \subseteq \operatorname{trcl}(A)$. Aplicando c) con $A = x$ y $T = \operatorname{trcl}(A)$ tenemos que $\operatorname{trcl}(x) \subseteq \operatorname{trcl}(A)$.

f) Probamos primero que $T = A \cup \bigcup\{\operatorname{trcl}(x) : x \in A\}$ es transitivo:

Sea $z \in T$, tenemos dos casos:

1. $z \in A$. Entonces si $y \in z$, $y \in \operatorname{trcl}(z)$ y por lo tanto $y \in T$.

2. $z \in \bigcup\{\operatorname{trcl}(x) : x \in A\}$. Entonces existe $x \in A$ tal que $z \in \operatorname{trcl}(x)$. Por lo tanto $z \subseteq \operatorname{trcl}(x) \subseteq T$.

   Como $T$ es transitivo (y $A \subseteq T$ ), por c) $\operatorname{trcl}(A) \subseteq T$. Pero $T \subseteq \operatorname{trcl}(A)$ ya que $A \subseteq \operatorname{trcl}(A)$ y $\operatorname{trcl}(x) \subseteq \operatorname{trcl}(A)$ para todo $x \in A$. Por lo tanto $\operatorname{trcl}(A) = A \cup \bigcup\{\operatorname{trcl}(x) : x \in A\}$. □

**Teorema 2.17.** (*ZF⁻*) *Para cualquier conjunto* $A$ *son equivalentes:*

*a)* $A \in \mathbf{WF}$

*b)* $\operatorname{trcl}(A) \in \mathbf{WF}$

*c)* $\in$ *es bien fundada en* $\operatorname{trcl}(A)$

*Prueba*:

- $a \to b$ : si $A \in \mathbf{WF}$, $\bigcup^{\mathrm{n}} A \in \mathbf{WF}$ para todo $n \in \omega$ ya que, por el Lema 2.8, $\mathbf{WF}$ es cerrado bajo $\bigcup$. Entonces, usando el Lema 2.9, $\bigcup^{\mathrm{n}} A \subseteq \mathbf{WF}$ para todo $n \in \omega$. Por lo tanto, $\operatorname{trcl}(A) \subseteq \mathbf{WF}$ y, aplicando de nuevo el Lema 2.9, $\operatorname{trcl}(A) \in$ **WF.**
- $b \to c$ : simplemente aplicando el Lema 2.13 tenemos que $\in$ es bien fundada en $\operatorname{trcl}(A)$.
- $c \to b \to a$: si $\in$ es bien fundada en $\operatorname{trcl}(A)$, como $\operatorname{trcl}(A)$ es transitivo, por el Lema 2.14, $\operatorname{trcl}(A) \in \mathbf{WF}$. Como $A \subseteq \operatorname{trcl}(A) \subseteq \mathbf{WF}$(por transitividad de $\mathbf{WF}$), $A \in \mathbf{WF}$ por el Lema 2.9 anteriormente mencionado. □

## 2.3. El axioma de la regularidad

El siguiente enunciado es el axioma de Regularidad:

$$\forall x\ (\exists y\ (y \in x) \to \exists y\ (y \in x \land \neg\exists\ z(z \in x \land z \in y))$$

Equivalentemente si $x$ es no vacío $\exists y \in x$ tal que $x \cap y = 0$, o cada conjunto no vacío tiene un elemento $\in$ –minimal.

**Teorema 2.18.** ($ZF^-$) *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

*a)* *El axioma de regularidad.*

*b)* *Para todo $A$, $\in$ es bien fundada en $A$.*

*c)* $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ ($\mathbf{V}$ *es la clase universal*)

*Prueba*:

- Que $a)$ es equivalente a $b)$ es inmediato de la definición de relación bien fundada.
- Para $b) \to c)$, $b)$ implica que para cualquier $A$, $\in$ es bien fundada en $\operatorname{trcl}(A)$, así que $A \in \mathbf{WF}$ por el Teorema 2.17.
- Para $c) \to b)$, simplemente aplicamos el Lema 2.13. □

*Consecuencias del axioma*:

A diferencia de otros axiomas, el axioma de fundación no tiene una aplicación en las matemáticas comunes, simplemente limita el campo de estudio a $\mathbf{WF}$. Sin embargo excluye ciertos casos patológicos (por ejemplo, implica que $\neg\exists x(x \in x)$) y permite simplificar algunas definiciones.

**Corolario 2.19.** (ZF - P): *$A$ es un ordinal si y sólo si $A$ es transitivo y totalmente ordenado por $\in$.*

*Prueba*: Si $A$ es un ordinal, por definición de ordinal, $A$ es transitivo y bien ordenado por $\in$. En particular es transitivo y totalmente ordenado por $\in$.

Si $A$ es transitivo y totalmente ordenado por $\in$, como por el axioma de fundación $\in$ es bien fundada en $A$, $A$ es transitivo y $\in$ es un buen orden de $A$. $\square$

**Definición 2.20.** *($ZF^-$ - $P$) Sea $\mathbf{R}$ bien fundada en y similar a un conjunto en $\mathbf{A}$. Definimos la función de colapso de Mostowski, $\mathbf{G}$ de $\mathbf{A}$, $\mathbf{R}$ como:*

$$\mathbf{G}(x) = \{\mathbf{G}(y) \colon y \in \mathbf{A} \land y\mathbf{R}x\}$$

*El colapso de Mostowski $\mathbf{M}$ es la imagen de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{G}$. Entonces $\mathbf{G}$:$\mathbf{A}\to\mathbf{M}$, pero $\mathbf{G}$ no tiene porque ser biyección. Por ejemplo si $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{G}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbf{A}$ con lo cual $\mathbf{M} = 0$ aunque $\mathbf{A}$ sea no vacío.*

**Lema 2.21.** *($ZF^-$ - $P$) Con la notación anterior:*

*a)* $\forall x, y \in \mathbf{A}(x\mathbf{R}y \to \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$

*b)* $\mathbf{M}$ *es transitivo*

*c)* *($ZF^-$)* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$

*d)* *($ZF^-$) Si* $x \in \mathbf{A}$, $\rho(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \rho(\mathbf{G}(x))$

*Prueba*:

- Tanto a) como b) son inmediatos de la definición.
- Para c), por inducción en $x$ vemos que $\forall x \in \mathbf{A}$, $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$. Suponemos que se cumple $\forall y$ tal que $y\mathbf{R}x$. Entonces $\mathbf{G}(x) = \{\mathbf{G}(y) \colon y \in \mathbf{A} \land y\mathbf{R}x\} \subseteq \mathbf{WF}$ con lo cual $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$.
- Para d) también por inducción en $x$, comprobamos que $\rho(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \rho(\mathbf{G}(x))$. Si suponemos que $\forall y$ tal que $y\mathbf{R}x$, $\rho(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \rho(\mathbf{G}(y))$ entonces:

$$\rho(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \sup\{\rho(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 \colon y\mathbf{R}x \land y \in \mathbf{A}\} = \sup\{\rho(\mathbf{G}(y))) + 1 \colon y\mathbf{R}x \land y \in \mathbf{A}\} = \rho(\mathbf{G}(x))$$

$\square$

**Definición 2.22.** *($ZF^-$ - $P$) $\mathbf{R}$ es extensional en $\mathbf{A}$ si y sólo si*

$$\forall\ x, y \in \mathbf{A}(\forall z \in \mathbf{A}(z\mathbf{R}x \leftrightarrow z\mathbf{R}y) \to x{=}y)$$

*Es decir, el axioma de extensionalidad es cierto en $\mathbf{A}$ tomando $\mathbf{R}$ en vez de $\in$.*

**Lema 2.23.** ($ZF^-$ - $P$) *Si* $\mathbf{N}$ *es transitiva, entonces* $\in$ *es extensional en* $\mathbf{N}$.

*Prueba*: Para todo $x \in \mathbf{N}$ pred($\mathbf{N}$, $x$, $\in$) $= \{y \in \mathbf{N}$: $y \in x\} = x$. Con lo cual, dados $x, y \in \mathbf{N}$, si pred($\mathbf{N}$, $x$, $\in$) = pred($\mathbf{N}$, $y$, $\in$) entonces $x = y$. □

**Teorema 2.24.** ($ZF^-$ - $P$) *Con la definición de* $\mathbf{G}$*, si* $\mathbf{R}$ *es extensional en* $\mathbf{A}$*, entonces* $\mathbf{G}$ *es isomorfismo, es decir,* $\mathbf{G}$ *es biyección de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{M}$ *y* $\forall x, y \in \mathbf{A}$ $(x\mathbf{R}y \leftrightarrow \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$.

*Prueba*: Vemos primero que $\mathbf{G}$ es biyección por reducción al absurdo. Si no lo fuera, fijamos $x$ $\mathbf{R}$-minimal en $\{x \in \mathbf{A}$: $\exists y \in \mathbf{A}(x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y))\}$ y fijamos $y$ en este conjunto. Como $\mathbf{R}$ es extensional se cumple uno de los siguientes casos:

- Para algún $z \in \mathbf{A}$, $z\mathbf{R}x$ y $\neg(z\mathbf{R}y)$. Como $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ para algún $w$ tal que $w\mathbf{R}y$. Entonces $z \neq w$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ y $z\mathbf{R}x$ lo cual contradice la minimalidad de $x$.
- Para algún $w \in \mathbf{A}$, $w\mathbf{R}y$ y $\neg(w\mathbf{R}x)$. Como $\mathbf{G}(w) \in \mathbf{G}(y) = \mathbf{G}(x)$, $\mathbf{G}(w) = \mathbf{G}(z)$ para algún $w$ tal que $w\mathbf{R}y$. Entonces $z \neq w$, $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(w)$ y $z\mathbf{R}x$ lo cual contradice la minimalidad de $x$.

Con esto tenemos que $\mathbf{G}$ es biyección y por su definición automáticamente se deduce que es isomorfismo. □

## 2.4. Inducción y recursión en relaciones bien fundadas

Si $R$ es bien fundada en $A$, una prueba por "inducción transfinita" en $R$ es aquella que establece $\forall x \in A\ \varphi(x)$ probando primero que para todo $x \in A$,

$$\forall y \in A\ (y\mathrm{R}x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)$$

La conclusión $\forall x \in A\ \varphi(x)$ se debe a que un elemento $R$-minimal de $\{x \in A : \neg\ \varphi(x)\}$ lleva a contradicción.

**Definición 2.25.** ($ZF^-$ - $P$)*:* $\mathbf{R}$ *es bien fundada en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si :*

$$\forall X \subseteq \mathbf{A}\ [\ X \neq 0 \rightarrow \exists y \in X\ (\neg \exists z \in X (z\mathbf{R}y)\ )\ ]$$

Aunque es igual que la definición anterior, formalmente es distinta pues extiende la noción de relación bien fundada también para clases, no únicamente conjuntos.

**Definición 2.26.** ($ZF^-$ - $P$)*:* $\mathbf{R}$ *es similar a un conjunto en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $\forall x \in \mathbf{A}$*,* $\{y \in \mathbf{A} : y\mathbf{R}x\ \}$ *es un conjunto.*

*Notamos que* $\in$ *es similar a un conjunto en cualquier clase* $\mathbf{A}$ *y cualquier relación es similar a un conjunto en un conjunto* $A$.

**Definición 2.27.** (ZF⁻ - P*): Si* **R** *es similar a un conjunto en* **A** *y* $x \in$ **A**, *entonces*

*a)* $\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A}\colon y\mathbf{R}x\}$

*b)* $\text{pred}^0(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}) = \text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$
$\text{pred}^{n+1}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}) = \bigcup\{\text{pred}(\mathbf{A},\ y,\ \mathbf{R})\colon y \in \text{pred}^n(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})\}$

*c)* $\text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}) = \bigcup\{\text{pred}^n(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})\colon n \in \omega\}$

**Lema 2.28.** *(ZF⁻ - P): Si* **R** *es similar a un conjunto en* **A** *y* $x \in$ **A**, *entonces para todo* $y \in \text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$, $\text{pred}(\mathbf{A},\ y,\ \mathbf{R}) \subseteq \text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$.

*Prueba*: Si $y \in \text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$, $\exists\ n \in \omega$ tal que $y \in \text{pred}^n(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$.

Por lo tanto $\text{pred}(\mathbf{A},\ y,\ \mathbf{R}) \subseteq \text{pred}^{n+1}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{A}) \subseteq \text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$. □

**Teorema 2.29.** *(ZF⁻ - P): Si* **R** *es bien fundada en* **A** *y similar a un conjunto en* **A**, *entonces cada subclase no vacía* **X** *de* **A** *tiene un elemento* **R***-minimal.*

*Prueba*: Sea **X** subclase no vacía de **A** y fijamos $x \in \mathbf{X}$. Si $x$ no es **R**-minimal, entonces $\mathbf{X} \cap \text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$ es un *subconjunto* ($\text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$ es conjunto) no vacío de **A** y, por lo tanto, tiene un elemento **R**-minimal $y$. Por el Lema 2.28, $y$ es **R**-minimal (el Lema nos da que $\text{pred}(\mathbf{A},\ y,\ \mathbf{R}) \subseteq \text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})$). □

Recordamos que dada una función $f$ y un subconjunto $A$ del dominio de $f$, $f \restriction A$ es la restricción de $f$ a $A$, es decir, la función con dominio $A$ y que para todo $x \in A$, $f \restriction (x) = f(x)$.

**Teorema 2.30.** *(ZF⁻ - P):* (Recursión transfinita) *Suponemos* **R** *es bien fundada en* **A** *y similar a un conjunto en* **A**. *Si* $\mathbf{F}\colon \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, *entonces hay una única* $\mathbf{G}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *tal que:*

$$\forall x \in \mathbf{R}\ [\ \mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x,\ \mathbf{G}\restriction(\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})))\ ]$$

*Prueba*: Se trata de una generalización de la recursión ordinal con $\mathbf{A} = \mathbf{ON}$ y $\mathbf{R} = \in$. Probamos por separado la existencia y la unicidad:

-*Unicidad:* Se prueba mediante inducción transfinita en **R**. Sean **G** y **G′** cumpliendo el enunciado. Suponemos que para un cierto $x \in \mathbf{A}$, $\mathbf{G}\restriction(\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R})) = \mathbf{G}'\restriction(\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}))$, y vemos que en tal caso $\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}'(x)$.

$\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x,\ \mathbf{G}\restriction(\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}))) = \mathbf{F}(x,\ \mathbf{G}'\restriction(\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}))) = \mathbf{G}'(x)$

-*Existencia:* (abreviamos $\text{pred}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{R}) = \text{pred}(x)$ y $\text{cl}(\mathbf{A},\ x,\ \mathbf{A}) = \text{cl}(x)$)

Decimos que un subconjunto $d \subseteq \mathbf{A}$ es cerrado si y sólo si $\forall x \in d\ (\text{pred}(x) \subseteq d)$. Entonces para cada $x \in \mathbf{A}$, $x$ pertenece a algún subconjunto cerrado (por ejemplo $\{x\} \cup \text{cl}(x)$).

Si $d$ es cerrado, decimos que g es una $d$-aproximación si y sólo si g es una función con dominio $d$ y

$$\forall x \in d\ [\ \text{g}(x) = \mathbf{F}(x,\ \text{g}\restriction(\text{pred}(x)))\ ]$$

Como en la prueba de unicidad, si g es una $d$-aproximación y g$'$ es una $d'$-aproximación, entonces $g\restriction(\ d\cap d') = g'\restriction(\ d\cap d')$.

Por inducción transfinita en $x$, mostramos que hay una $\{x\} \cup \mathrm{cl}(x)$-aproximación.

Si se cumple para todo $y$ tal que $y\mathbf{R}x$, sea $\mathrm{g_y}$ una $\{y\} \cup \mathrm{cl}(y)$-aproximación. Entonces $\mathrm{h} = \bigcup \{\ \mathrm{g_y} : y\mathbf{R}x\ \}$ es una $\mathrm{cl}(x)$-aproximación:

$$\mathrm{dom(h)} = \bigcup\{\{y\} \cup \mathrm{cl}(y)\text{: } y\mathrm{R}x\} = \mathrm{cl}(x)$$

- $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{dom(h)}$ (por indución): Es obvio que $\mathrm{pred}(x) \subseteq \mathrm{dom(h)}$. Vemos ahora que si $\mathrm{pred}^n(x) \subseteq \mathrm{dom(h)}$ entonces $\mathrm{pred}^{n+1}(x) \subseteq \mathrm{dom(h)}$. Sea $z \in \mathrm{pred}^{n+1}(x)$, entonces existe $z' \in \mathrm{pred}^n(x)$ tal que $z\mathbf{R}z'$. Por hipótesis inductiva, $z' \in \mathrm{dom(h)}$; por lo tanto existe $y \in \mathrm{pred}(x)$ tal que $z' \in \{y\} \cup \mathrm{cl}(y)$. Si $z' = y$, $z \in \mathrm{pred(y)} \subseteq \mathrm{cl}(y)$. Si $z' \in \mathrm{cl}(y)$, existe $k \in \omega$ tal que $z' \in \mathrm{pred}^k(y)$ y por lo tanto $z \in \mathrm{pred}^{k+1}(y) \subseteq \mathrm{cl}(y)$. En conclusión, $\mathrm{pred}^{n+1}(x) \subseteq \mathrm{dom(h)}$ lo cual implica que $\mathrm{cl}(x) \subseteq \mathrm{dom(h)}$.

- $\mathrm{dom(h)} \subseteq \mathrm{cl}(x)$: Vemos que $\{y\} \cup \mathrm{cl}(y) \subseteq \mathrm{cl}(x)$ para todo $y \in \mathrm{pred}(x)$. Obviamente $y \in \mathrm{cl}(x)$ para todo $y \in \mathrm{pred}(x)$. Para $\mathrm{cl}(y)$, vemos por inducción que $\mathrm{pred}^n(y) \subseteq \mathrm{cl}(x)$ $\forall\ n \in \omega$. Con $n = 0$, $\mathrm{pred}(y) \subseteq \mathrm{pred}^1(x) \subseteq \mathrm{cl}(x)$. Ahora suponemos que $\mathrm{pred}^n(y) \subseteq \mathrm{cl}(x)$ y lo vemos para $\mathrm{pred}^{n+1}(y)$. Sea $z \in \mathrm{pred}^{n+1}(y)$, entonces existe $z' \in \mathrm{pred}^n(y)$ tal que $z\mathbf{R}z'$. Pero $z' \in \mathrm{cl}(x)$ por hipótesis inductiva, luego existe $k \in \omega$ tal que $z' \in \mathrm{pred}^k(x)$. Como $z \in \mathrm{pred}(z')$, $z \in \mathrm{pred}^{k+1}(x) \subseteq \mathrm{cl}(x)$. En conclusión, $\mathrm{pred}^{n+1}(y) \subseteq \mathrm{cl}(x)$ lo cual implica que $\mathrm{cl}(y) \subseteq \mathrm{cl}(x)$.

Vemos ahora que:

$$\forall z \in \mathrm{cl}(x)\ [\ \mathrm{h}(z) = \mathbf{F}(z,\mathrm{h}\restriction (\mathrm{pred}(z)))\ ]$$

Si $z \in \mathrm{cl}(x)$, existe $y \in \mathrm{pred}(x)$ tal que $\mathrm{h}(z) = \mathrm{g_y}(z)$.

Pero

$$\mathrm{h}(z) = \mathrm{g_y}(z) = \mathbf{F}(z,\ \mathrm{g_y}\restriction(\mathrm{pred}(z))) = \mathbf{F}(z,\ \mathrm{h}\restriction(\mathrm{pred}(z)))$$

Por lo tanto $\mathrm{h}(z) = \mathbf{F}(z,\ \mathrm{h}\restriction(\mathrm{pred}(z)))$.

Recapitulando, $\mathrm{h} = \bigcup\{\ \mathrm{g_y} : y\mathbf{R}x\ \}$ es una $\mathrm{cl}(x)$-aproximación lo cual implica que $\mathrm{h} \cup \{\langle x,\ \mathbf{F}(x,\ \mathrm{h}\restriction(\mathrm{pred}(x)))\rangle\}$ es $\{x\} \cup \mathrm{cl}(x)$-aproximación.

Ahora definimos $\mathbf{G}(x)$ como $\mathrm{g}(x)$ donde g es una $d$-aproximación para algún conjunto cerrado $d$ que contenga a $x$. □

**Definición 2.31.** *(ZF⁻ - P): Si* $\mathbf{R}$ *es bien fundada y similar a un conjunto en* $\mathbf{A}$*, definimos*

$$\rho(x,\ \mathbf{A},\ \mathbf{R}) = \sup\{\rho(y,\ \mathbf{A},\ \mathbf{R})+1\text{: } y\mathbf{R}x \wedge y \in \mathbf{A}\ \}$$

**Lema 2.32.** *(ZF⁻): Si* $\mathbf{A}$ *es transitivo y* $\in$ *es bien fundada en* $\mathbf{A}$*, entonces* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{WF}$ *y* $\rho(x,\ \mathbf{A},\ \in) = \rho(x)$ *para todo* $x \in \mathbf{A}$*.*

*Prueba*: Si $\mathbf{A} \nsubseteq \mathbf{WF}$, sea $x$ $\in$–minimal en $\mathbf{A} \setminus \mathbf{WF}$. Entonces $x \subseteq \mathbf{WF}$ ya que $\mathbf{A}$ es transitivo, así que $x \in \mathbf{WF}$ lo cual es una contradicción. Similarmente, sea $z$ $\in$–minimal en $\{x \in \mathbf{A}\text{: } \rho(x,\ \mathbf{A},\ \mathbf{R}) \neq \rho(x)\}$ (suponemos que es no vacío). Entonces:

$$\rho(z) = \sup\{\rho(x)+1\colon x \in z\} = \sup\{\rho(x, \mathbf{A}, \mathbf{R})+1\colon x \in z\} = \rho(z, \mathbf{A}, \mathbf{R})$$

La igualdad entre supremos se da ya que $z$ es $\in$–minimal en $\{x \in \mathbf{A}\colon \rho(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) \neq \rho(x)\}$ y la última se debe a que $\mathbf{A}$ es transitivo. $\square$

# 3. RELATIVIZACIÓN Y NOCIONES ABSOLUTAS

## 3.1. Relativización

**Definición 3.1.** *Sea* $\mathbf{M}$ *una clase cualquiera; entonces para cualquier fórmula* $\varphi$*, definimos la relativización de* $\varphi$ *a* $\mathbf{M}$*,* $\varphi^{\mathbf{M}}$ *por inducción en* $\varphi$*:*

*a)* $(x = y)^{\mathbf{M}}$ *es* $x = y$

*b)* $(x \in y)^{\mathbf{M}}$ *es* $x \in y$

*c)* $(\varphi \wedge \psi)^{\mathbf{M}}$ *es* $(\varphi^{\mathbf{M}} \wedge \psi^{\mathbf{M}})$

*d)* $(\neg\varphi)^{\mathbf{M}}$ *es* $\neg\, \varphi^{\mathbf{M}}$

*e)* $(\exists x\, \varphi)^{\mathbf{M}}$ *es* $\exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \varphi^{\mathbf{M}})$

*Más brevemente,* $\varphi^{\mathbf{M}}$ *es la fórmula obtenida de* $\varphi$ *sustituyendo los cuantificadores* $\exists x$ *por* $\exists x \in \mathbf{M}$*.*

*Además con esta definición ya podemos relativizar otras formulas elementales:*

- $(\varphi \vee \psi)^{\mathbf{M}}$ *es* $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)^{M}$ *que por nuestra definición es* $\neg(\neg\varphi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\psi^{\mathbf{M}})$*, que es* $(\varphi^{\mathbf{M}} \vee \psi^{\mathbf{M}})$
- $(\forall x\, \varphi)^{\mathbf{M}}$ *es* $(\neg\exists x \neg\varphi)^{\mathbf{M}}$*, que es* $\neg\exists x(x \in \mathbf{M} \wedge \neg(\varphi^{\mathbf{M}}))$*, que es equivalente a* $\forall x(x \in \mathbf{M} \rightarrow \varphi^{\mathbf{M}})$

**Definición 3.2.** *Sea* $\mathbf{M}$ *cualquier clase.*

*a) Para una fórmula* $\varphi$*, "*$\varphi$ es cierta en $\mathbf{M}$*" significa* $\varphi^{\mathbf{M}}$*.*

*b) Para un conjunto de fórmulas* $S$*, "*$S$ es cierta en $\mathbf{M}$*" o "*$\mathbf{M}$ es un modelo de $S$*" significa que cada fórmula de* $S$ *es cierta en* $\mathbf{M}$*.*

**Lema 3.3.** *Sean* $T$ *y* $S$ *dos conjuntos de fórmulas cualesquiera en lenguaje de teoría de conjuntos, y suponemos que, para una clase* $\mathbf{M}$ *no vacía, podemos demostrar a partir de* $T$ *que* $\mathbf{M}$ *es modelo de* $S$*. Entonces* $Con(T) \rightarrow Con(S)$*. (*$Con(a)$ *significa que* $a$ *es consistente, es decir, no genera contradicciones).*

*Prueba*: Si $S$ fuera inconsistente, podríamos demostrar $\chi \wedge \neg\chi$ a partir de $S$ para alguna fórmula $\chi$. Entonces, argumentando desde $T$, podemos probar que $\mathbf{M}$ es modelo de $S$ y por lo tanto $\chi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\chi^{\mathbf{M}}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $T$ es inconsistente.

□

**Lema 3.4.** *Si* $\mathbf{M}$ *es transitiva, entonces el axioma de extensionalidad*

$$\forall x\, \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

*es cierto en* $\mathbf{M}$.

*Prueba*: Relativizando en $\mathbf{M}$, el axioma es:

$$\forall x,\ y \in \mathbf{M}(\forall z \in \mathbf{M}\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Sean $x,\ y \in \mathbf{M}$ y suponemos que $\forall z \in \mathbf{M}(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Sea $u \in x$. Como $\mathbf{M}$ es transitiva, $u \in \mathbf{M}$. Entonces, por hipótesis, $u \in y$ lo cual implica que $x \subseteq y$. Del mismo modo se puede ver que $y \subseteq x$. Aplicando extensionalidad (sin relativizar) tenemos $x = y$. $\square$

**Lema 3.5.** *Sea* $\mathbf{M}$ *clase transitiva. Supongamos que para cada fórmula* $\varphi(x,\ z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)$ *sin más variables libres que las mostradas se cumple:*

$$\forall z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n \in \mathbf{M}\ (\{x \in z\colon \varphi^{\mathbf{M}}(x,\ z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\} \in \mathbf{M})$$

*Entonces el axioma de separación es cierto en* $\mathbf{M}$.

*Prueba*: Tenemos que comprobar que:

$$\forall z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n \in \mathbf{M}\ \exists y \in \mathbf{M}\ (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(x,\ z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n))$$

Ya que este es el axioma de separación relativizado a $\mathbf{M}$. Dados $z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$ en $\mathbf{M}$ tomamos $y = \{x \in z\colon \varphi^{\mathbf{M}}(x,\ z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\} \in \mathbf{M}$; entonces para todo $x \in \mathbf{M}$,

$$x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(x,\ z,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)$$

$\square$

Esta condición puede ser difícil de comprobar, sin embargo en muchos casos se podrá aplicar el siguiente corolario.

**Corolario 3.6.** *Si* $\forall z \in \mathbf{M}\ (P(z) \subseteq M)$, *entonces separación es cierto en* $\mathbf{M}$.

**Lema 3.7.** *Si* $\mathbf{M}$ *es transitivo, el axioma de conjunto potencia es cierto en* $\mathbf{M}$ *si y sólo si*

$$\forall x \in \mathbf{M}\ \exists y \in \mathbf{M}\ (P(x) \cap \mathbf{M} \subseteq y) \qquad (1)$$

*Prueba*: El axioma del conjunto potencia es $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$. Al relativizar obtenemos

$$\forall x \in \mathbf{M}\ \exists y \in \mathbf{M}\ \forall z \in \mathbf{M}\ (z \cap \mathbf{M} \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

Observamos que $(z \subseteq x)^{\mathbf{M}}$ es $\forall u \in \mathbf{M}(u \in z \to u \in x)$, que es equivalente a $z \cap \mathbf{M} \subseteq x$. Además como $\mathbf{M}$ es transitivo, si $z \in \mathbf{M}$, $z \cap \mathbf{M} = z$.

Suponemos que se cumple (1) y probamos que el axioma es cierto en $\mathbf{M}$. Sea $x \in \mathbf{M}$ y sea $y \in \mathbf{M}$ tal que $P(x) \cap \mathbf{M} \subseteq y$. Entonces dado un $z \in \mathbf{M}$ tal que $z \cap \mathbf{M} \subseteq x$, como $z \cap \mathbf{M} \in P(x) \cap \mathbf{M}$, $z \cap \mathbf{M} \in y$.

Recíprocamente, suponemos que se cumple el axioma en $\mathbf{M}$ y probamos (1). Sea $x \in \mathbf{M}$ y sea $y \in \mathbf{M}$ tal que para todo $z \in \mathbf{M}$, si $z \cap \mathbf{M} \subseteq x$ entonces $z \in y$. Ahora dado un $u \in P(x) \cap \mathbf{M}$, como $\mathbf{M}$ es transitivo y $u \in \mathbf{M}$, $u = u \cap \mathbf{M}$. Por lo tanto $u \cap \mathbf{M} \subseteq x$ con lo cual $u \in y$. □

**Lema 3.8.** *Si* $\forall x, y \in \mathbf{M}\ \exists z \in \mathbf{M}\ (x \in z \wedge y \in z)$ *y* $\forall x \in \mathbf{M}\ \exists z \in \mathbf{M}\ (\bigcup x \subseteq z)$, *entonces los axiomas del Par y de Unión son ciertos en* $\mathbf{M}$.

*Prueba*: El axioma del Par es inmediato pues el axioma sin relativizar es $\forall x, y\ \exists z\ (x \in z \wedge y \in z)$ y simplemente al relativizar obtenemos $\forall x, y \in \mathbf{M}\ \exists z \in \mathbf{M}\ (x \in z \wedge y \in z)$.

El axioma de Unión sin relativizar es $\forall x\ \exists \mathrm{A}\ \forall v, y\ (v \in y \wedge y \in x \to v \in \mathrm{A})$. Al relativizar obtenemos $\forall x \in \mathbf{M}\ \exists \mathrm{A} \in \mathbf{M}\ \forall v, y \in \mathbf{M}\ (v \in y \wedge y \in x \to v \in \mathrm{A})$. Sea $x \in \mathbf{M}$ y sean $v, y \in \mathbf{M}$ tales que $v \in y \wedge y \in x$; entonces $v \in \bigcup x$. Como por hipótesis $\exists z \in \mathbf{M}$ $(\bigcup x \subseteq z)$, ya tenemos $A \in \mathbf{M}$ $(A = z)$ que hace cierto el axioma en $\mathbf{M}$. □

**Lema 3.9.** *Sea* $\mathbf{M}$ *clase transitiva. Supongamos que podemos demostrar que para cada fórmula* $\varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n)$ *y cada* $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M}$ *si:*

$$\forall x \in A\ \exists! y \in \mathbf{M}\ \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, w_1, \ldots, w_n),$$

*entonces,*

$$\exists Y \in \mathbf{M}(\{\mathrm{y} : \exists x \in A\ \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, w_1, \ldots, w_n)\} \subseteq Y)$$

*En tal caso el axioma de Reemplazo es cierto en* $\boldsymbol{M}$.

*Prueba*: El axioma de Reemplazo dice que para cada fórmula $\varphi$ con variables libres $x, y, w_1, \ldots, w_n$ se cumple para cualquier $A, w_1, \ldots, w_n$ :

$$\forall x \in A\ \exists! y\ \varphi \to \exists Y\ \forall x \in A\ \exists y \in Y\ \varphi$$

Al relativizar el axioma es, para todo $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M}$**:**

$$\forall x \in A\ \exists! y \in \mathbf{M}\ \varphi^{\mathbf{M}} \to \exists Y \in \mathbf{M}\ \forall x \in \mathrm{A}\ \exists y \in Y\ \varphi^{\mathbf{M}}$$

Sean $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M}$ y suponemos que para todo $x \in A$, existe un único $y \in \mathbf{M}$ tal que $\varphi^{\mathbf{M}}$. Por hipótesis $\exists Y \in \mathbf{M}(\{y \colon \exists x \in A\ \varphi^{\mathbf{M}}(x, y, w_1, \ldots, w_n)\} \subseteq Y)$.

Dado que $\forall x \in A\ \exists! y\ \varphi^{\mathbf{M}}$ (da igual que este en $\mathbf{M}$); fijado un $x$, su correspondiente $y$ pertenecerá a $\{y \colon \exists x \in A\ \varphi^{\mathbf{M}}\}$ y por lo tanto $y \in Y$. Por lo tanto, $\exists Y \in \mathbf{M}$ tal que para cualquier $x \in A$ hay $y \in Y$ tal que $\varphi^{\mathbf{M}}$, como queríamos demostrar. □

**Lema 3.10.** *($ZF^-$) El axioma de Regularidad es cierto en cualquier clase* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$.

*Prueba*: El axioma relativizado a $\mathbf{M}$ es:

$$\forall x \in \mathbf{M}\ (\exists y \in \mathbf{M}(y \in x) \rightarrow \exists y \in \mathbf{M}(y \in x \wedge \neg\exists z \in \mathbf{M}\ (z \in x \wedge z \in y))$$

Sea pues $x \in \mathbf{M}$ tal que $x \cap \mathbf{M} \neq 0$. Como $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$, $x \in \mathbf{WF}$, es decir, x $\subseteq$ **WF.** Así pues $x \cap \mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$ y por lo tanto existe un $y \in x \cap \mathbf{M}$ tal que $\neg\exists z(z \in x \cap \mathbf{M} \wedge z \in y)$. Si existiera $z \in \mathbf{M}$ tal que $(z \in x \wedge z \in y)$, en particular $z \in x \cap \mathbf{M}$ lo cual nos lleva a contradicción. Por lo tanto $\neg\exists z \in \mathbf{M}\ (z \in x \wedge z \in y)$. □

## 3.2. Nociones absolutas

**Definición 3.11.** *Sea $\varphi$ una fórmula con $x_1, \ldots, x_n$ como variables libres.*

1. *Si $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ si y sólo si*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}(\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)).$$

2. *$\varphi$ es absoluta en $\mathbf{M}$ si y sólo si $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{V}$ equivalentemente:*

$$\forall\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}(\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

*Observación: Si $\varphi$ es absoluta en $\mathbf{M}$, $\varphi$ es absoluta en $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ entonces $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y* **N.**

**Lema 3.12.** *Si $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ y $\varphi$ y $\psi$ son absolutas entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ también lo son $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$.*

*Prueba*: Para ver que $\neg\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ hay que comprobar que:

$$\forall\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}((\neg\varphi\ )^{\mathbf{M}} \leftrightarrow (\neg\varphi\ )^{\mathbf{N}})$$

Aplicando la relativización de la negación obtenemos el enunciado equivalente:

$$\forall\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}(\neg(\varphi^{\ \mathbf{M}}) \leftrightarrow \neg(\varphi^{\ \mathbf{N}}))$$

Este último enunciado se deduce inmediatamente del hecho que $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.

De igual modo, aplicando la relativización de la conjunción y que $\varphi$ y $\psi$ son absolutas entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ se deduce que también lo es $\varphi \wedge \psi$. □

**Corolario 3.13.** *Si $\varphi$ no tiene cuantificadores, es absoluta en cualquier* $\mathbf{M}$. (*esto no es cierto si aparecen cuantificadores, algo tan simple como la inclusión puede fallar, por ejemplo si $\mathbf{M} = \{0, a\}$ donde $a = \{\{0\}\}$, entonces $(a \subseteq 0)^{\mathbf{M}}$ pero $a \nsubseteq 0$).*

**Lema 3.14.** *Si* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *son ambas transitivas y* $\varphi$ *es absoluta entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$*, también lo es* $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$*.*

*Prueba*: Escribimos $\varphi$ como $\varphi(y, z_1, \ldots, z_n)$, con las demás variables libres. Entonces para cualquiera $y, z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{M}$:

$$[\exists x\ (x \in y \wedge \varphi(y, z_1, \ldots, z_n))]^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \exists x\ (x \in y \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(y, z_1, \ldots, z_n)) \leftrightarrow$$
$$\exists x\ (x \in y \wedge \varphi^{\mathbf{N}}(y, z_1, \ldots, z_n)) \leftrightarrow [\exists x\ (x \in y \wedge \varphi(y, z_1, \ldots, z_n))]^{\mathbf{N}}$$

Para la segunda equivalencia sólo se aplica que $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$. La primera y la tercera equivalencia usan la transitividad de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ respectivamente. Dado que $y \in \mathbf{M}$, $\exists x \in \mathbf{M}(x \in y \wedge \ldots)$ es lo mismo que $\exists x(x \in y \wedge \ldots)$. Como $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, también podemos aplicar la transitividad de $\mathbf{N}$ para sustituir $\exists x \in \mathbf{N}(x \in y \wedge \ldots)$ por $\exists x(x \in y \wedge \ldots)$. □

Llamamos a $\exists x \in y$ un cuantificador acotado y cualquier fórmula con todos los cuantificadores acotados la denominamos $\Delta_0$.

**Definición 3.15.** *Las fórmulas* $\Delta_0$ *son aquellas construidas inductivamente por las reglas siguientes:*

1. $x \in y$ *y* $x = y$ *son* $\Delta_0$
2. *Si* $\varphi$ *y* $\psi$ *son* $\Delta_0$*, también lo son* $\neg\varphi$ *y* $\varphi \wedge \psi$*.*
3. *Si* $\varphi$ *es* $\Delta_0$*, también lo es* $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$*.*
4. *Similarmente para* $\vee, \rightarrow, \forall$ *y* $\leftrightarrow$ *ya que son lógicamenye equivalentes a fórmulas que usan los símbolos anteriores.*

**Corolario 3.16.** *Si* $\mathbf{M}$ *es transitiva y* $\varphi$ *es* $\Delta_0$*, entonces* $\varphi$ *es absoluta en* $\mathbf{M}$*.*

**Lema 3.17.** *Suponemos que* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *y ambas son modelos de un grupo de enunciados* $S$*, tal que:*

$$S \vdash \forall x_1, \ldots, x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$$

*entonces* $\varphi$ *es absoluta entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *si y sólo si* $\psi$ *lo es.*

*Prueba*: Como $S$ es modelo de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ tenemos que:

$$\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Si $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$; $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$ $(\varphi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n))$. Usando las fórmulas anteriores tenemos que $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$ $(\psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n))$, es decir, $\psi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.

Suponiendo que $\psi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ podemos usar el argumento anterior a la inversa para ver que entonces $\varphi$ también es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$. □

**Definición 3.18.** *Si* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ *y* $R$ *es una relación definida por una fórmula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$*, decimos que* $R$ *es absoluta entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *si lo es la fórmula* $\varphi$*.*

*Similarmente, si* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *es una función definida por una fórmula* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$*, decimos que* $F$ *es absoluta entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *si lo es la fórmula* $\varphi$*. Hay que observar que* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *se define como el único* $y$ *tal que* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$*. Por lo tanto sólo discutiremos si* $F$ *es absoluta entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *si*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \; \exists! y \; \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

*es cierta en* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$*. En ese caso* $F$ *es absoluta entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *si* $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{M}$*,* $F^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) = F^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n)$*.*

**Teorema 3.19.** *Las siguientes funciones y relaciones, definidas en ZF* $^-$ *- P – Inf, son equivalentes en ZF* $^-$ *- P – Inf a fórmulas* $\Delta_0$*. Por lo tanto son absolutas en cualquier* $\mathbf{M}$ *transitiva que sea modelo de ZF* $^-$ *- P – Inf.*

*a)* $x \in y$

*b)* $x = y$

*c)* $x \subseteq y$

*d)* $\{x, y\}$

*e)* $\{x\}$

*f)* $\langle x, y \rangle$

*g)* $0$

*h)* $x \cup y$

*i)* $x \cap y$

*j)* $x \setminus y$

*k)* $\mathrm{S}(x) = x \cup \{x\}$

*l)* $x$ *es transitivo*

*m)* $\bigcup x$

*n)* $\bigcap x$*; con* $\bigcap 0 = 0$

*Prueba*: Los apartados a) y b) son inmediatos de la Definición 3.15. Para c), simplemente hay que observar que es equivalente a $\neg\exists z \in x \; \neg(z \in y)$ que es $\Delta_0$.

Para d):

$$z = \{x, y\} \leftrightarrow [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z(w = x \vee w = y)]$$

Similarmente, para e):

$$z = \{x\} \leftrightarrow [x \in z \wedge \forall w \in z(w = x)]$$

Para f):

$$z = \langle x, y \rangle \leftrightarrow [\exists w \in z(w = \{x\}) \wedge \exists w \in z(w = \{x, y\}) \wedge \forall w \in z(w = \{x\} \vee w = \{x, y\}))]$$

Para g), h), i), j) y k):

- Para g), $z = 0 \leftrightarrow [\forall w \in z \; (w \neq w)]$.
- Para h), $z = x \cup y \leftrightarrow [\forall w \in z \; (w \in x \vee w \in y) \wedge x \subseteq z \wedge y \subseteq z]$.
- Para i), $z = x \cap y \leftrightarrow [\forall w \in x \; (w \in y \rightarrow w \in z) \wedge z \subseteq x \wedge z \subseteq y]$.

- Para j), $z = x \setminus y \leftrightarrow [\forall w \in z\ (w \in x \wedge w \notin y) \wedge z \subseteq x]$.
- Para k), $z = \mathrm{S}(x) \leftrightarrow [x \in z \wedge x \subseteq z \wedge \forall w \in z(w \in x \vee w = x)]$.

Finalmente para l), m) y n) :

- Para l), $x$ es transitivo $\leftrightarrow [\forall v \in x\ \forall z \in v\ (z \in x)]$
- Para m) $z = \bigcup x \leftrightarrow [\forall v \in x(v \subseteq z) \wedge \forall y \in z\ \exists v \in x(y \in v)]$
- Para n), $z = \bigcap x \leftrightarrow [\forall v \in x(z \subseteq v) \wedge \forall v \in x\ \forall y \in v(\forall w \in x\ (y \in w) \rightarrow y \in z) \wedge (x = 0 \rightarrow y = 0)]$ □

**Lema 3.20.** *Los conceptos absolutos son cerrados bajo composición y sustitución. Esto es, dadas* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$*, suponemos que* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$*,* $F(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *y* $G_i(y_1,\ \ldots,\ y_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *son absolutas entre* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$*; entonces también lo son la fórmula:*

$$\varphi(G_1(y_1,\ \ldots,\ y_m),\ \ldots,\ G_n(y_1,\ \ldots,\ y_m))$$

*Y la función:*

$$F(G_1(y_1,\ \ldots,\ y_m),\ \ldots,\ G_n(y_1,\ \ldots,\ y_m))$$

*Prueba*: Abreviamos $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ y $G_{\mathrm{i}} = G_{\mathrm{i}}(y_1, \ldots, y_m)$. Si $y_1,\ \ldots,\ y_m \in \mathbf{M}$, entonces:

$$(\varphi(G_1, \ldots, G_n))^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{M}}({G_1}^{\mathbf{M}}, \ldots, {G_n}^{\mathbf{M}}) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}({G_1}^{\mathbf{N}}, \ldots, {G_n}^{\mathbf{N}}) \leftrightarrow (\varphi(G_1, \ldots, G_n))^{\mathbf{N}}$$

Puesto que $\varphi$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ y ${G_i}^{\mathbf{M}} = {G_i}^{\mathbf{N}}$ (ver Definición 3.18). De igual modo:

$$(F(G_1, \ldots, G_n))^{\mathbf{M}} = F^{\mathbf{M}}({G_1}^{\mathbf{M}}, \ldots, {G_n}^{\mathbf{M}}) = F^{\mathbf{N}}({G_1}^{\mathbf{N}}, \ldots, {G_n}^{\mathbf{N}}) = (F(G_1, \ldots, G_n))^{\mathbf{N}}$$ □

**Teorema 3.21.** *Las siguientes relaciones y funciones son absolutas en cualquier modelo transitivo de ZF ⁻ - P – Inf.*

*a)* *$z$ es un par ordenado*

*b)* $A \times B$

*c)* *$R$ es una relación*

*d)* $\mathrm{dom}(R)$

*e)* $\mathrm{rec}(R)$

*f)* *$R$ es función*

*g)* $R(x)$

*h)* *$R$ es biyección*

*Prueba*:

a) $z$ es un par ordenado $\leftrightarrow \varphi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$.
Donde $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$ , que es absoluta por el Teorema 3.19, y $G_3(z) = z$, con $\varphi(a, b, c) = \exists x \in a\ \exists y \in b\ (c = \langle x, y\rangle)$ que es absoluta pues los cuantificadores son acotados y $c = \langle x, y\rangle$ es absoluta por el Teorema 3.19 de nuevo. Aplicando el Lema 3.20, tenemos que la fórmula es absoluta.

b) $C = A \times B \leftrightarrow [\forall x \in A\ \forall y \in B(<x, y> \in C) \wedge \forall z \in C\ \exists x \in A\ \exists y \in B(z = \langle x, y\rangle)]$. La fórmula es absoluta pues todos los cuantificadores están acotados y $z = \langle x, y\rangle$ es absoluta por el Teorema 3.19.

c) $R$ es una relación $\leftrightarrow$ [$\forall z \in R$ ($z$ es un par ordenado)]. La fórmula es absoluta ya que el cuantificador es acotado y, por el apartado a), "$z$ es un par ordenado" también lo es.

d) $A = \mathrm{dom}(R) \leftrightarrow [\forall x \in A\ \exists y \in \bigcup\bigcup R\ \langle x, y\rangle \in R) \wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, y\rangle \in R \rightarrow x \in A)]$. Como las uniones y $\langle x, y\rangle$ son absolutas por el Teorema 3.19 y los cuantificadores están acotados, la fórmula es absoluta.

e) $A = \mathrm{rec}(R) \leftrightarrow [\forall y \in A\ \exists x \in \bigcup\bigcup R(\langle x, y\rangle \in R) \wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, y\rangle \in R \rightarrow y \in A)]$. Como las uniones y los pares ordenados son absolutos por el Teorema 3.19 y los cuantificadores están acotados, la fórmula es absoluta.

f) $R$ es función $\leftrightarrow$ [$R$ es una relación $\wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R\ \forall y' \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y'\rangle \in R \rightarrow y = y')$]. De nuevo aplicamos el Teorema 3.19 juntamente con el apartado c) y obtenemos que la fórmula es absoluta.

g) $y = R(x) \leftrightarrow [(\varphi(x) \wedge \langle x, y\rangle \in R) \vee (\neg\varphi(x) \wedge y = 0)]$, donde $\varphi(x)$ es:

- $\exists v \in \bigcup\bigcup R[\langle x, v\rangle \in R \wedge \forall w \in \bigcup\bigcup R(\langle x, w\rangle \in R \rightarrow v = w))]$
- $\varphi$ es absoluta pues las uniones y los pares ordenados son absolutos (de nuevo por el Teorema 3.19) y los cuantificadores son acotados. Por lo tanto, la fórmula original es absoluta.

h) $R$ es biyección $\leftrightarrow$ [$R$ es función $\wedge \forall x \in \mathrm{dom}(R) \forall x' \in \mathrm{dom}(R)(R(x) = R(x') \rightarrow x = x')$] □

**Lema 3.22.** *Sea* **M** *es modelo transitivo de ZF⁻ - P – Inf. Si* $\omega \in$ **M***, el axioma del Infinito es cierto en* **M**.

*Prueba*: Como 0 y S son nociones absolutas en **M**, el axioma relativizado es equivalente a:

$$\exists x \in \mathbf{M}\ (0 \in x \wedge \forall y \in x(\mathrm{S}(y) \in x))$$

Esto se cumple tomando $x = \omega$. □

**Lema 3.23.** (*ZF⁻*) *Suponemos que* **M** *es modelo de ZF⁻ - P – Inf. Sean* $A$, $R \in$ **M** *y suponemos que* $R$ *bien ordena* $A$*. Entonces* ($R$ *bien ordena* $A$)$^{\mathbf{M}}$.

*Prueba*: Primero comprobamos que ($R$ es orden total en $A$)$^{\mathbf{M}}$. Por el Teorema 3.21, $R$ es total en **M** y por lo tanto sólo debemos comprobar que:

$$\forall x, y \in \mathbf{M}(x, y \in A \rightarrow xRy \vee yRx \vee x = y)$$

que se deduce inmediatamente puesto que suponemos que $R$ bien ordena $A$. Ahora debemos comprobar que $(\forall X \varphi(X, A, R))^{\mathbf{M}}$, donde $\varphi(X, A, R)$ es:

$$X \subseteq A \wedge X \neq 0 \rightarrow \exists y \in X \; \forall z \in X(\langle z, y\rangle \notin R)$$

Ahora $\varphi$ es absoluta por el Teorema 3.21. Es suficiente comprobar que $\forall X \in \mathbf{M}$ $\varphi(X, A, R)$, que se deduce ya que $R$ bien ordena $A$, es decir, para cualquier $X$ (esté o no en $\mathbf{M}$) $\varphi(X, A, R)$. □

## 3.3. Últimos detalles de regularidad

**Lema 3.24.** *Sea $A \in \mathbf{WF}$. Entonces $A$ puede ser bien ordenado si y sólo si ($A$ puede ser bien ordenado)$^{\mathbf{WF}}$.*

*Prueba*: Si $A$ puede ser bien ordenado, sea $R \subseteq A \times A$ buen orden de $A$. Por los Lemas 2.8 y 2.9, $R \in \mathbf{WF}$. Ahora, por el Lema 3.23 , ($R$ bien ordena $A$)$^{\mathbf{WF}}$ y por lo tanto ($A$ puede ser bien ordenado)$^{\mathbf{WF}}$.

Ahora, si ($A$ pude ser bien ordenado)$^{\mathbf{WF}}$, sea $R \in \mathbf{WF}$ tal que ($R$ bien ordena $A$)$^{\mathbf{WF}}$. Entonces, como en el Lema 3.23, $R$ ordena totalmente $A$ y cualquier subconjunto no vacío de $A$ tiene un $R$-menor elemento. Pero todo subconjunto de $A$ está en $\mathbf{WF}$ (por el Lema 2.8 , $P(A) \in \mathbf{WF}$) así que $R$ bien ordena $A$, es decir, $A$ puede ser bien ordenado. □

**Corolario 3.25.** *(ZF $^-$): $AC \rightarrow (AC)^{\mathbf{WF}}$*

**Corolario 3.26.** *Con(ZF $^-$)$\rightarrow$ Con(ZF) y Con(ZFC $^-$)$\rightarrow$ Con(ZFC)*

## 3.4. Más nociones absolutas

**Teorema 3.27.** *Las siguientes relaciones y funciones en ZF − P son equivalentes a fórmulas $\Delta_0$. Por lo tanto, son absolutas para cualquier modelo transitivo de ZF – P:*

*a) $x$ es ordinal*

*b) $x$ es ordinal límite*

*c) $x$ es ordinal sucesor*

*d) $x$ es ordinal finito*

*e) $\omega$*

*f) 0, 1, 2, ...*

*Prueba*:

- Para a), partiendo de ZF − P, $x$ es ordinal si y sólo si $x$ es transitivo y totalmente ordenado por $\in$ (Corolario 2.19). El enunciado "$x$ es transitivo" es absoluto por el Teorema 3.19 y "$x$ es totalmente ordenado por $\in$" se expresa cuantificando sobre $x$:

$$\forall y \in x \; \forall z \in x \; (y \in z \vee y = z \vee z \in y)$$

Así que también es $\Delta_0$.

- Para b), $x$ es ordinal límite si y sólo si $x$ es ordinal $\wedge$ $\forall y \in x\ \exists z \in x\ (y \in z) \wedge \neg(x = 0)$, y todo ello es $\Delta_0$ ($x = 0$ es $\Delta_0$ por el Teorema 3.19).
- Para c), $x$ es ordinal sucesor si y sólo si $x$ es ordinal $\wedge\neg$ ($x$ es ordinal límite $\vee x = 0$).
- Para d), $x$ es ordinal finito si y sólo si $x = 0 \vee \exists y \in \omega\ (x = \mathrm{S}(y))$. El cuantificador es acotado y tanto $x = 0$ como $x = \mathrm{S}(y)$ son $\Delta_0$ por el Teorema 3.19, por lo tanto la fórmula es absoluta.
- Para e), $x = \omega$ si y sólo si $x$ es ordinal límite $\wedge$ $\forall y \in x$ ($y$ no es ordinal límite).
- Para f) usamos que 0 ya apareció en el Teorema 3.19 y procedemos por inducción:

  $x = 1 \leftrightarrow \exists y \in x\ (y = 0 \wedge x = \mathrm{S}(y))$
  $x = 2 \leftrightarrow \exists y \in x\ (y = 1 \wedge x = \mathrm{S}(y))$
  $\ldots$ □

**Lema 3.28.** *Si* **M** *es modelo transitivo de ZF – P, entonces cada subconjunto finito de* **M** *está en* **M***.*

*Prueba*: Mostramos por inducción en $n$ lo siguiente:

$$\forall x \subseteq \mathbf{M}(|x| = n \rightarrow x \in \mathbf{M})$$

- El caso $n = 0$, se debe a que 0 es noción absoluta (Teorema 3.19) junto con el hecho que **M** es modelo de ZF - P, por lo tanto $0 \in \mathbf{M}$(por separación en **M**).
- Suponemos que es cierto para $n$. Sea $x \subseteq \mathbf{M}$ con $n + 1$ elementos y sea $y \in x$. Entonces si $y \in \mathbf{M}$, $x \setminus \{y\} \in \mathbf{M}$ por hipótesis inductiva y $x = \{y\} \cup (x \setminus \{y\})$. Como los pares, la unión y la diferencia conjuntista son absolutas (Teorema 3.19), $x \in \mathbf{M}$. □

**Teorema 3.29.** *Los siguientes conceptos son absolutos para cualquier* **M** *transitivo modelo de ZF – P:*

*a)* $x$ *es finito*

*b)* $A^n$

*c)* $A^{<\omega} = \bigcup \{A^n \colon n \in \omega\}$

*Prueba*:

- Para a), partiendo de ZF – P, $x$ es finito si y sólo si $\exists f\ \varphi(x, f)$, donde $\varphi(x, f)$ es:

$$f \text{ es función} \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{rec}(f) \in \omega \wedge f \text{ es biyección}$$

que es absoluta en $\mathbf{M}$ por los Teoremas 3.21 y 3.27. Es suficiente mostrar pues que $\forall x \in \mathbf{M}$:

$$\exists f \in \mathbf{M}\ \varphi(x, f) \leftrightarrow \exists f\ \varphi(x, f)$$

De izquierda a derecha es obvio. La implicación contraria se deduce del hecho que

$$\varphi(x, f) \rightarrow f \in \mathbf{M}$$

Para ver esto, hay que observar que $\varphi(x, f)$ implica que $f$ es un conjunto finito de pares de elementos de $\mathbf{M}$. $\mathbf{M}$ es cerrado por pares, ya que son absolutos en modelos transitivos, así que $f \in \mathbf{M}$ por el Lema 3.28.

- Para b) y c), consideramos $A^{\mathrm{n}}$ y $A^{<\omega}$ respectivamente como funciones $F(A, x)$ y $G(A)$, con $F(A, x) = 0$ si $x \notin \omega$. En el caso de b) hay que comprobar que $\forall A$, $x \in \mathbf{M}$ $F(A, x) = F^{\mathbf{M}}(A, x)$. Si $x \notin \omega$ se debe a que 0 es noción absoluta. Si $x = n \in \omega$:

$$F(A, n) = \{f\colon f \text{ es función} \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{rec}(f) \subseteq A\}$$

$$F^{\mathbf{M}}(A, n) = \{f \in \mathbf{M}\colon f \text{ es función} \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{rec}(f) \subseteq A\}$$

Es evidente que $F^{\mathbf{M}}(A, n) \subseteq F(A, n)$. La otra inclusión se deduce como en el apartado a), si $f \in F(A, n)$, entonces $f$ es un conjunto finito de pares ordenados de elementos de $\mathbf{M}$, con lo cual $f \in \mathbf{M}$.

- Para c), comprobamos que $\forall A \in \mathbf{M}$ $G(A) = G^{\mathbf{M}}(A)$.

$$G(A) = \{f\colon \exists n \in \omega(f \in F(A, n))\}$$

$$G^{\mathbf{M}}(A) = \{f \in \mathbf{M} : \exists n \in \omega(f \in F(A, n))^{\mathbf{M}}\} = \{f \in \mathbf{M} : \exists n \in \omega(f \in F^{\mathbf{M}}(A, n))\}$$

De nuevo, es obvio que $G^{\mathbf{M}}(A) \subseteq G(A)$. Si tomamos $f \in G(A)$, entonces $f \in F(A, n)$ para algún $n \in \omega$. Como $F^{\mathbf{M}}(A, n) = F(A, n)$ por b), obtenemos que $f \in \mathbf{M}$ y , por lo tanto $f \in G^{\mathbf{M}}(A)$. □

**Teorema 3.30.** *Los siguientes conceptos son absolutos para cualquier modelo transitivo de ZF – P.*

*a) R bien ordena A*

*b) Type(A,R)*

*Prueba*:

- Para a) es suficiente probar que si $A, R \in \mathbf{M}$ entonces si ($R$ bien ordena $A)^{\mathbf{M}}$ entonces $R$ bien ordena $A$ (la implicación contraria es el Lema 3.23). Para ello aplicamos un Teorema de ZF – P, que demuestra que todo buen orden es isomorfo a un ordinal. Entonces si ($R$ bien ordena $A)^{\mathbf{M}}$ hay $f$, $\alpha \in \mathbf{M}$ tales que:

$$(\alpha \text{ es ordinal} \wedge f \text{ es isomorfismo de} \langle A, R\rangle \text{ en } \alpha)^{\mathbf{M}}$$

Pero esta fórmula es absoluta en **M** por el Teorema 3.27 y

$$f \text{ es isomorfismo de } \langle \text{A,R}\rangle \text{ en } \alpha \leftrightarrow f \text{ es biyección} \wedge \text{dom}(f) = \\ \text{A} \wedge \text{rec}(f) = \alpha \wedge \forall\ x,y \in A(xRy \leftrightarrow f(x) < f(y))$$

que es absoluta por el Teorema 3.21. Así pues, $\alpha$ es realmente un ordinal y $f$ es un isomorfismo, por lo tanto R bien ordena A con tipo $\alpha$. El mismo argumento demuestra que Type(A,R) es noción absoluta. □

**Teorema 3.31.** *Los siguientes conceptos son absolutos para cualquier modelo transitivo de ZF – P.*

*a)* $\alpha + 1$

*b)* $\alpha - 1$

*c)* $\alpha + \beta$

*d)* $\alpha * \beta$

*Prueba*:

- El apartado a) aparece en el Teorema 3.19, pues $\alpha + 1$ es S($\alpha$).
- Para b) :

  $$x = \alpha - 1 \leftrightarrow (\alpha \text{ es sucesor} \wedge \alpha = x + 1) \vee (\alpha \text{ no es sucesor} \wedge x = \alpha)$$

  Como todos los conceptos son absolutos (Teoremas 3.19 y 3.27), $\alpha - 1$ es absoluta.
- Para c) y d):

  $x = \alpha + \beta \leftrightarrow x = \text{Type}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R)$ donde R es:

  $$R = \{\langle\langle\xi,0\rangle\ ,\ \langle\eta,0\rangle\rangle : \xi < \eta < \alpha\} \cup \{\langle\langle\xi,1\rangle\ ,\ \langle\eta,1\rangle\rangle : \xi < \eta < \beta\} \cup \\ [(\alpha \times \{0\}) \times (\beta \times \{1\})]$$

  R es absoluta por el Teorema 3.21.

  $x = \alpha * \beta \leftrightarrow x = \text{Type}(\beta \times \alpha, \text{lex}(\beta, \alpha))$ donde, lex($\beta$, $\alpha$) es el orden lexicográfico:

  $$\langle\xi,\eta\rangle\ \text{lex}(\beta, \alpha)\ \langle\xi',\eta'\rangle \leftrightarrow (\xi < \xi' \vee (\xi = \xi' \wedge \eta < \eta')\ )$$

  lex es absoluto por el Teorema 3.21. □

El próximo teorema se enuncia en términos de clases, por ello hacemos esta observación acerca del significado de relativización y nocin absoluta para clases. Formalmente una clase **A** es simplemente una fórmula $\mathbf{A}(x)$; intuitivamente $\mathbf{A} = \{x\colon \mathbf{A}(x)\}$. Por $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ entendemos $\{x \in \mathbf{M}\colon \mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x)\}$. Así pues:

**Lema 3.32.** $\mathbf{A}$ *es absoluta en* $\mathbf{M}$ *si y sólo si* $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$.

*Prueba*: Suponemos primero que $\mathbf{A}$ es absoluta en $\mathbf{M}$ y comprobamos que $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$.

Si $x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$, entonces $x \in \mathbf{M}$ y $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x)$. Como $\mathbf{A}$ es absoluta en $\mathbf{M}$, $\mathrm{A}(x)$, es decir, $x \in \mathbf{A}$, Por lo tanto $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$. Si $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$, entonces $\mathrm{x} \in \mathbf{M}$ y $\mathrm{A}(x)$. De nuevo como $\mathbf{A}$ es absoluta en $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x)$. Por lo tanto, $\mathrm{x} \in \mathbf{M}$ y $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x)$, es decir, $x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$.

Suponemos ahora que $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$ y vemos que $\mathbf{A}$ es absoluta en $\mathbf{M}$:

$$\forall x \in \mathbf{M}(\mathbf{A}(x) \leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x))$$

Sea $x \in \mathbf{M}$. Si $\mathbf{A}(x)$, entonces $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$. Entonces, como $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$, $x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ lo cual implica que $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x)$. Similarmente, si $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}(x)$ entonces $x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$, por lo tanto $x \in \mathbf{A}$, es decir, $\mathbf{A}(x)$. $\square$

**Teorema 3.33.** *Sea* $\mathbf{R}$ *una relación bien fundada en* $\mathbf{A}$ *y similar a un conjunto en* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{F}$*:* $\mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. *Sea* $\mathbf{G}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *definida de tal modo que* (*como en el Teorema 2.30*)*:*

$$\forall x \in \mathbf{A}\ [\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}\restriction(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})))]$$

*Sea* $\mathbf{M}$ *modelo transitivo de ZF – P y suponemos que:*

*1)* $\mathbf{F}$ *es absoluta en* $\mathbf{M}$

*2)* $\mathbf{R}$ *y* $\mathbf{A}$ *son ambas absolutas en* $\mathbf{M}$, ($\mathbf{R}$ *es similar a un conjunto en* $\mathbf{A})^{\mathbf{M}}$ *y*

$$\forall x \in \mathbf{M}(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{M})$$

*Entonces* $\mathbf{G}$ *es absoluta en* $\mathbf{M}$.

*Prueba*: Primero observamos que ($\mathbf{R}$ es bien fundada $\mathbf{A})^{\mathbf{M}}$ ya que $\mathbf{R}^{\mathbf{M}} = \mathbf{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$ es bien fundada en $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$ , de modo que cada subconjunto de $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ tiene un elemento $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}$ –minimal. Aplicamos el Teorema 2.30 en $\mathbf{M}$ para definir:

$$\mathbf{G}^{\mathbf{M}}\colon \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \to \mathbf{M}$$

$$\forall x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}\ [\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}}\restriction(\mathrm{pred}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}})))\ ]$$

Entonces $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G}\restriction\mathbf{M}$, puesto que un elemento $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}$ –minimal de $\{x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}\colon \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) \neq \mathbf{G}(x)\}$ lleva a contradicción. Si existiera tal $x$ entonces:

$$\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}\restriction(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}\restriction(\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}))) =$$
$$\mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}\restriction(\mathrm{pred}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}}))) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}}\restriction(\mathrm{pred}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}}))) = \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x)$$

La segunda igualdad se debe a que $\mathbf{F}$ es absoluta y la tercera se debe a que por hipótesis $\forall x \in \mathbf{M}$ ($\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subseteq \mathbf{M}$) y por lo tanto $\mathrm{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \mathrm{pred}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}}, x, \mathbf{R}^{\mathbf{M}})$. $\square$

**Teorema 3.34.** *Sea* $\mathbf{R}$ *relación bien fundada en* $\mathbf{A}$ *y sea* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*. Entonces existe una única* $\mathbf{G} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *tal que:*

$$\mathbf{G}(x,\, Y) = \mathbf{F}(x,\, \{(y,\, Y,\, \mathbf{G}(y,\, Y))|\ y\mathbf{R}x\},\, Y)$$

*Además* $\mathbf{G}$ *es absoluta en modelos transitivos de ZF – P si* $\mathbf{F}$ *lo es.*

*Prueba*: Sea $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Dado un conjunto $Y$ definimos $\mathbf{F}_Y : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ por:

$$\mathbf{F}_Y(x,\, X) = \mathbf{F}(x,\, X,\, Y)$$

Por el Teorema 2.30 existe $\mathbf{G}_Y$:$\mathbf{A} \to \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{G}_Y(x) = \mathbf{F}_Y(x,\ \mathbf{G}_Y{\restriction}(\mathrm{pred}(\mathbf{A},\, x,\, \mathbf{R})))$$

Entonces poniendo:

$$\mathbf{G}(x,\, Y) = \mathbf{G}_Y(x)$$

se obtiene

$$\mathbf{G}(x,\, Y) = \mathbf{F}(x,\, \{(y, Y,\, \mathbf{G}(y,\, Y))|\ y\mathbf{R}x\}\ ,\, Y) \qquad \square$$

**Proposición 3.35.** *Dada* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *y* $\mathbf{H} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *hay una única* $\mathbf{G} : \omega \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *tal que:*

- $\mathbf{G}(0,\, A) = \mathbf{H}(A)$
- $\mathbf{G}(n+1,\, A) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(n,\, A),\, A)$

*Además, si* $\mathbf{F}$ *y* $\mathbf{H}$ *son absolutas en modelos transitivos de ZF – P, entonces también lo es* $\mathbf{G}$.

*Prueba*: Sea $\mathbf{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y sea $\mathbf{H} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Definimos $\mathbf{F}'$: $\omega \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ por:

- $\mathbf{F}'(0,\, X,\, A) = \mathbf{H}(A)$
- Si $n = m+1$, $\mathbf{F}'(n,\, X,\, A) = \mathbf{F}(X(m,\, A),\, A)$ donde $X(m,\, A)$ es la aplicación de $X$(considerado como función) al par $(m,\, A)$

$$X(m,\, A) = \bigcup \mathrm{rec}(X \restriction \{(m, A)\})$$

Ahora el Teorema 3.34 nos da $\mathbf{G} : \omega \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ tal que:

$$\mathbf{G}(n,\, A) = \mathbf{F}'(n,\, \{((m, A),\, \mathbf{G}(m,\, A))|\ m < n\},\, A)$$

De aquí se deduce:

- $\mathbf{G}(0,\, A) = \mathbf{H}(A)$
- $\mathbf{G}(n+1,\, A) = \mathbf{F}'(n,\, \{((m, A),\, \mathbf{G}(m,\, A))|\ m < n\},\, A) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(n,\, A),\, A)$ □

**Teorema 3.36.** *Las siguientes funciones son absolutas para cualquier modelo transitivo de ZF – P:*

*a)* $\alpha^\beta$(*exponenciación ordinal*)

*b)* $\rho(x)$ ($= \rho(x,\, \mathbf{V},\, \in)$, *Definición 2.31*)

*c)* $\mathrm{trcl}(x)$

*Prueba*: Tanto a) como b) son consecuencia del Teorema anterior, ya que tanto $\alpha^\beta$ como $\rho(x)$ se definen recursivamente en $\beta$ y en $x$. Para $\mathrm{trcl}(x)$, definimos primero $\bigcup^n x$ por recursión en $n$:

$$\bigcup\nolimits^y x = \begin{cases} 0,\ y \notin \omega \\ x, y = 0 \\ \bigcup\,(\bigcup^{y\,-\,1}\, x),\ 0 \in y \in \omega \end{cases}$$

$\bigcup^y x$ es una función absoluta de variables $y$, $x$, así pues $\mathrm{trcl}(x)$ es absoluta. □

**Lema 3.37.** *Sea* **M** *modelo transitivo de ZF. Entonces:*

*a)* $P^{\mathbf{M}}(x)\ = P(x) \cap \mathbf{M}$

*b)* $\mathrm{V}_\alpha{}^{\mathbf{M}}\ = \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{M}$

*Prueba*:

a) Vemos que $z \in P^{\mathbf{M}}(x)$ si y sólo si $z \in P(x) \cap \mathbf{M}$. Si $z \in P^{\mathbf{M}}(x)$, $(z \subseteq x)^{\mathbf{M}}$. Como **M** es transitiva, $\subseteq$ es absoluta y por tanto $z \subseteq x$, lo cual implica que $z \in P(x)$. La implicación contraria se ve del mismo modo, usando de nuevo que $\subseteq$ es absoluta en **M**.

b) Vemos que $z \in \mathrm{V}_\alpha{}^{\mathbf{M}}$ si y sólo si $z \in \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{M}$ usando que el rango de $z$ es absoluto por el Teorema 3.36:

$$z \in \mathrm{V}_\alpha{}^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \rho(z)^{\mathbf{M}} < \alpha^{\mathbf{M}} \wedge z \in \mathbf{M} \leftrightarrow \rho(z) < \alpha \wedge z \in \mathbf{M} \leftrightarrow z \in \mathrm{V}_\alpha \cap \mathbf{M} \quad \square$$

## 3.5. Teorema de reflexión

**Lema 3.38.** *Para cada fórmula $\chi$ que hemos demostrado previamente que es absoluta en modelos transtivos de ZF - P, podemos encontrar axiomas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tales que:*

*ZF - P* $\vdash \forall M$ ($M$ *transitivo* $\wedge \, {\varphi_1}^M \wedge \ldots \wedge {\varphi_n}^M \rightarrow \chi$ *es absoluta en* $M$)

*También es cierto para las funciones que hemos demostrado previamente que son absolutas en modelos transitivos.*

*Prueba*: Que las funciones son absolutas se reduce a que las fórmulas que las definen sean absolutas. La relativización de $F(x_1, \ldots, x_n)$ en $M$ sólo tiene sentido cuando la fórmula que la define cumple el criterio de unicidad (en $M$):

$$\forall x_1, \ldots, x_n \; \exists! y \; \chi(x_1, \ldots, x_n, y).$$

En cualquier caso, el criterio de unicidad es un teorema de ZF - P, y por lo tanto de una colección finita de axiomas de ZF - P. Para demostrar que las fórmulas anteriores son absolutas en modelos transitivos hemos demostrado que son equivalentes a fórmulas $\Delta_0$ en ZF - P, y por lo tanto en alguna subteoría finitamente axiomatizable. Los demás resultados de nociones absolutas los hemos obtenido por composición (que no añade requisitos a $M$) o recursión transfinita, que requiere que $M$ satisfaga suficientes axiomas de ZF - P. □

**Definición 3.39.** *Una lista de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es cerrada por subfórmulas si y sólo si cada subfórmula de una fórmula en la lista está también en la lista.*

**Lema 3.40.** *Sea* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{N}$ *clases tales que* $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$. *Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ una lista cerrada por subfórmulas; entonces son equivalentes:*

*a)* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *son absolutas entre* $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.

*b) Cuando $\varphi_i$ es de la forma $\exists x \; \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ (con todas las variables libres de $\varphi_j$ mostradas)* $\forall y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}$ $[\exists x \in \mathbf{N} \; {\varphi_j}^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \rightarrow \exists x \in \mathbf{M} \; {\varphi_j}^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)]$

*Prueba*:

1. a) $\rightarrow$ b)): Fijamos $y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}$ y suponemos que $\exists x \in \mathbf{N} \; {\varphi_j}^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$. Entonces ${\varphi_i}^{\mathbf{N}}$ y como por hipótesis $\varphi_i$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, ${\varphi_i}^{\mathbf{M}}$, es decir, $\exists x \in \mathbf{M} \; {\varphi_j}^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_l)$. Ahora, como $\varphi_j$ es absoluta entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, tenemos $\exists x \in \mathbf{M} \; {\varphi_j}^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$.

2. b) $\rightarrow$ a)): Lo demostramos por inducción en la construcción de $\varphi_i$. Suponemos que ya hemos comprobado que las subfórmulas de $\varphi_i$ son absolutas. Si $\varphi_i$ es atómica es absoluta. Si $\varphi_i$ es $\varphi_j \wedge \varphi_k$, como $\varphi_j$ y $\varphi_k$ son absolutas (que son subfórmulas de $\varphi_i$) implica que $\varphi_i$ es absoluta. Igualmente si $\varphi_i$ es $\neg \varphi_j$. Finalmente suponemos que $\varphi_i$ es $\exists x \; \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ y fijamos $y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}$.

   Entonces ${\varphi_i}^{\mathbf{M}}(y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \; {\varphi_j}^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow \exists x \in \mathbf{M} \; {\varphi_j}^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$ $\leftrightarrow \exists x \in \mathbf{N} \; {\varphi_j}^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \leftrightarrow {\varphi_i}^{\mathbf{N}}(y_1, \ldots, y_l)$.

La primera equivalencia usa solamente la definición de relativización, la segunda usa que (por hipótesis inductiva) $\varphi_j$ es absoluta, la tercera se obtiene al aplicar b) y la cuarta es de nuevo la definición de relativización. $\square$

**Teorema 3.41.** *TEOREMA DE REFLEXIÓN: Dadas cualesquiera fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$*

$$ZF \vdash \forall\alpha\ \exists\beta > \alpha\ (\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \textit{ son absolutas en } \mathrm{V}_\beta)$$

Demostramos una versión más general del teorema:

**Teorema 3.42.** *TEOREMA DE REFLEXIÓN: Supongamos que* $\mathbf{Z}$ *es una clase y que para cada* $\alpha \in \mathbf{ON}$, $\mathrm{Z}_\alpha$ *es un conjunto y que:*

*a)* *Si* $\beta < \alpha$, $\mathrm{Z}_\beta \subseteq \mathrm{Z}_\alpha$

*b)* *Si* $\gamma$ *es límite, entonces* $\mathrm{Z}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma}\mathrm{Z}_\alpha$

*c)* $\mathbf{Z} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} \mathrm{Z}_\alpha$
*Entonces, para cualesquiera fórmulas* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$\forall\alpha\ \exists\beta > \alpha\ (\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \textit{ son absolutas en } \mathrm{Z}_\beta;\ \mathbf{Z})$$

*Prueba*: La idea es aplicar el lema anterior con $\mathbf{Z} = \mathbf{N}$ y buscar un $\mathbf{M} = \mathrm{Z}_\beta$ adecuado. Podemos suponer que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es cerrada por subfórmulas (simplemente las podemos añadir). Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos $F_i : \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ del siguiente modo:

- Si $\varphi_i$ es de la forma $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$, definimos $G_i(y_1, \ldots, y_l) = 0$ si $\neg\exists x \in \mathbf{Z}$ ${\varphi_j}^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$. En caso contrario $G_i(y_1, \ldots, y_l)$ es el menor ordinal $\eta$ tal que $\exists x \in \mathrm{Z}_\eta\ {\varphi_j}^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$. Finalmente $F_i(\xi) = \sup\{G_i(y_1, \ldots, y_l) : y_1, \ldots, y_l \in \mathrm{Z}_\xi\}$ (este supremo existe por el axioma de Reemplazo).

- Si $\varphi_i$ no es un cuantificador existencial, $F_i(\xi) = 0\ \forall\xi$.

Ahora fijamos $\alpha$ y encontramos el correspondiente $\beta$. Definimos por recursión $\beta_p$; sea $\beta_0 = \alpha$ y fijamos $\beta_{p+1}$ el máximo de $\beta_p$+1, $F_1(\beta_p)$, $\ldots$, $F_n(\beta_p)$. Sea $\beta = \sup\{\beta_p\text{: } p \in \omega\}$. Como $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 \ldots$, $\beta$ es un ordinal límite mayor que $\alpha$.

Finalmente, si $\varphi_i$ es de la forma $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$, por la construcción de $\beta$, $\forall y_1, \ldots, y_l \in \mathrm{Z}_\beta$, si $\exists x \in \mathbf{Z}\ {\varphi_j}^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$ entonces $\exists x \in \mathrm{Z}_\beta\ {\varphi_\mathrm{j}}^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$, con lo cual cualquier fórmula $\varphi_k$ es absoluta en $\mathrm{Z}_\beta$; $\mathbf{Z}$ por el Lema 3.40. $\square$

**Teorema 3.43.** *(AC) Sea* $\mathbf{Z}$ *una clase y sean* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *cualesquiera fórmulas. Entonces:*

$$\forall X \subseteq \mathbf{Z}\ \exists A[X \subseteq A \subseteq \mathbf{Z}\ \wedge(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n \textit{ son absolutas en } A;\ \mathbf{Z}) \wedge |A| \leq \text{máx}\{\omega,\ |X|\}]$$

*Prueba*: De nuevo suponemos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es cerrada por subfórmulas. Definimos $\mathrm{Z}_\alpha = \mathbf{Z} \cap \mathrm{V}_\alpha$, y observamos que nos encontramos en las hipótesis del teorema anterior. Ahora fijamos $\alpha$ tal que $X \subseteq \mathrm{Z}_\alpha$; por el teorema anterior existe $\beta > \alpha$ tal que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son absolutas en $\mathrm{Z}_\beta$; $\mathbf{Z}$. Encontraremos $A \subseteq \mathrm{Z}_\beta$. Por AC, fijamos un buen orden $\lhd$ de $\mathrm{Z}_\beta$.

Si $\varphi_i$ tiene $l_i$ variables libres, $y_1, \ldots, y_{l_i}$, definimos una función $H_i$: ${\mathrm{Z}_\beta}^{l_i} \to \mathrm{Z}_\beta$ de la siguiente manera.

- Si $\varphi_i$ es de la forma $\exists x\, \varphi_{\mathrm{j}}(x, y_1, \ldots, y_{l_i})$ y $\exists x \in \mathrm{Z}_\beta\, {\varphi_j}^{\mathrm{Z}_\beta}(x, y_1, \ldots, y_l)$, $H_i(y_1, \ldots, y_{l_i})$ es el $\lhd$-primer $x$ que cumple la fórmula.
- Si $\neg\exists x \in \mathrm{Z}_\beta\, {\varphi_j}^{\mathrm{Z}_\beta}(x, y_1, \ldots, y_l)$ o $\varphi_i$ no es cuantificación existencial, $H_i(y_1, \ldots, y_{l_i})$ es el $\lhd$-primer elemento de $\mathrm{Z}_\beta$.

Por el lema 3.40 si $A$ es cerrado por cada $H_{\mathrm{i}}$, entonces cada $\varphi_i$ sería absoluta en $A$; $\mathrm{Z}_\beta$ y por lo tanto en $A$, $\mathbf{Z}$. En conclusión, tomamos $A$ como la clausura de $X$ bajo $H_1, \ldots, H_n$. El hecho de que $|A| \leq$ máx$\{\omega, |X|\}$ se deduce del Teorema 1.12. $\square$

**Lema 3.44.** *Sea G un $\in$-isomorfismo de A en M; entonces para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$:*

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in A[\varphi^A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))]$$

*Prueba*: Por inducción en $\varphi$:

- Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es $x_i = x_j$; si $(x_i = x_j)^A$ entonces $x_i = x_j$ y por lo tanto $G(x_i) = G(x_j)$, con lo cual $(G(x_i) = G(x_j))^M$. Si $(G(x_i) = G(x_j))^A$, $G(x_i) = G(x_j)$ y por lo tanto $x_i = x_j$ con lo cual $(x_i = x_j)^A$.
- Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es $x_i \in x_j$; si $(x_i \in x_j)^A$ entonces $x_i \in x_j$ y por lo tanto $G(x_i) \in G(x_j)$, con lo cual $(G(x_i) \in G(x_j))^M$. Si $(G(x_i) \in G(x_j))^A$, $G(x_i) \in G(x_j)$ y por lo tanto $x_i \in x_j$, con lo cual $(x_i \in x_j)^A$.
- Si $\varphi$ es $\chi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\chi$ y $\psi$ cumplen el enunciado; si $\varphi^A$, entonces $(\chi \wedge \psi)^A$, que es equivalente a $\chi^A \wedge \psi^A$. Por hipótesis inductiva $\chi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n)) \wedge \psi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$, con lo cual $\varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$. Si $\varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$, entonces $\chi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n)) \wedge \psi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$. Por hipótesis inductiva $\chi^A \wedge \psi^{\mathrm{A}}$ con lo cual $\varphi^A$.
- Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es $\neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi$ cumple el enunciado; si $\varphi^{\mathrm{A}}$ entonces $(\neg\psi)^{\mathrm{A}}$ que es equivalente a $\neg(\psi)^{\mathrm{A}}$. Por hipótesis inductiva $\neg(\psi(G(x_1), \ldots, G(x_n)))^M$, con lo cual $\varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$. Si $\varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$, entonces $\neg(\psi(G(x_1), \ldots, G(x_n)))^M$. Por hipótesis inductiva $\neg(\psi)^A$ con lo cual $\varphi^A$.
- Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es $\exists x_{\mathrm{i}}\, \psi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi$ cumple el enunciado; si $\varphi^A$ entonces $\exists x_{\mathrm{i}} \in A$ $\psi^A(x_1, \ldots, x_n)$. Por hipótesis inductiva, $\psi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$. Por lo tanto $\exists x_{\mathrm{i}} \in A$ $\psi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$, con lo cual $\exists G(x_{\mathrm{i}}) \in M\ \psi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$, por lo tanto $\varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$. Si $\varphi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$, $\exists G(x_{\mathrm{i}}) \in M$ $\psi^M(G(x_1), \ldots, G(x_n))$. Por hipótesis inductiva $\exists G(x_{\mathrm{i}}) \in M\ \psi^A(x_1, \ldots, x_n)$, con lo cual $\exists x_{\mathrm{i}} \in A\ \psi^A(x_1, \ldots, x_n)$ y por lo tanto $\varphi^A$. $\square$

**Corolario 3.45.** $(AC)$ *Sea* $\mathbf{Z}$ *cualquier clase transitiva. Sean* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *cualesquiera fórmulas. Entonces:*

$$\forall X \subseteq \mathbf{Z}\ [X \textit{ es transitivo} \rightarrow \exists M[X \subseteq M \wedge ({\varphi_1}^M \leftrightarrow {\varphi_1}^{\mathbf{Z}}) \wedge \ldots \wedge ({\varphi_n}^M \leftrightarrow {\varphi_n}^{\mathbf{Z}}) \wedge M \textit{ es transitivo} \wedge |M| \leq \text{máx}\{\omega, |X|\}]]$$

*Prueba*: Podemos suponer que $\varphi_{\mathrm{n}}$ es el axioma de Extensionalidad; si no simplemente lo añadimos como $\varphi_{n+1}$. Sea $A$ como en la conclusión del anterior teorema; entonces ${\varphi_i}^A \leftrightarrow {\varphi_i}^{\mathbf{Z}}$. Como $\mathbf{Z}$ es transitiva, el axioma de Extensionalidad se cumple en $\mathbf{Z}$ y por lo tanto se cumple también en $A$. Entonces, como $\in$ es extensional en $A$, por el Teorema del Colapso de Mostowski, hay un $\in$-isomorfismo $G$ de $A$ en un conjunto transitivo $M$. Para ver que $X \subseteq M$, observamos que $\forall x \in X$:

$$G(x) = \{G(y) : y \in A \wedge y \in x\} = \{G(y) : y \in x\}$$

Puesto que X es transitivo. Vemos ahora que $\forall x \in X(G(x) = x)$ por $\in$-inducción en $x$. Suponemos que $\forall y \in x(G(y) = y)$. Por lo tanto:

$$G(x) = \{G(y) : y \in x\} = \{y : y \in x\} = x$$

□

# 4. LOS CONJUNTOS CONSTRUIBLES

## 4.1. Definibilidad

**Definición 4.1.** *Decimos que un conjunto $X$ es definible en un modelo $M$ si existe una fórmula $\varphi$ y algunos $a_1,\ldots,a_n \in M$ tales que $X = \{x \in M\colon \varphi^M(x,\ a_1,\ldots,a_n)\}$. Ahora definimos* $\mathrm{def}(M)$ *, el conjunto formado por los conjuntos definibles en M:*

$$\mathrm{def}(M) = \{X \subseteq M : X \text{ es definible en } M\}$$

**Lema 4.2.** *$M \in \mathrm{def}(M)$. Además si $M$ es transitivo $M \subseteq \mathrm{def}(M) \subseteq P(M)$.*

*Prueba*: Como $M = \{x \in M : x = x\} = \{x \in M : (x = x)^{\mathrm{M}}\}$, $M \in \mathrm{def}(M)$.

Sea $x \in M$, entonces $x = \{y \in M : y \in x\} = \{y \in M : (y \in x)^{\mathrm{M}}\}$, con lo cual $x \in \mathrm{def}(M)$.

Sea $X \in \mathrm{def}(M)$, entonces por la definición de $\mathrm{def}(M)$, $X \subseteq M$, con lo cual $X \in P(M)$. □

## 4.2. Operaciones de Gödel

**Definición 4.3.** *Una operación de Gödel es cualquier composición de las siguientes operaciones fundamentales:*

1. $G_1(X,Y) = \{X,Y\}$
2. $G_2(X,Y) = X \times Y$
3. $G_3(X,Y) = \varepsilon(X,Y) = \{(u,v) : u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$
4. $G_4(X,Y) = X \setminus Y$
5. $G_5(X,Y) = X \cap Y$
6. $G_6(X) = \bigcup X$
7. $G_7(X) = \mathrm{dom}(X)$
8. $G_8(X) = \{(u,v) : (v,u) \in X\}$
9. $G_9(X) = \{(u,v,w) : (u,w,v) \in X\}$
10. $G_{10}(X) = \{(u,v,w) : (v,w,u) \in X\}$

**Teorema 4.4.** *Forma Normal de Gödel*

*Dada $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ una fórmula $\Delta_0$, entonces existe una operación de Gödel $G$ tal que para todos $X_1, \ldots, X_n$:*

$$G(X_1, \ldots, X_n) = \{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge \varphi(u_1, \ldots, u_n)\}$$

*Prueba*: Lo probamos por inducción en la complejidad de las fórmulas $\Delta_0$. Podemos simplificar y considerar sólo las fórmulas de la siguiente forma ya que cualquier fórmula $\Delta_0$ es equivalente a otra fórmula $\Delta_0$ cumpliendo que:

I) Los únicos símbolos lógicos en $\varphi$ son $\neg$, $\wedge$ y $\exists$ restringido.

II) $=$ no aparece ($x = y$ puede reemplazarse por $\neg\exists u \in x(\neg(u \in y)) \wedge \neg\exists v \in y \neg(v \in x)$).

III) La única aparición de $\in$ es $u_i \in u_j$ con $i \neq j$.

IV) La única aparición de $\exists$ es $(\exists u_{m+1} \in u_i)\ \psi(u_1, \ldots, u_{m+1})$, donde $i \leq m$.

- Caso 1: $\varphi(u_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ es una fórmula atómica $u_i \in u_j$ $(i \neq j)$. Lo probamos por inducción en $n$.
  - Caso 1.a: $n = 2$. Tenemos:

    $$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_1 \in u_2\} = G_3(X_1, X_2)$$

    y

    $$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_2 \in u_1\} = G_8(G_3(X_2, X_1)).$$

  - Caso 1.b: $n > 2$ y $i, j \neq n$. Por la hipótesis de inducción , hay una operación $G$ tal que:

    $$\{(u_1, \ldots, u_{n-1}) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, \ldots, X_{n-1}).$$

    Obviamente:

    $$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, \ldots, X_{n-1}) \times X_n = G_2(G(X_1, \ldots, X_{n-1}), X_n)$$

  - Caso 1.c: $n > 2$ y $i, j \neq n-1$. Por la hipótesis de inducción (Caso 1.b) hay una operación $G$ tal que:

    $$\{(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_n, u_{n-1}) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_i \in u_j\} = G(X_1, \ldots, X_n).$$

    Observando que:

    $$(u_1, \ldots, u_{n-2}, u_n, u_{n-1}) = ((u_1, \ldots, u_{n-2}), u_n, u_{n-1})$$

    obtenemos que

    $$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_i \in u_j\} = G_9(G(X_1, \ldots, X_n)).$$

  - Caso 1.d: $i = n-1, j = n$. Por 1.a tenemos:

    $$\{(u_{n-1}, u_n) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = G_3(X_{n-1}, X_n)$$

    con lo cual

$$\{((u_{n-1}, u_n), (u_1, \ldots, u_{n-2})) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = \\ G_3(X_{n-1}, X_n) \times (X_1 \times \ldots X_{n-2}) = G(X_1, \ldots, X_n)$$

Observamos que:

$$(u_1, \ldots, u_n) = ((u_1, \ldots, u_{n-2}), (u_{n-1}, u_n))$$

con lo cual

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in u_n\} = G_8(G(X_1, \ldots, X_n))$$

- Caso 1.e: $i = n, j = n - 1$. Similarmente al caso anterior, por 1.a tenemos:

$$\{(u_n, u_{n-1}) : u_n \in X_n \wedge u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in u_{n-1}\} = G_3(X_n, X_{n-1})$$

con lo cual

$$\{(u_{n-1}, u_n) : u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_n \in X_n \wedge u_n \in u_{n-1}\} = G_8(G_3(X_n, X_{n-1}))$$

Ahora

$$\{((u_{\text{n-1}}, u_n), (u_1, \ldots, u_{n-2})) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_n \in u_{n-1}\} = \\ G_8(G_3(X_n, X_{n-1})) \times (X_1 \times \ldots \times X_{n-2}) = G(X_1, \ldots, X_n).$$

Ahora, por el mismo razonamiento que en 1.d

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge u_n \in u_{n-1}\} = G_8(G(X_1, \ldots, X_n))$$

- Caso 2: $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ es una negación, $\neg\psi(u_1, \ldots, u_n)$. Por la hipótesis de inducción, hay una operación $G$ tal que:

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge \psi(u_1, \ldots, u_n)\} = G(X_1, \ldots, X_n)$$

Claramente,

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge \varphi(u_1, \ldots, u_n)\} = \\ X_1 \times \ldots \times X_n \setminus G(X_1, \ldots, X_n) = G_4(X_1 \times \ldots \times X_n, G(X_1, \ldots, X_n)).$$

- Caso 3: $\varphi$ es una conjunción, $\psi_1 \wedge \psi_2$. Por la hipótesis de inducción,

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge \psi_{\text{i}}(u_1, \ldots, u_n)\} = G_{(i)}(X_1, \ldots, X_n)$$

$(i = 1, 2)$. Por lo tanto:

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge \varphi(u_1, \ldots, u_n)\} = \\ G_{(1)}(X_1, \ldots, X_n) \cap G_{(2)}(X_1, \ldots, X_n) = G_5(G_{(1)}(X_1, \ldots, X_n), G_{(2)}(X_1, \ldots, X_n)).$$

- Caso 4: $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ es la fórmula $(\exists u_{n+1} \in u_i)\psi(u_1, \ldots, u_{n+1})$. Sea $\chi(u_1, \ldots, u_{n+1})$ la fórmula $\psi(u_1, \ldots, u_{n+1}) \wedge u_{n+1} \in u_i$. Por la hipótesis de inducción(consideramos que $\chi$ es menos compleja que $\varphi$), hay una operación $G$ tal que

$$\{(u_1, \ldots, u_{n+1}) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_{n+1} \in X_{n+1} \wedge \chi(u_1, \ldots, u_{n+1})\} = G(X_1, \ldots, X_{n+1}).$$

para cualesquiera $X_1, \ldots, X_{n+1}$. Afirmamos que:

$$\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge u_n \in X_n \wedge \varphi(u_1, \ldots, u_n)\} = (X_1 \times \ldots \times X_n) \cap \\ \text{dom}(G(X_1, \ldots, X_n, G_6(X_{\text{i}}))) = G_5(X_1 \times \ldots \times X_n, G_7(G(X_1, \ldots, G_6(X_i)))).$$

En efecto, si denotamos $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, entonces para todos los $u \in X$, tenemos:

$$\varphi(u) \leftrightarrow (\exists v \in u_i)\psi(u_i, v) \leftrightarrow \exists v(v \in u_i \wedge \psi(u_i, v) \wedge v \in \bigcup X_i) \leftrightarrow \\ u \in dom\{(u, v) \in X \times \bigcup X_i : \chi(u, v)\}$$

□

**Lema 4.5.** *Si G es una operación de Gödel, la propiedad $Z = G(X_1, \ldots, X_n)$ puede escribirse como una fórmula $\Delta_0$.*

*Prueba*: Demostramos que si $G$ y $F$ son operaciones de Gödel que cumplen el enunciado, al aplicar una de las operaciones la propiedad $Z = G_i(G, F)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ o $Z = G_i(G)(i = 6, 7, 8, 9, 10)$ puede escribirse como una fórmula $\Delta_0$. Lo demostramos en cuatro pasos:

I) $u \in G(\ldots)$ es $\Delta_0$.

II) Si $\varphi$ es $\Delta_0$, entonces lo son $\forall u \in G(\ldots)\varphi$ y $\exists u \in G(\ldots)\varphi$.

III) $Z = G(\ldots)$ es $\Delta_0$.

IV) Si $\varphi$ es $\Delta_0$, también lo es $\varphi(G(\ldots))$

El tercer apartado se deduce de los dos anteriores pues:

$$Z = G(\ldots) \leftrightarrow (\forall u \in Z)u \in G(\ldots) \wedge (\forall u \in G(\ldots))u \in Z$$

Para el cuarto apartado, sea $\varphi$ fórmula $\Delta_0$. Entonces $G(X, \ldots)$ aparece en $\varphi(G(X, \ldots))$ de la forma $u \in G(X, \ldots)$, $G(X, \ldots) \in u$, $Z = G(X, \ldots)$, $\forall u \in G(X, \ldots)$ o $\exists u \in G(X, \ldots)$. Como $G(X, \ldots) \in u$ puede sustituirse por $\exists v \in u(v = G(X, \ldots))$ y por hipótesis inductiva $G$ cumple los tres apartados anteriores, $\varphi(G(\ldots))$ es $\Delta_0$.

Recordamos que $u = (x, y)$ es $\Delta_0$:

$$u = (x, y) \leftrightarrow \exists w \in u(w = \{x\}) \wedge \exists v \in u(v = \{x, y\}) \wedge \forall z \in u(z = \{x\} \vee z = \{x, y\})$$

(Ver Teorema 3.19)

Similarmente podemos comprobar que $u = (x, y, z)$ es $\Delta_0$.

Apartado 1. Suponemos que $G$ y $F$ cumplen 1 y entonces al componer con una operación de Gödel el resultado sigue cumpliendo 1.

1. $u \in \{G(X, ..), F(X, \ldots)\} \leftrightarrow ((u = G(X, \ldots)) \vee (u = F(X, \ldots)))$

2. $u \in G(X, ..) \times F(X, \ldots) \leftrightarrow \exists x \in G(X, \ldots)\exists y \in F(X, \ldots)(u = (x, y))$

3. $u \in \varepsilon(G(X, ..), F(X, \ldots)) \leftrightarrow \exists x \in G(X, \ldots)\exists y \in F(X, \ldots)(x \in y \wedge u = (x, y))$

4. $u \in G(X, \ldots) \setminus F(X, \ldots) \leftrightarrow u \in G(X, \ldots) \wedge \neg(u \in F(X, \ldots))$

5. $u \in G(X,\ldots) \cap F(X,\ldots) \leftrightarrow u \in G(X,\ldots) \wedge u \in F(X,\ldots)$

6. $u \in \bigcup G(X,\ldots) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)(u \in v)$

7. $u \in \mathrm{dom}(G(X,\ldots)) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists w \in \bigcup v(v = (u,w))$

8. $u \in G_8(G(X,\ldots)) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists s \in \bigcup\bigcup v \exists r \in \bigcup\bigcup v(v = (s,r) \wedge u = (r,s))$

9. $u \in G_9(G(X,\ldots)) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists t \in \bigcup\bigcup v \exists w \in \bigcup\bigcup v \exists r \in \bigcup\bigcup t \exists s \in \bigcup\bigcup t$ $(t = (s,r) \wedge v = (s,r,w) \wedge u = (s,w,r))$

10. $u \in G_{10}(G(X,\ldots)) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists t \in \bigcup\bigcup v \exists w \in \bigcup\bigcup v \exists r \in \bigcup\bigcup t$ $\exists s \in \bigcup\bigcup t(t = (s,r) \wedge v = (s,r,w) \wedge u = (r,w,s))$

Apartado 2: Ahora suponemos que $G$ y $F$ cumplen 2 y entonces al componer con una operación de Gödel el resultado sigue cumpliendo 2. Sólo comprobaremos $\exists u \in G_i(\ldots)\varphi$ puesto que $\forall u \in G_i(\ldots)\varphi$ es equivalente a $\neg\exists u \in G_i(\ldots)\neg\varphi$.

1. $\exists u \in \{G(X,\ldots), F(X,\ldots)\}\varphi(u) \leftrightarrow \varphi(G(X,\ldots) \vee \varphi(F(X,\ldots))$

2. $\exists u \in G(X,\ldots) \times F(X,\ldots)\varphi(u) \leftrightarrow \exists x \in G(X,\ldots)\exists y \in F(X,\ldots)(u = (x,y) \wedge \varphi(u))$

3. $\exists u \in \varepsilon(G(X,\ldots), F(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists x \in G(X,\ldots)\exists y \in F(X,\ldots)(x \in y \wedge u = (x,y) \wedge \varphi(u))$

4. $\exists u \in (G(X,\ldots) \setminus F(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists u \in G(X,\ldots)(u \notin F(X,\ldots) \wedge \varphi(u))$

5. $\exists u \in (G(X,\ldots) \cap F(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists u \in G(X,\ldots)(u \in F(X,\ldots) \wedge \varphi(u))$

6. $\exists u \in \bigcup G(X,\ldots)\varphi(u) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)(u \in v \wedge \varphi(u))$

7. $\exists u \in \mathrm{dom}(G(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists w \in \bigcup\bigcup v(v = (u,w) \wedge \varphi(u))$

8. $\exists u \in G_8(G(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists s \in \bigcup\bigcup v \exists t \in \bigcup\bigcup v(v = (s,t) \wedge u = (t,s) \wedge \varphi(u))$

9. $\exists u \in G_9(G(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists s \in \bigcup\bigcup v \exists t \in \bigcup\bigcup v \exists r \in \bigcup\bigcup s$ $\exists w \in \bigcup\bigcup s(s = (r,w) \wedge v = (r,w,t) \wedge u = (r,t,w) \wedge \varphi(u))$

10. $\exists u \in G_{10}(G(X,\ldots))\varphi(u) \leftrightarrow \exists v \in G(X,\ldots)\exists s \in \bigcup\bigcup v \exists t \in \bigcup\bigcup v \exists r \in \bigcup\bigcup s$ $\exists w \in \bigcup\bigcup s(s = (r,w) \wedge v = (r,w,t) \wedge u = (w,t,r) \wedge \varphi(u))$ □

Para toda fórmula $\varphi$, $\varphi^{\mathrm{M}}$ es $\Delta_0$ y, por lo tanto, por el Teorema de la Forma Normal de Gödel hay una operación de Gödel $G$ tal que para cualquier conjunto transitivo $M$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n$:

$$\{x \in M : \varphi^{\mathrm{M}}(a_1, \ldots, a_n)\} = G(M, a_1, \ldots, a_n)$$

El mismo argumento, por inducción en la complejidad de $\varphi$, muestra que para cualquier fórmula $\varphi$, el conjunto $\{x \in M : \varphi^{\mathrm{M}}(a_1, \ldots, a_n)\}$ está en la clausura de $M \cup \{M\}$ bajo $G_1, \ldots, G_{10}$.

Recíprocamente, si $G$ es una operación de Gödel por el Lema anterior existe una fórmula $\varphi$ $\Delta_0$ tal que para cualquier conjunto $M$ y cualesquiera $a_1$, $\ldots$, $a_n$, si $X = G(M, a_1, \ldots, a_n)$ entonces $X = \{x \in M : \varphi(x, a_1 \ldots, a_n)\}$. Si además $M$ es transitivo y $X \subseteq M$, entonces $X = \{x \in M : \psi^{\mathrm{M}}(x, a_1, \dots, a_n)\}$($\psi$ es una modificación obvia de $\varphi$, por ejemplo, sustituir $\exists u \in M$ por $\exists u$). En conclusión, tenemos la siguiente caracterización de def$(M)$:

**Corolario 4.6.** *Para cada conjunto transitivo M,*

$$\mathrm{def}(M) = \mathrm{cl}(M \cup \{M\}) \cap P(M)$$

*donde* cl *denota la clausura bajo* $G_1, \dots, G_{10}$.

**Lema 4.7.** *Si $M$ es transitivo e infinito,* $|\mathrm{def}(M)| \leq |M|$.

*Prueba*: Observamos que $M \cup \{M\} \subseteq P(M)$ puesto que $M$ es transitivo. Además $G_i : P(M) \to P(M)$ y $|\{G_i : i = 1, 2 \dots, 10\}| = 10 < |M|$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 1.12, y obtenemos que $|\mathrm{cl}(M \cup \{M\})| \leq |M|$, con lo cual $|\mathrm{def}(M)| \leq |M|$. □

## 4.3. La jerarquía construible

**Definición 4.8.** *Por recursión transfinita definimos* $\mathrm{L}_\alpha$ *para* $\alpha \in$ **ON:**

*a)* $\mathrm{L}_0 = 0$

*b)* $\mathrm{L}_{\alpha+1} = \mathrm{def}(\mathrm{L}_\alpha)$

*c) Si $\alpha$ es límite* $\mathrm{L}_\alpha = \bigcup_{\zeta<\alpha} \mathrm{L}_\zeta$

**Definición 4.9.** *Definimos la clase de los conjuntos construibles* $\mathbf{L} = \bigcup \{\mathrm{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON}\}$

**Lema 4.10.** *Para cada $\alpha$:*

*a)* $\mathrm{L}_\alpha$ *es transitivo*

*b) Para todo* $\zeta \leq \alpha$: $\mathrm{L}_\zeta \subseteq \mathrm{L}_\alpha$

*Prueba*: Demostramos a) y b) por inducción en $\alpha$.

- El caso $\alpha = 0$ es trivial.
- Si $\alpha$ es límite, dado $x \in \mathrm{L}_\alpha$ existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in \mathrm{L}_\beta$. Como $\beta < \alpha$, $\mathrm{L}_\beta$ es transitivo y, por lo tanto, $x \subseteq \mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ con lo cual $\mathrm{L}_\alpha$ es transitivo.
- Si $\alpha$ es sucesor, entonces $\alpha = \beta + 1$ y $\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{def}(\mathrm{L}_\beta)$. Por el Lema 4.2, $\mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{L}_\alpha \subseteq P(\mathrm{L}_\beta)$. Por lo tanto, $\mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{L}_\alpha$. Ahora, si $x \in \mathrm{L}_\alpha$ entonces $x \in P(\mathrm{L}_\beta)$. Dado $y \in x$, $y \in \mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{L}_\alpha$, por lo tanto $y \in \mathrm{L}_\alpha$ y $\mathrm{L}_\alpha$ es transitivo. □

**Definición 4.11.** *Dado $x \in \mathbf{L}$ definimos el $\mathbf{L}$-rango de $x$, $\rho_{\mathrm{L}}(x)$, como el menor ordinal $\beta$ tal que $x \in \mathrm{L}_{\beta+1}$. (Observamos que si $x \in \mathbf{L}$ entonces el menor ordinal $\alpha$ tal que $x \in \mathrm{L}_\alpha$ tiene que ser un ordinal sucesor por la Definición 4.8.c)*

**Lema 4.12.** *Para cada ordinal $\alpha$, $\mathrm{L}_\alpha = \{x \in \mathbf{L} : \rho_L(\alpha) < \alpha\}$.*

*Prueba:* Vemos ambas inclusiones por inducción en $\alpha$:

- El caso $\alpha = 0$ es trivial.
- Si $\alpha$ es límite, dado $x \in \mathrm{L}_\alpha$ existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in \mathrm{L}_\beta$. Por lo tanto $\rho_{\mathrm{L}}(x) \leq \beta < \alpha$. Si $\rho_{\mathrm{L}}(x) < \alpha$, existe $\beta < \alpha$ tal que $\rho_{\mathrm{L}}(x) = \beta$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{L}_{\beta+1} \subseteq \mathrm{L}_\alpha$.
- Si $\alpha$ es $\beta + 1$, dado $x \in \mathrm{L}_\alpha$, $\rho_{\mathrm{L}}(x) \leq \beta < \alpha$. Si $\rho_{\mathrm{L}}(x) < \alpha$, existe $\gamma \leq \beta$ tal que $\rho_{\mathrm{L}}(x) = \gamma$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{L}_{\gamma+1} \subseteq \mathrm{L}_\alpha$, es decir, $x \in \mathrm{L}_\alpha$. □

**Lema 4.13.** .

*a) Para todo ordinal $\alpha$, $\alpha \in \mathbf{L}$ y $\alpha = \rho_L(\alpha)$.*

*b) Para todo ordinal $\alpha$, $\mathrm{L}_\alpha \cap \mathbf{ON} = \alpha$.*

*Prueba*: Vemos primero que b) implica a) y luego demostramos b):

Sea $\alpha$ ordinal. Por hipótesis $\mathrm{L}_\alpha \cap \mathbf{ON} = \alpha$. Por lo tanto $\alpha = \{x \in \mathrm{L}_\alpha : x \text{ es ordinal}\}$. Previamente hemos visto que "$x$ es ordinal" puede expresarse mediante una fórmula $\varphi(x)$ $\Delta_0$. Como las fórmulas $\Delta_0$ son absolutas para cualquier modelo transitivo, entonces $\alpha = \{x \in \mathrm{L}_\alpha : \varphi(x)\} = \{x \in \mathrm{L}_\alpha : \varphi^{\mathrm{L}_\alpha}(x)\} \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$. Con esto deducimos que $\alpha \in \mathbf{L}$ y $\rho_{\mathrm{L}}(\alpha) \leq \alpha$. Si $\rho_{\mathrm{L}}(\alpha) < \alpha$, existe $\beta \leq \alpha$ tal que $\alpha \in \mathrm{L}_\beta$. De esto se deduce que $\alpha \in \mathrm{L}_\beta \cap \mathbf{ON} \subseteq \mathrm{L}_\alpha \cap \mathbf{ON} = \alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha = \rho_{\mathrm{L}}(\alpha)$.

Ahora demostramos b) por inducción:

- El caso $\alpha = 0$ es trivial.
- Si $\alpha$ es límite, $\mathrm{L}_\alpha \cap \mathbf{ON} = (\bigcup_{\zeta < \alpha} \mathrm{L}_\zeta) \cap \mathbf{ON} = \bigcup_{\zeta < \mathrm{a}} (\mathrm{L}_\zeta \cap \mathbf{ON}) = \bigcup_{\zeta < \alpha} \zeta = \alpha$
- Si $\alpha$ es $\beta + 1$, $\mathrm{L}_\beta \cap \mathbf{ON} = \beta$. Como $\mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{L}_\alpha \subseteq P(\mathrm{L}_\beta)$, $\beta \subseteq \mathrm{L}_\alpha \cap \mathbf{ON} \subseteq \alpha$. Así pues es suficiente ver que $\beta \in \mathrm{L}_\alpha$. De nuevo aplicamos que "$x$ es ordinal" es equivalente a una fórmula $\varphi(x)$ $\Delta_0$ . Por lo tanto, como las fórmulas $\Delta_0$ son absolutas para cualquier modelo transitivo:

$$\beta = \{x \in \mathrm{L}_\beta : \varphi(x)\} = \{x \in \mathrm{L}_\beta : \varphi^{\mathrm{L}_\beta}(x)\}$$

Por lo tanto $\beta \in \mathrm{def}(\mathrm{L}_\beta) = \mathrm{L}_\alpha$. □

**Lema 4.14.** *Para todo ordinal $\alpha$, $\mathrm{L}_\alpha \subseteq \mathrm{V}_\alpha$.*

*Prueba*: Por inducción en $\alpha$:

- El caso $\alpha = 0$ es trivial.
- Si $\alpha$ es $\beta + 1$, por hipótesis inductiva $\mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\beta$. Por lo tanto, $P(\mathrm{L}_\beta) \subseteq P(\mathrm{V}_\beta)$. Entonces $\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{def}(\mathrm{L}_\beta) \subseteq P(\mathrm{L}_\beta) \subseteq P(\mathrm{V}_\beta) = \mathrm{V}_\alpha$.
- Si $\alpha$ es límite, por hipótesis inductiva, $\forall\, \beta < \alpha$ $(\mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\beta)$. Sea $x \in \mathrm{L}_\alpha$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in \mathrm{L}_\beta$. Como $\mathrm{L}_\beta \subseteq \mathrm{V}_\beta$, $x \in \mathrm{V}_\beta$ y, por lo tanto, $x \in \mathrm{V}_\alpha$. □

**Lema 4.15.** *Todo subconjunto finito de* $\mathrm{L}_\alpha$ *está en* $\mathrm{L}_{\alpha+1}$.

*Prueba*: Lo probamos por inducción en $n$, la cardinalidad de un conjunto finito $x$:

- Si $n = 0$, el único subconjunto de $\mathrm{L}_\alpha$ de cardinal 0 es el vacío.

$$0 = \{x \in \mathrm{L}_\alpha : \neg(x = x)^{\mathrm{L}_\alpha}\} \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$$

- Probamos que si se cumple para $n$ se cumple para $n + 1$. Sea $X \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ tal que $|X| = n + 1$ y sea $x \in X$. Entonces $|X \setminus \{x\}| = n$. Por la hipótesis de inducción, $X \setminus \{x\} \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$. Como $\mathrm{L}_\alpha$ es transitivo podemos aplicar el Corolario 4.6, con lo cual existe una operación de Gödel $G$ tal que $X \setminus \{x\} = G(a_1, \ldots, a_{\mathrm{l}})(a_1, \ldots, a_{\mathrm{l}} \in \mathrm{L}_\alpha)$. Por lo tanto $X = \bigcup\{X \setminus \{x\}, \{x\}\} = G_6(G_1(G(a_1, \ldots, a_{\mathrm{l}}), \{x\})) \to X \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$. □

**Lema 4.16.** .

*a)* $\forall n \in \omega$ $(\mathrm{L}_n = \mathrm{V}_n)$

*b)* $\mathrm{L}_\omega = \mathrm{V}_\omega$

*Prueba*: El apartado b) es consecuencia inmediata de a). Para a), por inducción:

- $\mathrm{L}_0 = 0 = \mathrm{V}_0$
- $\mathrm{V}_{n+1} = P(\mathrm{V}_n) = P(\mathrm{L}_n) \subseteq \mathrm{L}_{n+1}$, por el Lema 4.15, ya que todos los subconjuntos de $\mathrm{L}_n$ son finitos. □

**Lema 4.17.** $(AC)$ *Para cada* $\alpha \geq \omega$, $|\mathrm{L}_\alpha| = |\alpha|$.

*Prueba*: Como $\alpha \subseteq \mathrm{L}_\alpha$, $|\alpha| \leq |\mathrm{L}_\alpha|$. Demostramos $|\mathrm{L}_\alpha| = |\alpha|$ por inducción en $\alpha$. Suponemos $\alpha \geq \omega$ y $\forall\, \beta < \alpha$ $(\beta \geq \omega \to |\mathrm{L}_\beta| = |\beta|)$; entonces $\forall\, \beta < \alpha(|\mathrm{L}_\beta| \leq |\alpha|)$ (ya que $|\mathrm{L}_{\mathrm{n}}| = |\mathrm{V}_{\mathrm{n}}| < \omega$ para $n < \omega$). Si $\alpha$ es límite, entonces $\mathrm{L}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{L}_\beta$ es una unión de $|\alpha|$ conjuntos de cardinalidad $\leq|\alpha|$, así que por AC, $|\mathrm{L}_\alpha| \leq |\alpha|$.

Si $\alpha = \beta + 1$, como $\mathrm{L}_\alpha = \mathrm{def}(\mathrm{L}_\beta)$ y $\mathrm{L}_\beta$ es transitivo e infinito, por el Lema 4.7, $|\mathrm{L}_\alpha| \leq |\mathrm{L}_\beta| = |\beta| = |\beta + 1| = |\alpha|$. □

## 4.4. ZF en L

**Teorema 4.18.** **L** *es un modelo de ZF.*

*Prueba*: Comprobamos que los distintos axiomas son ciertos en **L** usando resultados previos de relativización.

- Extensionalidad: se cumple pues **L** es transitiva (Lema 3.4).
- Regularidad: se deduce de $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{WF}$ (Lema 3.10)
- Separación: por el Lema 3.5, sólo hay que comprobar que para cada fórmula $\psi(x, w_1, \ldots, w_n)$ sin más variables libres que las mostradas se cumple :

  $$\forall z,\ w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{L}\ (\{x \in z\colon \psi^{\mathbf{L}}(x,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\} \in \mathbf{L})$$

  Fijamos $z$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{L}$ y fijamos $\alpha$ tal que $z$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathrm{L}_\alpha$. Sea $\beta > \alpha$ tal que $\psi$ es absoluta en $\mathrm{L}_\beta$;$\mathbf{L}$ (existe por el teorema de Reflexión). Entonces:

  $$\{x \in z\colon \psi^{\mathbf{L}}(x,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\} = \{x \in \mathrm{L}_\beta\colon \varphi^{\mathrm{L}_\beta}(x,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\}$$

  Donde $\varphi$ es $x \in z \wedge \psi$. Así que este conjunto está en $\mathrm{def}(\mathrm{L}_\beta) = \mathrm{L}_{\beta+1}$.
- Par: sean $x$, $y \in \mathbf{L}$. Sea $\beta = \max\{\rho_{\mathrm{L}}(x), \rho_{\mathrm{L}}(y)\}$. Entonces $x$, $y \in \mathrm{L}_{\beta+1}$. Como $\{x,y\}$ es finito, por el Lema 4.15, $\{x,y\} \in \mathrm{L}_{\beta+2}$. Como $x \in \{x,y\}$, $y \in \{x,y\}$ y $\{x,y\} \in \mathbf{L}$, por el Lema 3.8, el axioma es cierto en **L**.
- Unión: sea $x \in \mathbf{L}$. Vemos que $\bigcup x \subseteq \mathrm{L}_{\alpha+1}$, con $\alpha = \rho_{\mathrm{L}}(x)$. Si $y \in \bigcup x$, existe $z \in x$ tal que $y \in z$. Aplicando la transitividad de $\mathrm{L}_{\alpha+1}$ dos veces tenemos que $y \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$ con lo cual $\bigcup x \subseteq \mathrm{L}_{\alpha+1}$. De nuevo el Lema 3.8 nos da el resultado.
- Potencia: sea $x \in \mathbf{L}$ y sea $y \in P(x) \cap \mathbf{L}$. Vemos que $y \in \mathrm{L}_\alpha$, con $\alpha = \sup\{\rho_{\mathrm{L}}(z)+1\colon z \in P(x) \cap \mathbf{L}\}$. Como $\rho_{\mathrm{L}}(y) < \alpha$, por el Lema 4.12, que $y \in \mathrm{L}_\alpha$. Como $P(x) \cap \mathbf{L} \subseteq \mathrm{L}_\alpha$, por el Lema 3.7 ($\mathrm{L}_\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1}$), el axioma se cumple en **L**.
- Reemplazo: hay que comprobar, por el Lema 3.9, que para cada fórmula $\varphi(x,\ y,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)$ y cada $A$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{L}$ si:

  $$\forall x \in A\ \exists\, !y \in \mathbf{L}\ \varphi^{\mathbf{L}}(x,\ y,\ w_1,\ \ldots,\ w_n) \quad (1)$$

  entonces,

  $$\exists Y \in \mathbf{L}(\{y\colon \exists x \in A\ \varphi^{\mathbf{L}}(x,\ y,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\} \subseteq \mathrm{Y}) \quad (2)$$

  Suponiendo (1), sea $\alpha = \sup\{\rho_{\mathrm{L}}(y)+1\colon \exists x \in A\ \varphi^{\mathbf{L}}(x,\ y,\ w_1,\ \ldots,\ w_n)\}$. Tomando Y $= \mathrm{L}_\alpha$, que pertenece a $\mathbf{L}(\mathrm{L}_\alpha \in \mathrm{L}_{\alpha+1})$ , se cumple (2).
- Infinito: se cumple pues $\omega \in \mathbf{L}$. □

# 5. CONSISTENCIA DEL AXIOMA DE LA ELECCIÓN Y LA HIPÓTESIS GENERALIZADA DEL CONTINUO

## 5.1. El axioma de constructibilidad

**Definición 5.1.** *El axioma de constructibilidad es la afirmación* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*, es decir,* $\forall x\ \exists\alpha\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)$.

**Lema 5.2.** *La función* $\mathrm{L}_\alpha$ *es absoluta para modelos transitivos de ZF – P.*

*Prueba*: Como $\mathrm{L}_\alpha$ fue definida por recursión transfinita, sólo debemos comprobar que def es absoluta en modelos transitivos de ZF - P. Para ello usamos la Proposición 3.35. Definimos $\mathbf{H} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ por $\mathbf{H}(A) = A \cup \{A\}$ y $\mathbf{F} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ por $\mathbf{F}(X, Y) = X \cup \{G_i(u, v) : u, v \in X, i = 1, \ldots, 5\} \cup \{G_i(u) : u \in X, i = 6, \ldots, 10\}$. Tanto $\mathbf{H}$ como $\mathbf{F}$ son absolutas. Por la la Proposición 3.35, tenemos $\mathbf{W} : \omega \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ absoluta tal que:

- $\mathbf{W}(0, A) = \mathbf{H}(A)$
- $\mathbf{W}(n + 1, A) = \mathbf{F}(\mathbf{W}(n, A), A) = \mathbf{W}(n, A) \cup \{G_i(u, v) : u, v \in \mathbf{W}(n, A), i = 1, \ldots, 5\} \cup \{G_i(u) : u \in \mathbf{W}(n, A), i = 6, \ldots, 10\}$

Observamos que $\bigcup_{n<\omega} \mathbf{W}(n, A)$ es la clausura de $A \cup \{A\}$ bajo $G_1, \ldots, G_{10}$. Por lo tanto $\mathrm{def}(A) = \bigcup_{n<\omega} \mathbf{W}(n, A)$ es absoluta. □

**Teorema 5.3.** $\mathbf{L}$ *es modelo de ZF +* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.

*Prueba*: Sólo falta ver $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$, pues el resto es el Teorema 4.18 . Debemos comprobar que:

$$\forall x \in \mathbf{L}\ \exists\alpha \in \mathbf{L}\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)^{\mathbf{L}}$$

Sea $x \in \mathbf{L}$. Fijamos $\alpha$ tal que $x \in \mathrm{L}_\alpha$. Entonces, $\alpha \in \mathbf{L}$ ya que $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{L}$ y $(x \in \mathrm{L}_\alpha)^{\mathbf{L}}$ por el Lema 5.2. □

**Corolario 5.4.** *Con*(*ZF*) $\to$ *Con*(*ZF +* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$)

Los siguientes teoremas son consecuencias del Lema 5.2.

**Teorema 5.5.** *Sea* $\mathbf{M}$ *cualquier clase propia transitiva modelo de ZF – P. Entonces* $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M}$.

*Prueba*: Primero observamos que $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{M}$. Para ello fijamos $\alpha \in \mathbf{ON}$. Como $\mathbf{M} \nsubseteq \mathrm{V}_\alpha$, hay un $x \in \mathbf{M}$ tal que $\rho(x) \geq \alpha$. Pero el rango es función absoluta en $\mathbf{M}$ (Teorema 3.36) así que $\rho(x) \in \mathbf{M}$. Si $\alpha = \rho(x)$, directamente $\alpha \in \mathbf{M}$. Si $\alpha \in \rho(x)$ y $\mathbf{M}$ es transitiva, $\alpha \in \mathbf{M}$. Ahora, como $\mathrm{L}_\alpha$ y los ordinales son absolutos:

$$\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \{x \in \mathbf{M}\colon (\exists\alpha\ (x \in \mathrm{L}_\alpha))^{\mathbf{M}}\} = \{x \in \mathbf{M}\colon \exists\alpha \in \mathbf{M}\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)^{\mathbf{M}}\ \}$$
$$= \{x \in \mathbf{M}\colon \exists\alpha\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)\} = \mathbf{L}$$

En la última igualdad usamos que como $\mathrm{L}_\alpha$ es absoluta en $\mathbf{M}$, $\mathrm{L}_\alpha \in \mathbf{M}$ y como $\mathbf{M}$ es transitiva, $\mathrm{L}_\alpha \subseteq \mathbf{M}$. Por lo tanto, $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M}$. □

**Definición 5.6.** *Para cada conjunto M, $o(M) = M \cap \mathbf{ON}$.*

**Lema 5.7.** *Si M es un conjunto transitivo, $o(M) \in \mathbf{ON}$ y es el primer ordinal que no está en M.*

*Prueba*: Vemos primero que $\mathrm{o}(M)$ es un ordinal. Está totalmente ordenado por $\in$, pues es un subconjunto (por separación respecto M) de $\mathbf{ON}$. Sean $x \in \mathrm{o}(M)$ y $y \in x$. Como $M$ es transitivo, $y \in M$ y como $x \in \mathbf{ON}$, y $\mathbf{ON}$ es transitiva, $y \in \mathbf{ON}$. Por lo tanto, por el Corolario 2.19, $y \in \mathrm{o}(M)$.

Que es el primer ordinal que no está en $M$, se debe a que $\forall\alpha \in \mathbf{ON}$, $\alpha \notin \alpha$ y $\forall\beta < \alpha\ (\beta \in \alpha)$. □

**Teorema 5.8.** *Hay un conjunción finita de axiomas $\psi$ de ZF – P tales que:*

$$\forall M(M \textit{ transitivo} \wedge \psi^M \to \mathrm{L}_{o(M)} = \mathbf{L}^M \subseteq M)$$

*Prueba*: El teorema es análogo al Teorema 5.5 pero para conjuntos. Éste puede reformularse del siguiente modo:

$$\forall\mathbf{M}(\mathbf{M} \text{ clase propia transitiva} \wedge \varphi^{\mathrm{M}} \to \mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{M}) \text{ es demostrable}$$

donde $\varphi$ es una conjunción finita de axiomas de ZF – P de modo que los conceptos de ordinal, rango y $\mathrm{L}_\alpha$ son absolutos en modelos transitivos de $\varphi$.

En este caso $\psi$ debe ser $\varphi$ añadiendo suficientes axiomas para poder demostrar que no hay un máximo ordinal. Ahora si $M$ es transitivo y $\psi^M$, como no hay un máximo ordinal en $M$, $\mathrm{o}(M)$ es necesariamente un ordinal límite, con lo cual $\mathrm{L}_{\mathrm{o}(M)} = \bigcup\ \{\mathrm{L}_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{o}(M)\}$.

$$\mathbf{L}^M = \{x \in M\colon (\exists\alpha\ (x \in \mathrm{L}_\alpha))^M\} = \{x \in M\colon \exists\alpha \in M\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)^M\} =$$
$$\{x \in M\colon \exists\alpha \in M\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)\} = \bigcup\ \{\mathrm{L}_\alpha\colon \alpha \in M\} = \bigcup\ \{\mathrm{L}_\alpha\colon \alpha \in \mathrm{o}(M)\} = \mathrm{L}_{\mathrm{o}(M)}$$

De nuevo hemos usado que $\mathrm{L}_\alpha$ es absoluta( y por lo tanto $\mathrm{L}_\alpha \in M$), de lo cual se deduce $\mathrm{L}_{\mathrm{o(M)}} = \mathbf{L}^M \subseteq M$. □

**Teorema 5.9.** *Hay una conjunción finita de axiomas $\chi$ de ZF – P + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ tal que:*

*a) Si $\mathbf{M}$ es clase transitiva propia y $\chi^{\mathbf{M}}$, entonces $\mathbf{M} = \mathbf{L}$.*

*b) $\forall M(M \textit{ transitivo} \wedge \chi^M \to \mathrm{L}_{o(M)} = M)$*

*Prueba*: $\chi$ es simplemente la $\psi$ del teorema anterior junto con $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Entonces si $\mathbf{M}$ es transitiva (sea clase propia o no) y $\chi^{\mathbf{M}}$, se debe cumplir $(\forall x\ \exists\alpha\ (x \in \mathrm{L}_\alpha))^{\mathbf{M}}$, que es equivalente a $\forall x \in \mathbf{M}\ \exists\alpha \in \mathbf{M}\ (x \in \mathrm{L}_\alpha)^{\mathbf{M}}$. Como $\mathrm{L}_\alpha$ es absoluta, podemos simplificar $(x \in \mathrm{L}_\alpha)^{\mathbf{M}}$ a $x \in \mathrm{L}_\alpha$. En el caso a) esto nos da que $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}^{\mathbf{M}}$, que junto con el Teorema 5.5 nos da la igualdad. Análogamente, en el caso b) obtenemos que $M \subseteq \mathrm{L}_{\mathrm{o}(M)}$, que junto con el Teorema 5.8 nos da la igualdad. □

## 5.2. AC y GCH en L

**Teorema 5.10.** *Hay un buen orden de la clase* $\mathbf{L}$.

*Prueba*: Por inducción, construimos para cada $\alpha$ un buen orden $<_\alpha$. Lo hacemos de modo que si $\alpha < \beta$ entonces $<_\beta$ es extensión final de $<_\alpha$, es decir:

- Si $x <_\alpha y$, entonces $x <_\beta y$.
- Si $x \in \mathrm{L}_\alpha$ y $y \in \mathrm{L}_\beta \setminus \mathrm{L}_\alpha$, entonces $x <_\beta y$.

(Observamos que si $x \in y \in \mathrm{L}_\alpha$, entonces $x <_\alpha y$).

Primero consideramos el caso en que $\alpha$ es límite y hemos construido $<_\beta$ para todo $\beta < \alpha$ y que si $\beta_1 < \beta_2$, entonces $\beta_2$ es extensión final de $\beta_1$. En ese caso definimos:

$$<_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} <_\beta$$

es decir,si $x, y \in \mathrm{L}_\alpha$:

$$x <_\alpha y \text{ si y sólo si } (\exists\beta < \alpha) x <_\beta y$$

Ahora suponemos que hemos definido $<_\alpha$ y construimos $<_{\alpha+1}$. Recordamos que por el Corolario 4.6:

$$\mathrm{L}_{\alpha+1} = P(\mathrm{L}_\alpha) \cap \mathrm{cl}(\mathrm{L}_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\}) = P(\mathrm{L}_\alpha) \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n^\alpha,$$

donde:

$$W_0^\alpha = \mathrm{L}_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\}$$
$$W_{n+1}^\alpha = \{G_i(X,Y) : X, Y \in W_n^\alpha, i = 1, \ldots, 5\} \cup \{G_i(X) : X \in W_n^\alpha, i = 6, \ldots, 10\}$$

La idea de la construcción de $<_{\alpha+1}$ es la siguiente. Primero tomamos los elementos de $\mathrm{L}_\alpha$, entonces $\mathrm{L}_\alpha$, entonces los elementos restantes de $W_1^\alpha$, a continuación los elementos restantes de $W_2^\alpha$,... Para ordenar los elementos de $W_{n+1}^\alpha$ usamos el buen orden ya definido de $W_n^\alpha$ puesto que cada $x \in W_{n+1}^\alpha$ es igual a $G_i(u, v)$ o $G_i(u)$ para algún $i = 1, \ldots, 10$ y algunos $u, v \in W_n^\alpha$. Definimos:

- $<^0_{\alpha+1}$ es el buen orden de $\mathrm{L}_\alpha \cup \{\mathrm{L}_\alpha\}$ que extiende $<_\alpha$ añadiendo $\mathrm{L}_\alpha$ como ltimo elemento.
- $<^{n+1}_{\alpha+1}$ es el siguiente buen orden de $W^\alpha_{n+1}$: $x <^{n+1}_{\alpha+1} y$ si y sólo si $x <^n_{\alpha+1} y$ o $x \in W^\alpha_n$ y $y \notin W^\alpha_n$ o $x \notin W^\alpha_n$ y $y \notin W^\alpha_n$ y:
  - el menor $i$ tal que $\exists u, v \in W^\alpha_n (x = G_i(u, v) \vee x = G_i(u))$ es menor que el menor $j$ tal que $\exists s, t \in W^\alpha_n (y = G_j(s, t) \vee G_j(s))$
  - o $i = j$ y [el $<^n_{\alpha+1}$-menor $u \in W^\alpha_n$ tal que $\exists v \in W^\alpha_n (x = G_i(u, v) \vee x = G_i(u))$] es menor en $<^n_{\alpha+1}$ que [el $<^n_{\alpha+1}$-menor $s \in W^\alpha_n$ tal que $\exists t \in W^\alpha_n$ $(y = G_i(s, t) \vee y = G_i(s))$]
  - o $i = j$ y $u = s$ y [el $<^n_{\alpha+1}$-menor $v \in W^\alpha_n$ tal que $(x = G_i(u, v))$] es menor en $<^n_{\alpha+1}$ que [el $<^n_{\alpha+1}$-menor $t \in W^\alpha_n$ tal que $(y = G_i(u, t))$](notar que en caso de que $x = G_i(u)$ y $y = G_j(s)$ ya habríamos concluido que son iguales)

Ahora definimos

$$<_{\alpha+1} = \bigcup_{n=0}^{\infty} <^n_{\alpha+1} \cap (P(\mathrm{L}_\alpha) \times P(\mathrm{L}_\alpha))$$

y es claramente que $<_{\alpha+1}$ es una extensión final de $<_\alpha$ y es un buen orden de $\mathrm{L}_\alpha$. Finalmente definimos $<_{\mathbf{L}}$:

$$x <_{\mathbf{L}} y \text{ si y sólo si } \exists \alpha\ x <_\alpha y$$

que es un buen orden de $\mathbf{L}$. □

**Lema 5.11.** $\mathbf{V} = \mathbf{L} \to \mathrm{AC}$

*Prueba*: Si $x \in \mathbf{L}$, $x \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ para algún $\alpha$. El orden $<_\alpha$ bien ordena $x$. □

**Teorema 5.12.** *Si $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, para todos los ordinales infinitos $\alpha$, $P(\mathrm{L}_\alpha) \subseteq \mathrm{L}_{\alpha^+}$.*

*Prueba*: Sea $\chi$ una conjunción finita de axiomas de ZF + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ tal que $\forall M (M \text{ transitivo} \wedge \chi^M \to \mathrm{L}_{\mathrm{o}(M)} = M)$ (existe por el Teorema 5.9). Suponemos que $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, y fijamos $A \in P(\mathrm{L}_\alpha)$. Sea $X = \mathrm{L}_\alpha \cup \{A\}$. Entonces $|X| = |\alpha|$ por el Lema 4.17 (el Lema 4.17 usa AC pero acabamos de ver que $\mathbf{V} = \mathbf{L} \to \mathrm{AC}$). Aplicando el Corolario 3.45 a $X$ (con $\mathbf{Z} = \mathbf{V}$, $X$ es transitivo pues $A \subseteq \mathrm{L}_\alpha$ y $\mathrm{L}_\alpha$ es transitivo), existe un $M$ transitivo tal que $|M| = |\alpha|$, $X \subseteq M$ y $\chi^M \leftrightarrow \chi^{\mathbf{V}}$. Pero $\chi^{\mathbf{V}}$ es cierto pues $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Así pues se cumple $\chi^M$, con lo cual $\mathrm{L}_{\mathrm{o}(M)} = M$. Como $|M| = |\alpha|$, $|\mathrm{o}(M)| < \alpha^+$. Luego $A \in \mathrm{L}_{\mathrm{o}(M)} \subseteq \mathrm{L}_{\alpha^+}$. □

**Corolario 5.13.** (*ZF*) $\mathbf{V} = \mathbf{L} \to \mathrm{AC} + \mathrm{GCH}$

*Prueba*: AC se debe al Lema 5.11. Para GCH, aplicamos el Teorema 5.12 para cada cardinal $\kappa \geq \omega$, $P(\kappa) \subseteq P(\mathrm{L}_\kappa) \subseteq \mathrm{L}_{\kappa^+}$, luego $2^\kappa \leq |\mathrm{L}_{\kappa^+}| = \kappa^+$(de nuevo por el Lema 4.17). Por lo tanto $\kappa < 2^\kappa \leq \kappa^+$, con lo cual $2^\kappa = \kappa^+$. □

**Corolario 5.14.** (*ZF*) $(AC + GCH)^{\mathbf{L}}$

**Corolario 5.15.** *Con(ZF)* $\to$ *Con(ZF + GCH + AC)*

# 6. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos logrado demostrar la consistencia de GCH y AC con ZF de modo similar a como lo hizo Gödel. Para ello hemos estudiado la clase de los conjuntos bien fundados, que sirve de esquema para la construcción de **L**. Luego nos hemos adentrado en la teoría de modelos para obtener la prueba de la consistencia relativa, para la cual se necesita trabajar los conceptos de fórmula relativizada y noción absoluta.

Estos conceptos son la base del trabajo pues varios resultados relacionados con ellos permiten demostrar fácilmente que **L** es modelo de ZF, que a priori resultaría ciertamente difícil. También nos invitan a reflexionar sobre la estructura del lenguaje de la teoría de conjuntos. Algo tan simple como acotar un cuantificador puede cambiar completamente el significado de una fórmula. La propia inclusión se ve afectada por ello, dando lugar a conclusiones como que un conjunto no vacío pueda estar "incluido" en el vacío.

Finalmente hemos estudiado el concepto de definibilidad y hemos construido el modelo que buscábamos, la clase de los conjuntos construibles **L**. Las operaciones de Gödel permiten obtener una expresión más sencilla para la función def y gracias a ello podemos calcular la cardinalidad de los $\mathrm{L}_\alpha$. Este cálculo del cardinal de $\mathrm{L}_\alpha$, junto con el hecho de que es noción absoluta son lo que permiten demostrar que **L** es modelo de ZF + **V** = **L**. Como el axioma de constructibilidad implica AC (puesto que existe un buen orden de **L**) obtenemos la consistencia relativa de éste. Gracias a que AC se cumple en **L** podemos aplicar el resultado sobre la cardinalidad de $\mathrm{L}_\alpha$ para obtener la consistencia relativa de GCH.

## Referencias


[1] Kunen, Kenneth: *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland. 1992.

[2] Jech, Thomas: *Set Theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer 2006.

- Chapter 13: Constructible Sets.

[3] Gödel, Kurt: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of Set Theory.* Princeton University Press. 1940.

[4] Gödel, Kurt: *Obras completas.* Edición de Jesús Mosterín. Alianza Editorial. 1981.

- [1938] La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo.

- [1939a] Prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo.

- [1940] La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos.

- [1947] ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?

[5] Dauben, Joseph Warren: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press. 1979.

# Índice alfabético