UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Modelos de competencia en localización

José Antonio Pérez Chávez

Directors: **Dr. Xavier Jarque**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Javier Martínez de Albéniz
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, Enero 2021

Resumen

Harold Hotelling en 1929 plantea el problema de localización de dos empresas que compiten en precios en un segmento donde se distribuyen los consumidores uniformemente. Este modelo, expresado en términos modernos, corresponde a un juego no cooperativo de dos etapas en un duopolio. El fundamento de este modelo es justificar la diferenciación del producto mediante la competencia en un mercado lineal.

En este trabajo estudiamos el modelo original de Hotelling *Stability of Competition,* así como la revisión posterior hecha por Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979) por la inconsistencia de la función de costes de transporte. También analizamos una modificación del modelo, el juego "puro"de Hotelling, donde las empresas no compiten en precios, porque los precios son iguales para ambas, sino que lo hacen exclusivamente en localizaciones. La extensión a un número arbitrario de empresas es natural y los resultados bien conocidos.

Estudiamos las diferencias que se producen en el equilibrio distinguiendo entre la distribucion uniforme y no uniforme de la población. En este último caso aparecen diferencias significativas con los resultados conocidos en el otro caso.

Abstract

Harold Hotelling in 1929 poses the problem of locating two companies that compete over prices in a segment where consumers are evenly distributed. This model, expressed in modern terms, represents a two-stage non-cooperative game in a duopoly. The rationale for this model was to symbolize product differentiation by representing the game in a linear market.

In this paper we study the original Hotelling *Stability of Competition* model as well as the subsequent revision made by Aspremont, Gabszewicz and Thisse (1979) for the inconsistency of the transport cost function. We also analyze a modification of the model, the "pure"Hotelling game, where companies do not compete over prices, because prices are the same for both, but exclusively on locations. The extension to an arbitrary number of companies is natural and the results well known.

We study the differences that occur in equilibrium by distinguishing between the uniform and non-uniform distribution of the population. In the latter case, significant differences appear with the previous results.

2010 Mathematics Subject Classification. 91B72, 91A10, 91A05, 91A06

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a los profesores Javier Martínez de Albéniz y Xavier Jarque por sus consejos y guía para la realización de este trabajo. También me gustaría agradecer el apoyo recibido por familiares, amigos y profesores durante este periodo, han hecho que haya sido una experiencia muy bonita y gratificante. Gracias.

Índice general

Introducción

La localización de empresas, fábricas, almacenes,... es un problema que ha atraído la atención de los estudiosos, y en particular de los economistas y matemáticos. En la literatura se suele denominar *Location analysis,* el análisis de la localización. Las herramientas para atacar este problema han sido muy variadas, aunque debemos distinguir entre los análisis que se refieren a dónde se deben localizar las fábricas, por ejemplo, que son un punto respecto del espacio donde se sitúan y generalmente sin relación entre sí, del estudio de cómo se organiza la producción o los almacenes, que han sido objeto de muchas más publicaciones. Siempre se necesita definir qué consumidores van a utilizar la infraestructura, qué debe localizarse, el espacio donde debe hacerse y finalmente las métricas que se van a utilizar para distancias o tiempos (ver ReVelle y Eiselt, 2005 [18]).

Estos problemas clásicos de localización se pueden extender al posicionamiento de un producto, donde el espacio son las características del producto, que pueden ser lineales (el grado de azúcar) o múltiples (diversas características). también la aplicación a las posiciones de los candidatos en unas elecciones, o la localización de parques de bomberos u hospitales, o bien de actividades desagradables como vertederos o prisiones.

Un modelo que será el objetivo de nuestro trabajo será el modelo de Hotelling (1929) [10] quien analiza el problema de dos empresas (duopolio) que compiten en un segmento. El objetivo es el beneficio que cada empresa puede ganar con los clientes distribuídos uniformemente.

Esto entronca con los problemas que los economistas del siglo XIX ya habían estudiado. Y que en la actualidad son una base para el uso de la Teoría de Juegos.

La forma de mercado del oligopolio (mercado con pocas empresas) se caracteriza por el hecho de que un pequeño numero de empresas se reparte la totalidad del mercado, por lo que cada empresa tiene una gran cuota. Al ser un pequeño número de empresas y estar en juego una gran cantidad de clientes, las empresas están muy condicionadas por las estrategias de la competencia.

Un problema asociado a los oligopolios es el de la colusión, es decir, acuerdos entre las empresas que restinjan la competencia. Las autoridades deben vigilar los mercados para evitar que los productores se asocien en detrimento del consumidor. Como señala Adam Smith (1776) [20]: “los comerciantes del mismo rubro rara vez se reúnen, incluso para entretenimiento y diversión, pero la conversación termina en una conspiración contra el público, o en alguna estratagema para aumentar los precios”.

Históricamente se han desarrollados diversos modelos que estudian la competencia entre empresas con productos homogéneos en términos de precio, localización y cantidad a producir. Todavía no había nacido el concepto de teoría de juegos, pero estos modelos seguían escenarios parecidos a lo que más adelante llamamos “juegos”.

En el año 1838, el filósofo y matemático francés Antoine A. Cournot presenta su modelo de oligopolio [3]. Plantea un modelo sencillo que actualmente podemos interpretar como dos empresas, que no cooperan, y con un producto homogéneo, compiten en cantidades, eligiendo el total de producción que van a tener de manera simultánea e independiente. Entonces el mercado determina el precio del producto. Hallando las funciones de reacción de las dos empresas se llega a un punto de equilibrio para las empresas, el cual es mejor que en monopolio, pero no llega al de competencia perfecta. Si las empresas tienen costes iguales, el beneficio será el mismo para las dos empresas.

Casi 50 años después, en 1883, un matemático francés, Joseph Bertrand [2] , rectifica la publicación de Cournot, alegando que la competencia debía ser en precios y no en cantidades. Por tanto, las empresas fijan un precio simultáneamente y después reaccionan a la situación del mercado. Esto desencadena en una guerra de precios, ya que quien tiene el precio más bajo, se lleva la totalidad del mercado. Por tanto, el nivel de precios irá disminuyendo hasta llegar al nivel de los costos marginales, transformándose en el equilibrio de un mercado de competencia perfecta. Más adelante Bertrand define modelos donde se tiene en cuenta la diferenciación del producto. En estos casos la empresa puede tener un precio más alto y no se perdería cuota de mercado, ya que ahora la diferenciación del producto juega un papel importante.

Vemos entonces como cambiando solamente la hipótesis de competir en precios respecto cantidades, el equilibro del mercado difiere totalmente. Bertrand y Cournot presentan las nociones de equilibrio, concepto importante en la teoría de juegos que será definido formalmente más adelante.

Harold Hotelling (1929)[10] analiza los dos modelos anteriores para estudiar la razón de que se observen monopolios locales de ciertos productos. Le surge la duda de por qué un grupo de consumidores continúan comprando a una misma empresa aun habiendo diferencia de precios con sus competidores. Esta lealtad puede venir dada por diferentes motivos: proximidad, relación comprador-vendedor, preferencias del consumidor y por ello surge la necesidad de estudiar la diferenciación del producto.

Hotelling plantea un modelo de competencia espacial en un duopolio. Considera la competencia entre dos empresas con un producto homogéneo a lo largo de un segmento lineal, donde se supone que los consumidores estan distribuidos uniformemente. Se trata de un juego de dos etapas, en la primera etapa se determina la localización de las empresas y en la segunda los precios de equilibrio. En el juego general de Hotelling, los jugadores pueden decidir su ubicación y también el precio de venta. El precio de venta incluye una función para hallar el coste de transporte para el consumidor. La conclusión es que el equilibrio se sitúa en el centro del segmento, donde las empresas maximizan sus ganancias, definiendo por primera vez el concepto de diferenciación mínima. Si las dos empresas están localizadas en el centro del mercado, entonces no habrá diferenciación, ya que su estrategia es la misma. Por tanto, el modelo no solo se refiere a la competencia en la ubicación, sino que se extrapola a la competencia en la diferenciación del producto.

Se utilizan conceptos como equilibrio, juego, toma de decisiones, estrategias óptimas, ventaja competitiva . . . pero todavía no están definidos formalmente. La definición formal aparece en el libro de John von Neumann y Oskar Morgenstern, *Theory of games and economic behavior,* en 1944 [14]. Habla de la organización económica y social que se define a través de los juegos de estrategia, representando modelos de competencia monopolística con productos homogéneos.

Esta publicación supuso una revolución para los pensadores de la teoría económica y también de otros campos donde se puede extrapolar la teoría de juegos como por ejemplo la política. Anthony Downs (1957)[4] utiliza el modelo de Hotelling para representar a los partidos políticos como empresas y a los votantes como consumidores, y donde el segmento representa el espectro político de los votantes (izquierda-derecha).

Medio siglo después del modelo de Hotelling, éste fue revisado en 1979 por d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse [1], llegando a la conclusión de que algunas conclusiones son erróneas y rectifican la función de costes expresando los costes como una función cuadrática. Concluyen que la situación de equilibrio no se da cuando las empresas están cerca, sino cuando están lo más alejadas posible.

Una amplia literatura generalizó el modelo de Hotelling apareciendo dos vertientes. La primera se basa en el juego general de Hotelling donde empresas deciden localización y precio de venta. La segunda se centra en el estudio del juego puro de Hotelling donde el precio no está bajo el control de los jugadores.

Los estudios varían cambiando las hipótesis del modelo original, por ejemplo, Eaton y Lipsey (1975) [5] estudian una distribución general de los consumidores en el intervalo unidad bajo la hipótesis de que los consumidores no pueden compartir la misma ubicación, mostrando que los resultados de Hotelling solo se mantienen bajo hipótesis sólidas.

Otra manera interesante de plantear el modelo es cambiar la forma en la que se distribuyen los consumidores. Salop (1979)[19] extrapola el modelo a otro tipo de diagrama donde los consumidores están situados sobre un círculo.

También es interesante estudiar el modelo cuando la densidad de población no es uniforme como hicieron Osborne y Pitchik (1986) [13] donde tratan de encontrar el equilibrio de un juego de estrategias mixtas en el intervalo unitario con densidad no uniforme. Otro caso es el de Tabuchi y Thisse(1995) [21], donde estudian el modelo de Hotelling teniendo en cuenta que la distribución de la población no es uniforme, sino que en el centro la concentración es mayor.

Estructura del trabajo

En primer lugar, se exponen brevemente los conceptos de Teoria de Juegos que se utilizarán durante el trabajo. En el capítulo dos, se expone el modelo de Hotelling original y su posterior modificación resolviendo la inconsistencia en los costes de transporte. En el capítulo tercero está la parte central del trabajo donde se especifican los juegos "puros"de Hotelling: la competencia en localización donde un número finito de empresas compiten para tener el mayor número de consumidores posibles. Asimismo se exponen las diferencias que aparecen cuando consideramos distribuciones uniformes o no uniformes de los consumidores.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo recoge aquellas nociones que serán de utilidad durante el resto de este trabajo. En especial, vamos a desarrollar las definiciones y los resultados necesarios de Teoría de Juegos. Seguramente son conocidas del lector, pero algunos deben ser expuestas de forma general. Los contenidos necesarios se pueden hallar en cualquier manual, como Gibbons (1992) [9], o en castellano se puede destacar el de Pérez, Jimeno y Cerdá (2005) [17].

1.1. ¿De qué hablamos cuando hablamos de juegos?

Un juego no es más que el modelo de una situación de conflicto o cooperación, en el cual el resultado al que se llega depende de los esfuerzos de sus participantes. Siguiendo a Gardner (1996) [8], un juego se puede identificar de la forma siguiente:

> Un juego es cualquier situación gobernada por reglas con un resultado bien definido, caracterizado por una interdependencia estratégica.

Por tanto, para definir un juego hace falta especificar el grupo de agentes, que suelen ser llamados *jugadores*. Una vez éstos están determinados, la definición del juego debe tener la lista de jugadores, las reglas de la situación (en particular, en qué orden actúan y lo que se puede o no hacer), la información disponible (qué saben cuando deben actuar), las acciones estratégicas disponibles y cómo influyen en el resultado, así como las preferencias de cada jugador sobre los resultados, ya sea en forma de preferencias o en forma de utilidad.

La teoría de juegos aparece de forma específica desde 1944 con la publicación del libro *Game Theory and Economic Behavior* de von Neumann y Morgenstern [14]. Se pueden encontrar antecedentes en otros trabajos anteriores.

Von Neumann y Morgenstern fundan la teoría actual y estudian de forma detallada algunos casos. Es John F. Nash (1950) [12] quien establece el concepto de equilibrio. En la actualidad la teoría de juegos es una herramienta usada en prácticamente todos los campos de la economía y la empresa. Numerosos Premios Nobel de Economía se han concedido a estudiosos de la Teoría de Juegos o a científicos que la han usado en diversas aplicaciones.

Y no solamente se aplica a la economía, sino también a otras disciplinas, como la biología, la sociología o la ciencia política.

1.2. Juegos no cooperativos en forma normal

Hay esencialmente dos tipos de juegos, los que se denominan juegos no cooperativos, que serán los que trataremos aquí, y que tratan a los agentes como la entidad básica, y los juegos cooperativos o coalicionales, en los que la entidad básica es la coalición de jugadores (un subconjunto de ellos).

Los juegos no cooperativos consideran que las acciones tomadas por los agentes se toman de forma individual sin que sean posibles acuerdos vinculantes entre jugadores ni pagos entre ellos que no estén establecidos por las reglas. Las acciones disponibles se identifican con las *estrategias* en un contexto en que los jugadores juegan una única vez. Cada jugador juega teniendo en cuenta solamente sus preferencias o su utilidad, buscando maximizarla. Sin embargo el resultado no solo depende de sus acciones, sino también de las acciones del resto de jugadores, lo que se denomina interdependencia estratégica.

Para definir un juego, necesitamos los siguientes elementos:

• **un conjunto de jugadores,** finito, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

• **un conjunto de estrategias para cada jugador.** Una vez tenemos la estrategia elegida por cada jugador, queda determinado el resultado final. Este conjunto se denota por S_i para cada $i \in N$. Se suele escribir el espacio de las estrategias como $S = S_1 \times S_2 \times \cdots S_n$. Un elemento de S es un *perfil de estrategias* y se denota por $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$.

• **una función numérica** que asigna a cada jugador la utilidad que le representa el resultado de las estrategias de todos los jugadores. Suponemos que la utilidad es individual y por ello no tiene sentido la comparación interpersonal de utilidades. Esta función se denota como $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ para cada $i \in N$.

Un *juego no cooperativo en forma normal* (o estratégica) G es una tripleta:

$$G = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}) .$$

El espacio de estrategias de todos los jugadores se denota por $S = S_1 \times S_2 \times \cdots S_n$. Dado un perfil de estrategias $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$ denotamos por $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ donde s_j es la estrategia del jugador $j \in N \setminus \{i\}$. Escribimos S_{-i} el conjunto de las estrategias que no incluyen la estrategia del jugador i, es decir $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$.

1.3. Equilibrio de Nash

La noción fundamental en el análisis de un juego es el concepto de *equilibrio* (Nash, 1950 [12]). Nash lo introduce para señalar que goza de un aspecto de estabilidad, de la misma forma que en la Física se habla del equilibrio de un sistema.

Dado un juego en forma normal $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ es un *equilibrio de Nash* del juego G si para cada jugador $i \in N$ se cumple:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \qquad \forall s_i \in S_i.$$

En un equilibrio de Nash, ningún jugador tiene interés en modificar su estrategia de forma unilateral, porque no puede mejorar su ganancia. Para todos los jugadores, lo mejor es no cambiar su estrategia.

Puede ocurrir que un juego no tenga ningún equilibrio de Nash, o que haya infinitos de ellos. Nash demostró alguna condición suficiente para la existencia de equilibrios.

Para cada jugador $i \in N$ y cada perfil de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ se denomina el conjunto de mejores respuestas del jugador al conjunto siguiente.

$$R_i(s_{-i}) = \left\{ s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s_i' \in S_i} \{u_i(s_i', s_{-i})\} \right\}.$$

Este conjunto selecciona aquellas estrategias que proporcionan una ganacia lo mayor posible. En general puede que haya más de una.

Se puede interpretar que un equilibrio de Nash corresponde a un perfil de estrategias en el que la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a las estrategias del resto de los jugadores.

Hay diversos ejemplos conocidos de juegos de dos jugadores, en los cuales los equilibrios se pueden encontrar de forma sencilla.

Capítulo 2

Modelo de Hotelling

Hotelling (1929) en su artículo *Stability in competition*, presenta un modelo donde dos empresas compiten por vender un producto homogéneo a los clientes que se distribuyen uniformemente en un mercado lineal. En equilibrio los duopolistas estaban ubicados en el centro del mercado. Hotelling sugirió que esto era debido al fenómeno de la diferenciación mínima.

La idea de Hotelling es ver cuán importante es la diferenciación del producto en un duopolio. Para analizarlo presenta un modelo con empresas que venden un producto homogéneo, donde la parametrización de la diferenciación viene dada por su localización en el segmento donde se distribuyen los consumidores: mientras más alejadas están las empresas, más diferenciados son sus productos.

Propone un modelo de dos etapas. En la primera etapa las empresas escogen localización, y en la segunda etapa escogen el precio, de manera simultánea. El juego se resuelve por inducción hacia atrás para encontrar el equilibrio perfecto en subjuegos. Se trata de determinar una secuencia de acciones óptimas, empezando por el final. En primer lugar se determina el equilibrio en los precios para una localización, y una vez encontrado, en función de los precios de equilibrio se determinan cuales son las localizaciones óptimas. Llega a la conclusión de que la solución óptima es que las empresas se localizan en el centro del segmento definiendo así el concepto de *diferenciación mínima*.

Este modelo fue posteriormente modificado por d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979)[1] que demuestra que no se puede hablar de precios de equilibrio cuando las empresas están situadas en localizaciones muy cercanas ya que hay discontinuidad en la función de beneficios.

2.1. Modelo original de Hotelling

En el modelo de Hotelling dos empresas con productos homogéneos compiten en un mercado lineal, representado mediante un intervalo de longitud l. En este caso, la longitud del intervalo será $l = 1$ y estudiaremos el modelo, sin pérdida de generalidad, en el segmento unitario $[0, 1]$.

Se trata de un juego de dos etapas entre las empresas A y B. En la primera etapa, las empresas escogen simultáneamente las localizaciones $A, B \in [0, 1]$. En la segunda etapa del juego escogen simultáneamente los precios de sus productos $p_A \in [0, \infty)$ y $p_B \in [0, \infty)$.

Para encontrar el equilibrio del juego, en primer lugar se encuentra el equilibrio de precios p_A^*, p_B^* que dependen de las localizaciones escogidas por las empresas A y B. Una vez encontrado el equilibrio de precios, se realiza la inducción hacia atrás para encontrar el equilibrio en localizaciones.

Sean A y B dos empresas en el segmento $[0, 1]$ con productos homogéneos y coste de producción nulo. La distribución de los consumidores es uniforme a lo largo del segmento unitario $[0, 1]$ y cada uno de ellos compra una unidad de producto a la empresa más cercana.

Supondremos que la empresa A se sitúa a la izquierda y la empresa B a la derecha en el intervalo. Para indicar la distancia que hay desde cada empresa al extremo del intervalo $[0, 1]$ definimos $a := d(0, A)$ y $b := d(B, 1)$. Obviamente se cumple que $a+b \leq 1$. Definimos $L = \{(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid a + b \leq 1\}$ como el conjunto de las posibles localizaciones de las dos empresas.

Una vez fijados los precios de las empresas, $P_A \geq 0$, $P_B \geq 0$ respectivamente, entonces cada consumidor escogerá comprar el producto donde le suponga un menor coste total. Este coste total se obtiene como la suma del precio, *mill price,* y el coste de transporte para llegar a la empresa.Por tanto $C_T := p+c\delta$, donde p representa el precio del producto, $c > 0$ representa una constante multiplicativa y δ representa la distancia entre la localización del consumidor y el punto donde esta localizada la empresa. Por ejemplo, para la empresa A sería $\delta = d(x, a)$. En este modelo, el coste de transporte, $c\delta$, es una función lineal.

Sea x un consumidor cualquiera en el mercado lineal $x \in [0, 1]$. El coste de comprar en la empresa A para el consumidor x es $p_A + c|x - a|$ y el coste de comprar en la empresa B es $p_B + c|1 - b - x|$. El consumidor escogerá la empresa que represente un menor coste total.

Al consumidor que le suponga el mismo coste comprar el producto de la empresa A que comprar el producto de la empresa B, se denomina consumidor indiferente x_I. Por tanto si el consumidor es indiferente, se cumple la igualdad:

$$p_A + c|x_I - a| = p_B + c|1 - b - x_I|.$$

Como la función valor absoluto es una función lineal, el consumidor indiferente x_I se encontrará entre las empresas A y B por tanto se cumple la igualdad

$$p_A + c(x_I - a) = p_B + c(1 - b - x_I).$$

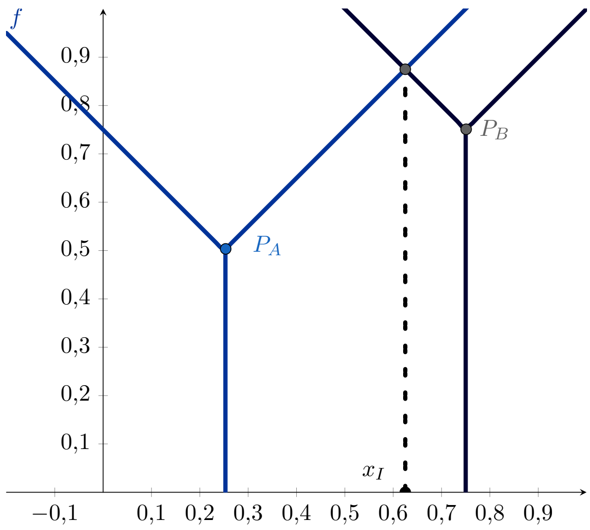

Figura 2.1: Consumidor indiferente x_I

La cantidad de consumidores de las empresas A y B dependen de los precios p_A y p_B que escogen las empresas y de los valores a y b. Distinguiremos 3 casos :

i) $|p_B - p_A| > c(1 - a - b)$

- Si $p_A > p_B$ tenemos que $p_A > c(1 - a - b) + p_B$. El precio de la empresa A será mayor que el precio de B más el coste de transporte desde cualquier punto del intervalo, por tanto la empresa B se lleva todo el mercado.
- Si $p_B > p_A$ tenemos que $p_B > c(1 - a - b) + p_A$. El precio de la empresa B será mayor que el precio de A mas el coste de transporte desde cualquier punto del intervalo, por tanto la empresa A se lleva todo el mercado.

ii) $|p_B - p_A| = c(1 - a - b)$

- Si $p_A > p_B$ tenemos que $p_A = c(1 - a - b) + p_B$. En el intervalo $[0, a]$ a cualquier consumidor que pertenezca a ese intervalo le será indiferente comprar a cualquiera de las dos empresas pues el coste total es el mismo de comprar en la empresa A que en la empresa B. Por lo tanto las empresas A y B se repartirán el mercado a partes iguales.
- Si $p_B > p_A$ tenemos que $p_B = c(1 - a - b) + p_A$. En el intervalo $[1 - b, 1]$ a cualquier consumidor que pertenezca a ese intervalo le será indiferente comprar a cualquiera de las dos empresas pues el coste total es el mismo de comprar en la empresa A que en la empresa B. Por lo tanto las empresas A y B se repartirán el mercado a partes iguales.

iii) $|p_B - p_A| < c(1 - a - b)$

Las dos empresas se reparten el mercado en función de la posición del consumidor indiferente x_I. Este existirá siempre que $|p_B - p_A| < c(1 - a - b)$. A la empresa A le corresponde el intervalo de consumidores $[0, x_I]$, la cuota de mercado de A será x_I. A la empresa B le corresponde el intervalo de consumidores $[x_I, 1]$, su cuota de mercado será $1 - x_I$.

Nos interesa por tanto saber la localización del consumidor indiferente x_I. Resolviendo la ecuación

$$p_A + c(x_I - a) = p_B + c(1 - b - x_I),$$

tenemos

$$x_I = \frac{p_B - p_A}{2c} + \frac{1 + a - b}{2},$$

de donde obtenemos la posición del consumidor indiferente en caso de que exista.

Por tanto, la función de beneficios de la empresa A se calcula multiplicando el precio del producto por el número de consumidores que van a demandar el producto, $\pi_A(p_A, p_B)$:

$$\pi_A(p_A, p_B) = \begin{cases} p_A & \text{si } \; p_A < p_B - c(1-a-b), \\ p_A\left(1 - \dfrac{b}{2}\right) & \text{si } \; p_A = p_B - c(1-a-b), \\ p_A^2\left(\dfrac{-1}{2c}\right) + p_A\left(\dfrac{p_B}{2c} + \dfrac{1+a-b}{2}\right) & \text{si } \; |p_A - p_B| < c(1-a-b), \\ p_A\dfrac{a}{2} & \text{si } \; p_A = p_B + c(1-a-b), \\ 0 & \text{si } \; p_A > p_B - c(1-a-b). \end{cases}$$

La función de beneficios de la empresa B es:

$$\pi_B(p_A, p_B) = \begin{cases} p_B & \text{si } \; p_B < p_A - c(1-a-b), \\ p_B\left(1 - \dfrac{a}{2}\right) & \text{si } \; p_B = p_A - c(1-a-b), \\ p_B^2\left(\dfrac{-1}{2c}\right) + p_B\left(\dfrac{p_A}{2c} + \dfrac{1+b-a}{2}\right) & \text{si } \; |p_B - p_A| < c(1-a-b), \\ p_B\dfrac{b}{2} & \text{si } \; p_B = p_A + c(1-a-b), \\ 0 & \text{si } \; p_B > p_A - c(1-a-b). \end{cases}$$

La estrategia de la empresa A es determinar el precio p_A que mejor replique la estrategia p_B de la empresa B y viceversa. Entonces el equilibrio de Nash en esta segunda etapa, es la pareja (p_A^*, p_B^*) tal que p_A^* es la mejor respuesta a la estrategia de precios de la empresa competidora p_B^* y viceversa. Una vez se haya encontrado el equilibrio de precios, diferenciando respecto las variables a y b, se obtiene la localización que maximiza los beneficios de ambas empresas.

Proposición 2.1. *Para $a + b = 1$ existe un único equilibrio $p_A^* = p_B^* = 0$.*
Para $a + b < 1$, si existe un equilibrio (p_A^*, p_B^*), entonces $|p_B - p_A| < c(1 - a - b)$ y $(p_A^*, p_B^*) \in (-c(1-a-b), c(1-a-b)) \times (-c(1-a-b), c(1-a-b))$.

Demostración. El caso $a + b = 1$ es trivial. Las dos empresas estan situadas en la misma localización, y por tanto, como en el modelo de Bertrand, estas compiten en precios (bajándolos para atraer una mayor demanda) hasta que el precio es igual al coste marginal, en este caso 0. Por tanto $p_A^* = p_B^* = 0$.

Para analizar el caso $a + b < 1$, supondremos que los precios están en situación de equilibrio (p_A^*, p_B^*), y que $|p_B^* - p_A^*| \geq c(1-a-b)$ llegando a una contradicción. Estudiemos los casos por separado:

- Supongamos que $|p_B^* - p_A^*| > c(1-a-b)$. Estudiaremos el caso en el que $p_B > p_A$, puesto que la demostración es análoga para el caso $p_A > p_B$.

  Sea B la empresa que ha determinado un mayor precio: $p_B^* > p_A^*$. Entonces se cumple $p_B^* > p_A^* + c(1-a-b)$. Como hemos visto anteriormente, en este caso la empresa A se lleva todos los consumidores pues para cualquier consumidor x en el intervalo $[0,1]$ le interesará comprar el producto de la empresa A ya que tiene un coste total menor. En este caso, como A se lleva todo el mercado, la empresa B obtendrá un beneficio nulo. Para obtener algo de beneficio le interesará tener una mínima cuota de mercado y esto lo conseguirá disminuyendo su precio hasta igualarlo al menos con el precio de la empresa A más los costes de transporte, es decir $p_B^* = p_A^* + c(1-a-b)$. Por tanto hemos visto que el precio p_B^* no estaba en situación de equilibrio.

- Suponemos ahora que $|p_B^* - p_A^*| = c(1-a-b)$. Estudiaremos el caso en el que $p_B > p_A$, puesto que la demostración es análoga para el caso $p_A > p_B$.

  Sea B la empresa que tiene un mayor precio: $p_B^* > p_A^*$. Entonces se cumple que $p_B^* = p_A^* + c(1-a-b)$. En este caso las dos empresas A y B se reparten el mercado, donde la demanda del producto A representa $D_A = (1-b) + \frac{b}{2}$ y la demanda del producto B representa $D_B = \frac{b}{2}$. En este caso si la empresa A decide disminuir p_A^* un $\varepsilon > 0$ pequeño, se llevaria todo el mercado. Por tanto el precio de p_A^* no estaba en una situación de equilibrio, pues le interesaria disminuir un poco a la empresa A el precio para captar todo el mercado.

  Puede ocurrir también que $p_A^* = 0$ y por tanto $p_B^* = c(1-a-b)$, en este caso la función de beneficios de la empresa A seria nula ya que el precio de su producto es 0. En este caso a la empresa A le interesaria aumentar un $\varepsilon > 0$ el precio de su producto para obtener algo de beneficio. Por tanto vemos que le precio $p_A^* = 0$ tampoco está en situación de equilibrio

  En cualquiera de los casos obtenemos una contradicción, por lo tanto, podemos afirmar que si existe un equilibro (p_A^*, p_B^*), este debe de estar dentro del intervalo definido por $|p_B^* - p_A^*| < c(1-a-b)$.

□

Como consecuencia de la proposición anterior, Proposición 2.1, hemos obtenido que si existe un equilibrio (p_A^*, p_B^*) entonces

$$
\begin{aligned}
&|p_B - p_A| < c(1-a-b \quad \text{y} \\
&\quad (p_A^*, p_B^*) \in (-c(1-a-b), c(1-a-b)) \times (-c(1-a-b), c(1-a-b))\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto estudiaremos el comportamiento de la función de beneficios en este intervalo a través de sus derivadas, y hallaremos los puntos de equilibrio en caso de que existan.

Estudiaremos qué condiciones se deben de cumplir para que el punto (p_A^*, p_B^*) represente una situación de equilibrio. En situación de equilibrio p_A^* debe maximizar $\pi_A(p_A, p_B^*)$ en el intervalo $(p_B^* - c(1-a-b), p_B^* + c(1-a-b))$. También se debe cumplir que p_B^* maximice $\pi_B(p_A^*, p_B)$ en el intervalo $(p_A^* - c(1-a-b), p_A^* + c(1-a-b))$ Por tanto se debe cumplir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial p_A}(p_A, p_B) = 0, \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial p_B}(p_A, p_B) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{p_A}{c} + \dfrac{p_B}{2c} = \dfrac{b-a-1}{2}, \\ \dfrac{p_A}{2c} - \dfrac{p_B}{c} = \dfrac{a-b-1}{2}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los precios de equilibrio:

$$\begin{cases} p_A^* = c\left(1 + \dfrac{a-b}{3}\right), \\ p_B^* = c\left(1 + \dfrac{b-a}{3}\right). \end{cases}$$

Observamos que estos resultados son máximos porque el signo de las derivadas segundas es negativo:

$$\frac{\partial^2 \pi_A^2}{\partial p_A^2}(p_A, p_B) = \frac{\partial^2 \pi_B^2}{\partial p_B^2}(p_A, p_B) = \frac{-1}{c}.$$

Los candidatos a precios de equilibrio son:

$$(p_A^*, p_B^*) = \left(c\left(1 + \frac{a-b}{3}\right), c\left(1 + \frac{b-a}{3}\right)\right).$$

Hotelling afirma en su artículo [10] que este par de precios son los precios de equilibrio.

Para resolver el juego de dos etapas, debemos hacer inducción hacia atrás: para cada localización (a, b) debemos calcular el beneficio con los precios de equilibrio determinados en la segunda etapa. Aplicando estos precios a las funciones de beneficio tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \pi_A(p_A^*, p_B^*) = \dfrac{c(a-b+3)^2}{18}, \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*) = \dfrac{c(b-a+3)^2}{18}. \end{cases}$$

Resolvemos la primera etapa del juego, maximizando las expresiones anteriores en función de a y b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial a}(p_A^*, p_B^*) = \dfrac{c(a-b+3)}{9}, \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial b}(p_A^*, p_B^*) = \dfrac{c(b-a+3)}{9}. \end{cases}$$

Las dos expresiones son estrictamente positivas (porque $a+b < 1$) por tanto, los beneficios de la empresa A aumentan a medida que aumenta a y los beneficios de B aumentan a medida que lo hace B. Por tanto las empresas tienden a alejarse de los extremos del intervalo $[0, 1]$ acercandose al centro del segmento $a = b = \frac{1}{2}$ teniendo en cuenta que a no puede sobrepasar $1-b$. La tendencia de las empresas a localizarse en el centro del mercado Hotelling lo denomina como *Principio de Diferenciación Mínima*, donde la diferenciación de los productos cada vez es menor.

2.2. Inconsistencia del modelo con costes lineales

Hotelling concluyó en su modelo original que la tendencia de las empresas era situarse en centro del segmento, pero 50 años más tarde, en 1979, d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse difieren en su artículo *On Hotelling's "Stability in competition"* [1] de que el *Principio de Diferenciación Mínima* de Hotelling no se cumple con los costes de transporte lineales. Demuestran que no se puede hablar de precios de equilibrio cuando las empresas están situadas en localizaciones muy cercanas ya que hay discontinuidad en la función de beneficios.

Estudiamos el problema de la discontinuidad de la función de beneficios de las empresas.

En la Proposición 2.1 hemos visto si existe equilibrio de precios para $a+b<1$ se debe cumplir que (p_A^*, p_B^*) tal que $|p_B^* - p_A^*| < c(1-a-b)$.

Hemos visto que en situación de equilibrio p_A^* debe maximizar $\pi_A(p_A, p_B^*)$ en el intervalo $(p_B^* - c(1-a-b), p_B^* + c(1-a-b))$ y que también se debe cumplir que p_B^* maximice $\pi_B(p_A^*, p_B)$ en el intervalo $(p_A^* - c(1-a-b), p_A^* + c(1-a-b))$. Esta condición es necesaria para que haya equilibrio, pero no es suficiente.

Supongamos que la empresa B fija el precio p_B^*, analicemos el beneficio de la empresa A. Los precios de equilibrio se encuentran cuando $|p_A - p_B| < c(1-a-b)$ pero $\forall \varepsilon > 0$, si disminuimos un poco el precio $p_A < p_B - c(1-a-b) - \varepsilon$ entonces la empresa A se llevará todo el mercado, por lo tanto existe un incentivo a disminuir el precio, lo que contradice el concepto de equilibrio.

Para cualquier equilibrio (p_A^*, p_B^*), p_A^* debe maximizar $\pi_A(p_A, p_B^*)$, no solamente en el intervalo $(p_B^* - c(1-a-b), p_B^* + c + (1-a-b))$, sino que también a lo largo del dominio $[0, \infty)$. De la misma manera p_B^* debe maximizar $\pi_B(p_A^*, p_B)$ a lo largo del dominio $[0, \infty)$.

En el siguiente teorema estableceremos unas condiciones suficientes y necesarias sobre a y b para que exista este equilibrio.

Teorema 2.1. *Si $|p_B^* - p_A^*| < c(1-a-b)$, existe un único (p_A^*, p_B^*) precios de equilibrio en la segunda etapa si a y b satisfacen:*

- $(a-b+3)^2 \geq 12(2b+a)$,
- $(b-a+3)^2 \geq 12(2a+b)$.

Si se satisfacen estas condiciones, entonces el equilibrio es:

$$(p_A^*, p_B^*) = \left(c\left(1+\frac{a-b}{3}\right), c\left(1+\frac{b-a}{3}\right)\right) = \left(c\left(\frac{3+a-b}{3}), c(\frac{3+b-a}{3}\right)\right).$$

Demostración. Estudiaremos que condiciones se deben de cumplir para que el punto (p_A^*, p_B^*) represente una situación de equilibrio. En situación de equilibrio p_A^* debe maximizar $\pi_A(p_A, p_B^*)$ en el intervalo $(p_B^* - c(1-a-b), p_B^* + c(1-a-b))$. También se debe cumplir que p_B^* maximice $\pi_B(p_A^*, p_B)$ en el intervalo $(p_A^* - c(1-a-b), p_A^* + c(1-a-b))$ Por tanto se debe cumplir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial p_A}(p_A, p_B) = 0, \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial p_B}(p_A, p_B) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{p_A}{c} + \dfrac{p_B}{2c} = \dfrac{b-a-1}{2} \\ \dfrac{p_A}{2c} - \dfrac{p_B}{c} = \dfrac{a-b-1}{2} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los precios de equilibrio:

$$\begin{cases} p_A^* = c\left(1 + \dfrac{a-b}{3}\right) \\ p_B^* = c\left(1 + \dfrac{b-a}{3}\right), \end{cases}$$

Observamos que estos resultados son máximos porque el signo de las derivadas segundas es negativo:

$$\frac{\partial^2 \pi_A^2}{\partial p_A^2}(p_A, p_B) = \frac{\partial^2 \pi_B^2}{\partial p_B^2}(p_A, p_B) = \frac{-1}{c}.$$

Los candidatos a precios de equilibrio son:

$$(p_A^*, p_B^*) = \left(c\left(\frac{3+a-b}{3}\right), c\left(\frac{3+b-a}{3}\right)\right).$$

Para cualquier equilibrio (p_A^*, p_B^*), p_A^* debe maximizar $\pi_A(p_A, p_B^*)$, no solamente en el intervalo $(p_B^* - c(1-a-b), p_B^* + c + (1-a-b))$, sino que también a lo largo del dominio $[0, \infty)$. De la misma manera p_B^* debe maximizar $\pi_B(p_A^*, p_B)$ a lo largo del dominio $[0, \infty)$.

Para que las condiciones anteriores se satisfagan se debe cumplir que $\pi_A(p_A^*, p_B^*) \geq \pi_A(p_A, p_B^*)$ y que $\pi_B(p_A^*, p_B^*) \geq \pi_B(p_A^*, p_B)$, todo esto bajo la hipótesis de que $|p_B^* - p_A^*| < c(1-a-b)$.

Dados a, b sabemos que el beneficio de A en los precios de equilibrio $\pi_A(p_A^*, p_B^*)$ debe ser superior al beneficio que obtendria la empresa si fijase un precio inferior por el cual se llevase todo el mercado. En el caso de la empresa A, a un precio inferior a $p_B - c(1-a-b)$. Por esto, $\forall \varepsilon > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \pi_A(p_A^*, p_B^*) &\geq \pi_A(p_A, p_B^*) = \pi_A(p_B^* - c(1-a-b) - \varepsilon, p_B^*), \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*) &\geq \pi_A(p_A^*, p_B) = \pi_A(p_A^*, p_A^* - c(1-a-b) - \varepsilon). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{c(a-b+3)^2}{18} &\geq p_B^* - c(1-a-b) \geq p_B^* - c(1-a-b) - \varepsilon, \\ \frac{c(b-a+3)^2}{18} &\geq p_A^* - c(1-a-b) \geq p_A^* - c(1-a-b) - \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que implica:

$$\begin{aligned} \frac{c(a-b+3)^2}{18} \geq c\left(\frac{3+b-a}{3}\right) - c(1-a-b) &\iff \frac{c(a-b+3)^2}{18} \geq \frac{2c}{3}(2b+a), \\ \frac{c(b-a+3)^2}{18} \geq c\left(\frac{3+a-b}{3}\right) - c(1-a-b) &\iff \frac{c(b-a+3)^2}{18} \geq \frac{2c}{3}(2a+b). \end{aligned}$$

Finalmente nos queda que se deben cumplir las siguientes inecuaciones :

$$\begin{aligned} (a-b+3)^2 &\geq 12(2b+a), \\ (b-a+3)^2 &\geq 12(2a+b). \end{aligned}$$

Hemos probado una implicación, para demostrar el recíproco suponemos que las inecuaciones siguientes son ciertas:

$$(a-b+3)^2 \geq 12(2b+a)$$
$$(b-a+3)^2 \geq 12(2a+b)$$

y que los precios de equilibrio son de la forma:

$$(p_A^*, p_B^*) = \left(c\left(\frac{3+a-b}{3}\right), c\left(\frac{3+b-a}{3}\right)\right)$$

y veremos que es suficiente para la existencia de un punto de equilibrio. De hecho, es suficiente comprobar que con estas inecuaciones se cumple la desigualdad $|p_B^* - p_A^*| < c(1-a-b)$ por la Proposición 2.1 sustituyendo en los precios de equilibrio. Con ello completamos la demostración del teorema. □

Observemos que si las localizaciones son simétricas respecto del centro, es decir si $a = b$, entonces las condiciones necesarias que acabamos de imponer se pueden reducir a que

$$9 \geq 36b \iff \frac{1}{4} \leq b,$$

y de igual manera

$$\frac{1}{4} \leq a.$$

Por tanto las empresas se localizan fuera de los cuartiles para conseguir una situación de equilibrio de precios contradiciendo las afirmaciones que hizo Hotelling en su modelo.

2.3. Costes cuadráticos de transporte

Dada la inconsistencia en el equilibrio de precios que se genera a raíz de la discontinuidad de la función de beneficios, en el artículo de d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse (1979)[1], se resuelve cambiando la función de costes de transporte, pasando de las expresión lineal en la distancia a una expresión cuadrática. Esto resuelve el problema en el equilibrio de precios. Bajo esta hipótesis de costes de transporte cuadráticos se reformula el modelo de Hotelling para poder hablar de consistencia en los precios de equilibrio.

Consideramos ahora que el coste total está representado por la suma del precio del producto más el coste de transporte, y que en este nuevo caso, se tratará de un coste de transporte cuadrático. Los costes totales tendrán una forma $C_T := p + c\delta^2$, donde p representa el precio del producto, $c > 0$ una constante multiplicativa, y δ^2 representa la función costes de transporte que es la distancia cuadrática entre el consumidor y el punto de venda.

Con la misma notación que el apartado anterior, para cualquier consumidor x situado en el mercado lineal $[0,1]$ tenemos que el coste de comprar en la empresa A es :$p_A + c(x-a)^2$ y el coste de comprar en la empresa B es $p_B + (1-b-x)^2$. El consumidor x escogerá comprar en aquella empresa que proporcione un coste total menor.

Ahora la condición de consumidor indiferente x_I varía, pues los costes ahora son cuadráticos. El consumidor indiferente x_I, que tiene el mismo coste entre ambas empresas, es el que satisface la siguiente igualdad:

$$p_A + c(x_I - a)^2 = p_B + (1-b-x_I)^2.$$

Desarrollemos la ecuación para hallar el consumidor indiferente:

$$p_A + c(x_I - a)^2 = p_B + (1 - b - x_I)^2 \iff x_I = \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2}.$$

En el modelo original de Hotelling, con los costes de transportes lineales, el consumidor indiferente solamente se podía situar entre las empresas A y B en el intervalo $(a, 1-b)$. En este caso, con los costes de transportes cuadráticos el consumidor indiferente x_I, en caso de que exista, se puede situar en cualquier punto del intervalo $[0,1]$. Si este existe la cantidad de consumidores que compran en la empresa A es x_I y la cantidad de consumidores que compran en la empresa B es $1 - x_I$.

Los casos donde no existe el consumidor indiferente $x_I \in [0,1]$ son aquellos donde no hay intersección entre las funciones de costes en el intervalo $[0,1]$.

Por tanto la empresa A se llevará todo el mercado siempre que $x_I > 1$ (B tendrá beneficio nulo). En cambio la empresa B se llevará todo el mercado cuando $x_I < 0$ (A Tendrá beneficio nulo).

Observemos que no hay manera de que se repartan el mercado las dos empresas. Esto solo puede ocurrir en el caso que $a = (1-b)$ y $p_A = p_B$. En este caso, los precios de equilibrio serian $p_A^* = p_B^* = 0$.

Por tanto, según lo comentado anteriormente tenemos que las funciones de beneficios son las siguientes:

Función de beneficios de A:

$$\pi_A(p_A, p_B) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2} < 0, \\ p_A x_I & \text{si} \quad 0 \leq \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2} \leq 1, \\ p_A & \text{si} \quad 1 < \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2}. \end{cases}$$

Función de beneficios de B:

$$\pi_B(p_A, p_B) = \begin{cases} p_B & \text{si} \quad \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2} < 0, \\ p_B(1 - x_I) & \text{si} \quad 0 \leq \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2} \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad 1 < \frac{p_B - p_A}{2c(1-a-b)} + \frac{1-b+a}{2}. \end{cases}$$

Como la función de beneficios es continua, gracias a los costes cuadráticos de transporte, entonces ya no es necesario imponer restricciones a la distancia de las localizaciones de las empresas respecto a los extremos de los intervalos. Por tanto, si existe equilibrio en precios, existe para cualquier localización A, B.

Es fácil ver que el punto de equilibrio se encontrará cuando comparten la demanda. En caso contrario habría alguna de las dos empresas que tendría un beneficio nulo, pues tendría una demanda nula, entonces le interesaría bajar los precios para conseguir cuota de mercado contradiciendo la noción de equilibrio.

Para encontrar los puntos de equilibrio estudiaremos las derivadas de la función beneficios y encontraremos los precios de equilibrio igualando las derivadas a 0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial p_A}(p_A, p_B) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial p_B}(p_A, p_B) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{p_B}{2c(1-a-b)} - \dfrac{p_A}{c(1-a-b)} + \dfrac{1-b+a}{2} = 0 \\ \dfrac{p_A}{2c(1-a-b)} - \dfrac{p_B}{c(1-a-b)} + \dfrac{1-a+b}{2} = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos los precios de equilibrio:

$$\begin{cases} p_A^* = c(1-a-b)\left(1 + \dfrac{a-b}{3}\right) \\ p_B^* = c(1-a-b)\left(1 + \dfrac{b-a}{3}\right), \end{cases}$$

Cuando encontramos los precios de equilibrio (p_A^*, p_B^*) hemos solucionado la inducción hacia atrás. Ahora estudiaremos la monotonía de le función beneficios con estos precios de equilibrio para determinar la tendencia de las localizaciones de las empresas.

Substituimos los precios de equilibrio encontrados (en función de a y b) en las funciones de beneficio, obteniendo:

$$\begin{cases} \pi_A(p_A^*, p_B^*) = \dfrac{1}{2}c(1-a-b)\left(1 + \dfrac{a-b}{3}\right)^2, \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*) = \dfrac{1}{2}c(1-a-b)\left(1 + \dfrac{b-a}{3}\right)^2, \end{cases}$$

Para encontrar los valores de a y b en equilibrio, necesitamos derivar respecto a y b respectivamente.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial a} = c\left(1 + \dfrac{a-b}{3}\right)\left[-\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a-b}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(1-a-b)\right] \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial b} = c\left(1 + \dfrac{b-a}{3}\right)\left[-\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{b-a}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(1-a-b)\right], \end{cases}$$

Las derivadas en función de a y b son negativas ya que $a + b < 1$. Esto implica que a medida que aumentan los valores de a y b, el beneficio de éstas se ve afectado negativamente. Podemos afirmar que la tendencia de las empresas es de reducir los valores de a y b de forma que se alejan al máximo entre ellas. Colocándose finalmente en los extremos del intervalo.

Entonces el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para este juego de dos etapas es el siguiente:

- localizaciones $(A^*, B^*) = (0, 1)$ y
- precios $(p_A^*, p_B^*) = (c, c)$ con pagos $(\pi_A, \pi_B) = (\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}c)$.

El resultado del trabajo de d'Aspremont, Gabszewicz y Thisse es el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Bajo las condiciones del modelo de costes cuadráticos, para cualquier par de localizaciones* (A, B) *dentro del conjunto* $L = \{(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid a + b \leq 1\}$, *existe un equilibrio de la segunda etapa: una pareja de precios* (p_A^*, p_B^*).

Por tanto, puede existir equilibrio perfecto en subjuegos en el juego definido en dos etapas. En particular existe y es único:

$$(A, B) = (0, 1), (p_A^*, p_B^*) = (c, c)$$

Capítulo 3

Juegos puros de Hotelling

El modelo original del artículo de Hotelling implica un juego de dos etapas. En la primera etapa las dos empresas escogen una localización de manera simultánea, y en la segunda etapa, una vez escogidas las localizaciones, compiten en precios.

Desde su aparición en 1929 ha dado lugar a una amplia literatura, tanto respecto a sus aplicaciones como diferentes variantes y generalizaciones. Se pueden señalar dos visiones o versiones diferentes. La primera se centra en el modelo general de Hotelling de dos etapas donde los jugadores escogen ubicación y precio de ventas. La segunda se centra en el juego puro de Hotelling, donde los jugadores no compiten en precios ya que este factor no está bajo su control. En este capitulo hablaremos de los juegos puros de Hotelling que se basan en la competencia en localización. Este modelo se aplica particularmente en la venta de productos homogéneos cuyo precio es fijo como la venta en farmacias, estancos, ...

El juego puro de Hotelling trata de plasmar un modelo de competencia entre jugadores donde la localización es su estrategia. Cuando hablamos de jugadores estamos hablando de empresas. Estas deciden su estrategia para captar el mayor número de consumidores posibles.

El modelo permite otras interpretaciones posibles, puesto que se puede valorar que el segmento corresponde a un espectro lineal de gustos en donde se sitúan diferentes versiones del mismo producto. La estrategia es la diferenciación respecto a los competidores. Por ejemplo el modelo político, donde el segmento $[0, 1]$ representa el espectro político de los votantes siendo 0 el punto que representa las ideas de izquierda y 1 las ideas de derechas. Los jugadores en este caso son los partidos políticos que decidirán su estrategia política para captar el mayor número de votantes posibles.

3.1. Juegos de localización

Los juegos de localización representan la competencia espacial entre un número finito de jugadores que seleccionan simultáneamente una ubicación para atraer el mayor número posible de consumidores. Como los jugadores no compiten en precios, los jugadores comprarán en el punto de venta del jugador más cercano, o dicho de otra manera, solamente tienen en cuenta el coste de transporte.

Existe una amplia literatura sobre este modelo de juegos. Pálvölgi (2011) [15], Fournier y Scarsini (2019)[6] y Fournier (2019) [7] utilizan este modelo de juegos puros de Hotelling con un modelo basado en una red (*network*). La red donde se distribuyen los jugadores y los consumidores pueden representar calles que se van cruzando entre si. Los jugadores pueden escoger su ubicación en cualquier lugar de la red, y su recompensa es la cantidad de consumidores que compran en su tienda. En estos modelos los consumidores se distribuyen uniformemente sobre la red. Esta hipótesis facilita los cálculos a la hora de encontrar equilibrios de Nash. Sin embargo, se trata de una hipótesis restrictiva, pues la densidad de población en las grandes ciudades no es uniforme, pudiendo haber mayor densidad en el centro de la ciudad. Justamente en este trabajo relajaremos la hipótesis de la densidad uniforme de los consumidores.

Peters et al. (2018) [16] estudian la distribución uniforme en el intervalo unidad, buscando un equilibrio cuando el número de jugadores es pequeño.

En esta sección analizamos cómo se comportan los equilibrios en el segmento unitario $[0,1]$ dependiendo del número de empresas que se sitúan. Además, estudiamos las diferencias que se producen comparando las distribuciones uniformes con las no uniformes.

3.2. Modelo de juegos de localización

El modelo representa un juego puro de Hotelling, es decir un juego donde los jugadores compiten en localización ya que no tienen poder de decisión sobre el precio. Todos los jugadores producen un producto homogéneo con el mismo precio.

Este juego se realiza sobre el segmento $[0,1]$ que representa el mercado donde se localizan los jugadores y donde se distribuyen los consumidores. La función f mide la distribución de los consumidores a lo largo del mercado lineal $[0,1]$. Así $f \geq 0$ y suponemos que f es continua a trozos con un número finito de discontinuidades. Sea $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, entonces para cualquier subconjunto $\Omega \subseteq [0,1]$, la masa de consumidores ubicados en Ω es:

$$\int_\Omega f(x)dx.$$

Utilizaremos la orientación arbitraria para identificar la restricción de f en el segmento $[0,1]$. Si escogemos dos ubicaciones x_1, x_2 y la orientación es tal que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, diremos que la ubicación x_1 está a la izquierda de la ubicación x_2 y que la ubicación x_2 está a la derecha de la ubicación x_1.

Cada consumidor $x \in [0,1]$ comprará una única cantidad de producto y lo hará en la ubicación que le represente un menor coste de transporte es decir la que esté más cercana. Puede ocurrir que dos jugadores compartan la misma ubicación, esto provocará que se repartan la cuota de mercado, en este caso, el número de consumidores será repartido de manera equitativa para los jugadores que compartan la quota de mercado.

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$, con $n \geq 2$, un número finito de jugadores (empresas) que compiten en el mercado unitario $[0,1]$. Los jugadores escogen la localización de manera simultánea buscando maximizar su función de pagos. La elección que hagan representará su estrategia, el perfil de estrategia de todos los jugadores será denotado por $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$.

Con todo esto podemos definir de manera formal un *Juego puro de Hotelling* en $[0,1]$ con $n \geq 2$ y función de densidad f y lo denotaremos como $\mathscr{H}(n, [0,1], f)$.

Dado un perfil de estrategias, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, sin importar qué jugador esté en una determinada ubicación, asumiremos que el jugador 1 es el jugador que se sitúa más a la izquierda y el jugador n el jugador que se sitúa más hacia la derecha, es decir, $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. La función de pagos que le corresponde a cada jugador representa la cantidad de consumidores que compran el producto del jugador. Por tanto, a partir de la estructura del modelo, podemos enunciar el siguiente lema:

Bajo un perfil de estrategias $x = (x_1, \dots, x_n)$, para cada jugador $i \in N = \{1, \dots, n\}$ definimos el peso que recibirá por la izquierda $\overleftarrow{p}_i(x)$ y el peso que recibirá por la derecha $\overrightarrow{p}_i(x)$ es:

$$\overleftarrow{p}_i(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x_1} f(x)\,dx & \text{si} \quad i = 1, \\ \displaystyle\int_{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}}^{x_i} f(x)\,dx & \text{si} \quad i \in \{2, \dots, n\}, \end{cases}$$

y

$$\overrightarrow{p}_i(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x_i}^{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} f(x)\,dx & \text{si} \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \displaystyle\int_{x_n}^{1} f(x)\,dx & \text{si} \quad i = n, \end{cases}$$

La función de pagos total está compuesta por la sumas de $\overleftarrow{p}_i(x)$ y $\overrightarrow{p}_i(x)$, pero también depende del número de jugadores que se situan en una misma localización x_k.

Por tanto para $i \in N$, la *función de pagos total* del jugador $i \in N$ bajo un perfil de estrategia $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ es:

$$\rho_i(x) = \frac{1}{card\{k : x_k = x_i\}} \sum_{k:\, x_k = x_i} \left(\overleftarrow{p}_k(x) + \overrightarrow{p}_k(x) \right).$$

Si jugadores comparten la misma ubicación entonces $\overleftarrow{p}_i(x)$ y $\overrightarrow{p}_i(x)$ pueden ser iguales a 0.

Finalmente definimos un equilibrio de Nash en el modelo $\mathscr{H}(n, [0,1], f)$. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ un perfil de estrategias, y $i \in N$ un jugador. Denotamos x_{-i} como $(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \in [0,1]^{n-1}$. Entonces para cualquier $z \in [0,1]$ denotamos

$$(z, x_{-i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

para poder definir desviaciones del jugador i.

Un perfil de estrategias $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ es un *equilibrio de Nash* del juego $\mathscr{H}(n, [0,1], f)$ si para cualquier $i \in N$ y para cualquier $x_i \in [0,1]$,

$$\rho_i(x^*) \geq \rho_i(x_i, x_{-i}^*).$$

3.3. Distribución uniforme

En esta sección, la distribución de los consumidores sobre el intervalo es uniforme, por tanto utilizaremos la función de densidad de la distribución uniforme continua $U(a, b)$ en el intervalo $[a, b]$. Esta es $f(x) = \frac{1}{b-a}$ con $a \leq x \leq b$. En nuestro caso, al estudiar el intervalo $[0, 1]$, sin pérdida de generalidad, nuestra función de densidad será $f(x) = 1$ $\forall x \in [0, 1]$. Hablaremos por tanto, del juego puro de Hotelling $\mathscr{H}(n, [0, 1], 1)$. Nótese que el estudio del modelo con una distribución uniforme es independiente de la distribución uniforme escogida pues los equilibrios se mantienen ya que la densidad de población es igual en todo el intervalo.

Como la función de densidad está definida como $f = 1, \forall x \in [0, 1]$, podremos expresar nuestra función de pagos de una manera más explícita. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un perfil de estrategias, sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 1\,dx = 1$, tenemos que nuestra función de pagos para el caso en el que la distribución es uniforme es:

$$\overleftarrow{p}_i(x) = \begin{cases} x_1 & \text{si} \quad i = 1, \\ \dfrac{x_i - x_{i-1}}{2} & \text{si} \quad i \in \{2, \ldots, n\}, \end{cases}$$

y

$$\overrightarrow{p}_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2} & \text{si} \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ 1 - x_n & \text{si} \quad i = n. \end{cases}$$

Conocidas todas las definiciones formales, comenzaremos a enunciar algunas propiedades generales del equilibrio.

Lema 3.1. *Sea $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in [0, 1]^n$ un perfil de estrategias en situación de equilibrio de Nash de $\mathscr{H}(n, [0, 1], 1)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) No existen jugadores en los extremos del intervalo $[0, 1]$, i.e., $x_1^* \neq 0$ y $x_n^* \neq 1$.

(b) No puede haber más de dos jugadores en una misma localización, i.e., $\forall\ y \in [0, 1]$ tenemos que $card\{i : x_i^* = y\} \leq 2$.

(c) Si $card\{i : x_i^* = y\} = 2$ para algún $y \in [0, 1]$ y sean i e $i + 1$ los dos jugadores en la posición y, entonces $\rho_i(x^*) = \rho_{i+1}(x^*) = \overleftarrow{p}_i(x^*) = \overrightarrow{p}_{i+1}(x^*) = \xi$ y ξ no depende de y.

(d) Los jugadores más cercanos a los extremos del intervalo $[0, 1]$ están emparejados, i.e., $x_1^* = x_2^*$ y $x_{n-1}^* = x_n^*$.

Estas condiciones son necesarias para el equilibrio de Nash en el modelo $\mathscr{H}(n, [0, 1], 1)$.

A continuación veremos condiciones necesarias y suficientes para estar en situación de equilibrio de Nash en el juego $\mathscr{H}(n, [0, 1], 1)$.

Proposición 3.1. *Sea $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in [0, 1]^n$ un perfil de estrategias en situación de equilibrio de Nash en $\mathscr{H}(n, [0, 1], 1)$. Las siguientes condiciones caracterizan una situación de equilibrio de Nash para $n \neq 3$:*

(i) $x_1^* = x_2^* = 1 - x_{n-1}^* = 1 - x_n^*$.

(ii) $x_3^* - x_2^* = x_{n-1}^* - x_{n-2}^* = 2x_1^*$.

(iii) $\forall\ i \in \{3, \ldots, n-3\},\ x_{i+1}^* - x_i^* \leq 2x_1^*$.

(iv) $\forall\ i \in \{3, \ldots, n-2\},\ x_{i+1}^* - x_{i-1}^* \geq 2x_1^*$.

Con la información que tenemos disponible, podemos analizar la existencia de equilibrio de Nash en el juego $\mathscr{H}(n, [0,1], 1)$ basado en el número de jugadores.

Teorema 3.1. *Consideramos el juego* $\mathscr{H}(n, [0,1], 1)$.

(a) Para $n = 2, 4, 5$, *existe un único equilibrio de Nash (módulo permutación de jugadores).*

(b) Para $n = 3$, *no existe equilibro de Nash.*

(c) Para $n \geq 6$, *hay infinitas localizaciones de los jugadores que són equilibrio de Nash.*

Ejemplo 3.1. Sea el juego $\mathscr{H}(5, [0,1], 1)$. Vemos cual es la única posición (módulo permutación de jugadores) de equilibrio de Nash.

Vemos que $x_1^* = \frac{1}{6}$ es la única posición del jugador 1 que satisface las condiciones de equilibrio enunciadas anteriormente, por tanto el perfil de estrategia en equilibrio es

$$x^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right).$$

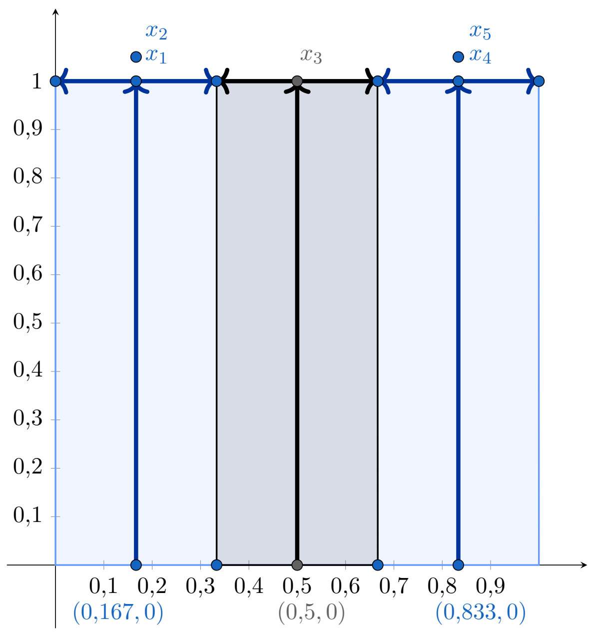

Figura 3.1: Ejemplo de equilibrio con distribución unifmore para $n = 5$ empresas

Todas las demostraciones se pueden hallar en el trabajo de Iglesias (2020) *Spatial competition models* [11].

3.4. Distribución no uniforme

En esta sección consideraremos que la distribución de los consumidores sobre el intervalo $[0,1]$ no es uniforme, o dicho de otra manera, la función de densidad no constante. Consideraremos una función de densidad de la población general no uniforme y que denotaremos f. Hablaremos por tanto, del juego puro de Hotelling $\mathscr{H}(n,[0,1],f)$.

Observaremos las similitudes que comparten con distribuciones uniformes en referencia a las características del equilibrio, en caso de que existan, pero también atenderemos las diferencias que se producen en la existencia de equilibrios al variar a unas densidades no uniformes.

Con el siguiente lema, generalizaremos el lema 3.2. de la sección anterior para cualquier función f

Lema 3.2. *Sea $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in [0,1]^n$ un perfil de estrategia en situación de equilibrio de Nash del juego $\mathscr{H}(n,[0,1],f)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) No existen jugadores en los extremos del intervalo $[0,1]$, i.e., $x_1^* \neq 0$ y $x_n^* \neq 1$.

(b) No puede haber más de dos jugadores en una misma localización, i.e., $\forall\ y \in [0,1]$ tenemos que $card\{i : x_i^* = y\} \leq 2$.

(c) Suponemos que $card\{k : x_k^* = y\} = 2$ para algún $y \in [0,1]$. Sean i e $i+1$ los dos jugadores en la posición y, entonces $\rho_i(x^*) = \rho_{i+1}(x^*) = \overleftarrow{p}_i(x^*) = \overrightarrow{p}_{i+1}(x^*) = \xi$ y ξ no depende de y.

(d) Los jugadores más cercanos a los extremos del intervalo $[0,1]$ están emparejados, i.e., $x_1^* = x_2^*$ y $x_{n-1}^* = x_n^*$.

Demostración. Demostraremos cada apartado de forma separada.

(a) Observemos que en situación de equilibrio de Nash, no hay ningún jugador situado en los extremos del intervalo $[0,1]$. Por tanto se cumplirá que $0 < x_1$ y $x_n < 1$. Estudiamos el caso $0 < x_1$, pues la demostración es análoga al aplicar los mismos argumentos para el caso $x_n < 1$. Suponemos $x_1^* = \cdots = x_n^* = 0$, por tanto la función de pagos de cada jugador es

$$\rho_1(x^*) = \cdots = \rho_n(x^*) = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Veamos que no están en situación de equilibrio de Nash. Sea i el jugador que decide cambiar su estrategia y desplazarse hacia la derecha del 0 a una distancia $\varepsilon > 0$ en busca de un mayor pago, entonces $x_i = \varepsilon$. Ahora la función de pagos para el jugador i aumenta:

$$\rho_i(\varepsilon, x_{-i}^*) = \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 f(x)\,dx > \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx$$

ya que

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x) < \int_0^1 f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 f(x)\,dx.$$

Por tanto se cumple $\rho_i(x^*) < \rho_i(\varepsilon, x_{-i}^*)$ contradiciendo la definición de equilibrio de Nash.

Supongamos ahora que hay $k < n$ jugadores en $y = 0$ en situación de equilibrio, es decir $x_1^* = \cdots = x_k^* = 0$. Sea $k+1$ el jugador más cercano a 0 a distancia α, es decir, $x_{k+1}^* = \alpha$. La función de pagos de los jugadores situados en la localización 0 es de:

$$\rho_1(x^*) = \cdots = \rho_k(x^*) = \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx$$

Veamos que los jugadores situados en $y = 0$ no están en situación de equilibrio, sino que les interesa desplazarse. Sea $i \in \{1, \ldots, k\}$ el jugador que decide desplazarse hacia la derecha a una distancia $\varepsilon < \alpha$, $x_i = \varepsilon < x_{k+1}^* = \alpha$. Veamos que se cumple $\rho_i(x^*) < \rho_i(\varepsilon, x_{-i}^*)$. La función de pagos del jugador i que se ha desplazado entre 0 y $k+1$ es:

$$\rho_i(\varepsilon, x_{-i}^*) = \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\varepsilon+\alpha}{2}} f(x)\,dx$$

Como

$$\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx < \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon+\alpha}{2}} f(x)\,dx\right)$$

Entonces a los jugadores situados en 0 les interesa desplazarse hacia la derecha para aumentar su función de pagos contradiciendo la noción de equilibrio de Nash.

Finalmente, si $x_1^* = 0$ y $x_j^* \neq 0$ para $j \in \{2, \ldots, k\}$. Suponemos que el jugador más cercano está a distancia α, por tanto $x_2^* = \alpha$. Tenemos

$$\rho_1(x^*) = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx$$

Si el jugador 1 decide desplazarse hacia la derecha a una distancia ε, entonces aumentará sus ganancias puesto que la nueva función de pagos será:

$$\rho_i(\varepsilon, x_{-i}^*) = \int_0^{\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\varepsilon+\alpha}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\varepsilon+\alpha}{2}} f(x)\,dx > \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx = \rho_i(x^*)$$

Por tanto si hay un único jugador en 0, le interesará desplazarse para aumentar su función de pagos.

Vemos entonces, que no existen jugadores en los extremos del intervalo $[0,1]$ en situación de equilibrio de Nash.

(b) Probamos en primer lugar que el número de jugadores que están en una misma localización no puede ser mayor que 2. El caso $n = 2$ es trivial.

El caso $n \geq 3$ se demuestra mediante contradicción. Suponemos $card\{i : x_i^* = y\} \geq 3$.

Sean $k \geq 3$ los jugadores situados en la posición $y \in [0,1]$ en situación de equilibrio. Supongamos que estos k jugadores son: $i, i+1, \ldots, i+k-1$. Por tanto tenemos $x_i^* = \cdots = x_{i+k-1}^* = y$. Entonces la función de pagos para cada jugador será:

$$\rho_i(x^*) = \cdots = \rho_{i+k-1}(x^*) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=i}^{i+k-1}\left(\overleftarrow{p}_\ell(x^*) + \overrightarrow{p}_\ell(x^*)\right) = \frac{1}{k}\left(\overleftarrow{p}_i(x^*) + \overrightarrow{p}_{i+k-1}(x^*)\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx + \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{k}\left(\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right).$$

Veamos que no se trata de una situación de equilibrio. Sea j el jugador que se desplaza en busca de un mayor pago $j \in \{i, \dots, i+k-1\}$ observemos que:

$$\frac{1}{k}\left(\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right) \leq \frac{2}{k}\,\text{máx}\left\{\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx, \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right\} \leq$$

$$\leq \text{máx}\left\{\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx, \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right\}.$$

El jugador j se desplazará a una distància ε para obtener un mayor pago en dirección del

$$\text{máx}\left\{\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx, \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right\}.$$

Observemos que la dirección donde se desplace j será indiferente si se cumple:

$$\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx = \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx$$

Supongamos que $\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx > \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx$.(demostración es análoga en el otro caso).

El jugador j se desplazará una distáncia ε hacia x_{i-1}^*, por tanto $\tilde{x_j} = x_i - \varepsilon$ y obtendrá un nuevo pago:

$$\rho_j(x_i^* - \varepsilon, x_{-i}^*) = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*-\varepsilon}{2}}^{x_i^*-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_i^*-\varepsilon}^{\frac{x_i^*-\varepsilon+x_i^*}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*-\varepsilon}{2}}^{x_i^*-\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\,dx$$

Observemos que le conviene desplazarse un $\varepsilon > 0$ lo más pequeño posible en dirección de x_{i-1}^*. Tenemos entonces:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*-\varepsilon}{2}}^{x_i^*-\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx > \frac{2}{k}\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{k}\left(\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx + \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+k-1}^*+x_{i+k}^*}{2}} f(x)\,dx\right)$$

Por tanto observamos que el jugador j tiene incentivos de cambiar su estrategia y desplazarse hacia x_{i-1}^*, pues se cumple $\rho_j(x_i^* - \varepsilon, x_{-i}^*) > \rho_j(x^*)$ consecuentemente no estamos en situación de equilibrio y necesariamente $k \leq 2$

Observación. *Si el jugador $j \in \{i, \dots, i+k-1\}$ es $j = i$, utilizamos los mismos argumentos pero substituyendo x_i^* por x_{i+1}^*.*

(c) Probaremos que los jugadores que esten emparejados 2 a 2 en situación de equilibrio tienen la misma cantidad de pagos hacia la izquierda que hacia la derecha. Sean i e $i+1$ los jugadores emparejados en la localización $y \in [0,1]$ en situación de equilibrio. Es decir $x_i^* = x_{i+1}^* = y$ cumpliéndose que $card\{k : x_k^* = y\} = 2$.

La función de pagos para cada jugador será:

$$\rho_i(x^*) = \rho_{i+1}(x^*) = \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx + \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_i^*}{2}} f(x)\,dx\right).$$

Se cumple que $\overleftarrow{p}_i(x^*) = \overrightarrow{p}_{i+1}(x^*)$, es decir,

$$\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx = \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_i^*}{2}} f(x)\,dx$$

si esto no fuera cierto no estariamos en situación de equilibrio ya que

$$\text{máx}\left\{\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx, \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_i^*}{2}} f(x)\,dx\right\} \geq \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx + \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_i^*}{2}} f(x)\,dx\right)$$

Por lo tanto a cualquiera de los dos jugadores le interesaria desplazarse una distáncia ε pequeña hacia

$$\text{máx}\left\{\int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx, \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_i^*}{2}} f(x)\,dx\right\}$$

para aumentar su función de pagos como hemos estudiado en el apartado anterior. Entonces tenemos:

$$\rho_i(x^*) = \rho_{i+1}(x^*) = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx = \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_i^*}{2}} f(x)\,dx$$

Denotaremos esta cantidad como $\xi(y)$ y veremos que realmente no depende de la localización $y \in [0, 1]$.

Supongamos que hay otra localización $z \in [0, 1]$ donde se emparejan dos jugadores con pagos diferentes. Sin pérdida de generalidad, supondremos que esta localización $z \in (y, 1)$ y los jugadores son i,$i+1$,$i+2$,$i+3$. Si no son consecutivos el argumento también vale para $i+k$ e $i+k+1$ (En este caso los jugadores emparejados entre i,$i+1$ e $i+k$,$i+k+1$ tendrán los mismos pagos $\xi(y)$).

Sean $i+2$ y $i+3$ los jugadores localizados en z en situación de equilibrio, tenemos $x_{i+2}^* = x_{i+3}^* = z$. Siguiendo el razonamiento anterior obtenemos:

$$\rho_{i+2}(x^*) = \rho_{i+3}(x^*) = \int_{\frac{x_{i+1}^*+x_{i+2}^*}{2}}^{x_{i+2}^*} f(x)\,dx = \int_{x_{i+2}^*}^{\frac{x_{i+3}^*+x_{i+2}^*}{2}} f(x)\,dx$$

A esta cantidad la denotaremos como $\xi(z)$. Observemos que $\xi(z) = \xi(y)$.

Supongamos $\xi(y) < \xi(z)$ quiere decir que $\rho_i(x^*) = \rho_{i+1}(x^*) = \xi(y) < \rho_{i+2}(x^*) = \rho_{i+3}(x^*) = \xi(z)$, por tanto a cualquiera de los dos jugadores i o $i+1$ que están en la ubicación y les interesará desplazarse hacia la derecha para poder conseguir un mayor pago.

Sea $i+1$ el jugador que se desplaza hacia la derecha en busca de un mayor pago, antes de iniciar el movimiento tenemos que su función de pagos es: $\rho_{i+1}(x^*) = \xi(y)$.

Desplazandose hacia la derecha a una distancia suficientemente cercana a z obtendrá un mayor pago.

Supongamos que el jugador $i+1$ se desplaza a una posición muy cercana a z, $\tilde{x}^*_{i+1} = x^*_{i+2} - \varepsilon$ (Recordemos que $z = x^*_{i+2} = x^*_{i+3}$), entonces su función de pagos es:

$$\rho_{i+1}(x^*_{i+2}-\varepsilon, x^*_{-i-1}) = \int_{\frac{x^*_i+x^*_{i+2}-\varepsilon}{2}}^{x^*_{i+2}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x^*_{i+2}-\varepsilon}^{\frac{x^*_{i+2}-\varepsilon+x^*_{i+2}}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{x^*_i+x^*_{i+2}-\varepsilon}{2}}^{x^*_{i+2}-\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\,dx$$

Tomando el límite para representar la cercanía respecto z tenemos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\frac{x^*_i+x^*_{i+2}-\varepsilon}{2}}^{x^*_{i+2}-\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{x^*_i+x^*_{i+2}}{2}}^{x^*_{i+2}} f(x)\,dx = \xi(z)$$

En definitiva obtenemos que es contradictorio suponer que $\xi(z) < \xi(y)$ o $\xi(z) > \xi(y)$ en situación de equilibrio, por tanto necesariamente $\xi(z) = \xi(y) = \xi > 0$

(d) Veamos que las localizaciones más cercanas a los extremos siempre hay dos jugadores en situación de equilibrio. Supongamos $0 < x^*_1 < x^*_2$ y llegaremos a una contradicción. La demostración para el caso $x^*_{n-1} < x^*_n < 1$ es análoga.

La función de pagos del jugador situado en x^*_1 es:

$$\rho_1(x^*) = \int_0^{x^*_1} f(x)\,dx + \int_{x^*_1}^{\frac{x^*_1+x^*_2}{2}} f(x)\,dx.$$

El jugador 1 no se encuentra en situación de equilibro ya que puede aumentar su función de pagos acercándose más al jugador 2:

$$\int_0^{x^*_1} f(x)\,dx + \int_{x^*_1}^{\frac{x^*_1+x^*_2}{2}} f(x)\,dx < \int_0^{x^*_2} f(x)\,dx = \lim_{x^*_1\to x^*_2} \left(\int_0^{x^*_1} f(x)\,dx + \int_{x^*_1}^{\frac{x^*_1+x^*_2}{2}} f(x)\,dx \right)$$

Por tanto solo existirá situación de equilibrio si los dos jugadores cercanos al extremo están emparejados.

□

Acabamos de ver que las condiciones que debe de tener una situación de equilibrio en el caso uniforme son las mismas que las condiciones que debe tener el juego en el caso no uniforme. Independientemente de la densidad de población las condiciones que debe cumplir localizaciones de equilibrio se mantienen.

A continuación veremos condiciones suficiente y necesarias para estar en situación de equilibrio de Nash en el juego $\mathscr{H}(n, [0,1], f)$

A continuación veremos algunos contraejemplos para demostrar que las carecterizaciones del equilibrio del juego $\mathscr{H}(n,[0,1],f)$ no se mantienen cuando la distribución es no uniforme.

Sea f una función continua a trozos y simétrica respecto el centro del intervalo $[0,1]$:

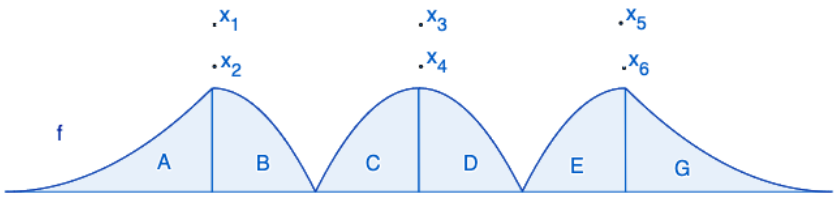

Figura 3.2: Función de densidad f en equilibrio

Las empresas se localizan en equilibrio de la siguiente forma, como se observa en la Figura 3.2:

$$x_1^* = x_2^* = \frac{2}{8},\ x_3^* = x_4^* = \frac{4}{8}\ \text{ y } x_5^* = x_6^* = \frac{6}{8}.$$

Veamos que es equilibrio de Nash. La función de pagos de las empresas $1,\ldots,6$ es la misma:

$$\begin{aligned}
\rho_1(x^*) = \rho_2(x^*) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{8}} f(x)\,dx = \frac{A+B}{2},\\
\rho_3(x^*) = \rho_4(x^*) &= \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{5}{8}} f(x)\,dx = \frac{C+D}{2},\\
\rho_5(x^*) = \rho_6(x^*) &= \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{8}}^{1} f(x)\,dx = \frac{E+G}{2}.
\end{aligned}$$

Por contrucción, tenemos que $A = B = C = D = E = F$. Veamos que ningún jugador quiere cambiar de estrategia ya que no conseguirá un pago superior. Estudiamos el emparejamiento de los jugadores 1 y 2; el razonamiento es el mismo para los jugadores 5 y 6 al tratarse de una función simétrica. Sea 1 el jugador que decide moverse: no le interesa moverse en dirección al 0 pues su función de pagos disminuye $\forall \varepsilon \in [0, \frac{2}{8}]$:

$$\rho_1(x_1^* - \varepsilon, x_{-1}^*) = \int_0^{\frac{2}{8}-\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\,dx < A.$$

Vemos que tampoco le interesá moverse en dirección las empresas 3 y 4 pues la nueva función de pagos que depende de la distancia δ que se desplace es:

$$\rho_1(x_1^* + \delta, x_{-1}^*) = \int_{\frac{2}{8}+\frac{\delta}{2}}^{\frac{3}{8}+\frac{\delta}{2}} f(x)\,dx < A, \quad \forall \delta \in \left[0, \frac{2}{8}\right].$$

Esto se cumple porque la función f es simétrica respecto el punto medio del intervalo en $\left[\frac{2}{8}, \frac{4}{8}\right]$.

El mismo razonamiento lo podemos utilizar para los jugadores 3 y 4 si deciden desplazarse.

Como ninguna empresa aumenta su función de pagos desplazándose, podes afirmar que estamos en situación de equilibrio.

Por tanto, si la función no es uniforme, no se puede afirmar el resultado de la Proposición 3.1.ii) $x_3^* - x_2^* = x_{n-1}^* - x_{n-2}^* = 2x_1^*$. pues:

$$x_3^* - x_2^* = \frac{2}{8} \neq 2x_1^* = \frac{4}{8}$$

Tampoco podemos afirmar el resultado para la Proposición 3.1.iv): $\forall\, i \in \{3, \ldots, n-3\}$, $x_{i+1}^* - x_{i-1}^* \geq 2x_1^*$. Para $i = 3$:

$$x_4^* - x_2^* = \frac{2}{8} \ngeq 2x_1^* = \frac{4}{8}.$$

Para la Proposición 3.1.iii): $\forall\ i \in \{3, \ldots, n-3\}$, $x_{i+1}^* - x_i^* \leq 2x_1^*$. también podemos encontrar un contraejemplo. Sea f una función continua a trozos y simétrica respecto el centro del intervalo $[0, 1]$:

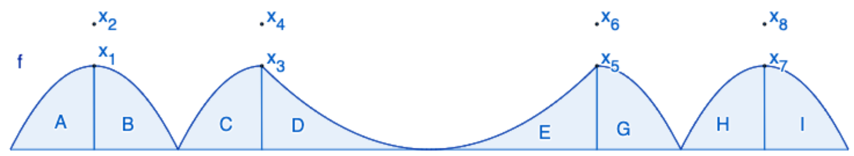

Figura 3.3: Función de densidad f en equilibrio

Las empresas se localizan en equilibrio de la siguiente forma:

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{10}, x_3^* = x_4^* = \frac{3}{10}, x_5^* = x_6^* = \frac{7}{10}, x_7^* = x_8^* = \frac{9}{10}$$

Utilizando el mismo razonamiento anterior podemos ver que estamos en situación de equilibrio.

Por tanto vemos que no se cumple la proposición. Para $i = 4$:

$$x_5^* - x_4^* = \frac{4}{10} \nleq 2x_1^* = \frac{2}{10}.$$

Fournier (2019) [7], muestra que existen funciones para las cuales el juego $\mathscr{H}(n, [0, 1], f)$ no tiene ningún equilibrio de Nash para $n \geq 3$.

El siguiente resultado de Fournier (2019) demuestra este hecho.

Proposición 3.2. *Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función de densidad de población f tal que $\|f - 1\|_\infty \leq \varepsilon$ y tal que $\mathscr{H}(n, [0, 1], f)$ no admite ningún equilibrio de Nash en para $n \geq 3$.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Sea $f : [0, 1] \longmapsto [1, 1 + \varepsilon]$ definida por $f(x) = 1 + \varepsilon x$. Está claro que $\|f - 1\|_\infty \leq \varepsilon$.

La demostración de esta proposición la realizaremos por contradicción. Vemos primero que los jugadores deben estar emparejados 2 a 2 para estar en situación de equilibrio.

Después veremos que en equilibrio no pueden estar emparejados, lo que será una contradicción.

Probemos que si $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ es un perfil de estrategia en situación de equilibrio de Nash entonces se cumple $x_{2j-1}^* = x_{2j}^*$ con $j = 1, \ldots, \frac{n}{2}$. Es decir, deben estar los jugadores emparejados 2 a 2 para estar en equilibrio.

Por el Lema 3.3 (b) no pueden haber más de 3 jugadores en la misma localización en situación de equilibrio, por tanto $card\{i : x_i^* = y\} \leq 2$, para cualquier posible localización $y \in [0, 1]$.

En situación de equilibrio tampoco se puede dar que $card\{i : x_i^* = y\} = 1$. Supongamos que existe un jugador $j \in \{1, \ldots, n\}$ solo en situación de equilibrio entre los jugadores $j-1$ y $j+1$. Sea $a = \frac{x_{j-1}^* + x_j^*}{2}$ y $b = \frac{x_j^* + x_{j+1}^*}{2}$. Entonces la función de pagos del jugador j es:

$$\rho_j(x^*) = \overleftarrow{p}_j(x^*) + \overrightarrow{p}_j(x^*) =$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (1 + \varepsilon x)\,dx = (b-a) + \frac{\varepsilon}{2}(b^2 - a^2).$$

Veamos qué ocurre si el jugador j se desplaza una distancia $\delta > 0$ en dirección del jugador $j+1$ que se ubica en x_{j+1}^*. La nueva ubicación del jugador j será $\tilde{x}_j^* = x_j^* + \delta$. El punto medio con las empresas $j-1$ y $j+1$ cambiará y será el siguiente $a' = a + \frac{\delta}{2}$ y $b' = b + \frac{\delta}{2}$. Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos que la nueva función de pagos es:

$$\rho_j(x_j^* + \delta, x_{-j}^*) = \overleftarrow{p}_j(\tilde{x}^*) + \overrightarrow{p}_j(\tilde{x}^*) = \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{a'}^{b'} (1 + \varepsilon x)\,dx = (b-a) + \frac{\varepsilon}{2}(b^2 - a^2 + \delta(b-a)) > \rho_j(x) = (b-a) + \frac{\varepsilon}{2}(b^2 - a^2),$$

ya que f es una función estrictamente creciente $(b > a)$, por tanto el jugador j no está en una posición de equilibrio ya que desplazandose hacia la derecha obtendrá un mayor pago.

Por tanto vemos que si estamos en equilibrio los jugadores deben estar emparejados, de donde deducimos que el número de jugadores n no puede ser impar.

Definimos $x_{i,i+1} := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Sean A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ las áreas siguientes:

$$A_1 = \int_0^{x_1} f(x)\,dx, A_2 = \int_{x_2}^{x_{2,3}} f(x)\,dx, A_3 = \int_{x_{2,3}}^{x_3} f(x)\ldots,$$
$$\ldots, A_{n-1} = \int_{x_{n-2,n-1}}^{x_{n-1}} f(x)\,dx, A_n = \int_{x_n}^{1} f(x)\,dx$$

Al tratarse f de una función estrictamente creciente tenemos:

$$A_1 < A_2 < \ldots < A_n.$$

Por el Lema 3.2 tenemos que se debe cumplir:

$$\rho_i(x^*) = \rho_{i+1}(x^*) = \int_{\frac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx = \int_{x_i^*}^{\frac{x_{i+1}^* + x_i^*}{2}} f(x)\,dx.$$

Es decir,

$$\rho_1(x^*) = A_1 = \rho_2(x^*) = A_2, \ldots, \rho_n(x^*) = A_n.$$

Por tanto llegamos a una contradicción. □

Si la función f es estrictamente creciente/decreciente y hay un jugador j aislado es decir: $card\{k : x_k = x_j\} = 1$, entonces no habrá situación de equilibrio, pues al jugador j siempre le interesará desplazarse hacia la derecha (izquierda), si la función es creciente (decreciente).

Cuando solo hay dos jugadores que compiten en localización, la localización de equilibrio se situará donde se sitúen los dos jugadores emparejados y reciban los mismos pagos tanto por la izquierda como la derecha. Sea m la mediana de la densidad f, i.e.:

$$\int_0^m f(x)\,dx = \int_m^1 f(x)\,dx$$

Proposición 3.3. *Consideramos el juego puro de Hotelling $\mathscr{H}(2, [0,1], f)$. Sea m la mediana de la densidad f entonces en situación de equilibrio se cumple: $x_1^* = x_2^* = m$.*

Demostración. Sea $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ un perfil de estrategia en situación de equilibrio. Sin pérdida de generalidad asumimos que $x_1^* \leq x_2^*$. Por el Lema 3.2.(a) sabemos que no existen jugadores en los extremos del intervalo $[0,1]$ y por el Lema 3.2.(b) los jugadores cercanos a los extremos están emparejados, además por el Lema 3.2.(b) sabemos que no puede haber más de dos jugadores en una misma localización,por tanto se tiene que $0 \neq x_1^* = x_2^* \neq 1$.

Por el Lema 3.2.(c) necesariamente se tiene que

$$\int_0^{x_1^*} f(x)\,dx = \int_{x_2^*}^1 f(x)\,dx,$$

y esto solo se cumple si $x_1^* = x_2^* = m$. □

Proposición 3.4. *El juego $\mathscr{H}(3, [0,1], f)$ no admite equilibrio de Nash para cualquier f.*

Demostración. Cuando el número de empresas es $n = 3$ no se puede cumplir el Lema 3.2.(b) y Lema 3.2(d) a la vez. Pues como los jugadores cercanos a los extremos deben estar emparejados, la única manera de emparejar a los jugadores es $x_1^* = x_2^* = x_3^*$ pero es contradictorio con que el cardinal debe ser más pequeño igual que dos cuando hay emparejamiento de jugadores. □

A continuación enunciaremos una propiedad que se debe dar en situaciones de equilibrio de Nash para 4 jugadores. Los cuartiles de una función de densidad f en $[0,1]$ son aquellos valores $q_1, q_2, q_3 \in [0,1]$ tales que:

$$\int_0^{q_1} f(x)\,dx = \int_{q_1}^{q_2} f(x)\,dx = \int_{q_2}^{q_3} f(x)\,dx = \int_{q_3}^1 f(x)\,dx$$

Proposición 3.5. *Consideramos el juego puro de Hotelling $\mathscr{H}(4, [0,1], f)$. Sea q_1, q_2, q_3 los cuartiles de la densidad f. En situación de equilibrio se cumple: $x_1^* = x_2^* = q_1$, $x_3^* = x_4^* = q_3$ y $q_2 = \frac{q_1+q_3}{2}$.*

Demostración. Sean $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ un perfil de estrategia en situación de equilibrio. Sin pérdida de generalidad asumimos que $x_1^* \leq x_2^* \leq x_3^* \leq x_4^*$. Por el Lema 3.2.(a) sabemos que no existen jugadores en los extremos del intervalo $[0,1]$ y por el Lema 3.2.(b) los jugadores cercanos a los extremos están emparejados, además por el Lema 3.2.(b) sabemos que no puede haber más de dos jugadores en una misma localización,por tanto se tiene que $0 \neq x_1^* = x_2^* \neq x_3^* = x_4^* \neq 1$.

Sea

$$A := \int_0^{x_1^*} f(x)\,dx, B := \int_{x_2^*}^{\frac{x_2^*+x_3^*}{2}} f(x)\,dx, C := \int_{\frac{x_2^*+x_3^*}{2}}^{x_3^*} f(x)\,dx, D := \int_{x_4^*}^{1} f(x)\,dx$$

por el lema 3.2.(c) tenemos que $A = B = C = D$.

Por tanto concluimos que $x_1^* = x_2^* = q_1$, $q_2 = \frac{x_2^*+x_3^*}{2}$, $q_3 = x_3^* = x_4^*$ por tanto $q_2 = \frac{q_1+q_3}{2}$. □

A continuación enunciaremos algunas condiciones necesarias para el equilibrio que enunció Eaton y Lipsey(1975) [5].

Lema 3.3. *Sea $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in [0,1]^n$ un perfil de estrategia en situación de equilibrio de Nash en $\mathscr{H}(n, [0,1], f)$ entonces se cumple:*

a) Si i es un jugador que no está emparejado entonces:

$$f\left(\frac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}\right) = f\left(\frac{x_i^* + x_{i+1}^*}{2}\right).$$

b) Si i e $i+1$ son jugadores que están emparejados entonces:

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}\right) = f\left(x_i^*\right) = f\left(x_{i+1}^*\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{i+1}^* + x_{i+2}^*}{2}\right).$$

Demostración. a) Sea i el jugador que no está emparejado tenemos que su función de pagos es la siguiente:

$$\rho_i(x^*) = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx + \int_{x_i^*}^{\frac{x_i^*+x_{i+1}^*}{2}} f(x)\,dx$$

.

Para encontrar el máximo de esta función en el mercado que le pertenece, estudiaremos la derivada en el intervalo $\left[\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}, \frac{x_i^*+x_{i+1}^*}{2}\right]$. Según el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rho_i(x^*) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{i+1}^* + x_i^*}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}\right).$$

Para que se trate de un máximo, necesitamos que sea igual a 0. Por tanto nos queda la igualdad:

$$f\left(\frac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}\right) = f\left(\frac{x_i^* + x_{i+1}^*}{2}\right).$$

b) Sea i e $i+1$ los jugadores emparejados, sus funciones de pagos erán:

$$\rho_i(x^*) = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx + \int_{x_i^*}^{\frac{x_i^*+x_{i+1}^*}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}}^{x_i^*} f(x)\,dx.$$

$$\rho_{i+1}(x^*) = \int_{\frac{x_i^*+x_{i+1}^*}{2}}^{x_{i+1}^*} f(x)\,dx + \int_{x_{i+1}^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_{i+2}^*}{2}} f(x)\,dx = \int_{x_{i+1}^*}^{\frac{x_{i+1}^*+x_{i+2}^*}{2}} f(x)\,dx.$$

Siguiendo el mismo procedimiento que el apartado anterior obtenemos

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x_{i-1}^*+x_i^*}{2}\right) = f\left(x_i^*\right) = f\left(x_{i+1}^*\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x_{i+1}^*+x_{i+2}^*}{2}\right).$$

□

Por tanto hemos visto algunas condiciones necesarias que deben de tener las funciones no uniformes para estar en una situación de equilibrio.

Capítulo 4

Aplicaciones del modelo

El modelo de competencia espacial de Hotelling proporciona un marco atractivo para estudiar la naturaleza del equilibrio en un mercado donde las empresas compiten en localización. Hotelling (1929) [10] y diversos trabajos posteriores sobre competencia en localización utilizan como hipótesis que la distribución de consumidores es uniforme a lo largo del mercado lineal.

Se trata de una hipótesis que facilita los cálculos y nos puede sugerir de manera intuitiva cómo se comporta el equilibrio, como también proporciona un transfondo de regularidad interesante para estudiar variaciones del modelo. Pero esta hipótesis es muy restrictiva y no tiene en cuenta las irregularidades inherentes a una ciudad. Las grandes ciudades no se caracterízan por tener la misma densidad en todos sus puntos, hay distintos modelos de ciudades, unas donde la mayoría de la población se unifica en el centro de las ciudades, como también puede ocurrir la tendencia de los ciudadanos de huir de los centros masificados hacia áreas más tranquilas.

La motivación principal de este trabajo ha sido estudiar cómo se comporta el equilibrio cuando esta distribución de consumidores no es uniforme, ajustándose mejor a los modelos de ciudad actuales. Las funciones de densidad no uniformes materializan el hecho de que a las empresas lo que realmente les importa es la cantidad de consumidores y no la distancia a la que están ubicados. Esto se hace patente cuando una función no uniforme "destruye"la caracterización de los equilibrios de Nash de la proposición 3.2 para el caso uniforme, todo esto debido a que en el caso uniforme el único factor a tener en cuenta era la distancia con el consumidor y en el caso no uniforme el factor predominante es la cantidad de consumidores que vamos a tener independientemente de su localización.

El hecho de que la distribución sea uniforme da una composición simétrica del equilibrio, donde las empresas no emparejadas mantienen una distancia equidistante entre unas y otras. También hemos visto que exceptuando el caso de 3 empresas, siempre existen equilibrios de Nash y en algunos casos las posibilidades son infinitas. Utilizar la función de densidad de clientes rectangular produce resultados que no se generalizan a otra función de densidad. Podemos encontrar funciones que por muy cercanas que esten a la densidad uniforme puede ser que en el modelo no exista equilibrio. Esto nos muestra que el equilibrio de Nash no es consistente, ya que existen ciertas funciones de densidad que no admiten ningún equilibrio, por ejemplo las estrictamente crecientes.

Fournier(2019) [7] introdujo el concepto de ε-equilibrio suavizar las imposiciones del equilibrio de Nash. Osborne y Pitchik (1986)[13] muestran mediante estrategias mixtas que el equilibrio de Nash puede existir para $n = 3$, donde alguna empresa puede decidir su ubicación despues de saber las localizaciones de sus competidores. Otros modelos escogen otro tipo de estrategias como la "minimax"donde la estrategia que escoge una empresa se basa en minimizar los daños que le pueda producir la estrategia de otra empresa. El equilibrio de Nash es una condición muy restrictiva y en modelos que no son tan simples es difícil de encontrar.

Podemos diseñar restricciones en los movimientos de los jugadores para facilitar la existencia de equilibrios, por ejemplo dividiendo el mercado lineal en subintervalos e imponiendo que solo dos empresas pueden competir en cada uno de los subintervalos. Estas restricciones ya existen en determinados negocios con productos homogéneos como es el caso de las farmacias y estancos.

4.1. Extrapolación a la política

Podemos hacer una interpretación diferente del modelo de Hotelling extrapolándolo a la política. Anthony Downs (1957)[4] utiliza el modelo de Hotelling para representar a los partidos políticos como empresas y a los votantes como consumidores, y donde el segmento representa el espectro político de los votantes (izquierda-derecha).

La siguiente gráfica representa cómo se distribuye la sociedad en función de sus preferencias políticas siendo el punto 0 la extrema izquierda y el punto 1 la extrema derecha.

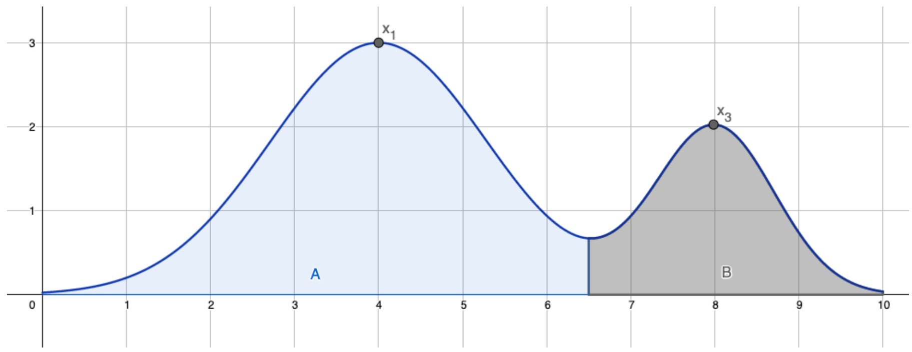

Figura 4.1: Disposición de los votantes en el espectro político

El equilibrio representaría la situación donde los partidos políticos, según sus ideologías, captan la mayor cantidad de votantes, adaptando su discurso político, según sus ideales.

Un partido de derechas no planteará un programa socialista/progresista, al igual que un partido de izquierdas no tendría un planteamiento liberal/tradicional. Por tanto cada partido político tiene unos límites de movilidad sobre el espectro político. Esta restricción nos permitirá poder encontrar un equilbrio para la gráfica seleccionada.

Consideremos el modelo $\mathscr{H}(4, [0, 10], f)$ con f la función que representa la disposición de los votantes en el espectro político, y una restricción de movilidad.[1] Recordemos que estamos considerando un modelo con cuatro partidos.

El punto 6,5 es el punto en el que los partidos de diferente ideología se separan. Tenemos que la situación de equilibrio se da para cuando los partidos 1 y 2, de izquierdas se sitúan

[1]Esto significa que los partidos políticos no pueden desplazarse por todo el espectro ideológico.

en el punto $x_1^* = x_2^* = 4$ del espectro político. Y el equilibrio para los jugadores 3 y 4 se da en el punto $x_3^* = x_4^* = 8$.

Sin la restricción de movilidad, no existiría equilibrio, pero el hecho de que la haya, nos permite hallar los equilibrios estudiando los modelos $\mathscr{H}(2, [0, 5], f)$ y $\mathscr{H}(2, [5, 10], f)$ para los cuales siempre existe un equilibrio.

Bibliografía

[1] d'Aspremont, C., Gabszewicz, J. J., and Thisse, J. F. (1979). On Hotelling's "Stability in competition". Econometrica, 47(5), 1145–1150.

[2] Bertrand, J. (1883). Book review of "Théorie mathématique de la richesse sociale" and of "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses". Journal de Savants, 67, 499–508.

[3] Cournot, A. (1838). Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris: Hachette. Œuvres complètes de A.-A. Cournot, 8.

[4] Downs, A. (1957). An Economic Theory of Political Action in a Democracy. Journal of Political Economy, 65(2), 135—150.

[5] Eaton B.C., Lipsey R.G. (1975). The principle of minimum differentiation reconsidered: some new developments in the theory of spatial competition. Rev Econ Stud, 42,27–49.

[6] Fournier, G., Scarsini, M. (2019) Location games on networks: Existence and efficiency of equilibria. Math Oper Res, 44(1), 212–235.

[7] Fournier, G. (2019) General distribution of consumers in pure Hotelling games. Int J Game Theory, 48, 33-–59.

[8] Gardner, R. (1996). Juegos para empresarios y economistas. Antoni Bosch, editor.

[9] Gibbons, R.S. (1992). Game theory for applied economists. Princeton University Press.

[10] Hotelling, H. (1929). Stability in competition. Economic Journal, 39(153), 41–57.

[11] Iglesias, E. (2020). Spatial competition models, Treball Final de Grau, Universitat de Barcelona.

[12] Nash, J.F. (1950). Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36, 48–49.

[13] Osborne, M.J., Pitchik, C. (1986). The nature of equilibrium in a location model. Int Econ Rev, 27, 223—237.

[14] von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behavior. Princeton University Press.

[15] Pálvölgyi, D. (2011) Hotelling on graphs. Technical report, Mimeo

[16] Peters H., Schröder, M., Vermeulen, D. (2018) Hotelling's location model with negative network externalities. Int J Game Theory 47, 811–837.

[17] Pérez, J., Jimeno, J.L., Cerdá, E.(2004) Teoría de Juegos, Pearson Educación.

[18] ReVelle, C.S., Eiselt, H.A. (2005). Location analysis: a synthesis and survey. Eur J Oper Res, 165, 1–19.

[19] Salop, S.C. (1979). Monopolistic competition with outside goods. Bell J Econ, 10(1), 141–156.

[20] Smith Adam (1776). La Riqueza de las Naciones, Alianza editorial (2011).

[21] Tabuchi, T., Thisse, J.F. (1995). Asymmetric equilibria in spatial competition. Int J Ind Organ, 13(2), 213–227.