Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: Minimización de riesgo local en carteras financieras y seguros

Autoría: Youssef Maammar Bakkali

Tutoría: Oriol Roch

Curso académico: 2021-2022

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat d'Economia i Empresa

Màster de Ciències Actuarials i Financeres

Facultad de Economía y Empresa

Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

Minimización de riesgo local en carteras financieras y seguros

Autoría: Youssef Maammar Bakkali

Tutoría: Oriol Roch

"El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quién declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de las referencias a otros autores han sido expresadas en el texto."

Resumen

Esta tesis se centra en la minimización de riesgo local para valorar los contratos financieros y de seguros de vida en el mercado incompleto, mediante dos activos, el primer activo es un bono y el segundo activo es una acción. Mediante el modelo CRR, se construirá el árbol del precio de la acción.

En definitiva, la valoración de los contratos será en tiempo discreto en el que se calcularán las estrategias, el coste, el valor de la cartera y el valor de la cartera reequilibrado, mediante las estrategias y las medidas neutrales al riesgo Q

Palabras clave: Minimización de riesgo local, contratos financieros y de seguros de vida, estrategias, medidas neutrales al riesgo, siniestros.

Abstract

The aim of this tesis is to use local risk minimization to price and hedge financial contracts and life-insurance contracts in incomplete markets, by using two assets, the first one is a bond and the second one is a stock. The stock process will be built by using CRR model.

Contracts will be priced in discrete time, which it will be calculated strategies, cost, the value of portfolio and the value of portfolio after it has been re-balanced by using strategies and neutral risk measure Q.

Key words: Local risk minimization, financial and life-insurance contracts, strategies, neutral risk measure, claims.

Índice

Índice de figuras

Notación

La notación que se usará a lo largo de este trabajo será:

- $\tilde{C}, C$: proceso de coste cumulativo descontado, proceso de coste cumulativo
- $d + 1$: número de activos negociados
- D: edad de fallecimiento
- $\mathcal{F}, \mathcal{F}^F, \mathcal{F}^M$: filtración, filtración asociada a los activos negociados, filtración asociada a las vidas
- $\mathbb{F} = \mathcal{F}(T), \mathbb{F}^F = \mathcal{F}^F(T), \mathbb{F}^M = \mathcal{F}^M(T)$: σ-álgebra, σ-álgebra asociada con los activos negociados, σ-álgebra asociada con las vidas
- $\widetilde{H}, H$: siniestro , siniestro descontado
- i, j: índices
- k: índice para los activos negociados
- m: número de vidas
- n: número de periodos
- $\mathrm{P}, \mathrm{P}^F, \mathrm{P}^M$: medida de probabilidad, medida de probabilidad asociada con los activos negociados, medida de probabilidad asociada con las vidas
- Q, Q^F: el conjunto de las medidas de martingala, conjunto de las medidas de martingala asociada con los activos negociados
- Q:una medida particular en Q
- $\hat{Q}$: medida mínima equivalente martingala
- $\tilde{S}^{(k)}, S^{(k)}$: precio del activo k, precio del activo k descontado
- t_i: tiempo en el periodo i
- T: es el tiempo de vencimiento
- $\tilde{V}, V$: valor de la cartera, valor de la cartera descontada
- $\tilde{X}, X$: proceso de siniestro, proceso de siniestro descontado
- x: edad de una persona
- $\alpha^{(k)}$: número de títulos del activo k
- δ: tipo de interés libre de riesgo
- π: prima
- $\Omega, \Omega^F, \Omega^M$: espacio de probabilidad, espacio de probabilidad asociado con los activos negociados, espacio de probabilidad asociada con las vidas

1 Introducción

En esta tesis, se va a centrar en la minimización de riesgo local para valorar los contratos financieros y de seguros de vida en el mercado incompleto.

El mercado es completo, si se cumple la parte replicante y la parte autofinanciada, si no se cumple una de las dos partes sería incompleto.

Para valorar los contratos en mercados incompletos, hay varias alternativas, en que en el trabajo se explicarán algunas de ellas, que son: la cartera super cobertura, cobertura eficiente y cobertura cuadrática.

La cobertura cuadrática está compuesta por dos alternativas, la cobertura de la media-varianza y la minimización de riesgo.

En las anteriores alternativas, el mercado es incompleto porque se cumple la parte autofinanciada pero no se cumple la parte replicante. Aunque en la minimización de riesgo se cumple la parte replicante pero no se cumple la parte autofinanciada.

La minimización de riesgo se divide en dos alternativas, la minimización de riesgo global y la minimización de riesgo local.

La diferencia entre ambas alternativas, es que en la minimización de riesgo global, los contratos se valoran desde el inicio hasta el vencimiento, es decir, des del horizonte temporal $[0, T]$.

Mientras que en la minimización de riesgo local el horizonte temporal $[0, T]$, se divide en varias t_i para cada periodo i, es decir, se parten las t_i en $(\{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\})$.

Como se dijo previamente, la tesis se va a centrar en la minimización del riesgo local, en el que se cumple la parte replicante y no se cumple la parte autofinanciada.

Por lo tanto, para valorar los contratos, ya sean financieros o de seguros de vida, como no se cumple la parte autofinanciada se tendrá que añadir el incremento del coste para conseguir relajar esta parte, es decir, para conseguir que más o menos se cumpla la parte autofinanciada, el incremento del coste debe ser aproximadamente igual a cero.

En definitiva, se valorarán los contratos mediante un árbol compuesto por varios nodos en cada periodo i, en el que en cada nodo se añadirán fondos o se quitarán para que el incremento del coste sea aproximadamente cero.

Cabe destacar que la minimización de riesgo local, es un alternativa en la que hay muy poca información al respecto, es decir, no hay muchos artículos o libros que hablen de esta alternativa y en la mayoría de los artículos que hablan de esta alternativa no hablan de ella en el tiempo discreto. Además, no hay ejercicios sobre la minimización de riesgo local que estén explicados mediante números.

Por lo tanto, como en esta tesis se focaliza en la minimización de riesgo local para tiempo discreto, en el que se va a centrar en la tesis doctoral de minimización de riesgo local (Pansera, 2008).

2 Alternativas para valorar los contratos

Cómo ya se ha comentado en la introducción, hay diversas formas de valorar los contratos financieros y los contratos de seguros de vida en el mercado incompleto, y estas son:

- La super cobertura o super hedging: Es una aproximación en la cuál se garantiza que el siniestro H siempre sea menor o igual a la cartera, con lo cuál esta super cobertura es muy cara, ya que debe garantizar la condición

$$H \leq V(T)\,, \tag{2.1}$$

  con lo cuál se mantiene la parte autofinanciada pero se sustituye la parte replicante que sería $H = V(T)$.

  El precio de la super cobertura π^{Sup} de un siniestro H, es igual al valor inicial[1] de la estrategia más barata de super cobertura.
  El precio de la super cobertura es

$$\pi^{Sup} = Sup_{Q\in\bar{Q}}\, E^{Q}[H], \tag{2.2}$$

  donde $\bar{Q}$ es una medida es el conjunto de todas las medidas continuas de martingala con respecto a la medida P.
  Aparte de la super cobertura, existe la sub cobertura cuya igualdad sería contraria a la del super hedging.
  Por lo tanto, la sub cobertura sería la aproximación que garantiza que el siniestro H siempre sea mayor o al menos igual a la cartera

$$V(T) \leq H \tag{2.3}$$

  Esta estrategia se caracteriza porque siempre usa una cartera que es insuficiente para pagar el siniestro.
  El precio de la sub cobertura de un siniestro H es π^{Sub}, es al valor inicial de la estrategia de sub cobertura más cara.
  El precio de la sub cobertura es

$$\pi^{Sub} = Inf_{Q\epsilon\bar{Q}} E^{Q}[H] \tag{2.4}$$

- Cobertura eficiente**:** En esta alternativa el conjunto de S con estrategias autofinanciadas, el valor está ligado a una prima π.
  La super cobertura, es una alternativa en la que siempre se cumple la ecuación (2.1) pero como el valor de la cartera siempre es mayor al siniestro, entonces la prima será muy cara.

[1] La prima que paga el comprador es igual a $H_0 = -V_{0+}$. Esta igualdad ya se explicará a lo largo del trabajo.

Por lo tanto, en la cobertura cuantílica se maximiza la probabilidad de que el valor de la cartera sea mayor al siniestro a través de estrategias autofinanciadas, es decir, la probabilidad sería equivalente a

$$P[\tilde{V}(T) \geq \widetilde{H}], \tag{2.5}$$

es conocido como cobertura cuantílica (Föllmer, 2002).
El inconveniente de la cobertura cuantílica es encontrar una estrategia en el que el valor de la cartera cumpla la ecuación(2.5).
En definitiva, la probabilidad de la cobertura cuantílica corresponde al Valor en Riesgo[2](VaR), en el que sólo se toma la probabilidad de pérdida y no la cuantía de la propia pérdida.
Por lo tanto, el objetivo es encontrar una estrategia $S \in S$ (normalmente está en términos no descontados) que el $\tilde{V}(T)$ minimice

$$E[l(\tilde{V}(T) - \widetilde{H})], \tag{2.6}$$

para una función de pérdidas $l: x \to l(x)$.

- Cobertura cuadrática (Föllmer, 2002): Cabe decir que la cobertura cuadrática está dividida en dos alternativas:
    - Cobertura de la media-varianza
    - Minimización de riesgo

  A continuación, se explicarán esas dos alternativas.

- Cobertura de la media-varianza (Föllmer, 2002): En esta alternativa, se cumple la parte autofinanciada pero no la parte replicante.
  El objetivo de esta aproximación es minimizar la esperanza al cuadrado del error (normalmente está descontado)

$$E[(V(T) - H)^2], \tag{2.7}$$

para todas las estrategias autofinanciadas, intentando que la esperanza sea lo más próxima a cero.
Mediante las estrategias autofinanciadas, las ganancias son iguales a

$$G_0 = 0 \;\; y \;\; G_t = \sum_{k=1}^{t} \alpha_k{}^{(1)} \cdot (S_k - S_{k-1}). \tag{2.8}$$

Entonces el coste es igual a

$$C_t = V_t - G_t, para\; t = 0, \dots, T\;. \tag{2.9}$$

[2] La fórmula del Valor en Riesgo(VaR) es $VaR_{1-\alpha}(X) = \inf_{t \in R} \{t: Pr(X \leq t) \geq 1 - \alpha\}$.

En definitiva, se deberá encontrar una estrategia autofinanciada que minimice la ecuación(2.9) para que el valor de la cartera sea replicante, es decir, que sea igual a $V_t = H_t$.
Esta aproximación se puede calcular mediante la medida de probabilidad P y la medida martingala $Q \in \mathcal{Q}$.

- Minimización del riesgo: Al contrario de la cobertura de la media-varianza, esta alternativa cumple la parte replicante pero no la parte autofinanciada.
  Para satisfacer la parte autofinanciada, la minimización de riesgo tiene como objetivo minimizar la esperanza al cuadrado del coste. Esta esperanza se puede calcular mediante una medida de probabilidad P y una medida martingala Q ∈ $\mathcal{Q}$.

  La minimización del riesgo se compone por las siguientes alternativas:

  - La minimización del riesgo global: Esta alternativa tiene en cuenta el coste hasta el horizonte temporal T.
    El objetivo de esta aproximación es minimizar mediante todas las posibles estrategias esta esperanza

    $$E[(C(T) - C(t))^2 | \mathcal{F}(t)] \tag{2.10}$$

    y en tiempo discreto, esta esperanza sería

    $$E[(\Delta C_i + \cdots + C_n)^2 | \mathcal{F}_{i-1}], \tag{2.11}$$

    para cada i.
    La minimización del riesgo P-global(una esperanza con medida de probabilidad P), en general no tiene solución. Por eso, dentro de la minimización del riesgo global, la esperanza tiene una medida martingala Q ∈ $\mathcal{Q}$.
    El valor inicial de una estrategia de minimización del riesgo global es equivalente al valor inicial de una estrategia de cobertura de la media-varianza.
    Además, estas dos aproximaciones son iguales, exceptuando por el número de títulos $\alpha^{(0)}$(del activo 0). Por eso muchos autores catalogan esta aproximación como la cobertura de la media-varianza.

  - La minimización del riesgo local: Esta aproximación se adopta una visión más miópica ya que solo considera un paso adelante en el coste, es decir, se parte T en $(\{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\})$ y se mira el coste en cada periodo t_i.

    En tiempo discreto, el objetivo de esta aproximación es minimizar el coste para todo i

    $$E[(\Delta C_i)^2 | \mathcal{F}_{i-1}]. \tag{2.12}$$

A diferencia de la minimización del riesgo global, en esta aproximación se puede calcular tanto con la medida de probabilidad P, como con la medida martingala Q $\in \mathcal{Q}$.
La minimización de riesgo Q-global es igual a la minimización de riesgo Q-local.
Mientras que la minimización de riesgo P-local es igual a la minimización de riesgo $\hat{Q}$-global que es igual a la medida mínima equivalente martingala.
Por lo tanto, en esta aproximación el precio justo será equivalente a la estrategia de cobertura.
No obstante, la distribución del coste será diferente con la medida de probabilidad P y con la medida mínima equivalente martingala $\hat{Q}$.

3 Conceptos básicos

3.1 Finanzas

Entre todas las alternativas o aproximaciones previamente comentadas, la tesis se va a centrar en la minimización del riesgo local para valorar los contratos en mercados incompletos utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubinstein.

Antes de empezar con la minimización de riesgo local, se ha de explicar una serie de conceptos básicos para poder entender esta aproximación. Estos conceptos son: oportunidad de arbitraje, medida de probabilidad neutral al riesgo, activo replicante, mercado incompleto y la filtración**.**

Para que haya oportunidad de arbitraje se han de cumplir estas tres condiciones:

1) $\tilde{V}_0 = 0$. No cuesta nada
2) $\tilde{V}_1(w) \geq 0, \forall w, \in \Omega$, es decir, para todo $w, \tilde{V}_1(w)$ será mayor o igual a cero.
3) $E[\tilde{V}_1] > 0$. Esta condición significa que la esperanza de $\tilde{V}_1$ será mayor a cero, es decir, que la segunda condición como mínimo debe tener algún $\tilde{V}_1(w)$ que sea positivo.

Mientras que para que haya una medida de probabilidad neutral al riesgo Q, se debe cumplir lo siguiente:

1) $Q(w) > 0$, $\forall w \in \Omega$,. Las medidas de probabilidad Q deben ser siempre positivas.
2) $E_Q[\Delta S_1{}^i] = 0$, entonces $E_Q[\Delta S_1{}^i] = E_Q[S_1{}^i - S_0{}^i] = E_Q[S_1{}^i] - \tilde{S}_0 = 0$. Por lo tanto, $E_Q[S_1{}^i] = \tilde{S}_0$.

En definitiva, si la Q cumple las condiciones de una medida de probabilidad neutral, entonces $\tilde{V}_0$ sería igual a:

$$\tilde{V}_0 = E_Q[V_1] \tag{3.1}$$

$$E_Q[V_1] = E_Q\left[\sum_{i=0}^{d} \alpha^i \cdot S_1{}^i\right] = \sum_{i=0}^{d} \alpha^i \cdot E_Q[S_1{}^i] = \sum_{i=0}^{d} \alpha^i \cdot \tilde{S}_0{}^i = \tilde{V}_0 \,. \tag{3.2}$$

Cabe destacar que si hay una medida de probabilidad neutral al riesgo, entonces no hay oportunidades de arbitraje, ya que si Q es una medida de probabilidad neutral al riesgo entonces se cumplirá esta igualdad

$$E_Q[V_1] = \tilde{V}_0, \tag{3.3}$$

entonces si hubiera oportunidad de arbitraje, la primera condición de oportunidad de arbitraje haría que la ecuación(3.3) sea igual a

$$E_Q[V_1] = 0, \tag{3.4}$$

y esta igualdad anularía la tercera condición de oportunidad de arbitraje.

Un activo es replicable en un mercado, si existe alguna estrategia α que cumpla:

$$\tilde{V}_1 = X, \tag{3.5}$$

siendo el valor de la cartera $\tilde{V}_1$ igual al derivado X.

Como se verá en el trabajo sobre la minimización de riesgo local el valor de la cartera será replicable a los siniestros, en el que estará referenciado mediante una opción.

Si hay una medida de riesgo neutral, es decir, no hay oportunidad de arbitraje entonces como que el activo es replicable se cumplirá la siguiente igualdad

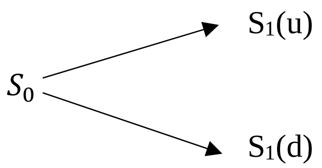
$$\tilde{V}_0 = E_Q[V_1] = E_Q\left[\frac{X}{\tilde{S}_1{}^0}\right]. \tag{3.6}$$

Un mercado es completo si se cumple la parte replicante y la parte autofinanciada.

Para la minimización de riesgo local, se considerará que un mercado es incompleto si no se cumple la parte autofinanciada.

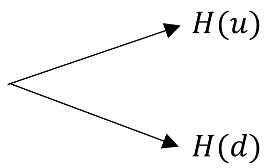
A continuación, se mostrará el árbol binomial de un contrato financiero para un periodo.

Figura 1: Precio de las acciones



Fuente: Elaboración propia

Figura 2: Siniestros

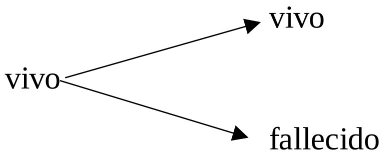


Fuente: Elaboración propia

En el anterior árbol, el mercado es completo porque todos los activos son replicables a los siniestros H y las estrategias serian autofinanciadas.

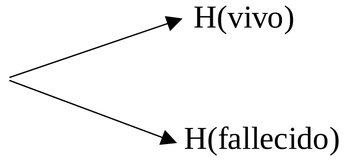
Mientras para el contrato de un seguro de vida , en el periodo uno el asegurado puede estar vivo o haber fallecido.

Figura 3: Seguro de vida



Fuente: Elaboración propia

Figura 4: Siniestros



Fuente: Elaboración propia

En este contrato dependiendo de qué tipo de seguro es, la opción que cobraría el asegurado sería en función de si llegase vivo o si falleciera.

Una filtración representa la información que se conoce del precio en tiempo t, es decir, es una σ-álgebra de $\mathcal{F}$ tal que $\{\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \leq \cdots \leq \mathcal{F}_n\}$.

El árbol de precios S_n es un proceso estocástico adaptado a la $\mathcal{F}_n$ si la variable S_n es medible a $\mathcal{F}_n$ para $n = 0, \dots, N$.

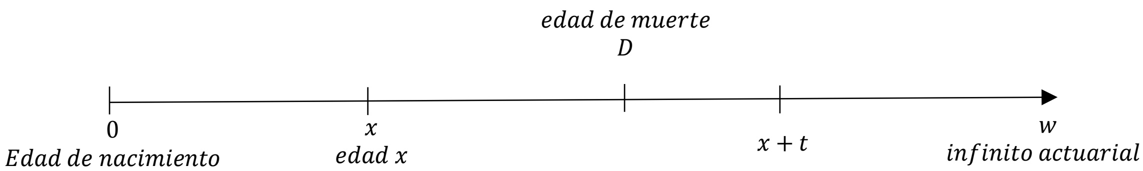
En definitiva, como el precio de S_n es adaptado, entonces sólo se tiene conocimiento todos los precios pasados y presentes, pero no se conocen los precios futuros.

3.2 Estadística actuarial vida

La estadística actuarial de vida (Ayuso, 2007), es una ciencia que trata la biometría, en el que se estudia la supervivencia de los elementos de cualquier población sujeta a un proceso de envejecimiento.

El modelo biométrico incluye una variable aleatoria D que representa a la edad de fallecimiento.

Figura 5: Modelo biométrico



Fuente: Elaboración propia

La variable en la que se centra el modelo biométrico es D, es decir, la edad de fallecimiento.

También se trabaja con la variable vida residual $T(x)$ para la edad x, que es igual a

$$T(x) = D - x, \tag{3.7}$$

esta variable representaría el número de años que le restan por vivir al individuo x.

Mientras que la función de distribución de la edad de fallecimiento $F(x)$ sería

$$F(x) = P[D \leq x], \tag{3.8}$$

esta función es la probabilidad de que la edad de fallecimiento no supere el valor x.

Mientras que la función de supervivencia sería igual a

$$S(x) = P[D > x] = 1 - F(x), \tag{3.9}$$

que sería la probabilidad acumulada de que el individuo llegue con vida a la edad de x (al contrario de la $F(x)$.

A continuación, se van a mostrar las probabilidades temporales que se pueden utilizar para valorar los contratos de seguros de vida:

- Probabilidad temporal de fallecimiento para un individuo de edad x, ${}_hq_x$. Es la probabilidad para un individuo que ha superado la edad x, fallezca entre x y $x + h$.

$$ {}_hq_x = P\left[x < D \leq x + h \,\middle|\, x < D\right] = \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)}. \tag{3.10}$$

- Probabilidad temporal de supervivencia, ${}_hp_x$. Es la probabilidad, para un individuo que haya superado la edad x, supere la edad $x + h$.

$$ {}_hp_x = P[x + h < D | x < D] = 1 - {}_hq_x = \frac{1 - F(x+h)}{F(x)} = \frac{S(x+h)}{S(x)}. \tag{3.11}$$

3.3 Seguros de vida

El objetivo del seguro de vida es la cobertura de la muerte del asegurado.

Los seguros de vida están divididos por:

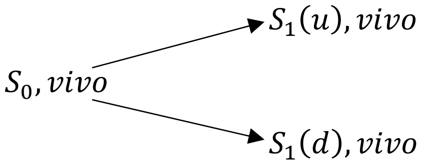
1) Seguro de vida-riesgo: Son seguros de vida tradicionales que se caracterizan por garantizar el cobro de una cantidad monetaria a las personas designadas como beneficiarias después de la muerte del asegurado.
2) Seguro de vida-ahorro: Son seguros de vida que cubren la supervivencia del asegurado, incrementando el capital que aportó con un tipo de interés.
3) Seguro de vida-mixto(Riesgo-ahorro): son seguros que en la duración del contrato cubren el fallecimiento del asegurado(Riesgo), y también cubren la supervivencia(Ahorro), por eso son definidos como seguros de vida mixtos. Este

tipo de seguro, puede utilizar tanto las tablas de muerte, como las de supervivencia.

Para los contratos de seguros de vida, se va a centrar en los seguros de vida-ahorro calculándolo con el seguro de vida vinculado al capital(equity-linked), en el que la prima del seguro se invierte en el mercado financiero con lo que comporta un riesgo de mercado y de supervivencia.

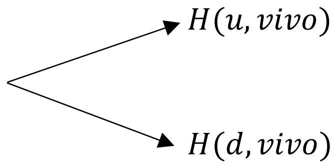
En definitiva, en los contratos de seguros de vida-ahorro sólo se tomarán los estados en los que el asegurado esté vivo, en el que para los estados de muerte el pago será de cero.

Figura 6: Precio de las acciones



Fuente: Elaboración propia

Figura 7: Siniestros



Fuente: Elaboración propia

Para calcular las probabilidades de supervivencia del seguro de vida-ahorro se usarán las tablas de supervivencia españolas (LPERM/F 2000).

El objetivo será que cuando se invierta la prima, esta pueda pagar el coste del siniestro en tiempo t.

Como ya se verá, la inversión de la prima, no será suficiente para pagar el siniestro y por eso se tendrá que añadir un coste, en el que se tendrá que minimizar ese coste.

4 Marco general

Esta tesis se va a focalizar en el tiempo discreto (Pansera, 2008), en el que todos los procesos estocásticos están definidos dentro de un espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, P)$ dado un tiempo horizontal de $[0, T]$ el cual ese tiempo horizontal se va a partir en varios t_i, es decir, en el árbol de precios el horizonte temporal de T, estará partido en $(\{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\})$.

Por ejemplo si $T = 2$ y cada t_i representara un año, entonces el árbol de precios tendría 2 periodos con $(\{0 = t_0 < t_1 < t_2 = 2\})$.

Para cualquier k, el precio del activo descontado es la división entre el precio actual del activo k y el precio actual del activo cero en t es

$$S^{(k)}(t) = \frac{\tilde{S}^{(k)}(t)}{\tilde{S}^{(0)}(t)}. \tag{4.1}$$

Sin embargo, el precio descontado del activo k en el momento cero siempre es igual al precio actual del activo k.

$$S^{(k)}(0) = \frac{\tilde{S}^{(k)}(0)}{\tilde{S}^{(0)}(0)} = \tilde{S}^{(k)}(0), \tag{4.2}$$

debido que para todo t, es decir, para $\forall t, \tilde{S}^{(0)}(t) = 1$.

Para $d + 1$ activos negociados, el precio $\tilde{S}_n{}^{(i)}$ es el precio del activo i en el momento n, con $i = 0,1, \dots, d$.

El vector de precios $\tilde{S}_n$ es el precio en el momento n que se compone por varios precios en el mismo momento, es decir, el vector de precios es

$$\tilde{S}_n = \tilde{S}_n{}^{(0)}, \tilde{S}_n{}^{(1)}, \tilde{S}_n{}^{(2)}, \dots, \tilde{S}_n{}^{(d)}. \tag{4.3}$$

Para un vector de precios S_1 en momento 1 y estado w_1, este se compone por

$$\widetilde{S_1}(w_1) = \widetilde{S_1}^{(0)}(w_1), \widetilde{S_1}^{(1)}(w_1), \widetilde{S_1}^{(2)}(w_1), \dots, \widetilde{S_1}^{(d)}(w_1). \tag{4.4}$$

El espacio para todos los activos posibles en el momento 1, es una matriz formada por todos los estados posibles w y por todos los activos de 0 hasta d ,

$$\tilde{S}_1(\Omega) = \begin{pmatrix} \tilde{S}_1^0(w_1) & \tilde{S}_1^1(w_1) \dots & \tilde{S}_1^d(w_1) \\ \tilde{S}_1^0(w_2) & \tilde{S}_1^1(w_2) \dots & \tilde{S}_1^d(w_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{S}_1^0(w_k) & \tilde{S}_1^1(w_k) \dots & \tilde{S}_1^d(w_k) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Como veremos en la siguiente fórmula,

$$E[(S^{(k)}(t))^2] < \infty, \forall k, t, \tag{4.6}$$

la esperanza del precio descontado para todo activo k al cuadrado siempre será menor a infinito, es decir, es una función de cuadrado integrable[3].

En el mercado financiero, en ausencia de arbitraje pueden haber tres posibilidades:

1) Q tiene sólo un elemento. Eso implica que también Q^Ftenga sólo un elemento.
2) Q tiene más de un solo elemento mientras que Q^F tiene sólo un elemento.
3) Tanto Q como Q^Ftienen más de un solo elemento.

El siniestro H_j es el coste que el vendedor pagará al comprador en el momento j, es decir, se pagará el siniestro mediante lo que se gane en la opción que venciese en j .

Por lo tanto, se pagará el siniestro mediante la opción, es decir, con la inversión de la prima V_{0+} se pagará el siniestro.

Cabe añadir que una opción es un contrato entre dos partes por el cuál el comprador tiene el derecho a ejercer o no la opción y el vendedor está obligado a cumplir con el contrato si el comprador ejerce la opción.

Hay varios tipos de opciones como las opciones europeas, opciones americanas y opciones exóticas.

Una opción europea es un contrato que sólo se puede ejercer en el vencimiento t_j, siendo t_j el último periodo del árbol. En los ejercicios prácticos se usará la opción europea call para cubrir los siniestros H_j.

Mientras que la opción americana se puede ejercer en cualquier momento de la vida de la opción, es decir, se puede ejercer dentro del intervalo de $[0, T]$.

El payoff, o el valor intrínseco de una opción europea call es

$$V(S(T), T) = Max(S(T) - K; 0), \tag{4.7}$$

siendo $S(T)$ el precio del subyacente en tiempo T y K es el precio de ejercicio. Mientras que el payoff es igual al máximo entre la diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio, o es igual a cero cuando la diferencia es negativa o es igual a cero.

Al igual que con el precio descontado, el siniestro descontado se divide por el precio actual del activo cero, con lo cual el siniestro descontado sería el siguiente

$$H = \frac{\widetilde{H}}{\tilde{S}^{(0)}(t)}. \tag{4.8}$$

[3] Una función es cuadrado integrable cuando $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$

La esperanza del siniestro descontado es

$$E[H^2] < \infty. \tag{4.9}$$

Un proceso de siniestros descontados X es una combinación finita de siniestros descontados $H_0, \dots, H_n$, que ocurren en diferentes tiempos $t_0, \dots, t_n$.

El proceso de siniestros descontados está definido por

$$X(t) = [t = t_0]\, H_0 + \cdots + [t = t_n]\, H_n. \tag{4.10}$$

Como se puede ver, la esperanza del proceso de siniestros descontados, también cumple

$$E[X^2(t)] < \infty, \tag{4.11}$$

la esperanza siempre es menor a infinito.

Cabe destacar que el vendedor del proceso de siniestros descontados es quien paga el coste, mientras que el comprador es quien lo recibe.

La fórmula del valor de la cartera es

$$\tilde{V}(t) = \alpha^{(0)} \cdot \tilde{S}^{(0)}(t) + \cdots + \alpha^{(d)} \cdot \tilde{S}^{(d)}(t) = \alpha(t) \cdot \tilde{S}(t). \tag{4.12}$$

El valor de la cartera descontado, al igual que en la ecuación(4.2) y (4.8), se divide por el precio actual del activo cero, siendo el valor descontado igual a

$$V(t) = \frac{\tilde{V}(t)}{\tilde{S}^{(0)}(t)} = \alpha(t) \cdot S(t). \tag{4.13}$$

La dificultad sobre la minimización de riesgo local será encontrar una estrategia α que permita que el precio justo sea igual al proceso de siniestro.

El proceso de un siniestro es alcanzable si se puede replicar por una estrategia autofinanciada.

Por lo tanto, un mercado es completo si cada siniestro es alcanzable, es decir, cumple la parte autofinanciada y la parte replicante.

Para que se cumpla la parte autofinanciada, el valor de la cartera que utiliza la estrategia α_{i+1} debe ser igual al valor de la cartera con la estrategia α_i, es decir, para que se cumpla la parte autofinanciada se debe cumplir la siguiente igualdad

$$\alpha_{i+1} \cdot S_i = \alpha_i \cdot S_i \; para \; i = 1, \dots, n-1 \, . \tag{4.14}$$

En la ecuación(4.14) la i debe ser como máximo igual a $n-1$, ya que si la matriz de precios está formada por n periodos, entonces la estrategia $\alpha_{n+1} = 0$ porque esta estrategia es nula, es decir, esta estrategia no existe debido al vencimiento del contrato, en que como máximo el precio solo puede ser igual a S_n.

Por lo tanto, si se cumple la ecuación(4.14), se debe cumplir la siguiente igualdad

$$V_{i+1} = V_i \, , \tag{4.15}$$

esta igualdad se cumple cuando el mercado es completo, es decir, se cumple tanto la parte replicante como la parte autofinanciada.

Cabe destacar que un árbol binomial el mercado será completo porque solo existirá una medida neutral al riesgo Q, pero en un árbol trinomial siempre será un mercado incompleto porque habrán infinitas medidas neutrales al riesgo Q.

Para que se cumpla la parte replicante se debe cumplir esta igualdad

$$V(T) = X(T), \tag{4.16}$$

en el que el valor de la cartera en el momento T debe ser igual al proceso de siniestros.

Los tres siguientes puntos, tienen su interpretación financiera:

1) El mercado es completo bajo la filtración $\mathcal{F}^F$y la filtración $\mathcal{F}$, eso quiere decir que el proceso de siniestro X es alcanzable tanto para todas las $\mathcal{F}^F$-adaptadas como para todas las $\mathcal{F}$-adaptadas.
2) El mercado es completo bajo la filtración $\mathcal{F}^F$, pero es incompleto bajo la filtración $\mathcal{F}$. El proceso de siniestro X es alcanzable para todas las $\mathcal{F}^F$-adaptadas, pero solo es alcanzable para algunas $\mathcal{F}$-adaptadas.
3) El mercado es incompleto bajo la filtración $\mathcal{F}^F$y la filtración $\mathcal{F}$, eso quiere decir que el proceso de siniestro sólo es alcanzable para algunas $\mathcal{F}^F$-adaptadas y para algunas $\mathcal{F}$-adaptadas.

Respecto a lo anteriormente dicho, para cada tiempo t el σ-álgebra de $\mathcal{F}_t$ puede contener una mayor información que el σ-álgebra de ${\mathcal{F}_t}^F$, debido a una información no relacionada con los mercados financieros.

Por lo tanto, el espacio de probabilidad$(\Omega^F, \mathbb{F}^F, \mathcal{F}^F, P^F)$ asociado a los mercados financieros es un espacio de probabilidad restringido.

5 Tiempo discreto

Como ya se ha explicado previamente, este trabajo se va a enfocar en un tiempo discreto (Pansera, 2008), en el cuál se partirá el tiempo horizontal $[0, T]$ en $(\{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\})$.

Además, para la valoración de los contratos siempre se asumirá ausencia de arbitraje.

Cabe destacar que el árbol de precios está compuesto por varios nodos en cada periodo i, en el que el siniestro puede ocurrir en cualquier t_i . Por ejemplo, para un contrato de seguros que se pague mediante una opción si el asegurado fallece (seguro de vida-riesgo), si el contrato tiene una duración de dos años, entonces el siniestro se deberá pagar en el segundo periodo si el asegurado fallece, pero también se deberá pagar si el asegurado fallece en el periodo uno.

En tiempo discreto, se requiere que α_i sea medible en $\mathcal{F}_{i-1}$ para que se sepa con anterioridad la composición de la cartera en el momento t_i .

Si en un contrato, la estrategia α_i es positiva significa que el vendedor comprará títulos y si la estrategia es negativa significa que los venderán.

El número de títulos del activo k es de

$$\alpha^{(k)}(t) = \alpha_i^{(k)}, \qquad con \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.1}$$

entonces la estrategia $\alpha_i^{(k)}$se mantiene entre el periodo $[t_{i-1}, t_i]$.

Por lo tanto, en la ecuación(5.1), el número de títulos para una $i = 0$ no existe y por eso

$$\tilde{V}(0) = V(0) = 0, \tag{5.2}$$

el valor de la cartera en el momento cero siempre será igual a cero, en el que esta igualdad no guarda relación alguna con la primera condición de oportunidad de arbitraje, ya que como se dijo con anterioridad la valoración se hará en ausencia de arbitraje.

En definitiva, en función del índice i , el valor de la cartera será de

$$V_i = \begin{cases} 0 & si\ i = 0 \\ \alpha_i \cdot S_i & si\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{5.3}$$

y el valor de la cartera reequilibrada será igual a

$$V_{i+} = \alpha_{i+1} \cdot S_i \ \ para\ i = 0, \dots, n-1\ . \tag{5.4}$$

Bajo la condición de estrategia autofinanciada y replicante de la ecuación(4.14) y (4.16), entonces

$$V_{i+} - V_i = -H_i \; para \; i = 0, \dots, n \, , \tag{5.5}$$

como ya se ha definido previamente mediante α_{n+}, el V_{n+}cumple la misma igualdad, es decir, el valor reequilibrado en el momento n es igual a

$$V_{n+} = 0. \tag{5.6}$$

5.1 Proceso de coste

Como en todos los contratos de seguros de vida los mercados son incompletos porque incorporan la tasa de supervivencia (p_x), y algunos contratos financieros también son mercados incompletos[4]. Por lo tanto, será difícil definir una estrategia que sea autofinanciada y replicada.

Por lo tanto, la minimización de riesgo propone mantener la parte replicante, y relajar la parte autofinanciada. Por eso en cada nodo del tiempo t_i se añaden o se quitan fondos de la cartera.

En la ecuación(5.5), para cada nodo i la diferencia entre ambos lados representa la cuantía de los fondos añadidos o quitados de la cartera en el tiempo t_i.

Por lo tanto, el incremento del coste es de

$$\Delta C_i = V_{i+} - V_i + H_i \, , \tag{5.7}$$

en el que el proceso de coste $C = \{C_i\}$, es decir, el coste total que está definido por

$$C_i = \Delta C_0 + \cdots + \Delta C_i, \tag{5.8}$$

el proceso de coste C es $\mathcal{F}$-adaptado.

Entonces para una estrategia replicante y autofinanciada, el incremento del coste para cada tiempo t_i sería el mismo, es decir, sería igual a

$$\Delta C_0 = \Delta C_1 = \cdots = \Delta C_n = 0. \tag{5.9}$$

[4] En minimización de riesgo local, el mercado es incompleto porque no cumple la parte autofinanciada

5.2 Minimización de riesgo local

Como ya se ha comentado antes, la minimización de riesgo local tiene como objetivo minimizar la esperanza del incremento del coste al cuadrado

$$E[(\Delta C_i)^2|\mathcal{F}_{i-1}]. \tag{5.10}$$

Una estrategia α_i que cumpla una de las siguientes cuatro ecuaciones, sería minimización de riesgo local:

a) Para todo $i = n, \dots, 1,\ \alpha_i$ minimiza

$$E[(\Delta C_i + \cdots + \Delta C_n)^2|\, \mathcal{F}_{i-1}]. \tag{5.11}$$

b) Para todo $i = n, \dots, 1,\ \alpha_i$ minimiza

$$E[(\Delta C_i)^2|\mathcal{F}_{i-1}]. \tag{5.12}$$

c) Para todo $i = n, \dots, 1,\ \alpha_i$ resuelve

$$\begin{matrix} \alpha_i \cdot E[S_i \cdot S_i^{(0)} \big|\mathcal{F}_{i-1}] = E[(V_{i+} + H_i) \cdot S_i^{(0)}|\mathcal{F}_{i-1}] \\ \vdots \\ \alpha_i \cdot E[S_i \cdot S_i^{(d)} \big|\mathcal{F}_{i-1}] = E[(V_{i+} + H_i) \cdot S_i^{(d)}|\mathcal{F}_{i-1}] \end{matrix}. \tag{5.13}$$

d) Para todo $i = n, \dots, 1,$

$$E[\Delta C_i|\mathcal{F}_{i-1}] = 0, \tag{5.14}$$

$$E[S^M \cdot \Delta C_i|\mathcal{F}_{i-1}] = 0. \tag{5.15}$$

Todas las ecuaciones anteriormente comentadas son equivalentes, entonces en el trabajo se utilizará la tercera opción, es decir, la ecuación(5.13) para que α_i sea minimización de riesgo local.

Cabe decir que una estrategia α que cumpla una de las cuatro alternativas anteriores, ya sería una minimización de riesgo local que minimizaría el coste C_i.

Para calcular la esperanza del incremento del coste el cual se quiere minimizar, se utilizará la ecuación(5.14) para el cálculo, en el que el objetivo es que la estrategia de minimización de riesgo local haga que la esperanza para todo i sea aproximadamente cero.

En definitiva, como en minimización del riesgo local el mercado es incompleto debido a que no cumple la parte autofinanciada, entonces mediante la ecuación(5.7), el incremento del coste permitirá relajar la parte autofinanciada.

Un proceso de siniestro, es justo si existe una estrategia de minimización de riesgo local que cumpla la siguiente igualdad

$$H_0 = -V_{0+}, \tag{5.16}$$

siendo ambos descontados.

Mientras que la siguiente igualdad, es la anterior ecuación pero en términos actuales

$$\widetilde{H}_0 = -\widetilde{V}_{0+}. \tag{5.17}$$

Como se puede ver, las dos anteriores igualdades están calculadas desde el punto de vista del comprador, en el que el siniestro es positivo y el valor de la cartera en el momento cero es negativo, ya que estaría en función de lo que cobraría o pagaría el comprador.

En definitiva, se considera justo si el comprador paga en tiempo t_0, mediante una estrategia de minimización de riesgo local una cantidad $\widetilde{V}_{0+}$ que sea igual al siniestro $\widetilde{H}$.

Por eso se considera que la prima en tiempo t_0 es el precio justo para el proceso de siniestro X.

Si una estrategia α es autofinanciada **y** replicante para un proceso de siniestro X, entonces sería una minimización de riesgo local y el proceso X sería un precio justo.

En la ecuación(4.10), un proceso de siniestro es la suma finita de los siniestros europeos, entonces la estrategia de minimización de riesgo local de un proceso de siniestro es equivalente a las estrategias de la minimización de riesgo local de los siniestros que la componen.

A través de la ecuación(5.4.), el precio justo bajo una estrategia de minimización de riesgo local viene dado por la linealización del precio. Por esto(y por la representación del teorema de Riesz), existe una medida de probabilidad $\hat{Q} \in Q$ para el precio justo V_{0+}, y en tiempo t_{i+} también existe una medida para el valor V_{i+}, en el que mediante un siniestro H_j, estos valores sean iguales a

$$V_{0+} = E^{\hat{Q}}[H_j|\mathcal{F}_0], \tag{5.18}$$

$$V_{i+} = E^{\hat{Q}}[H_j|\mathcal{F}_i], \tag{5.19}$$

para una $i < j$.

Como ya se ha definido previamente, la medida de probabilidad $\hat{Q}$ es la medida mínima equivalente martingala también denominada como mínima medida.

Además, en el caso de un proceso de siniestro, en la ecuación(4.10), el precio lineal es equivalente a

$$V_{i+} = E^{\hat{Q}}\left[\sum_{i<j} H_j | \mathcal{F}_i\right]. \tag{5.20}$$

Aparte de la minimización de riesgo local, hay otras aproximaciones que se utilizan para elegir una medida particular $\hat{Q}$ del conjunto de medidas Q de los precios en ausencia de arbitraje.

6 Contratos financieros

Debido a que en esta parte se trabajarán con contratos financieros, los parámetros dentro del espacio de probabilidad asumirán las siguientes igualdades:

$$\Omega = \Omega^F, \mathbb{F} = \mathbb{F}^F, \mathcal{F} = \mathcal{F}^F, P = P^F \text{ y } Q = Q^F, \tag{6.1}$$

estas igualdades están elevadas a un parámetro F que significa quiere que los anteriores parámetros están asociados a activos negociados.

Además, los contratos con dos activos serán valorados a través de un activo sin riesgo y un activo con riesgo multiplicados por su respectiva estrategia. El activo sin riesgo sería representado por un bono y el activo con riesgo sería representado por una acción.

Además, se valorará los contratos comenzando desde el último período en el que estos contratos se valorarán hacia atrás, es decir, se valorarán desde el periodo j hasta el periodo 0.

A continuación, se mostrará cómo se valorarán estos contratos en función del número de activos d y el número de períodos n.

6.1 Un activo(d=0), múltiples períodos (n>1)

En este apartado, sólo hay un activo que sería el bono, y hay múltiples períodos $n > 1$, en el que se establecerá el vencimiento del contrato en el periodo j.

El precio descontado del bono para cada i es $S_i^{(0)} = 1$ sin importar que $i > j$. Para poder explicarlo en profundidad, se explicará como serían las siguientes ecuaciones en función de que valor tome i.

Para $i = n, \ldots, j + 1$, es decir, para una i mayor al vencimiento del contrato, entonces

$$\alpha_i^{(0)} = 0, \tag{6.2}$$

porque no existen estas estrategias, ya que el contrato acaba en j.

Para $i = j$, es decir, con una i igual al último periodo del contrato, entonces

$$V_{j-1+} = E[H_j | \mathcal{F}_{j-1}] \tag{6.3}$$

$$\alpha_j^{(0)} = E[H_j | \mathcal{F}_{j-1}], \tag{6.4}$$

porque el valor de la cartera reequilibrada para el momento $j - 1$, es igual a

$$V_{j-1+} = \alpha_j{}^{(0)} \cdot S_{j-1}{}^{(0)} \tag{6.5}$$

$$= \alpha_j{}^{(0)} \cdot 1 \tag{6.6}$$

$$= \alpha_j{}^{(0)} \tag{6.7}$$

Mediante la igualdad en la ecuación(6.4) y en la ecuación(6.7), la estrategia del activo sin riesgo en $j-1$ es igual a

$$\alpha_{j-1}{}^{(0)} = E\left[V_{(j-1)+} \middle| \mathcal{F}_{j-2}\right] \tag{6.8}$$

$$= E[\alpha_j{}^{(0)} | \mathcal{F}_{j-2}] \tag{6.9}$$

$$= E[E[H_j | \mathcal{F}_{j-1}] \, | \mathcal{F}_{j-2}] \tag{6.10}$$

$$= E[H_j | \mathcal{F}_{j-2}] \tag{6.11}$$

En definitiva, tanto $\alpha_j{}^{(0)}$ como $\alpha_{j-1}{}^{(0)}$ son iguales a la esperanza de H_j, con lo cual tanto V_{j-1+} como V_{j-1} , son iguales. Como ya se dijo previamente, si el valor de la cartera reequilibrada es igual al valor de la cartera sin reequilibrar entonces el mercado es completo. Mediante la igualdad entre la ecuación(6.4) y (6.7) se cumple la siguiente igualdad

$$\hat{Q} = P, \tag{6.12}$$

en el que solo existe una probabilidad martingala Q que es equivalente a la medida mínima $\hat{Q}$, y que esta es igual a la probabilidad P.

El valor de la cartera rebalanceada en el momento cero es

$$\tilde{V}_{0+} = \alpha_1{}^{(0)} \cdot \tilde{S}_0{}^{(0)}, \tag{6.13}$$

siendo el valor está en términos actuales.

Mientras que el coste en t_j es de

$$C_j = \Delta C_0 + .. + \Delta C_j \tag{6.14}$$

$$= \Delta C_1 + \cdots + \Delta C_j \tag{6.15}$$

$$= V_{1+} - V_1 + H_1 + \cdots + V_{j+} - V_j + H_j \tag{6.16}$$

$$= V_{1+} - V_1 + V_{2+} - V_2 + \cdots + V_{(j-1)+} - V_{j-1} - V_j + H_j \tag{6.17}$$

$$= \left({\alpha_2}^{(0)} - {\alpha_1}^{(0)}\right) \cdot {S_1}^{(0)} + \cdots + \left({\alpha_j}^{(0)} - {\alpha_{j-1}}^{(0)}\right) \cdot {S_{j-1}}^{(0)} - {\alpha_j}^{(0)} \cdot {S_j}^{(0)} + H_j \tag{6.18}$$

$$= -{\alpha_1}^{(0)} \cdot {S_1}^{(0)} - {\alpha_2}^{(0)} \cdot \left({S_2}^{(0)} - {S_1}^{(0)}\right) - \cdots - {\alpha_j}^{(0)} \cdot \left({S_j}^{(0)} - {S_{j-1}}^{(0)}\right) + H_j \tag{6.19}$$

No obstante, en la ecuación (6.15) se eliminó el ΔC_0 porque es igual a

$$\Delta C_0 = V_{0+} - V_0 + H_0 = 0, \tag{6.20}$$

a través de la ecuación (5.2), V_0 es igual a cero y en la ecuación (5.16) $-V_{0+} = H_0$.

6.2 Dos activos (d = 1), múltiples períodos(n > 1)

En este apartado, hay dos activos con un árbol de múltiples periodos, en el que hay un activo sin riesgo representado como un bono, y un activo con riesgo representado como una acción. Como ya se comentó en el anterior apartado, los contratos tendrán un vencimiento en j.

Además, mediante el modelo CRR, en un árbol trinomial el precio de la acción tiene una probabilidad de subir que está representado por u, de permanecer igual que está representado por m y de bajar, representado por d.

En definitiva, con la probabilidad de subir, de permanecer igual y de bajar se puede crear un árbol de precios compuesto por varios nodos en cada periodo i.

Para $i = n, \ldots, j+1$, este índice i representaría el momento posterior al vencimiento del contrato, con lo cuál las estrategias serían iguales a

$${\alpha_i}^{(0)} = {\alpha_i}^{(1)} = 0. \tag{6.21}$$

Mientras que para $i = j$, es decir, para una i igual al último período del contrato, entonces según la ecuación(5.13), en este caso la estrategia α_j que sea minimización de riesgo local, se calculará a partir de

$$\begin{pmatrix} {\alpha_j}^{(0)} \\ {\alpha_j}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot E\left[\begin{pmatrix} {S_j}^{(0)} \\ {S_j}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot {S_j}^{(0)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right] = E\left[\left(0 + H_j\right) \cdot {S_j}^{(0)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right].$$
$$\begin{pmatrix} {\alpha_j}^{(0)} \\ {\alpha_j}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot E\left[\begin{pmatrix} {S_j}^{(0)} \\ {S_j}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot {S_j}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right] = E\left[\left(0 + H_j\right) \cdot {S_j}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right]. \tag{6.22}$$

Cabe destacar que para $i = j$, el valor de la cartera reequilibrado V_{j+} es igual a cero.

Mediante la ecuación(6.22), la estrategia del activo sin riesgo ${\alpha_j}^{(0)}$ y del activo con riesgo ${\alpha_j}^{(1)}$, son equivalentes a

$${\alpha_j}^{(0)} = E\left[H_j \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right] - {\alpha_j}^{(1)} \cdot E\left[{S_j}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right], \tag{6.23}$$

$${\alpha_j}^{(1)} = \frac{Cov\left[H_j, {S_j}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right]}{Var\left[{S_j}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right]}. \tag{6.24}$$

Las estrategias en el momento j de la ecuación(6.23) y (6.24) se pueden utilizar tanto en un árbol binomial como en un árbol trinomial.

Además, con estas estrategias se puede calcular el valor de la cartera rebalanceado para el momento $j-1$, siendo ${S_{j-1}}^{(0)} = 1$ entonces el valor de la cartera sería

$$V_{(j-1)+} = {\alpha_j}^{(0)} + {\alpha_j}^{(1)} \cdot {S_{j-1}}^{(1)}. \tag{6.25}$$

Mientras que para $i = j-1, \dots, 1$, es decir, con una $i < j$, siendo el índice i como mínimo igual a uno, entonces la siguiente ecuación será equivalente a

$$\begin{pmatrix} {\alpha_i}^{(0)} \\ {\alpha_i}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot E\left[\begin{pmatrix} {S_i}^{(0)} \\ {S_i}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot {S_i}^{(0)} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right] = E\left[\left(V_{i+} + 0\right) \cdot {S_i}^{(0)} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right],$$
$$\begin{pmatrix} {\alpha_i}^{(0)} \\ {\alpha_i}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot E\left[\begin{pmatrix} {S_i}^{(0)} \\ {S_i}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot {S_i}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right] = E\left[\left(V_{i+} + 0\right) \cdot {S_i}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right]. \tag{6.26}$$

Cabe destacar que como los siniestros se pagan en el momento j, entonces para una $i < j$ los siniestros son iguales a cero. Por lo tanto, para calcular las estrategias se obtendrán a través de V_{i+}.

Mediante la ecuación(6.26), la estrategia del activo cero y del activo uno serán equivalentes a

$${\alpha_i}^{(0)} = E\left[V_{i+} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right] - {\alpha_i}^{(1)} \cdot E\left[{S_i}^{(1)} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right], \tag{6.27}$$

$$\alpha_i{}^{(1)} = \frac{Cov[V_{i+}, S_i{}^{(1)}|\mathcal{F}_{i-1}]}{Var[S_i{}^{(1)}|\mathcal{F}_{i-1}]}. \tag{6.28}$$

Al igual que en la ecuación(6.25), dentro del valor de la cartera reequilibrado, el precio descontado es igual a $S_{j-1}{}^{(0)} = 1$. Por lo tanto, $V_{(i-1)+}$ es igual a

$$V_{(i-1)+} = \alpha_i{}^{(0)} + \alpha_i{}^{(1)} \cdot S_{i-1}{}^{(1)}. \tag{6.29}$$

Para $\tilde{V}_{0+}$, entonces el valor de la cartera reequilibrado en términos actuales, será equivalente a

$$\tilde{V}_{0+} = \alpha_1{}^{(0)} \cdot \tilde{S}_0{}^{(0)} + \alpha_1{}^{(1)} \cdot \tilde{S}_0{}^{(1)} \tag{6.30}$$

$$= \alpha_1{}^{(0)} + \alpha_1{}^{(1)} \cdot \tilde{S}_0{}^{(1)}, \tag{6.31}$$

siendo el precio descontado del activo cero igual a $\tilde{S}_0{}^{(0)} = 1$,

En definitiva, valor de la cartera que paga el comprador en t_0 es justo si equivale al proceso de siniestro.

6.2.1 Árbol binomial

Cabe destacar que en un árbol binomial, hay dos probabilidades que son la de subir que está representada por u, y la de bajar que está representada por d.

El precio del bono en tiempo t_0 es $\tilde{S}_0{}^{(0)}$ y en tiempo t_i es igual a

$$\tilde{S}_i{}^{(0)} = \tilde{S}_0{}^{(0)} \cdot (1+\delta)^i, \tag{6.32}$$

en donde δ es el tipo de interés libre de riesgo.

El precio inicial del activo con riesgo, es decir, de la acción en tiempo t_0 es $\tilde{S}_0{}^{(1)}$.

El espacio de probabilidad es

$$\Omega = \{u, d\}^n \tag{6.33}$$

$$= \underbrace{\{u, d\} \cdot \ldots \cdot \{u, d\}}_{n\ veces}. \tag{6.34}$$

Para $i = 0, \ldots, n-1$, el precio descontado de la acción es

$$ {S_{i+1}}^{(1)} = \begin{cases} {S_{i+1}}^{(1)}(E_i u) \; con \; probabilidad \; P(E_i u | E_i \,) \\ {S_{i+1}}^{(1)}(E_i d) \; con \; probabilidad \; P(E_i d | E_i \,) \end{cases}, \tag{6.35} $$

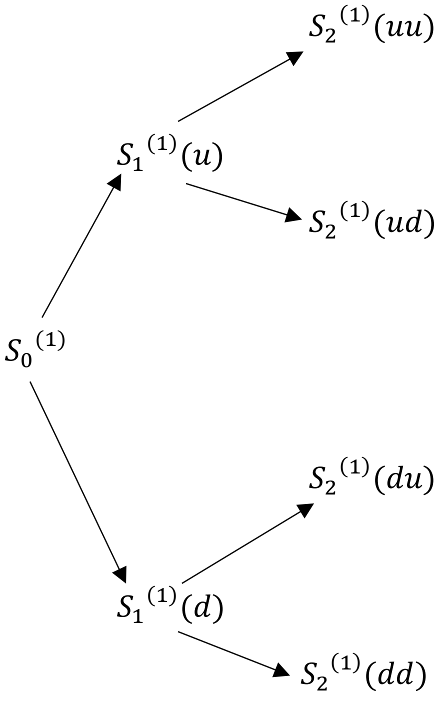
en donde $E_i \in \mathcal{F}_i$ es el estado en tiempo t_i.

En tiempo t_{i+1}, el estado E_i puede tomar dos posibilidades que son $E_i u$ y $E_i d$.

La Figura 8 y la Figura 9 representan un árbol de precios y de siniestros para $n = 2$.

Mediante la ecuación(6.33), el estado E_i representa el número de letras que contiene, es decir, para un evento $\mathcal{F}_2$ el estado es $E_2 = ud$, el cual contiene todas las combinaciones de u y d. Para $n = 2$, entonces las combinaciones serían $\Omega = \{u, d\}^2 = \{uu\}, \{ud\}, \{du\}, \{dd\}$.

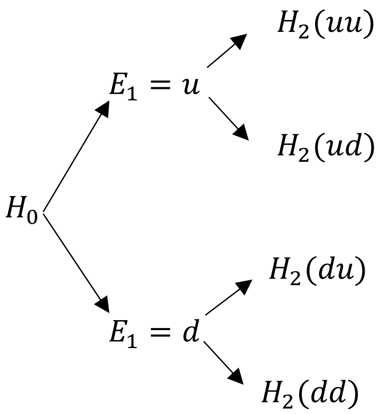
Figura 8: Proceso de acciones con n=2



Fuente: Elaboración propia

Para un siniestro Europeo que sea medible en $\mathcal{F}_j$, puede tomar diferentes valores en tiempo t_j. Para n = 2 , los valores que toma son los siguientes.

Figura 9: Proceso de siniestros con n=2



Fuente: Elaboración propia

Para una $i = n, \dots, j+1$, la estrategia es igual a

$$\alpha_i{}^{(0)} = \alpha_i{}^{(1)} = 0. \tag{6.36}$$

Mientras que para $i = j$, es decir, en el último periodo el estado será E_{j-1} que está en tiempo t_{j-1}, entonces las estrategias se calculan a través del precio descontado $S_j$que esta referenciado respecto al estado $E_{j-1}u$ y al estado $E_{j-1}d$. En definitiva, las estrategias son equivalentes a

$$\alpha_j{}^{(0)}(E_{j-1}) = \frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,u) \cdot H_j(E_{j-1}d) - S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,d) \cdot H_j(E_{j-1}\,u)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,u) - S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,d)}, \tag{6.37}$$

$$\alpha_j{}^{(1)}(E_{j-1}) = \frac{H_j(E_{j-1}\,u) - H_j(E_{j-1}d)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,u) - S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,d)} \tag{6.38}$$

La estrategia $\alpha_j{}^{(1)}(E_{j-1})$ representa el número de títulos en tiempo t_j del activo uno asumiendo que está en tiempo t_{j-1} , es decir, en tiempo t_{j-1} se decide el número de títulos para t_j.

A través de las ecuaciones (6.37) y (6.38), el valor de la cartera en tiempo t_{j-1} será

$$V_{(j-1)+}(E_{j-1}) = \alpha_j{}^{(0)}(E_{j-1}) \cdot S_{j-1}{}^{(0)}(E_{j-1}) + \alpha_j{}^{(1)}(E_{j-1}) \cdot S_{j-1}{}^{(1)}(E_{j-1}) \tag{6.39}$$

$$= H_j(E_{j-1}u) \cdot Q(E_{j-1}u \mid E_{j-1}) + H_j(E_{j-1}d) \cdot Q(E_{j-1}d \mid E_{j-1}). \tag{6.40}$$

Para calcular el valor reequilibrado de la cartera, también se puede calcular mediante la probabilidad neutral al riesgo Q, en el que para los estados $E_{j-1}u \, y \, E_{j-1}d$ estas probabilidades Q son

$$Q\left(E_{j-1}u \middle| E_{j-1}\right) = \frac{-\left(\frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,d)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,)}\right)+1}{\left(\frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,u)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,)}\right)-\left(\frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,d)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,)}\right)}, \tag{6.41}$$

$$Q\left(E_{j-1}d \middle| E_{j-1}\right) = \frac{\left(\frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,u)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,)}\right)-1}{\left(\frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,u)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,)}\right)-\left(\frac{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,d)}{S_j{}^{(1)}(E_{j-1}\,)}\right)}. \tag{6.42}$$

En definitiva, en la ecuación (6.40) utiliza las probabilidades neutrales al riesgo obtenidas en la ecuación(6.41) y (6.42), en el que representaría la siguiente ecuación

$$V_{(j-1)+} = E^Q\left[H_j \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right]. \tag{6.43}$$

Mientras que para $i = j-1, \dots, 1$, los estados que se utilizan en las estrategias para cada estado E_{i-1} con tiempo t_{i-1} son

$$\alpha_i{}^{(0)}(E_{i-1}) = \frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,u)\cdot V_{i+}(E_{i-1}d) - S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,d)\cdot V_{i+}(E_{i-1}\,u)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,u) - S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,d)}, \tag{6.44}$$

$$\alpha_i{}^{(1)}(E_{i-1}) = \frac{V_{i+}(E_{i-1}\,u) - V_{i+}(E_{i-1}d)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,u) - S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,d)}. \tag{6.45}$$

Como se verá a continuación, el valor de la cartera $V_{(i-1)+}(E_{i-1})$ es equivalente si se calcula mediante las estrategias o mediante las probabilidades neutrales al riesgo, es decir, el valor reequilibrado de la cartera en tiempo t_{i-1} es igual a

$$V_{(i-1)+}(E_{i-1}) = \alpha_i{}^{(0)}(E_{i-1})\cdot S_{i-1}{}^{(0)}(E_{i-1}) + \alpha_i{}^{(1)}(E_{i-1})\cdot S_{i-1}{}^{(1)}(E_{i-1}) \tag{6.46}$$

$$= V_{i+}(E_{i-1}u)\cdot Q(E_{i-1}u|E_{i-1}) + V_{i+}(E_{i-1}d)\cdot Q(E_{i-1}d|E_{i-1}). \tag{6.47}$$

Mientras que las probabilidades neutrales al riesgo usadas con anterioridad son iguales a

$$Q(E_{i-1}u|E_{i-1}) = \frac{-\left(\frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,d)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,)}\right)+1}{\left(\frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,u)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,)}\right)-\left(\frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,d)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,)}\right)}, \tag{6.48}$$

$$Q(E_{i-1}d|E_{i-1}) = \frac{\left(\frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,u)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,)}\right)-1}{\left(\frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,u)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,)}\right)-\left(\frac{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,d)}{S_i{}^{(1)}(E_{i-1}\,)}\right)}. \tag{6.49}$$

Estas medidas Q , son las probabilidades neutrales al riesgo obtenidas a partir del modelo Cox Ross-Rubinstein.

En definitiva, el valor de la cartera calculado mediante las probabilidades neutrales al riesgo, equivale a

$$V_{(i-1)+} = E^Q[V_{i+}|\mathcal{F}_{i-1}]. \tag{6.50}$$

Mientras que la prima que paga el comprador, es decir, el valor reequilibrado de la cartera en el momento cero se diferencia de la anterior ecuación porque se calcula a través del siniestro, es decir, equivale a

$$V_{0+} = E^Q\left[H_j|\mathcal{F}_0\right], \tag{6.51}$$

en el que se utilizan las probabilidades neutrales al riesgo calculadas en la ecuación(6.48) y (6.49).

Mientras que el mismo valor inicial en términos actuales se calcula mediante

$$\tilde{V}_{0+} = \frac{1}{(1+\delta)^j} \cdot E^Q\left[\tilde{H}_j|\mathcal{F}_0\right]. \tag{6.52}$$

En definitiva, en el árbol binomial la estrategia de minimización de riesgo local, es una estrategia autofinanciada y replicante que se obtiene a través del modelo Cox Ross-Rubinstein.

Además, la medida mínima $\hat{Q}$ es equivalente a la medida de probabilidad neutral al riesgo Q del modelo Cox Ross-Rubinstein.

6.2.2 Árbol trinomial

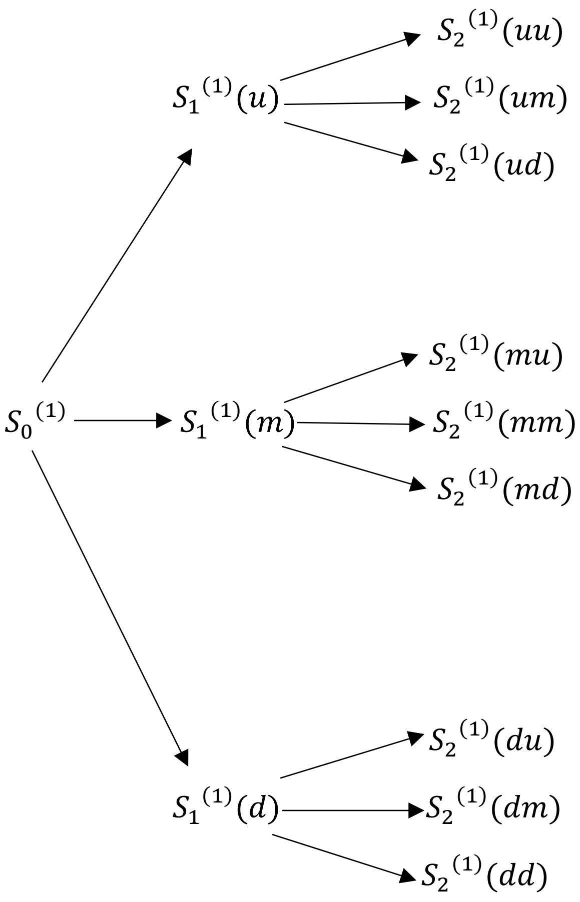
Al igual que el árbol binomial, el árbol trinomial se puede valorar mediante el activo sin riesgo que está representado por el bono, y el activo con riesgo que está representado por la acción.

En cada periodo i, el árbol de los precios de la acción puede tomar tres posibilidades, es decir, puede subir u, permanecer igual m o bajar d.

La Figura 10 representa un árbol de precios, en el que el estado es $E_2 = umd$ que recoge todas las combinaciones que serían:

$\Omega = \{u, m, d\}^2 = \{uu\}, \{um\}, \{ud\}, \{mu\}, \{mm\}, \{md\}, \{du\}, \{dm\}, \{dd\}$.

Figura 10: Proceso de acciones con n=2



Fuente: Elaboración propia

Para $i = \mathrm{n}, \ldots, \mathrm{j} + 1$, las estrategias del activo cero y del activo uno, son

$$\alpha_i{}^{(0)} = \alpha_i{}^{(1)} = 0. \tag{6.53}$$

Para $i = j$ tanto las estrategias como el valor reequilibrado de la cartera en tiempo t_{j-1} ${\alpha_j}^{(0)}, {\alpha_j}^{(1)}, V_{(j-1)+}$ se pueden obtener mediante las ecuaciones (6.23), (6.24) y (6.25).

El valor de la cartera calculado a través de las medidas mínimas $\hat{Q}$, equivale a

$$V_{(j-1)+} = E^{\hat{Q}}[H_j | \mathcal{F}_{j-1}], \tag{6.54}$$

siendo estas medidas mínimas $\hat{Q}$ en cada estado, iguales a

$$\hat{Q}(E_{j-1}u | E_{j-1}) = P(E_{j-1}u | E_{j-1}) + [1 + {S_j}^{(1)}(E_{j-1}u) - E[{S_j}^{(1)} | E_{j-1}]) \cdot \kappa_j], \tag{6.55}$$

$$\hat{Q}(E_{j-1}m | E_{j-1}) = P(E_{j-1}m | E_{j-1}) + [1 + {S_j}^{(1)}(E_{j-1}m) - E[{S_j}^{(1)} | E_{j-1}]) \cdot \kappa_j], \tag{6.56}$$

$$\hat{Q}(E_{j-1}d | E_{j-1}) = P(E_{j-1}d | E_{j-1}) + [1 + {S_j}^{(1)}(E_{j-1}d) - E[{S_j}^{(1)} | E_{j-1}]) \cdot \kappa_j], \tag{6.57}$$

en el que esas medidas mínimas $\hat{Q}$ se calculan a través de κ_j que equivale a

$$\kappa_j = \frac{{S_{j-1}}^{(1)}(E_{j-1}) - E[{S_j}^{(1)} | E_{j-1}]}{Var[{S_j}^{(1)} | E_{j-1}]}. \tag{6.58}$$

Mientras que para $i = j - 1, \dots, 1$ entonces ${\alpha_i}^{(0)}, {\alpha_i}^{(1)}, V_{(i-1)+}$ se pueden valorar mediante las ecuaciones (6.27), (6.28) y (6.29).

Mientras que el valor de la cartera calculado a través de las medidas neutrales al riesgo, es equivalente a

$$V_{(i-1)+} = E^{\hat{Q}}[V_{i+} | \mathcal{F}_{j-1}], \tag{6.59}$$

donde las medidas mínimas $\hat{Q}$ para cada estado $E_{i-1}u, E_{i-1}m$ y $E_{i-1}d$ son las siguientes

$$\hat{Q}(E_{i-1}u | E_{i-1}) = P(E_{i-1}u | E_{i-1}) + [1 + {S_i}^{(1)}(E_{i-1}u) - E[{S_i}^{(1)} | E_{i-1}]) \cdot \kappa_i], \tag{6.60}$$

$$\hat{Q}(E_{i-1}m | E_{i-1}) = P(E_{i-1}m | E_{i-1}) + [1 + {S_i}^{(1)}(E_{i-1}m) - E[{S_i}^{(1)} | E_{i-1}]) \cdot \kappa_i], \tag{6.61}$$

$$\hat{Q}(E_{i-1}d | E_{i-1}) = P(E_{i-1}d | E_{i-1}) + [1 + {S_i}^{(1)}(E_{i-1}d) - E[{S_i}^{(1)} | E_{i-1}]) \cdot \kappa_i], \tag{6.62}$$

siendo la κ_i igual a

$$\kappa_i = \frac{S_{i-1}{}^{(1)}(E_{i-1}) - E[S_i{}^{(1)}|E_{i-1}]}{Var[S_i{}^{(1)}|E_{i-1}]}. \tag{6.63}$$

Sin embargo, el valor V_{0+} calculado a través de las probabilidades neutrales al riesgo equivale a

$$V_{0+} = E^{\hat{Q}}[H_j|\mathcal{F}_0]. \tag{6.64}$$

7 Contratos de seguros de vida

7.1 Mortalidad y supervivencia

Asumiendo que hay m vidas con edades de $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$, en tiempo t_0.

Para $j = 1, \dots, m$, la variable aleatoria $D^{(j)}$ representa el tiempo hasta la muerte del sujeto j.

La filtración de mortalidad se define como

$$\mathcal{F}^{M'}(t) = \sigma([D^{(1)} \leq s], \dots, [D^{(m)} \leq s]; s \leq t), \tag{7.1}$$

en el que la filtración $\mathcal{F}^M$es la filtración $\mathcal{F}^{M'}$.

Cabe decir que el σ-álgebra de $\mathbb{F}^M$ está asociado a las vidas, es decir, dependiendo de con que seguro de vida se trabaje, puede estar asociada a la mortalidad(seguro de vida-riesgo) o asociada a la supervivencia(seguro de vida-ahorro).

El σ-álgebra $\mathbb{F}$, contiene información en cada tiempo t de quien está vivo y quien está muerto y de esos muertos indica el número de muertos en tiempo t.

El σ-álgebra de $\mathbb{F}^M$ es igual a $\mathcal{F}^M(t)$ y la probabilidad P^M es equivalente a la medida de probabilidad P hasta el σ-álgebra $\mathbb{F}^M$.

Como ya se ha mostrado en la notación, el espacio de probabilidad de la mortalidad es $(\Omega^M, \mathbb{F}^M, \mathcal{F}^M, P^M)$.

Aunque en la minimización de riesgo local, la esperanza se calculará bajo la medida de probabilidad P.

La mayoría de seguros de vida son combinaciones lineales de dos tipos de siniestros, el primer tipo se realiza el pago si el asegurado vive en el momento t_j y el segundo tipo se realiza el pago si el asegurado ha fallecido entre el momento $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

Por ejemplo, si el siniestro obtenido a través del contrato financiero tiene un valor de 1€, el siniestro que se paga es

$$\widetilde{H}_i = [t_i < D] \cdot 1. \tag{7.2}$$

Otro ejemplo, sería una renta vinculada a la renta (equity-linked annuity) con un pago mínimo de 1€ más una opción asociada a un activo financiero, entonces el siniestro sería el siguiente

$$\widetilde{H}_i = [t_i < D] \cdot \left(1 + \left(\tilde{S}_i - \widetilde{K}_i\right)^+\right), \tag{7.3}$$

siendo $\left(\tilde{S}_i - \widetilde{K}_i\right)^+$ el valor intrínseco de una opción europea call.

Cabe destacar que entre la filtración de mortalidad $\mathbb{F}^M$y la filtración $\mathbb{F}^F$ se asume independencia, es decir, se asume independencia en la mortalidad respecto a los activos financieros(acciones, bonos, etc.).

Si el siniestro ${H_j}^F$ es medible en ${\mathcal{F}_j}^F$ y tiene una estrategia α^F que es minimización de riesgo local, entonces el siniestro con probabilidad de supervivencia, es decir, el siniestro que la aseguradora paga al asegurado si este sobrevive en el momento j es equivalente a

$$H_j = \left[t_j < D\right] \cdot {H_j}^F, \tag{7.4}$$

este siniestro es medible en $\mathcal{F}_j$ con una estrategia de minimización de riesgo local de α.

La estrategia α con probabilidad de supervivencia es equivalente a

$$\alpha_i = \begin{cases} P[t_j < D | t_{i-1} < D] \cdot {\alpha_i}^F \; si \; t_{i-1} < D \\ 0 \qquad\qquad\qquad para\ los\ demás\ casos \end{cases}, \tag{7.5}$$

siendo la estrategia α_i igual a cero para un índice igual a $i = n, \dots, j+1$ y a $i = 0$.

En definitiva, la probabilidad de supervivencia es

$$P[x + t_{i-1} + t_j - t_{i-1} < D | x + t_{i-1} < D] = \tag{7.6}$$

$$P[x + t_j < D \, | x + t_{i-1}] = {}_{t_j - t_{i-1}}p_{x + t_{i-1}} \tag{7.7}$$

Para poder comprender la probabilidad de supervivencia, se expone un ejemplo en el que para un contrato de seguro de vida que vence en el tercer año $T = 3$ y el asegurado tiene 30 años, si se valora desde el inicio del contrato ($i = 0$), entonces la probabilidad de supervivencia sería ${}_{3-0}p_{30+0} = {}_3p_{30}$. Mientras que si se valora desde el primer período ($i = 1$), entonces la probabilidad sería ${}_2p_{31}$ y en el segundo periodo ($i = 2$), sería ${}_1p_{32}$.

Mientras que para un siniestro H_j que sea medible en $\mathcal{F}_j$ y pagadero si el asegurado fallece, es decir, que el siniestro incorpora una probabilidad de mortalidad, siendo igual a

$$H_j = \left[t_{j-1} < D < t_j\right] \cdot {H_j}^F \tag{7.8}$$

En definitiva, la estrategia de minimización de riesgo local con probabilidad de mortalidad es igual a

$$\alpha_i = \begin{cases} P[t_{j-1} < D \leq t_j | t_{i-1} < D] \cdot {\alpha_i}^F \; si \; t_{i-1} < D \\ 0 \qquad\qquad para\ los\ demás\ casos \end{cases}. \tag{7.9}$$

Como con la estrategia con probabilidad de supervivencia, la estrategia con mortalidad es igual a cero si $i = n, \dots, j + 1$ y si $i = 0$.

La probabilidad de mortalidad sería

$$P[x + t_{i-1} + t_{j-1} - t_{i-1} < D \leq x + t_{i-1} + t_{j-1} - t_{i-1} + t_j - t_{j-1} | x + t_{i-1} < D] \; = \tag{7.10}$$

$$P[x + t_{j-1} < D \leq x + t_j | x + t_{i-1} < D] = \; {}_{t_{j-1} - t_{i-1} | t_j - t_{j-1}} q_{x + t_{i-1}} \tag{7.11}$$

A continuación, se presentará un contrato $m = 1$, para la estrategia de minimización de riesgo local de los productos de seguros de vida.

7.2 Árbol binomial/trinomial

Para la valoración del contrato de un seguro de vida se va a centrar en un seguro vinculado a un capital diferido(equity-linked pure endowment contract) que es pagadero si el asegurado sobrevive. Por lo tanto, el siniestro será igual a

$$H_j = \left[t_j < D\right] \cdot {H_j}^F, \tag{7.12}$$

en el que ${H_j}^F$ es medible en ${\mathcal{F}_j}^F$.

Al igual que el contrato financiero, el contrato de seguro de vida está compuesto por dos activos y su vencimiento acaba en el periodo j, siendo el activo sin riesgo un bono y el activo con riesgo una acción.

Para un árbol trinomial, el contrato de seguro de vida se compone por un árbol de precios que en cada periodo tendrá tres probabilidades que son la probabilidad de subir u, de permanecer igual m, y de bajar d.

El valor inicial de la cartera, para la estrategia de minimización de riesgo local α^F, es

$$\tilde{V}_{0+}{}^{F} = \frac{1}{(1+\delta)^j} \cdot E^{Q^F}[\widetilde{H}_j{}^F | \mathcal{F}_0{}^F], \tag{7.13}$$

y el valor inicial de la cartera en términos descontados es equivalente a

$$V_{0+}{}^{F} = E^{Q^F}[H_j{}^F | \mathcal{F}_0{}^F]. \tag{7.14}$$

En definitiva, el valor de la cartera de un seguro vinculado al capital es igual al valor inicial de la ecuación(7.13) multiplicado por la probabilidad de supervivencia que sería equivalente a

$$\tilde{V}_{0+} = P[t_j < D \,\big|\, t_0 < D] \cdot \tilde{V}_{0+}{}^{F} \tag{7.15}$$

$$= \frac{P[t_j < D | t_0 < D]}{(1+\delta)^j} \cdot E^{Q^F}[\widetilde{H}_j{}^F | \mathcal{F}_0{}^F] \,. \tag{7.16}$$

Al igual que en la ecuación(7.16), el valor descontado de la cartera sería la esperanza de las medidas neutrales al riesgo del siniestro $H_j{}^F$ multiplicadas por la probabilidad de supervivencia. En definitiva, la ecuación sería igual a

$$V_{0+} = P[t_j < D | t_0 < D] \cdot E^{Q^F}[H_j{}^F | \mathcal{F}_0{}^F]. \tag{7.17}$$

8 Ejercicios para un árbol trinomial

Ejercicio 1(Contrato financiero)

Los datos son los siguientes:

$S_0 = 10, \sigma = 0.2, T = 0.5, N = 2, \delta = 0.03, K = 9$

$\Delta t = \frac{T}{N} = 0.25$

Como se ha incluido el término de incremento del tiempo (Δt), entonces en el modelo CRR (Hull, 2018) las probabilidades se calcularán de la siguiente manera.

$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{3 \cdot \Delta t}} = 1.18911, \qquad m = 1, \qquad d = \frac{1}{u} = 0.8409651$

Las medidas de probabilidad son

$P(u) = 0.2, P(m) = 0.5, P(d) = 0.3$

Para unos pagos que se satisfacen mediante una opción call europea cuyo valor intrínseco es igual a $V(S(T), T) = Max(S(T) - 9; 0)$.

En definitiva, los siniestros se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1: Siniestros en el período 2

Pagos en el período 2	
$H_2(uu)$	5.139825
$H_2(um)$	2.891099
$H_2(ud)$	1
$H_2(mu)$	2.891099
$H_2(mm)$	1
$H_2(md)$	0
$H_2(du)$	1
$H_2(dm)$	0
$H_2(dd)$	0

Fuente: Elaboración propia

Las estrategias en el periodo 2 se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 2: Estrategias en el período 2

	Activo 0	Activo 1
$\alpha_2(E_1 u)$	-8.483363	1
$\alpha_2(E_1 m)$	-6.632816	0.8196021
$\alpha_2(E_1 d)$	-2.348234	0.3232143

Fuente: Elaboración propia

Cabe destacar que la estrategia consiste en vender un número de títulos del activo cero, ya que este es negativo y comprar un número de títulos del activo 1.

A través de la tabla de las anteriores estrategias, se obtiene el valor de la cartera reequilibrada para el periodo 1.

Tabla 3: Valor de la cartera reequilibrada

Valor de la cartera reequilibrada	
$V_{(1)+}(E_1u)$	3.061394
$V_{(1)+}(E_1m)$	1.324485
$V_{(1)+}(E_1d)$	0.290717

Fuente: Elaboración propia

Mientras que las estrategias del periodo 1 son las siguientes.

Tabla 4: Estrategias en el periodo 1

	Activo 0	Activo 1
$\alpha_1(E_0)$	-6.440441	0.8116502

Fuente: Elaboración propia

A través de las estrategias del periodo 1, se obtiene el valor de la cartera reequilibrada o prima (V_{0+}), en el que si se mirara desde el punto de vista del comprador entonces esta sería negativa.

En definitiva, desde el punto de vista del comprador los siguientes valores son:

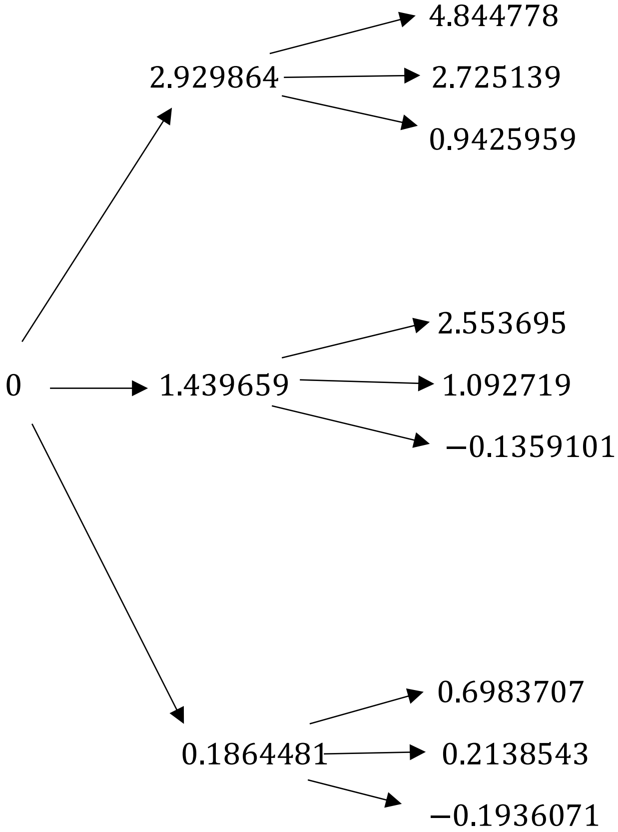
$V_{0+} = -1.676062, V_0 = 0, H_0 = 1.676062.$

A través de los siguientes valores, el incremento del coste en cero(siempre debe dar cero) es igual a:

$\Delta C_0 = -1.676062 - 0 + 1.676062 = 0$

En definitiva, el coste total de añadir y quitar fondos es igual a $C_2 = 0.5018343$.

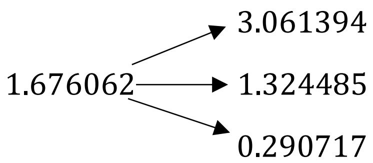
Figura 11: Árbol del valor las carteras sin reequilibrar



Fuente: Elaboración propia

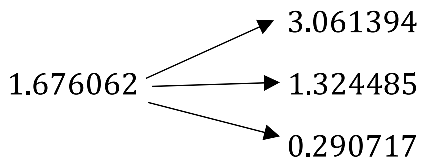
El árbol del valor de las carteras reequilibradas debe ser igual ya sea mediante estrategias o martingalas.

Figura 12: Mediante estrategias



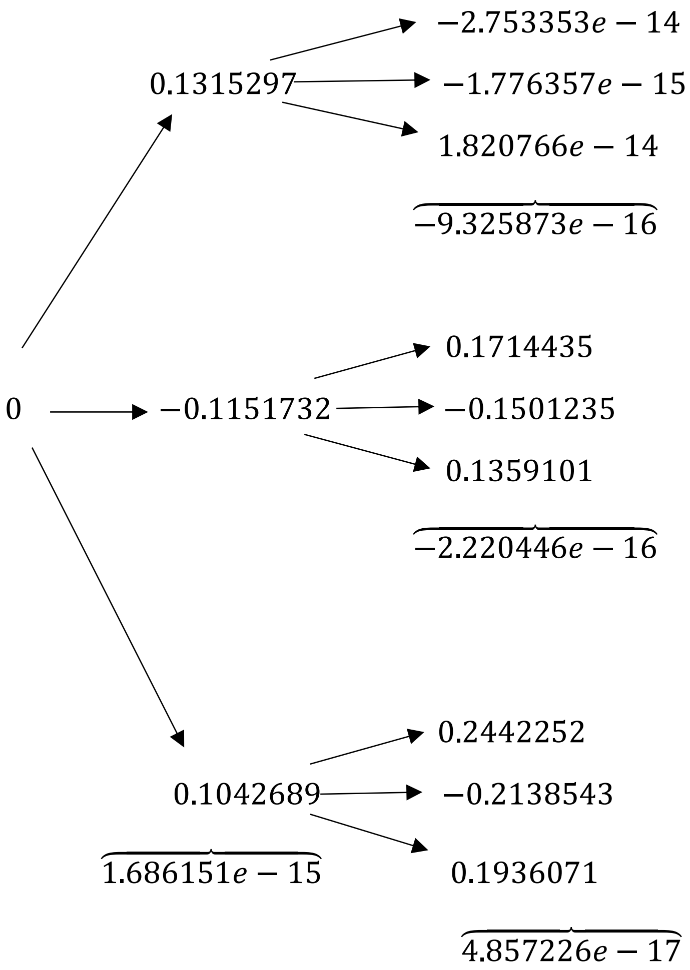
Fuente: Elaboración propia

Figura 13: Mediante martingalas



Fuente: Elaboración propia

Figura 14: Árbol del coste y la esperanza



Fuente: Elaboración propia

Ejercicio 2 (Contrato de seguro de vida)

En este contrato el seguro de vida es un capital diferido pagadero(en el período 2) si el asegurado vive y por eso sólo se va a utilizar en el árbol los estados de si el asegurado vive, omitiendo los estados de si este muere, ya que sería igual a cero.

Cabe destacar que este contrato de seguro de vida parte de un contrato financiero(aparece en el código de R), en el que como ya se dijo previamente se supone independencia, el contrato de seguro de vida sería equivalente al contrato financiero multiplicado por la probabilidad de supervivencia.

El contrato de seguro de vida es un contrato que se obtiene a partir de la tabla de nueva producción (LPERM/F-200P) para la generación de hombres nacidos en 1960. Por lo tanto, los datos que se utilizan en este contrato son los siguientes

$l_{40} = 952535.328$, $l_{41} = 951129.844$, $l_{42} = 949643.195$

${}_2p_{40} = 0.9969638$, ${}_1p_{41} = 0.998437$

$S_0 = 10, N = 2, \delta = 0.03, K = 8$

Cabe destacar que las probabilidades calculadas a partir del modelo CRR tendrán un incremento del tiempo constante (Pansera, 2008), con lo cuál son las siguientes.
$u = 1.25, m = 1, d = 0.8$

Las medidas de probabilidad son

$P(u) = 0.2, P(m) = 0.7, P(d) = 0.1$

Los pagos se satisfacen mediante una opción call europea cuyo valor intrínseco es igual a $V(S(T), T) = Max(S(T) - 8; 0)$.

En definitiva, los siniestros son los siguientes

Tabla 5: Siniestros en el periodo 2

Pagos en el período 2	
$H_2(uu)$	6.053024
$H_2(um)$	3.24492
$H_2(ud)$	0.998437
$H_2(mu)$	3.24492
$H_2(mm)$	0.998437
$H_2(md)$	0
$H_2(du)$	0.998437
$H_2(dm)$	0
$H_2(dd)$	0

Fuente: Elaboración propia

Las estrategias en el periodo 2 aparecen en la siguiente tabla.

Tabla 6: Estrategias en el periodo 2

	Activo 0	Activo 1
$\alpha_2(E_1 u)$	-7.528981	0.998437
$\alpha_2(E_1 m)$	-6.310348	0.8675877
$\alpha_2(E_1 d)$	-2.545857	0.3911256

Fuente: Elaboración propia

El valor de la cartera reequilibrada en el periodo 1 se calculan mediante las anteriores estrategias que incorporan la probabilidad $({}_1p_{41})$.

Tabla 7: Valor de la cartera reequilibrada

Valor de la cartera reequilibrada	
$V_{(1)+}(E_1 u)$	3.376277
$V_{(1)+}(E_1 m)$	1.270516
$V_{(1)+}(E_1 d)$	0.1882245

Fuente: Elaboración propia

Las siguientes estrategias del periodo 1 incorporan la probabilidad (${}_2p_{40}$).

Tabla 8: Estrategias en el periodo 1

	Activo 0	Activo 1
$\alpha_1(E_0)$	-6.16851	0.861068

Fuente: Elaboración propia

Desde el punto de vista del comprador, los siguientes datos son:

$V_{0+} = -1.581102$, $V_0 = 0$, $H_0 = 1.581102$

A partir de los anteriores datos, el incremento del coste en el periodo cero es de

$\Delta C_0 = -1.581102 \; - 0 + 1.581102 \; = 0$

En definitiva, para la empresa el coste total de añadir y quitar fondos es igual a

$C_2 = 1.35792$.

Figura 15: Árbol del valor las carteras sin reequilibrar

$$
\begin{tikzcd}
 & & 5.705556 \\
 & 3.236359 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 3.058648 \\
 & & 0.9411226 \\
 & & 2.889729 \\
0 \arrow[uuur] \arrow[r] \arrow[dddr] & 1.355386 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 1.049714 \\
 & & -0.4222986 \\
 & & 0.7722032 \\
 & -0.1493936 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 0.1085911 \\
 & & -0.4222986
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Elaboración propia

El árbol del valor de las carteras reequilibradas debe ser igual, tanto a través de las estrategias o de las martingalas.

Figura 16: Mediante estrategias

$$
\begin{tikzcd}
 & 3.376277 \\
1.581102 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 1.270516 \\
 & 0.1882245
\end{tikzcd}
$$

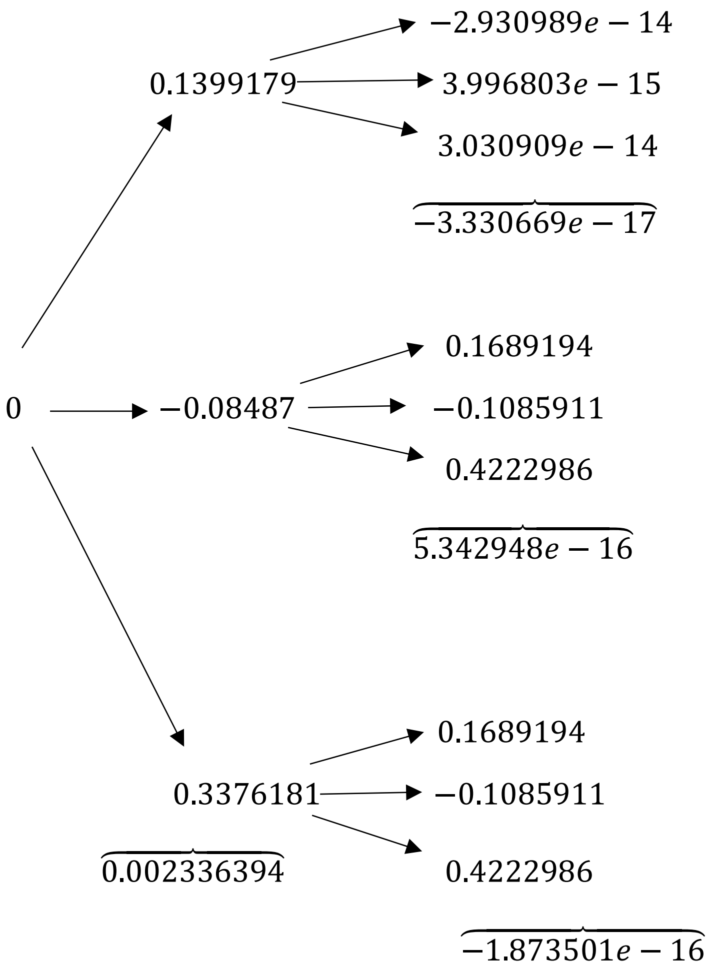
Fuente: Elaboración propia

Figura 17: Mediante martingalas

$$
\begin{tikzcd}
 & 3.376277 \\
1.581102 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 1.270516 \\
 & 0.1882245
\end{tikzcd}
$$

Fuente: Elaboración propia

Figura 18: Árbol del coste y la esperanza



Fuente: Elaboración propia

9 Conclusiones

En esta tesis se ha utilizado la minimización de riesgo local para valorar los contratos en mercados incompletos.

Como ya se dijo previamente, en la minimización de riesgo local el mercado es incompleto porque no se cumple la parte autofinanciada pero si cumple la parte replicante.

Para poder entender la minimización de riesgo local, se ha explicado que significa oportunidad de arbitraje, en el que para valorar los contratos siempre se ha establecido ausencia de arbitraje.

Además, se ha explicado que significa la medida neutral al riesgo, en el que en un mercado completo se cumple esta medida, ya que hay una sola medida Q, mientras que en el mercado incompleto no se cumple esta medida porque hay infinitas medidas Q.

También se ha explicado lo que significa una filtración, que no es más que la representación de la realidad en los mercados financieros, ya que se conoce la información pasada y la actual de los precios.

Además, se ha añadido una parte respecto estadística actuarial de vida, en el que se explica el significado de las probabilidades de supervivencia p_x y las probabilidades de fallecimiento q_x. Aunque dependiendo de con que seguros de vida se trabaje, ya sean seguros de vida-riesgo, seguros de vida-ahorro o seguros de vida mixtos, se van a utilizar unas probabilidades o ambas.

Para valorar los contratos se hace a través de un árbol que está compuesto por varios nodos en cada periodo i, en el que se empieza a valorar des del vencimiento T que está representado por el período j, ya que allí es cuando se producen los pagos, en que, estos se satisfacen mediante unas opciones que se generan en el mismo periodo, y una vez valorados los contratos en $i = j$, estos se valoran en cada período dando un paso hacia atrás, es decir, se valoran desde $i = j - 1, \dots, 0$.

En definitiva, para valorar estos contratos se explica que son: los precios, los siniestros, los procesos de siniestros, el valor de la cartera sin reequilibrar y el valor de la cartera reequilibrada. Aunque estos pueden estar en términos actuales o descontados.

Como en la minimización de riesgo local se ha explicado que se parten las t_i del horizonte temporal $[0, T]$ en $(\{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\})$, entonces en cada nodo del periodo $i = j$, el valor de la cartera es equivalente a cada siniestro H_i, ya que como bien se ha dicho en la minimización de riesgo local siempre se cumple la parte replicante.

Los contratos se valoran siempre con una $(n > 1)$, es decir, que hay varios periodos y con un solo activo $(d = 0)$, sólo con un activo sin riesgo, o con dos activos $(d = 1)$, en el que el primer activo sería el activo sin riesgo que está representado por un bono, y el segundo activo es un activo con riesgo que está representada por una acción.

Cuando hay dos activos $(d = 1)$ y hay varios periodos $(n > 1)$, entonces los contratos se pueden valorar a través de un árbol binomial o trinomial.

Como ya se ha explicado, en el árbol binomial el precio tiene dos probabilidades, la de subir que está representada por u, y la de bajar que está representada por d. Mientras que en el árbol trinomial incluye una tercera probabilidad que es la de seguir igual que está representada por m.

Estas tres probabilidades u, m, d, están introducidas mediante el modelo de Cox et al. (1979).

Además, para un contrato financiero el árbol binomial es un mercado completo, ya que se cumple tanto la parte replicante como la parte autofinanciada. También se puede saber que el mercado es completo porque sólo hay una medida martingala Q que es igual a la medida mínima $\hat{Q}$, y que la medida mínima equivale a la probabilidad P.

Sin embargo, para un contrato financiero el árbol trinomial siempre es incompleto porque no se cumple la parte autofinanciada. Por lo tanto, mediante el incremento del coste se relaja la parte autofinanciada para conseguir que este incremento se aproximadamente equivalente a cero. Además, como en el árbol trinomial hay infinitas medidas martingalas Q entonces no se produce la igualdad con la probabilidad P.

Como en la filtración $\mathbb{F}^M$, ya sea con mortalidad, supervivencia o ambas, se asume independencia con respecto a la filtración $\mathbb{F}^F$, entonces el contrato de seguro de vida es equivalente al contrato financiero, en el que sólo se incorpora la probabilidad de supervivencia o de mortalidad.

Como en la tesis ya se dijo que se trabajaría solo con seguros de vida-ahorro, en el que el producto será un seguro de vida vinculado a un capital diferido(equity-linked pure endowment contract), entonces sólo se incorpora la probabilidad de supervivencia.

Cabe destacar que en todos los artículos que hablan sobre la minimización de riesgo local aplicado en el seguro de vida trabajan con un seguro de vida vinculado a un capital diferido(equity-linked pure endowment contract), en el que incluso mediante otras alternativas como la cobertura de la media-varianza sólo trabajan con este producto. El gran inconveniente de trabajar sólo con un seguro de vida de capital diferido es que en muchos países es ilegal(incluyendo España) por lo cuál se tendría que agregar el término de mortalidad para que fuera legal, es decir, tendría que ser un seguro de vida-mixto en el que incorporara el capital diferido y un seguro temporal.

Además, en los contratos de seguros de vida el mercado siempre es incompleto, ya sea un árbol binomial o trinomial, porque se incorpora una probabilidad de mortalidad o supervivencia.

10 Bibliografía

Augustyniak, M., Godin, F., & Simard, C. (2019). A profitable modification to global quadratic hedging [Article]. *Journal of Economic Dynamics & Control*, *104*, 111–131. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2019.05.008

Ayuso, M. (2007). *Estadística actuarial vida* (M. Ayuso, Ed.) [Book]. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

Baule, R., & Wilkens, M. (2004). Lean Trees—A General Approach for Improving Performance of Lattice Models for Option Pricing [Article]. *Review of Derivatives Research*, *7*(1), 53–72. https://doi.org/10.1023/B:REDR.0000017028.57712.19

Biagini, F., & Cretarola, A. (2011). Local Risk-Minimization for Defaultable Claims with Recovery Process [Article]. *Applied Mathematics & Optimization*, *65*(3), 293–314. https://doi.org/10.1007/s00245-011-9155-8

Biagini, F., Mancin, J., & Brandis, T. M. (2019). Robust mean–variance hedging via G-expectation [Article]. *Stochastic Processes and Their Applications*, *129*(4), 1287–1325. https://doi.org/10.1016/j.spa.2018.04.007

BOYLE, P. P., & VORST, T. (1992). Option Replication in Discrete Time with Transaction Costs [Article]. *The Journal of Finance (New York)*, *47*(1), 271–293. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1992.tb03986.x

Ceci, C., Colaneri, K., & Cretarola, A. (2015). Hedging of unit-linked life insurance contracts with unobservable mortality hazard rate via local risk-minimization [Article]. *Insurance, Mathematics & Economics*, *60*, 47–60. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2014.10.013

Choulli, T., Daveloose, C., & Vanmaele, M. (2021). Mortality/Longevity Risk-Minimization with or without Securitization [Article]. *Mathematics (Basel)*, *9*(14), 1629. https://doi.org/10.3390/math9141629

Easton, S. A. (1996). A note on modified lattice approaches to option pricing [Article]. *The Journal of Futures Markets*, *16*(5), 585–594. https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9934(199608)16:5<585::AID-FUT5>3.0.CO;2-C

Föllmer, Hans. (2002). *Stochastic finance : an introduction in discrete time* (A. Schied, Ed.) [Book]. Walter de Gruyter.

Haug, E. G. (2007). *The complete guide to option pricing formulas* (Vol. 2). New York: McGraw-Hill.

Henriksen, L. F. B., & Møller, T. (2015b). Local risk-minimization with longevity bonds [Article]. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, *31*(2), 241–263. https://doi.org/10.1002/asmb.2028

Hull, J. (2018). Options, futures, and other derivatives (Ninth edition) [Book]. Pearson.

Jaimungal, S., & Young, V. R. (2005). Pricing equity-linked pure endowments with risky assets that follow Lévy processes [Article]. *Insurance, Mathematics & Economics*, *36*(3), 329–346. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.02.010

Josephy, N., Kimball, L., & Steblovskaya, V. (2011). Optimal Hedging and Pricing of Equity-Linked Life Insurance Contracts in a Discrete-Time Incomplete Market [Article]. *Journal of Probability and Statistics*, *2011*, 1–23. https://doi.org/10.1155/2011/850727

Lamberton, D., Pham, H., & Schweizer, M. (1998). Local Risk-Minimization Under Transaction Costs [Article]. *Mathematics of Operations Research*, *23*(3), 585–612. https://doi.org/10.1287/moor.23.3.585

Møller, T. (2014). Risk Minimization. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*.

Pansera, J. (2008). *Local risk minimization, consistent interest-rate modeling, and applications to life insurance*. The University of Iowa. https://iro.uiowa.edu/discovery/delivery/01IOWA_INST:ResearchRepository/12730680080002771?l#13730828880002771

Pansera, J. (2012). Discrete-time local risk minimization of payment processes and applications to equity-linked life-insurance contracts [Article]. *Insurance, Mathematics & Economics*, *50*(1), 1–11. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.10.001

Qian, L., Yang, H., & Wang, R. (2011). Locally risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts under a regime switching Lévy model [Article]. *Frontiers of Mathematics in China*, *6*(6), 1185–1202. https://doi.org/10.1007/s11464-011-0100-6

Su, X., Xing, Y., Wang, W., & Wang, W. (2021). LOCALLY RISK-MINIMIZING HEDGING FOR EUROPEAN CONTINGENT CLAIMS WRITTEN ON NON-TRADABLE ASSETS WITH COMMON JUMP RISK [Article]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1–25. https://doi.org/10.1017/S0269964820000686

TSUZUKI, Y. (2013). ON OPTIMAL SUPER-HEDGING AND SUB-HEDGING STRATEGIES [Article]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *16*(6), 1350038. https://doi.org/10.1142/S0219024913500386

Ziveyi, J., Blackburn, C., & Sherris, M. (2013). Pricing European options on deferred annuities [Article]. *Insurance, Mathematics & Economics*, *52*(2), 300–311. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.01.004

- Páginas web

BOE.

https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2000-18295

11 Anexo A

Árbol binomial

Contrato financiero

$u = 1.1, d = \frac{1}{u} = 0.9090909$

$S_0 = 10, N = 2, \delta = 0.03, K = 9$

Los pagos se satisfacen mediante una opción call europea, entonces los siniestros son los siguientes

$H_2(uu) = 3.1$, $H_2(ud) = 1$

$H_2(du) = 1$, $H_2(dd) = 0$

Las estrategias en el periodo 2 son

$\alpha_2{}^{(0)}(E_1u) = -8.483363, \alpha_2{}^{(1)}(E_1u) = 1$

$\alpha_2{}^{(0)}(E_1d) = -4.488552, \alpha_2{}^{(1)}(E_1d) = 0.5761905$

El valor de la cartera reequilibrada es

$V_{(1)+}(E_1u) = 2.196248, V_{(1)+}(E_1d) = 0.5969774$

Estrategias en el periodo 1

$\alpha_1{}^{(0)}(E_0) = -7.018599$, $\alpha_1{}^{(1)}(E_0) = 0.8628448$

Desde el punto de vista del comprador, los siguientes dados son

$V_{0+} = -1.609849$, $V_0 = 0$, $H_0 = 1.609849$

Figura 19: Árbol del valor las carteras sin reequilibrar

$$\begin{tikzcd}
 & & 2.922047 \\
 & 2.196248 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 0.9425959 \\
0 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & 0.9425959 \\
 & 0.5969774 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & 0
\end{tikzcd}$$

Fuente: Elaboración propia

El árbol del valor de las carteras reequilibradas calculado mediante las siguientes dos formas debe ser equivalentes.

Como el valor reequilibrado del periodo cero y uno es igual al valor de la cartera de la Figura 19, con lo cuál el mercado es completo.

Figura 20: Mediante estrategias

$$\begin{tikzcd}
 & 2.196248 \\
1.609849 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 0.5969774
\end{tikzcd}$$

Fuente: Elaboración propia

Figura 21: Mediante martingalas

$$\begin{tikzcd}
 & 2.196248 \\
1.609849 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 0.5969774
\end{tikzcd}$$

Fuente: Elaboración propia

Contrato seguro de vida

A través de los datos del anterior contrato financiero, se establece el siguiente contrato de seguro de vida.

$$u = 1.1, d = \frac{1}{u} = 0.9090909$$

$$S_0 = 10, N = 2, \delta = 0.03, K = 9$$

Las medidas de probabilidad son iguales a las medidas mínimas

$P(u) = 0.6333333, P(d) = 0.3666667$

Para la tabla de nueva producción de la generación de 1960, los siguientes datos son

$Edad = 40$

$l_{40} = 952535.328$, $l_{41} = 951129.844$, $l_{42} = 949643.195$

${}_2p_{40} = 0.9969638$, ${}_1p_{41} = 0.998437$

Los pagos se satisfacen mediante una opción call europea, entonces los siniestros son los siguientes

$H_2(uu) = 3.095155$, $H_2(ud) = 0.998437$

$H_2(du) = 0.998437$, $H_2(dd) = 0$

Las estrategias en el periodo 2 son

$\alpha_2{}^{(0)}(E_1u) = -8.470103, \alpha_2{}^{(1)}(E_1u) = 0.998437$

$\alpha_2{}^{(0)}(E_1d) = -4.481536, \alpha_2{}^{(1)}(E_1d) = 0.5752899$

El valor de la cartera reequilibrada es

$V_{(1)+}(E_1u) = 2.192816, V_{(1)+}(E_1d) = 0.5960443$

Estrategias en el periodo 1

$\alpha_1{}^{(0)}(E_0) = -6.997289$, $\alpha_1{}^{(1)}(E_0) = 0.860225$

Desde el punto de vista del comprador, los siguientes dados son

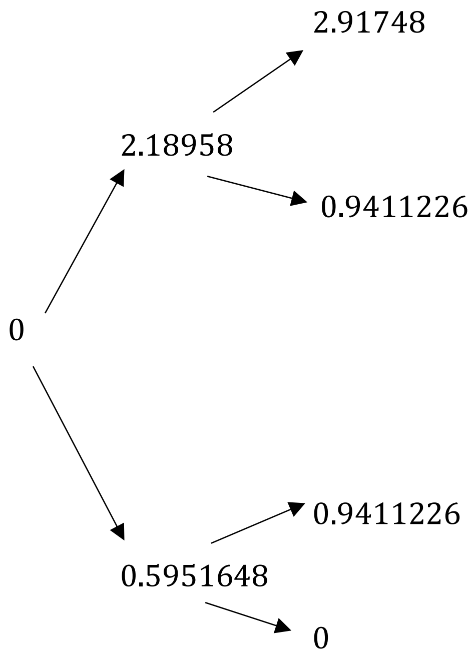
$V_{0+} = -1.604961$, $V_0 = 0$, $H_0 = 1.604961$

$\Delta C_0 = -1.604961 \ - 0 + 1.604961 \ = 0$

El coste total es

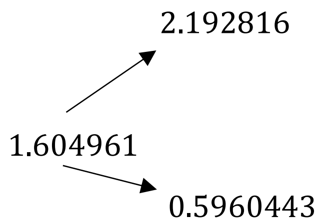
$C_2 = 0.004115016$

Figura 22: Árbol del valor las carteras sin reequilibrar



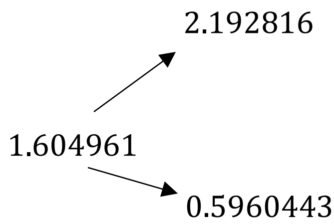
El árbol del valor de las carteras reequilibradas obtenido mediante estrategias y martingalas debe ser igual.

Figura 23: Mediante estrategias



Fuente: Elaboración propia

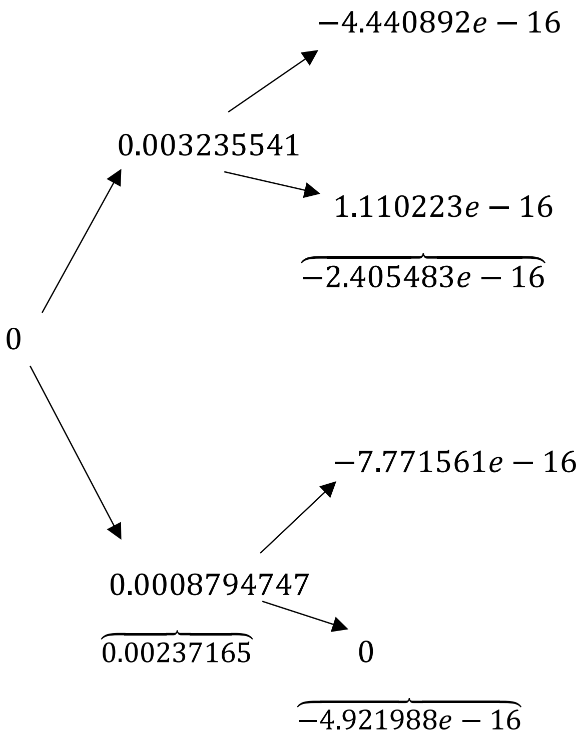
Figura 24: Mediante martingalas



Fuente: Elaboración propia

En este caso, como que se incorpora la probabilidad de supervivencia el mercado es incompleto porque tanto el valor de las carteras reequilibradas en el periodo 0 y 1 son diferentes al valor de las carteras en la Figura 22.

Figura 25: Árbol del coste y la esperanza



Fuente: Elaboración propia

Modelo trinomial (contrato financiero)

Los datos son

$S_0 = 1, N = 1, \delta = 0.1$

Las medidas de probabilidad son

$P(u) = 0.2, P(m) = 0.5, P(d) = 0.3$

Los pagos son

$H_1(u) = 1,\ H_1(m) = 0,\ H_1(d) = 0$

Estrategias en el periodo 1

$\alpha_1{}^{(0)}(E_0) = -0.2311635\ , \alpha_1{}^{(1)}(E_0) = 0.488473$

Desde el punto de vista del comprador, los siguientes dados son

$V_{0+} = -0.2573095\ , V_0 = 0,\ H_0 = 0.2573095$

$\Delta C_0 = -0.2573095 - 0 + 0.2573095 = 0$

El coste total es

$C_2 = 0.2259758$

Figura 26: Árbol del valor las carteras sin reequilibrar

$$
\begin{array}{ccl}
 & \nearrow & 0.6569691 \\
0 & \rightarrow & 0.2129028 \\
 & \searrow & -0.1867569
\end{array}
$$

Fuente: Elaboración propia

Tanto el valor de la cartera reequilibrada V_{0+} calculada mediante estrategias y mediante medidas mínimas $\hat{Q}$ es igual a 0.2573095.

Figura 27: Árbol del coste y la esperanza

$$
\begin{array}{ccl}
 & \nearrow & 0.2521218 \\
0 & \rightarrow & -0.2129028 \\
 & \searrow & 0.1867569
\end{array}
$$

$$\overbrace{-2.081668e-17}$$

Fuente: Elaboración propia

12 Anexo B(Código en R)

12.1 Primer Ejercicio

```
#Contrato financiero

#Datos iniciales

NoSteps=2

sig<-0.2#volatilidad

r<-0.03#tipo de interés

T<-0.5

N<-2
```

```
dt<-T/N
u<-exp(sig*sqrt(3*dt));u
d<-1/u;d
m<-1
pu<-0.2;pu
pm<-0.5;pm
pd<-0.3;pd
pu+pm+pd
desc<-(1+r)
K<-9

#Árbol de precios
#n=0
S0<-10
#n=1 Estado 1(u,m,d)
S1u<-S0*u;S1u
S1m<-S0*m;S1m
S1d<-S0*d;S1d
#n=2 Estado 2(u,m,d)
#(u) (uu,um,ud)
S2uu<-S1u*u;S2uu
S2um<-S1u*m;S2um
S2ud<-S1u*d;S2ud
#m (mu,mm,md)
S2mu<-S1m*u;S2mu
S2mm<-S1m*m;S2mm
S2md<-S1m*d;S2md
#d (du,dm,dd)
S2du<-S1d*u;S2du
S2dm<-S1d*m;S2dm
```

```
S2dd<-S1d*d;S2dd

precios<-
matrix(c(S0,0,0,0,0,S1u,S1m,S1d,0,0,S2uu,S2um,S2ud,S2md,S2dd),5,3);precios

#Siniestros en el periodo 2
#Siniestros H
#u
H2uu<-max((precios[1,3]-K),0);H2uu

H2um<-max((precios[2,3]-K),0);H2um

H2ud<-max((precios[3,3]-K),0);H2ud

#m
H2mu<-max((precios[2,3]-K),0);H2mu

H2mm<-max((precios[3,3]-K),0);H2mm

H2md<-max((precios[4,3]-K),0);H2md

#d
H2du<-max((precios[3,3]-K),0);H2du

H2dm<-max((precios[4,3]-K),0);H2dm

H2dd<-max((precios[5,3]-K),0);H2dd

#Estado uu mm dd
uu<-c(precios[1,3],precios[2,3],precios[3,3]);uu
mm<-c(precios[2,3],precios[3,3],precios[4,3]);mm
```

```
dd<-c(precios[3,3],precios[4,3],precios[5,3]);dd

#Estado u
#N=2 estado 2 (u,m,d)

#Esperanza Esp de S
#u
Esp2uS<-(uu[1]/(desc^2))*pu+(uu[2]/(desc^2))*pm+(uu[3]/(desc^2))*pd;Esp2uS
#m
Esp2mS<-(mm[1]/(desc^2))*pu+(mm[2]/(desc^2))*pm+(mm[3]/(desc^2))*pd;Esp2mS
#d
Esp2dS<-(dd[1]/(desc^2))*pu+(dd[2]/(desc^2))*pm+(dd[3]/(desc^2))*pd;Esp2dS

#Esperanza al cuadrado Espc de S
#u
Espc2uS<-
(uu[1]/(desc^2))^2*pu+(uu[2]/(desc^2))^2*pm+(uu[3]/(desc^2))^2*pd;Espc2uS
#m
Espc2mS<-(mm[1]/(desc^2))^2*pu+(mm[2]/(desc^2))^2*pm+(mm[3]/(desc^2))^2*pd
;Espc2mS
#d
Espc2dS<-
(dd[1]/(desc^2))^2*pu+(dd[2]/(desc^2))^2*pm+(dd[3]/(desc^2))^2*pd;Espc2dS

#Varianza de S
#u La varianza se eleva al cuadrado
Var2uS<-Espc2uS-(Esp2uS)^2;Var2uS
#m
Var2mS<-Espc2mS-(Esp2mS)^2;Var2mS
#d
Var2dS<-Espc2dS-(Esp2dS)^2;Var2dS
```

```
#Esperanza Esp de H

#u

Esp2uH<-(H2uu/(desc^2))*pu+(H2um/(desc^2))*pm+(H2ud/(desc^2))*pd;Esp2uH

#m

Esp2mH<-(H2mu/(desc^2))*pu+(H2mm/(desc^2))*pm+(H2md/(desc^2))*pd;Esp2mH

#d

Esp2dH<-(H2du/(desc^2))*pu+(H2dm/(desc^2))*pm+(H2dd/(desc^2))*pd;Esp2dH


#Esperanza Esp de SH( esperanza de S y de H)

#u

Esp2uSH<-
(uu[1]/(desc^2))*(H2uu/(desc^2))*pu+(uu[2]/(desc^2))*(H2um/(desc^2))*pm+(uu[3]/(
desc^2))*(H2ud/(desc^2))*pd;Esp2uSH

#m

Esp2mSH<-
(mm[1]/(desc^2))*(H2mu/(desc^2))*pu+(mm[2]/(desc^2))*(H2mm/(desc^2))*pm+(m
m[3]/(desc^2))*(H2md/(desc^2))*pd;Esp2mSH

#d

Esp2dSH<-
(dd[1]/(desc^2))*(H2du/(desc^2))*pu+(dd[2]/(desc^2))*(H2dm/(desc^2))*pm+(dd[3]/(
desc^2))*(H2dd/(desc^2))*pd;Esp2dSH



#Covarianza de SH(covarianza de S y de H)

#u

Cov2uSH<-Esp2uSH-Esp2uS*Esp2uH;Cov2uSH

#m

Cov2mSH<-Esp2mSH-Esp2mS*Esp2mH;Cov2mSH

#d

Cov2dSH<-Esp2dSH-Esp2dS*Esp2dH;Cov2dSH


#estrategias para n=2(u,m,d)

#u
```

```
alphau1<-(Cov2uSH/Var2uS);alphau1#1
alphau0<-Esp2uH-alphau1*Esp2uS;alphau0#-8.483363



V2uu<-alphau0*1+alphau1*(uu[1]/desc^2);V2uu#4.844778
V2um<-alphau0*1+alphau1*(uu[2]/desc^2);V2um#2.725139
V2ud<-alphau0*1+alphau1*(uu[3]/desc^2);V2ud#0.9425959

c2uu<-0-V2uu+(H2uu/desc^2);c2uu#-2.753353e-14
c2um<-0-V2um+(H2um/desc^2);c2um#-1.776357e-15
c2ud<-0-V2ud+(H2ud/desc^2);c2ud#1.820766e-14

Ec2u<-c2uu*pu+c2um*pm+c2ud*pd;Ec2u#-9.325873e-16

#m
alpham1<-(Cov2mSH/Var2mS);alpham1#0.8196021
alpham0<-Esp2mH-alpham1*Esp2mS;alpham0#-6.632816

V2mu<-alpham0*1+alpham1*(mm[1]/desc^2);V2mu#2.553695
V2mm<-alpham0*1+alpham1*(mm[2]/desc^2);V2mm#1.092719
V2md<-alpham0*1+alpham1*(mm[3]/desc^2);V2md#-0.1359101

c2mu<-0-V2mu+(H2mu/desc^2);c2mu#0.1714435
c2mm<-0-V2mm+(H2mm/desc^2);c2mm#-0.1501235
c2md<-0-V2md+(H2md/desc^2);c2md#0.1359101

Ec2m<-c2mu*pu+c2mm*pm+c2md*pd;Ec2m#-2.220446e-16

#d
alphad1<-(Cov2dSH/Var2dS);alphad1#0.3232143
```

```
alphad0<-Esp2dH-alphad1*Esp2dS;alphad0#-2.348234

V2du<-alphad0*1+alphad1*(dd[1]/desc^2);V2du#0.6983707
V2dm<-alphad0*1+alphad1*(dd[2]/desc^2);V2dm#0.2138543
V2dd<-alphad0*1+alphad1*(dd[3]/desc^2);V2dd#-0.1936071

c2du<-0-V2du+(H2du/desc^2);c2du#0.2442252
c2dm<-0-V2dm+(H2dm/desc^2);c2dm#-0.2138543
c2dd<-0-V2dd+(H2dd/desc^2);c2dd#0.1936071

Ec2d<-c2du*pu+c2dm*pm+c2dd*pd;Ec2d#4.857226e-17

#Valor de la cartera rebalanceado n=1 (V1+) (u,m,d)
#Teniendo en cuenta que del activo 0(bono) descontado en (n=1) S1u=S1m=S1d=1
#u activo 0 de u es 1
V1ureb<-alphau0*1+alphau1*(precios[1,2]/desc^(1));V1ureb#3.061394
#m activo 0 de m es 1
V1mreb<-alpham0*1+alpham1*(precios[2,2]/desc^(1));V1mreb#1.324485
#d activo 0 de d es 1
V1dreb<-alphad0*1+alphad1*(precios[3,2]/desc^(1));V1dreb#0.290717

#A continuación calcularemos la probab martingala Q en (n=2)
#El valor k es
k2u<-(((precios[1,2]/desc^(1))-Esp2uS)/Var2uS);k2u
#Para u
#La probabilidad Q es
#Para uu
Q2uu<-pu*(1+((uu[1]/(desc^2))-Esp2uS)*k2u);Q2uu
#Para um
Q2um<-pm*(1+((uu[2]/(desc^2))-Esp2uS)*k2u);Q2um
```

```
#Para ud

Q2ud<-pd*(1+((uu[3]/(desc^2))-Esp2uS)*k2u);Q2ud

#Valor de la cartera

VQ1ureb<-
((H2uu/(desc^2))*Q2uu+(H2um/(desc^2))*Q2um+(H2ud/(desc^2))*Q2ud);VQ1ureb#3
.061394


#Para m

#El valor k es

k2m<-(((precios[2,2]/desc^(1))-Esp2mS)/Var2mS);k2m

#La probabilidad Q es

#Para mu

Q2mu<-pu*(1+((mm[1]/(desc^2))-Esp2mS)*k2m);Q2mu

#Para mm

Q2mm<-pm*(1+((mm[2]/(desc^2))-Esp2mS)*k2m);Q2mm

#Para ud

Q2md<-pd*(1+((mm[3]/(desc^2))-Esp2mS)*k2m);Q2md

#Valor de la cartera

VQ1mreb<-
((H2mu/(desc^2))*Q2mu+(H2mm/(desc^2))*Q2mm+(H2md/(desc^2))*Q2md);VQ1mr
eb#1.324485


#Para d

#El valor k es

k2d<-((precios[3,2]/desc^(1))-Esp2dS)/Var2dS;k2d

#La probabilidad Q es

#Para du

Q2du<-pu*(1+((dd[1]/(desc^2))-Esp2dS)*k2d);Q2du

#Para mm

Q2dm<-pm*(1+((dd[2]/(desc^2))-Esp2dS)*k2d);Q2dm

#Para ud

Q2dd<-pd*(1+((dd[3]/(desc^2))-Esp2dS)*k2d);Q2dd
```

```
#Valor de la cartera

VQ1dreb<-
((H2du/(desc^2))*Q2du+(H2dm/(desc^2))*Q2dm+(H2dd/(desc^2))*Q2dd);VQ1dreb#0
.290717


#Estado u m d

u<-precios[1,2];u

m<-precios[2,2];m

d<-precios[3,2];d


#Para n=1

#Esperanza de S (n=1) (u,m,d)

Esp1S<-(u/desc^1)*pu+(m/desc^1)*pm+(d/desc^1)*pd;Esp1S

#Esperanza al cuadrado de S  en (n=1) (u,m,d)

Espc1S<-((u)/desc^1)^2*pu+((m/desc^1))^2*pm+((d/desc^1))^2*pd;Espc1S

#Varianza de S en (n=1)(u,m,d)

Var1S<-Espc1S-(Esp1S)^2;Var1S

#Esperanza de V1+ en (n=1)

EspV1reb<-V1ureb*pu+V1mreb*pm+V1dreb*pd;EspV1reb

#Esperanza de (S y V1+) en (n=1)

Esp1SV1reb<-
(u/desc^1)*V1ureb*pu+(m/desc^1)*V1mreb*pm+(d/desc^1)*V1dreb*pd;Esp1SV1reb

#Covarianza de (S y V1+) en (n=1)

Cov1SV1reb<-Esp1SV1reb-Esp1S*EspV1reb;Cov1SV1reb

#Estrataegias en (n=1)

alpha1<-(Cov1SV1reb/Var1S);alpha1#0.8116502

alpha0<-EspV1reb-alpha1*Esp1S;alpha0#-6.440441


#Valor de la cartera en 1

V1u<-alpha0*1+alpha1*(u/desc^1);V1u#2.929864 siendo V1ureb 3.061394

V1m<-alpha0*1+alpha1*(m/desc^1);V1m#1.439659 siendo V1mreb 1.324485
```

```
V1d<-alpha0*1+alpha1*(d/desc^1);V1d#0.1864481 siendo V1dreb 0.290717

c1u<-V1ureb-V1u+0;c1u#0.1315297
c1m<-V1mreb-V1m+0;c1m#-0.1151732
c1d<-V1dreb-V1d+0;c1d#0.1042689

Ec1<-c1u*pu+c1m*pm+c1d*pd;Ec1#1.686151e-15
#Coste total
C2<-c1u+c1m+c1d+c2uu+c2um+c2ud+c2mu+c2mm+c2md+c2du+c2dm+c2dd;C2#0.5018335

#Valor de la cartera en (n=0) rebalanceado V0+
#el valor descontado del activo cero en (n=0) es igual a 1
V0reb<-alpha0*1+alpha1*(S0);V0reb#1.676062

#La prob martingala de Q (n=1)
#El valor k es
k1<-((S0)-Esp1S)/Var1S;k1
#La probabilidad Q es
#Para u
Q1u<-pu*(1+((u/desc^1)-Esp1S)*k1);Q1u
#Para m
Q1m<-pm*(1+((m/desc^1)-Esp1S)*k1);Q1m
#Para d
Q1d<-pd*(1+((d/desc^1)-Esp1S)*k1);Q1d
#Valor de la cartera
VQ0reb<-(V1ureb*Q1u+V1mreb*Q1m+V1dreb*Q1d);VQ0reb#1.676062
#Valor de la cartera en (n=0)
V0<-0
```

```
#En definitiva, se van agrupar los anteriores resultados mediante árboles

#árbol del valor de la cartera sin reequilibrar

arbolv<-matrix(c(V0,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,V1u,NA,NA,V1m,NA,NA,V1d,NA,V2uu,V2um,V2ud,V2mu,V2mm,V2md,V2du,V2dm,V2dd),9,3);arbolv

#árbol del valor de la cartera reequilibrada

#mediante estrategias

arbolvreb<-matrix(c(V0reb,NA,NA,V1ureb,V1mreb,V1dreb),3,2);arbolvreb

#mediante martingalas

arbolvQreb<-matrix(c(VQ0reb,NA,NA,VQ1ureb,VQ1mreb,VQ1dreb),3,2);arbolvQreb#coinciden

#árbol del coste

arbolcoste<-matrix(c(0,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,c1u,NA,NA,c1m,NA,NA,c1d,NA,c2uu,c2um,c2ud,c2mu,c2mm,c2md,c2du,c2dm,c2dd),9,3);arbolcoste

#árbol de la esperanza del coste

arbolespcoste<-matrix(c(0,NA,NA,NA,Ec1,NA,Ec2u,Ec2m,Ec2d),3,3);arbolespcoste
```

12.2 Segundo ejercicio

#Primera parte(Contrato financiero)

```
#Datos

NoSteps<-2

r<-0.03#tipo de interés

N<-2
```

```
u<-1.25;u
d<-1/u;d
m<-1

pu<-0.2;pu
pm<-0.7;pm
pd<-0.1;pd

pu+pm+pd#
desc<-(1+r)
K<-8

#Árbol de precios
#n=0
S0<-9
#n=1 Estado 1(u,m,d)
S1u<-S0*u;S1u
S1m<-S0*m;S1m
S1d<-S0*d;S1d
#n=2 Estado 2(u,m,d)
#(u) (uu,um,ud)
S2uu<-S1u*u;S2uu
S2um<-S1u*m;S2um
S2ud<-S1u*d;S2ud
#m (mu,mm,md)
S2mu<-S1m*u;S2mu
S2mm<-S1m*m;S2mm
S2md<-S1m*d;S2md
#d (du,dm,dd)
S2du<-S1d*u;S2du
```

```
S2dm<-S1d*m;S2dm
S2dd<-S1d*d;S2dd

precios<-
matrix(c(S0,0,0,0,0,S1u,S1m,S1d,0,0,S2uu,S2um,S2ud,S2md,S2dd),5,3);precios

#Siniestros en el periodo 2
#Siniestros H
#u
H2uu<-max((precios[1,3]-K),0);H2uu

H2um<-max((precios[2,3]-K),0);H2um

H2ud<-max((precios[3,3]-K),0);H2ud

#m
H2mu<-max((precios[2,3]-K),0);H2mu

H2mm<-max((precios[3,3]-K),0);H2mm

H2md<-max((precios[4,3]-K),0);H2md

#d
H2du<-max((precios[3,3]-K),0);H2du

H2dm<-max((precios[4,3]-K),0);H2dm

H2dd<-max((precios[5,3]-K),0);H2dd

#Estado uu mm dd
uu<-c(precios[1,3],precios[2,3],precios[3,3]);uu
```

```
mm<-c(precios[2,3],precios[3,3],precios[4,3]);mm

dd<-c(precios[3,3],precios[4,3],precios[5,3]);dd


#Estado u


#N=2 estado 2 (u,m,d)


#Esperanza Esp de S

#u

Esp2uS<-(uu[1]/(desc^2))*pu+(uu[2]/(desc^2))*pm+(uu[3]/(desc^2))*pd;Esp2uS

#m

Esp2mS<-(mm[1]/(desc^2))*pu+(mm[2]/(desc^2))*pm+(mm[3]/(desc^2))*pd;Esp2mS

#d

Esp2dS<-(dd[1]/(desc^2))*pu+(dd[2]/(desc^2))*pm+(dd[3]/(desc^2))*pd;Esp2dS


#Esperanza al cuadrado Espc de S

#u

Espc2uS<-
(uu[1]/(desc^2))^2*pu+(uu[2]/(desc^2))^2*pm+(uu[3]/(desc^2))^2*pd;Espc2uS

#m

Espc2mS<-(mm[1]/(desc^2))^2*pu+(mm[2]/(desc^2))^2*pm+(mm[3]/(desc^2))^2*pd
;Espc2mS

#d

Espc2dS<-
(dd[1]/(desc^2))^2*pu+(dd[2]/(desc^2))^2*pm+(dd[3]/(desc^2))^2*pd;Espc2dS


#Varianza de S

#u La varianza se eleva al cuadrado

Var2uS<-Espc2uS-(Esp2uS)^2;Var2uS

#m

Var2mS<-Espc2mS-(Esp2mS)^2;Var2mS

#d
```

```
Var2dS<-Espc2dS-(Esp2dS)^2;Var2dS

#Esperanza Esp de H
#u
Esp2uH<-(H2uu/(desc^2))*pu+(H2um/(desc^2))*pm+(H2ud/(desc^2))*pd;Esp2uH
#m
Esp2mH<-(H2mu/(desc^2))*pu+(H2mm/(desc^2))*pm+(H2md/(desc^2))*pd;Esp2mH
#d
Esp2dH<-(H2du/(desc^2))*pu+(H2dm/(desc^2))*pm+(H2dd/(desc^2))*pd;Esp2dH

#Esperanza Esp de SH( esperanza de S y de H)
#u
Esp2uSH<-
(uu[1]/(desc^2))*(H2uu/(desc^2))*pu+(uu[2]/(desc^2))*(H2um/(desc^2))*pm+(uu[3]/(
desc^2))*(H2ud/(desc^2))*pd;Esp2uSH
#m
Esp2mSH<-
(mm[1]/(desc^2))*(H2mu/(desc^2))*pu+(mm[2]/(desc^2))*(H2mm/(desc^2))*pm+(m
m[3]/(desc^2))*(H2md/(desc^2))*pd;Esp2mSH
#d
Esp2dSH<-
(dd[1]/(desc^2))*(H2du/(desc^2))*pu+(dd[2]/(desc^2))*(H2dm/(desc^2))*pm+(dd[3]/(
desc^2))*(H2dd/(desc^2))*pd;Esp2dSH


#Covarianza de SH(covarianza de S y de H)
#u
Cov2uSH<-Esp2uSH-Esp2uS*Esp2uH;Cov2uSH
#m
Cov2mSH<-Esp2mSH-Esp2mS*Esp2mH;Cov2mSH
#d
Cov2dSH<-Esp2dSH-Esp2dS*Esp2dH;Cov2dSH
```

```
#estrategias para n=2(u,m,d)
#u
alphau1<-(Cov2uSH/Var2uS);alphau1#1
alphau0<-Esp2uH-alphau1*Esp2uS;alphau0#-7.540767



V2uu<-alphau0*1+alphau1*(uu[1]/desc^2);V2uu#5.714488
V2um<-alphau0*1+alphau1*(uu[2]/desc^2);V2um#3.063437
V2ud<-alphau0*1+alphau1*(uu[3]/desc^2);V2ud#0.9425959

c2uu<-0-V2uu+(H2uu/desc^2);c2uu#-2.753353e-14
c2um<-0-V2um+(H2um/desc^2);c2um#4.440892e-15
c2ud<-0-V2ud+(H2ud/desc^2);c2ud#3.064216e-14

Ec2u<-c2uu*pu+c2um*pm+c2ud*pd;Ec2u#6.661338e-16

#m
alpham1<-(Cov2mSH/Var2mS);alpham1#0.8689459
alpham0<-Esp2mH-alpham1*Esp2mS;alpham0#-6.320226

V2mu<-alpham0*1+alpham1*(mm[1]/desc^2);V2mu#2.894253
V2mm<-alpham0*1+alpham1*(mm[2]/desc^2);V2mm#1.051357
V2md<-alpham0*1+alpham1*(mm[3]/desc^2);V2md#-0.4229597

c2mu<-0-V2mu+(H2mu/desc^2);c2mu#0.1691839
c2mm<-0-V2mm+(H2mm/desc^2);c2mm#-0.1087611
c2md<-0-V2md+(H2md/desc^2);c2md#0.4229597

Ec2m<-c2mu*pu+c2mm*pm+c2md*pd;Ec2m#5.065393e-16
```

```
#d
alphad1<-(Cov2dSH/Var2dS);alphad1#0.3917379
alphad0<-Esp2dH-alphad1*Esp2dS;alphad0#-2.549843

V2du<-alphad0*1+alphad1*(dd[1]/desc^2);V2du#0.773412
V2dm<-alphad0*1+alphad1*(dd[2]/desc^2);V2dm#0.1087611
V2dd<-alphad0*1+alphad1*(dd[3]/desc^2);V2dd#-0.4229597

c2du<-0-V2du+(H2du/desc^2);c2du#0.1691839
c2dm<-0-V2dm+(H2dm/desc^2);c2dm#-0.1087611
c2dd<-0-V2dd+(H2dd/desc^2);c2dd#0.4229597

Ec2d<-c2du*pu+c2dm*pm+c2dd*pd;Ec2d#-2.567391e-16

#Valor de la cartera rebalanceado n=1 (V1+) (u,m,d)
#Teniendo en cuenta que del activo 0(bono) descontado en (n=1) S1u=S1m=S1d=1
#u activo 0 de u es 1
V1ureb<-alphau0*1+alphau1*(precios[1,2]/desc^(1));V1ureb#3.381563
#m activo 0 de m es 1
V1mreb<-alpham0*1+alpham1*(precios[2,2]/desc^(1));V1mreb#1.272504
#d activo 0 de d es 1
V1dreb<-alphad0*1+alphad1*(precios[3,2]/desc^(1));V1dreb#0.1885192

#A continuación calcularemos la probab martingala Q en (n=2)
#El valor k es
k2u<-(((precios[1,2]/desc^(1))-Esp2uS)/Var2uS);k2u
#Para u
#La probabilidad Q es
#Para uu
Q2uu<-pu*(1+((uu[1]/(desc^2))-Esp2uS)*k2u);Q2uu
```

```
#Para um
Q2um<-pm*(1+((uu[2]/(desc^2))-Esp2uS)*k2u);Q2um
#Para ud
Q2ud<-pd*(1+((uu[3]/(desc^2))-Esp2uS)*k2u);Q2ud
#Valor de la cartera
VQ1ureb<-
((H2uu/(desc^2))*Q2uu+(H2um/(desc^2))*Q2um+(H2ud/(desc^2))*Q2ud);VQ1ureb#3
.381563


#Para m
#El valor k es
k2m<-(((precios[2,2]/desc^(1))-Esp2mS)/Var2mS);k2m
#La probabilidad Q es
#Para mu
Q2mu<-pu*(1+((mm[1]/(desc^2))-Esp2mS)*k2m);Q2mu
#Para mm
Q2mm<-pm*(1+((mm[2]/(desc^2))-Esp2mS)*k2m);Q2mm
#Para ud
Q2md<-pd*(1+((mm[3]/(desc^2))-Esp2mS)*k2m);Q2md
#Valor de la cartera
VQ1mreb<-
((H2mu/(desc^2))*Q2mu+(H2mm/(desc^2))*Q2mm+(H2md/(desc^2))*Q2md);VQ1mr
eb#1.272504


#Para d
#El valor k es
k2d<-((precios[3,2]/desc^(1))-Esp2dS)/Var2dS;k2d
#La probabilidad Q es
#Para du
Q2du<-pu*(1+((dd[1]/(desc^2))-Esp2dS)*k2d);Q2du
#Para mm
Q2dm<-pm*(1+((dd[2]/(desc^2))-Esp2dS)*k2d);Q2dm
```

```
#Para ud

Q2dd<-pd*(1+((dd[3]/(desc^2))-Esp2dS)*k2d);Q2dd

#Valor de la cartera

VQ1dreb<-
((H2du/(desc^2))*Q2du+(H2dm/(desc^2))*Q2dm+(H2dd/(desc^2))*Q2dd);VQ1dreb#0
.1885192



#Estado u m d

u<-precios[1,2];u

m<-precios[2,2];m

d<-precios[3,2];d


#Para n=1

#Esperanza de S (n=1) (u,m,d)

Esp1S<-(u/desc^1)*pu+(m/desc^1)*pm+(d/desc^1)*pd;Esp1S

#Esperanza al cuadrado de S  en (n=1) (u,m,d)

Espc1S<-((u)/desc^1)^2*pu+((m/desc^1))^2*pm+((d/desc^1))^2*pd;Espc1S

#Varianza de S en (n=1)(u,m,d)

Var1S<-Espc1S-(Esp1S)^2;Var1S

#Esperanza de V1+ en (n=1)

EspV1reb<-V1ureb*pu+V1mreb*pm+V1dreb*pd;EspV1reb

#Esperanza de (S y V1+) en (n=1)

Esp1SV1reb<-
(u/desc^1)*V1ureb*pu+(m/desc^1)*V1mreb*pm+(d/desc^1)*V1dreb*pd;Esp1SV1reb

#Covarianza de (S y V1+) en (n=1)

Cov1SV1reb<-Esp1SV1reb-Esp1S*EspV1reb;Cov1SV1reb

#Estrataegias en (n=1)

alpha1<-(Cov1SV1reb/Var1S);alpha1#0.8636904

alpha0<-EspV1reb-alpha1*Esp1S;alpha0#-6.187296


#Valor de la cartera en 1
```

```
V1u<-alpha0*1+alpha1*(u/desc^1);V1u#3.246216 siendo V1ureb 3.381563

V1m<-alpha0*1+alpha1*(m/desc^1);V1m#1.359513 siendo V1mreb 1.272504

V1d<-alpha0*1+alpha1*(d/desc^1);V1d#-0.1498486 siendo V1dreb 0.1885192


c1u<-V1ureb-V1u+0;c1u#0.1353471

c1m<-V1mreb-V1m+0;c1m#-0.08700885

c1d<-V1dreb-V1d+0;c1d#0.3383678


Ec1<-c1u*pu+c1m*pm+c1d*pd;Ec1#-1.020017e-15

#Coste total

C2<-c1u+c1m+c1d+c2uu+c2um+c2ud+c2mu+c2mm+c2md+c2du+c2dm+c2dd;C2#1.353471


#Valor de la cartera en (n=0) rebalanceado V0+

#el valor descontado del activo cero en (n=0) es igual a 1

V0reb<-alpha0*1+alpha1*(S0);V0reb#1.585918


#La prob martingala de Q (n=1)

#El valor k es

k1<-((S0)-Esp1S)/Var1S;k1

#La probabilidad Q es

#Para u

Q1u<-pu*(1+((u/desc^1)-Esp1S)*k1);Q1u

#Para m

Q1m<-pm*(1+((m/desc^1)-Esp1S)*k1);Q1m

#Para d

Q1d<-pd*(1+((d/desc^1)-Esp1S)*k1);Q1d

#Valor de la cartera

VQ0reb<-(V1ureb*Q1u+V1mreb*Q1m+V1dreb*Q1d);VQ0reb#1.585918

#Valor de la cartera en (n=0)
```

```
V0<-0

#En definitiva, se van agrupar los anteriores resultados mediante árboles

#árbol del valor de la cartera sin reequilibrar
arbolv<-matrix(c(V0,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,V1u,NA,NA,V1m,NA,NA,V1d,NA,V2uu,V2um,V2ud,V2mu,V2mm,V2md,V2du,V2dm,V2dd),9,3);arbolv

#árbol del valor de la cartera reequilibrada
#mediante estrategias
arbolvreb<-matrix(c(V0reb,NA,NA,V1ureb,V1mreb,V1dreb),3,2);arbolvreb

#mediante martingalas
arbolvQreb<-matrix(c(VQ0reb,NA,NA,VQ1ureb,VQ1mreb,VQ1dreb),3,2);arbolvQreb#coinciden

#árbol del coste
arbolcoste<-matrix(c(0,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,c1u,NA,NA,c1m,NA,NA,c1d,NA,c2uu,c2um,c2ud,c2mu,c2mm,c2md,c2du,c2dm,c2dd),9,3);arbolcoste

#árbol de la esperanza del coste
arbolespcoste<-matrix(c(0,NA,NA,NA,Ec1,NA,Ec2u,Ec2m,Ec2d),3,3);arbolespcoste
```

Segunda parte(Contrato de seguro de vida) del ejercicio 2

```
#Probabilidad de supervivencia

edad<-40
lx<-952535.328#nacido en 1960 nueva producción
```

```
lx1<-951129.844
lx2<-949643.195
#i=j-1,i=1
px1<-lx2/lx;px1#(2p40)(para i=1)#0.9969638
#i=j, i=2
px2<-lx2/lx1;px2#(1p41)(para i=2)#0.998437

#Siniestros H
#u
H2uup<-H2uu*px2;H2uup#6.053024
H2ump<-H2um*px2;H2ump#3.24492
H2udp<-H2ud*px2;H2udp#0.998437
#m
H2mup<-H2mu*px2;H2mup#3.24492
H2mmp<-H2mm*px2;H2mmp#0.998437
H2mdp<-H2md*px2;H2mdp#0
#d
H2dup<-H2du*px2;H2dup#0.998437
H2dmp<-H2dm*px2;H2dmp#0
H2ddp<-H2dd*px2;H2ddp#0

#En el periodo 2

#estrategias para n=2(u,m,d)
#u
alphau1p<-alphau1*px2;alphau1p#0.998437
alphau0p<-alphau0*px2;alphau0p#-7.528981

V2uup<-alphau0p*1+alphau1p*(uu[1]/desc^2);V2uup#5.705556
V2ump<-alphau0p*1+alphau1p*(uu[2]/desc^2);V2ump# 3.058648
```

```
V2udp<-alphau0p*1+alphau1p*(uu[3]/desc^2);V2udp#0.9411226

c2uup<-0-V2uup+(H2uup/desc^2);c2uup#-2.930989e-14
c2ump<-0-V2ump+(H2ump/desc^2);c2ump#3.996803e-15
c2udp<-0-V2udp+(H2udp/desc^2);c2udp#3.030909e-14

Ec2up<-c2uup*pu+c2ump*pm+c2udp*pd;Ec2up#-3.330669e-17

#m
alpham1p<-alpham1*px2;alpham1p#0.8675877
alpham0p<-alpham0*px2;alpham0p#-6.310348


V2mup<-alpham0p*1+alpham1p*(mm[1]/desc^2);V2mup#2.889729
V2mmp<-alpham0p*1+alpham1p*(mm[2]/desc^2);V2mmp#1.049714
V2mdp<-alpham0p*1+alpham1p*(mm[3]/desc^2);V2mdp#-0.4222986

c2mup<-0-V2mup+(H2mup/desc^2);c2mup#0.1689194
c2mmp<-0-V2mmp+(H2mmp/desc^2);c2mmp#-0.1085911
c2mdp<-0-V2mdp+(H2mdp/desc^2);c2mdp#0.4222986

Ec2mp<-c2mup*pu+c2mmp*pm+c2mdp*pd;Ec2mp#5.342948e-16

#d
alphad1p<-alphad1*px2;alphad1p#0.3911256
alphad0p<-alphad0*px2;alphad0p#-2.545857

V2dup<-alphad0p*1+alphad1p*(dd[1]/desc^2);V2dup#0.7722032
V2dmp<-alphad0p*1+alphad1p*(dd[2]/desc^2);V2dmp#0.1085911
V2ddp<-alphad0p*1+alphad1p*(dd[3]/desc^2);V2ddp#-0.4222986
```

```
c2dup<-0-V2dup+(H2dup/desc^2);c2dup#0.1689194
c2dmp<-0-V2dmp+(H2dmp/desc^2);c2dmp#-0.1085911
c2ddp<-0-V2ddp+(H2ddp/desc^2);c2ddp#0.4222986

Ec2dp<-c2dup*pu+c2dmp*pm+c2ddp*pd;Ec2dp#-1.873501e-16

#Valor de la cartera rebalanceado n=1 (V1+) (u,m,d)
#Teniendo en cuenta que del activo 0(bono) descontado en (n=1) S1u=S1m=S1d=1
#u activo 0 de u es 1
V1urebp<-alphau0p*1+alphau1p*(precios[1,2]/desc^(1));V1urebp#3.376277
#m activo 0 de m es 1
V1mrebp<-alpham0p*1+alpham1p*(precios[2,2]/desc^(1));V1mrebp#1.270516
#d activo 0 de d es 1
V1drebp<-alphad0p*1+alphad1p*(precios[3,2]/desc^(1));V1drebp#0.1882245

#Para u
#La probabilidad Q es
VQ1urebp<-VQ1ureb*px2;VQ1urebp#3.376277
#Para m
VQ1mrebp<-VQ1mreb*px2;VQ1mrebp#1.270516
#Para d
VQ1drebp<-VQ1dreb*px2;VQ1drebp#0.1882245

##En el periodo 1

#Estrategias
alpha1p<-alpha1*px1;alpha1p#0.861068
alpha0p<-alpha0*px1;alpha0p#-6.16851
```

```
#Valor de la cartera en 1
V1up<-alpha0p*1+alpha1p*(u/desc^1);V1up#3.236359
V1mp<-alpha0p*1+alpha1p*(m/desc^1);V1mp#1.355386
V1dp<-alpha0p*1+alpha1p*(d/desc^1);V1dp#-0.1493936

c1up<-V1urebp-V1up+0;c1up#0.1399179
c1mp<-V1mrebp-V1mp+0;c1mp#-0.08487
c1dp<-V1drebp-V1dp+0;c1dp#0.3376181

Ec1p<-c1up*pu+c1mp*pm+c1dp*pd;Ec1p#0.002336394
#Coste total
C2p<-
c1up+c1mp+c1dp+c2uup+c2ump+c2udp+c2mup+c2mmp+c2mdp+c2dup+c2dmp+c2d
dp;C2p#1.35792

#Valor de la cartera en (n=0) rebalanceado V0+
#el valor descontado del activo cero en (n=0) es igual a 1
V0rebp<-alpha0p*1+alpha1p*(S0);V0rebp#1.581102



VQ0rebp<-VQ0reb*px1;VQ0rebp#1.581102


V0p<-0


#En definitiva, se van agrupar los anteriores resultados mediante árboles


#árbol del valor de la cartera sin reequilibrar
arbolvp<-
matrix(c(V0p,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,V1up,NA,NA,V1mp,NA,NA,V1dp,
NA,V2uup,V2ump,V2udp,V2mup,V2mmp,V2mdp,V2dup,V2dmp,V2ddp),9,3);arbolvp


#árbol del valor de la cartera reequilibrada
```

```
#mediante estrategias

arbolvrebp<-matrix(c(V0rebp,NA,NA,V1urebp,V1mrebp,V1drebp),3,2);arbolvrebp


#mediante martingalas

arbolvQrebp<-matrix(c(VQ0rebp,NA,NA,VQ1urebp,VQ1mrebp,VQ1drebp),3,2);arbolvQrebp#coinciden


#árbol del coste

arbolcostep<-matrix(c(0,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,c1up,NA,NA,c1mp,NA,NA,c1dp,NA,c2uup,c2ump,c2udp,c2mup,c2mmp,c2mdp,c2dup,c2dmp,c2ddp),9,3);arbolcostep


#árbol de la esperanza del coste

arbolespcostep<-matrix(c(0,NA,NA,NA,Ec1p,NA,Ec2up,Ec2mp,Ec2dp),3,3);arbolespcostep
```

12.3 Tercer ejercicio (Árbol Binomial)

#Primera parte(Contrato financiero)

```
#Datos


 NoSteps<-2

 u<-1.1;u

 d<-1/u;d

 r<-0.03

 K<-9

 desc<-(1+r)


 #Árbol de precios

 #n=0
```

```
S0<-10
#n=1 Estado 1(u,d)
S1u<-S0*u;S1u
S1d<-S0*d;S1d
#n=2 Estado 2(u,d)
#(u) (uu,ud)
S2uu<-S1u*u;S2uu
S2ud<-S1u*d;S2ud
#d (du,dd)
S2du<-S1d*u;S2du
S2dd<-S1d*d;S2dd

precios<-matrix(c(S0,0,0,S1u,S1d,0,S2uu,S2ud,S2dd),3,3);precios

#Proceso de siniestros
#u
H2uu<-max((precios[1,3]-K),0);H2uu
H2ud<-max((precios[2,3]-K),0);H2ud
#d
H2du<-max((precios[2,3]-K),0);H2du
H2dd<-max((precios[3,3]-K),0);H2dd

#Estado u,d
uu<-c(precios[1,3],precios[2,3])
dd<-c(precios[2,3],precios[3,3])

 #Estado u
#Periodo 2
#Mediante estrategias
```

```
alphau1<-((H2uu/(desc^2))-(H2ud/(desc^2)))/((uu[1]/(desc^2))-(uu[2]/(desc^2)));alphau1#1

alphau0<-((uu[1]/(desc^2))*(H2ud/(desc^2))-(uu[2]/(desc^2))*(H2uu/(desc^2)))/((uu[1]/(desc^2))-(uu[2]/(desc^2)));alphau0#-8.483363


#Valor de la cartera sin rebalancear en (i=2)

V2uu<-alphau0*1+alphau1*(uu[1]/desc^2);V2uu#2.922047

V2ud<-alphau0*1+alphau1*(uu[2]/desc^2);V2ud#0.9425959


#Valor de la cartera rebalanceada

V1ureb<-alphau0*1+alphau1*(precios[1,2])/(desc^1);V1ureb#2.196248 pero en términos actuales es 2.262135


#Mediante Q


Q2uu<-((-uu[2]/desc^2)/(precios[1,2]/desc^1)+1)/((uu[1]/desc^2)/(precios[1,2]/desc^1)-((uu[2]/desc^2)/(precios[1,2]/desc^1)));Q2uu

Q2ud<-((uu[1]/desc^2)/(precios[1,2]/desc^1)-1)/((uu[1]/desc^2)/((precios[1,2]/desc^1))-((uu[2]/desc^2)/(precios[1,2]/desc^1)));Q2ud


VQ1ureb<-(Q2uu*(H2uu/(desc^2))+Q2ud*(H2ud/(desc^2)));VQ1ureb#2.196248



#Estado d

#Mediante estrategias


alphad1<-((H2du/(desc^2))-(H2dd/(desc^2)))/((dd[1]/(desc^2))-(dd[2]/(desc^2)));alphad1#0.5761905

alphad0<-((dd[1]/(desc^2))*(H2dd/(desc^2))-(dd[2]/(desc^2))*(H2du/(desc^2)))/((dd[1]/(desc^2))-(dd[2]/(desc^2)));alphad0#-4.488552
```

#Valor de la cartera sin rebalancear en (i=2)

V2du<-alphad0*1+alphad1*(dd[1]/desc^2);V2du#0.9425959

V2dd<-alphad0*1+alphad1*(dd[2]/desc^2);V2dd#0

#Valor de la cartera rebalanceada

V1dreb<-alphad0*1+alphad1*(precios[2,2])/(desc^1);V1dreb#0.5969774 pero en términos actuales seria 0.6148867

#Mediante Q

Q2du<-((-dd[2]/desc^2)/(precios[2,2]/desc^1)+1)/((dd[1]/desc^2)/(precios[2,2]/desc^1)-((dd[2]/desc^2)/(precios[2,2]/desc^1)));Q2du

Q2dd<-((dd[1]/desc^2)/(precios[2,2]/desc^1)-1)/((dd[1]/desc^2)/((precios[2,2]/desc^1))-((dd[2]/desc^2)/(precios[2,2]/desc^1)));Q2dd

VQ1dreb<-(Q2du*(H2du/(desc^2))+Q2dd*(H2dd/(desc^2)));VQ1dreb#0.5969774

#Periodo 1 i=1

#Estado u,d

u<-precios[1,2]

d<-precios[2,2]

#Estado u

#Mediante estrategias

alpha1<-((V1ureb)-(V1dreb))/((u/(desc^1))-(d/(desc^1)));alpha1#0.8628448

alpha0<-((u/(desc^1))*(V1dreb)-(d/(desc^1))*(V1ureb))/((u/(desc^1))-(d/(desc^1)));alpha0#-7.018599

#El valor de la cartera sin reequilibrar

V1u<-alpha0*1+alpha1*(u/desc^1);V1u#2.196248 coincide con V1rebu

V1d<-alpha0*1+alpha1*(d/desc^1);V1d#0.5969774 coincide con V1rebd

```
V0reb<-alpha0*1+alpha1*(precios[1,1]);V0reb#1.609849

#Prob martingala Q

Q1u<-((-d/desc^1)/(precios[1,1])+1)/(((u/desc^1)/(precios[1,1]))-((d/desc^1)/(precios[1,1])));Q1u

Q1d<-((u/desc^1)/(precios[1,1])-1)/(((u/desc^1)/(precios[1,1]))-((d/desc^1)/(precios[1,1])));Q1d

#Valor de la cartera rebalanceada con prob Q

VQ0reb<-(Q1u*V1ureb+Q1d*V1dreb);VQ0reb#1.609849

V0<-0

#En definitiva, se van agrupar los anteriores resultados mediante árboles

#árbol del valor de la cartera sin reequilibrar

arbolv<-matrix(c(V0,NA,NA,NA,V1u,NA,V1d,NA,V2uu,V2ud,V2du,V2dd),4,3);arbolv

#árbol del valor de la cartera reequilibrada

#mediante estrategias

arbolvreb<-matrix(c(V0reb,NA,V1ureb,V1dreb),2,2);arbolvreb

#mediante martingalas

arbolvQreb<-matrix(c(VQ0reb,NA,VQ1ureb,VQ1dreb),2,2);arbolvQreb#coinciden

#árbol del coste

#arbolcoste<-matrix(c(0,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,NA,c1u,NA,NA,c1m,NA,NA,c1d,NA,c2uu,c2um,c2ud,c2mu,c2mm,c2md,c2du,c2dm,c2dd),9,3);arbolcoste
```

```
#árbol de la esperanza del coste
#arbolespcoste<-matrix(c(0,NA,NA,NA,Ec1,NA,Ec2u,Ec2m,Ec2d),3,3);arbolespcoste
```

#Segunda parte(Contrato de seguro de vida) del ejercicio 3

```
#Aplicamos probabilidad de supervivencia
pu<-0.6333333
pd<-0.3666667

edad<-40
lx<-952535.328#nacido en 1960 nueva producción
lx1<-951129.844
lx2<-949643.195
#i=j-1,i=1
px1<-lx2/lx;px1#(2p40)para edad 41(para n=1)#0.9969638
#i=j, i=2
px2<-lx2/lx1;px2#(1p41) para edad 42(para n=2)#0.998437


#Siniestros
H2uup<-H2uu*px2;H2uup#3.095155
H2udp<-H2ud*px2;H2udp#0.998437
H2dup<-H2du*px2;H2dup#0.998437
H2ddp<-H2dd*px2;H2ddp#0

#En el periodo 2
#Estado u
#Mediante estrategias
```

```
alphau1p<-alphau1*px2;alphau1p#0.998437
alphau0p<-alphau0*px2;alphau0p#-8.470103

#Valor de la cartera sin rebalancear en (i=2)
V2uup<-alphau0p*1+alphau1p*(uu[1]/desc^2);V2uup#2.91748
V2udp<-alphau0p*1+alphau1p*(uu[2]/desc^2);V2udp#0.9411226

#coste
c2uup<-0-V2uup+(H2uup/desc^2);c2uup#-4.440892e-16
c2udp<-0-V2udp+(H2udp/desc^2);c2udp#1.110223e-16

Ec2up<-c2uup*pu+c2udp*pd;Ec2up#-2.405483e-16

#Valor reequilibrado de la cartera
#mediante estrategias
V1urebp<-alphau0p*1+alphau1p*(precios[1,2])/(desc^(1));V1urebp   # 2.192816

#Mediante Q

VQ1urebp<-VQ1ureb*px2;VQ1urebp#2.192816

#Estado d
#Mediante estrategias

alphad1p<-alphad1*px2;alphad1p#0.5752899
alphad0p<-alphad0*px2;alphad0p#-4.481536

#Valor de la cartera sin rebalancear en (i=2)
V2dup<-alphad0p*1+alphad1p*(dd[1]/desc^2);V2dup#0.9411226
```

```
V2ddp<-alphad0p*1+alphad1p*(dd[2]/desc^2);V2ddp#0

c2dup<-0-V2dup+(H2dup/desc^2);c2dup#-7.771561e-16
c2ddp<-0-V2ddp+(H2ddp/desc^2);c2ddp#0

Ec2dp<-c2dup*pu+c2ddp*pd;Ec2dp#-4.921988e-16

#Valor reequilibrado de la cartera
#mediante estrategias
V1drebp<-alphad0p*1+alphad1p*(precios[2,2])/(desc^(1));V1drebp #0.5960443

#Mediante Q

VQ1drebp<-VQ1dreb*px2;VQ1drebp#0.5960443

#Periodo 1 i=1

#Estado u
#Mediante estrategias

alpha1p<-alpha1*px1;alpha1p#0.860225
alpha0p<-alpha0*px1;alpha0p#-6.997289

V1up<-alpha0p*1+alpha1p*(precios[1,2]/desc^1);V1up#2.18958 es menor a V1rebup que es 2.192816

V1dp<-alpha0p*1+alpha1p*(precios[2,2]/desc^1);V1dp#0.5951648 es menor a V1rebdp que es 0.5960443

#coste
c1up<-V1urebp-V1up+0;c1up#0.003235541
```

```
c1dp<-V1drebp-V1dp+0;c1dp#0.0008794747

Ec1p<-c1up*pu+c1dp*pd;Ec1p#0.00237165

#Coste total
C2p<-c1up+c1dp+c2uup+c2udp+c2dup+c2ddp;C2p#0.004115016

#Valor reequilibrado de la cartera
#mediante estrategias
V0rebp<-alpha0p*1+alpha1p*(precios[1,1]);V0rebp#1.604961

#Prob martingala Q

VQ0rebp<-VQ0reb*px1;VQ0rebp#1.604961

V0p<-0

#En definitiva, se van agrupar los anteriores resultados mediante árboles

#árbol del valor de la cartera sin reequilibrar
arbolvp<-
matrix(c(V0p,NA,NA,NA,V1up,NA,V1dp,NA,V2uup,V2udp,V2dup,V2ddp),4,3);arbol
vp

#árbol del valor de la cartera reequilibrada
#mediante estrategias
arbolvrebp<-matrix(c(V0rebp,NA,V1urebp,V1drebp),2,2);arbolvrebp

#mediante martingalas
arbolvQrebp<-
matrix(c(VQ0rebp,NA,VQ1urebp,VQ1drebp),2,2);arbolvQrebp#coinciden
```

```
#árbol del coste

arbolcostep<-
matrix(c(0,NA,NA,NA,c1up,NA,c1dp,NA,c2uup,c2udp,c2dup,c2ddp),4,3);arbolcostep


#árbol de la esperanza del coste

arbolespcostep<-matrix(c(0,NA,Ec1p,NA,Ec2up,Ec2dp),2,3);arbolespcostep
```

12.4 Cuarto ejercicio (modelo trinomial)

#Contrato financiero

```
#Datos


pu<-0.2;pu
pm<-0.5
pd<-0.3;pd
pu+pm+pd
r<-0.1
desc<-(1+r)


#Árbol de precios
S0<-1
S1u<-2
S1m<-1
S1d<-0.1


#Siniestros H
#u
H1u<-1
H1m<-0
H1d<-0
```

```
#N=1 estado 1 (u,m,d)
u<-2
m<-1
d<-0.1
#Esperanza Esp de S

Esp1S<-(u/(desc^1))*pu+(m/(desc^1))*pm+(d/(desc^1))*pd;Esp1S


#Esperanza al cuadrado Espc de S

Espc1S<-(u/(desc^1))^2*pu+(m/(desc^1))^2*pm+(d/(desc^1))^2*pd;Espc1S

#Varianza de S

Var1S<-Espc1S-(Esp1S)^2;Var1S

#Esperanza Esp de H

Esp1H<-(H1u/(desc^1))*pu+(H1m/(desc^1))*pm+(H1d/(desc^1))*pd;Esp1H


#Esperanza Esp de SH( esperanza de S y de H)

Esp1SH<-
(u/(desc^1))*(H1u/(desc^1))*pu+(m/(desc^1))*(H1m/(desc^1))*pm+(d/(desc^1))*(H1d
/(desc^1))*pd;Esp1SH

#Covarianza de SH(covarianza de S y de H)

Cov1SH<-Esp1SH-Esp1S*Esp1H;Cov1SH
```

```
#estrategias para n=1

alpha1<-(Cov1SH/Var1S);alpha1#0.488473
alpha0<-Esp1H-alpha1*Esp1S;alpha0#-0.2311635

#Valor de la cartera en 1
V1u<-alpha0*1+alpha1*(u/desc^1);V1u#0.6569691
V1m<-alpha0*1+alpha1*(m/desc^1);V1m#0.2129028
V1d<-alpha0*1+alpha1*(d/desc^1);V1d#-0.1867569

#coste
c1u<-0-V1u+(H1u/desc^1);c1u#0.2521218
c1m<-0-V1m+(H1m/desc^1);c1m#-0.2129028
c1d<-0-V1d+(H1d/desc^1);c1d#0.1867569

Ec1<-c1u*pu+c1m*pm+c1d*pd;Ec1#-2.081668e-17
#Coste total
C1<-c1u+c1m+c1d;C1#0.2259758

#Valor de la cartera rebalanceado n=1 (V1+) (u,m,d)
#Teniendo en cuenta que del activo 0(bono) descontado en (n=1) S1u=S1m=S1d=1

V0reb<-alpha0*1+alpha1*(S0);V0reb#0.2573095

#A continuación calcularemos la probab martingala Q en (n=1)
#El valor k es
k1<-(((S0-Esp1S))/Var1S);k1
#Para u
```

```
#La probabilidad Q es
#Para uu
Q1u<-pu*(1+((u/(desc^1))-Esp1S)*k1);Q1u#0.2830404
#Para um
Q1m<-pm*(1+((m/(desc^1))-Esp1S)*k1);Q1m#0.5135814
#Para ud
Q1d<-pd*(1+((d/(desc^1))-Esp1S)*k1);Q1d#0.2033782
#Valor de la cartera
VQ0reb<-
((H1u/(desc^1))*Q1u+(H1m/(desc^1))*Q1m+(H1d/(desc^1))*Q1d);VQ0reb#0.257309
5

V0<-0

#En definitiva, se van agrupar los anteriores resultados mediante árboles

#árbol del valor de la cartera sin reequilibrar
arbolv<-matrix(c(V0,NA,NA,V1u,V1m,V1d),3,2);arbolv

#árbol del valor de la cartera reequilibrada
#mediante estrategias
arbolvreb<-matrix(c(V0reb),1,1);arbolvreb

#mediante martingalas
arbolvQreb<-matrix(c(VQ0reb),1,1);arbolvQreb#coinciden

#árbol del coste
arbolcoste<-matrix(c(0,NA,NA,c1u,c1m,c1d),3,2);arbolcoste

#árbol de la esperanza del coste
arbolespcoste<-matrix(c(0,Ec1),1,2);arbolespcoste
```