UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Principi d'equivalència d'ingressos en subhastes de valoració privada

Autora: Marta Abadías Morales

Director: Dr. Xavier Jarque i Ribera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

Throughout this project, we discuss the key topics of the Auction Theory, focusing on the classic auctions in which there is a competitive bidding process for a single, unique object amongst a group of bidders with private values. Mainly, we will focus on the first and second price sealed-bid auction formats.

We will see that the studied auctions can be considered as bayesian games or games with incomplete information. Hence, our main goal during this paper will be to find an optimal strategy for the bidders (who we assume are rational) in each case, which will be the Nash equilibrium. Once they are determined, we will observe that, despite being very different, the expected revenue of the seller is the same under both formats, even when the seller sets a reserve price.

The main result that we find is the *Revenue equivalence principle.* This proves that, under certain premises, the fact that the expected revenue turns out to be equal can be attributable to an entire family of auctions types.

Finally, we will study what happens when the premises of the Revenue equivalence principle are relaxed. As such, we will see the consequences that can be derived when the bidders are risk averse, when they have budget constraints and when there are asymmetries between them.

Resum

En aquest treball tractem els temes principals de la Teoria de Subhastes, centrant-nos en les subhastes més clàssiques on es ven de manera competitiva un únic objecte indivisible entre un conjunt de postors amb valoracions privades. Parlarem, principalment, dels formats de subhasta de sobre tancat a primer i a segon preu.

Veurem que les subhastes que estudiarem es poden pensar com un joc bayesià o joc d'informació incompleta. Per tant, l'objectiu principal serà trobar una estratègia òptima pels postors (que suposarem racionals) en cada cas, les quals correspondran a un equilibri de Nash. Una vegada trobades, veurem que, tot i que aquestes siguin molt diferents, els ingressos esperats pel venedor són els mateixos en els dos formats, inclús quan el venedor fixa un preu de reserva.

Com a resultat principal, trobem el *Principi d'equivalència d'ingressos.* Aquest ens demostra que, sota certes premisses, el fet que els guanys esperats del venedor siguin iguals es pot estendre a tota una classe de subhastes.

Finalment, s'estudia què passa quan les premisses del Principi d'equivalència d'ingressos es relaxen. Per tant, veurem les conseqüències que es poden derivar quan els postors són adversos al risc, quan presenten limitacions pressupostàries i quan hi ha asimetries entre ells.

2020 Mathematics Subject Classification. 60E05, 60E15, 91A06, 91A10, 91B26

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria expressar el meu agraïment al meu tutor Dr. Xavier Jarque pel seu temps, ajut i dedicació durant aquests últims mesos. Agraeixo també al Dr. Francesc Xavier Massaneda per respondre'm algun que altre e-mail, com sempre, amb una amabilitat destacable.

També voldria donar les gràcies als meus companys i companyes de la carrera. En especial, a uns grans amics que m'emporto. Primer, al Jordi Llop per guiar-me en els meus primers passos usant LaTeX i estar sempre disposat a fer-me un cop de mà quan ho he necessitat. I, per suposat, a la Mònica Bon, al Marc Merlos, al Martín Torrecilla i a l'Eric Rubia. Gràcies, de tot cor, per l'ajuda, el suport i els ànims per continuar treballant. Compartir tantes hores d'estudi (sobretot en temps de pandèmia) les ha fet sempre més amenes. Aquesta carrera no hagués sigut el mateix sense vosaltres.

Fora de l'àmbit matemàtic, he tingut la sort de tenir un grup d'amigues que des de sempre han estat allà quan més les he necessitat. Voldria donar-vos les gràcies per escoltar els meus discursos sobre el món de les matemàtiques. He d'admetre que em feia il·lusió quan, després, em preguntàveu coses de l'estil "Com vas amb EDOs?" (tot i que no sabíeu ni de què anava l'assignatura) simplement perquè m'havíeu sentit repetir aquest nom constantment al llarg d'aquests anys. M'agradaria donar-vos les gràcies, també, per entendre les meves absències en èpoques d'exàmens, i durant tota la carrera en general.

Finalment, voldria expressar el meu agraïment més sincer a la meva família: el meu pare, la meva mare, la meva germana Anna i la Siri (que m'ha fet sempre companyia mentre estudiava). Agraeixo, de veritat, els ànims i els consells que m'heu donat sempre. Dono les gràcies per cada abraçada i per aguantar el meu humor en els moments on més atabalada estava. Gràcies per sentir els meus èxits amb la mateixa alegria (o fins i tot més) que jo. Gràcies per oferir-me sempre la vostra ajuda. I, sobretot, gràcies per creure en tot moment que seria capaç d'arribar fins aquí.

Índex

1 Introducció

1.1 Motivació

Des que vaig entrar a la universitat, he tingut sempre un gran interès per l'anàlisi i la probabilitat. Al decidir, a més, cursar la menció en Economia, vaig descobrir que molts dels coneixements adquirits durant el grau es podien aplicar també en aquest camp. En concret, en la branca de Teoria de Jocs. Per aquesta raó, doncs, volia que el meu Treball de Final de Grau combinés totes aquestes àrees. Així, quan el meu tutor em va proposar fer un treball basat en la Teoria de Subhastes, vaig tenir clar que aquest seria el tema del meu projecte final, ja que em permetria aprofundir els meus coneixements envers aquestes matèries i, a més, suposava una aplicació directa d'aquests en un exemple com les subhastes, les quals podríem dir que formen part del nostre dia a dia.

1.2 Objectius

L'Enciclopèdia Catalana, [2], defineix el terme *subhasta* com un "Sistema de venda pública consistent a atorgar una cosa al millor postor, és a dir, a la persona que n'ofereix un preu més elevat". En major o menor mesura, tots hem sentit a parlar d'aquest concepte i tenim una idea de en què consisteix una subhasta, ja sigui perquè hi hem participat a alguna (per exemple, al conegut portal de subhastes *Ebay*) o perquè les hem vist a pel·lícules on els protagonistes ofereixen milions de dòlars per obtenir una obra d'art. Darrere de tot això hi trobem la coneguda com Teoria de Subhastes, la qual resulta molt important en el camp de l'economia, ja que juga un paper essencial a l'hora de construir un mercat i determinar correctament com les persones valorem les coses.

En general, els objectes disponibles al mercat tenen un preu definit. De totes formes, avui en dia podem trobar subhastes on es venen tot tipus de coses: des d'un telèfon mòbil a una casa. Utilitzar una subhasta com a mètode de venda, però, és especialment útil quan no es coneix amb certesa quin és el valor d'un objecte. En aquest cas, cada persona que hi estigui interessada tindrà unes creences de quant val tal objecte i licitarà un preu major o menor segons el que cregui. Per tant, depenent de com els postors valoren l'objecte i també de les normes que regeixin la subhasta, podrem determinar qui serà el comprador de l'objecte i també el preu pel qual s'adquirirà.

Cert és que la Teoria de Subhastes ha evolucionat dràsticament en les últimes dècades. Al llarg d'aquest treball, però, ens centrarem en les subhastes més clàssiques, en les quals es subhasta un únic objecte indivisible, i on les valoracions dels postors són privades. Ens dedicarem a l'estudi dels temes centrals de la Teoria de Subhastes, intentant donar el màxim detall possible per tal que aquest treball pugui resultar una eina útil per un possible estudi posterior per part del lector. Per tant, els objectius principals d'aquest treball són:

- Obtenir uns coneixements generals sobre la Teoria de Subhastes. Concretament, de les subhastes d'un únic objecte indivisible on les valoracions dels postors són privades.
- Trobar quina estratègia hauria de seguir qualsevol postor racional a cada tipus de subhasta, per tal de maximitzar la seva utilitat o satisfacció.
- Calcular quins són els ingressos esperats del venedor segons el tipus de subhasta.

- Demostrar el conegut *Principi d'equivalència d'ingressos.*
- Veure els efectes que suposa fixar un preu de reserva en els tipus de subhasta estudiats, a més de determinar certes propietats que ha de complir el preu de reserva òptim des del punt de vista del venedor.
- Estudiar les conseqüències de la relaxació de les premisses del Principi d'equivalència d'ingressos.

1.3 Estructura de la memòria

Per una millor comprensió del text, començarem el nostre treball introduint conceptes bàsics sobre subhastes i explicant certes nocions de Probabilitats i Teoria de Jocs, entre d'altres camps de coneixement. Parlarem de les quatre modalitats de subhasta més comunes i conegudes, i veurem que les podem classificar segons el seu format (obert o de sobre tancat) i segons el valor que els postors assignen a l'objecte (valoracions privades, comunes o interdependents). En aquest treball, però, només considerarem postors amb valoracions privades. Concretament, amb valoracions privades, trobem una equivalència estratègica entre les subhastes holandeses i les subhastes de sobre tancat a primer preu, i també entre les subhastes angleses i les subhastes de sobre tancat a segon preu. Això ens permetrà centrar el nostre estudi en els formats de sobre tancat a primer i segon preu.

La Teoria de Subhastes està estretament relacionada amb la Teoria de Jocs. Fixem-nos que podem pensar una subhasta com un joc, ja que els postors (els jugadors) competeixen mitjançant ofertes (corresponents a les estratègies) per obtenir l'objecte subhastat i aconseguir un cert benefici (que dependrà de la seva funció d'utilitat). Com les valoracions les considerem privades, però, els postors no saben amb certesa quina és la valoració de la resta dels jugadors i, conseqüentment, no coneixen la utilitat que n'extraurien. Aleshores, direm que les subhastes estudiades són *jocs d'informació incompleta* o *jocs bayesians.*

A la Secció 3, analitzarem la metodologia bàsica de les subhastes estudiades. Per ferho, suposarem que tots els jugadors són simètrics, neutrals al risc i que tenen els recursos suficients per pagar, si fos necessari, un preu igual a la seva valoració. Tenint això en compte, ens dedicarem a trobar quines són les millors estratègies a seguir pels postors en els dos tipus de subhasta estudiats. Donat que els jugadors són simètrics, és natural que l'estratègia d'equilibri que busquem sigui també simètrica (és a dir, un equilibri en què tots els jugadors segueixen la mateixa estratègia). Veurem que, en les subhastes a segon preu, licitar un preu igual a la pròpia valoració és una estratègia dèbilment dominant. En les subhastes a primer preu, però, no existeix cap estratègia dominant. Per trobar una estratègia d'equilibri, doncs, calcularem quina és l'oferta que hauria de realitzar un postor per tal de maximitzar els seus beneficis. Una vegada trobades les estratègies, podrem passar a comparar els ingressos esperats del venedor. Sorprenentment, tot i que les estratègies a seguir són molt diferents, veurem que els guanys esperats seran exactament els mateixos en els dos tipus de subhastes: l'esperança de la segona major valoració.

A la Secció 4, demostrant el *Principi d'equivalència d'ingressos*, veurem que aquesta característica es pot estendre, de fet, a tota una classe de subhastes sota certes premisses.

A la Secció 5, introduïm el concepte de preu de reserva. Veurem que els ingressos esperats del venedor en els dos tipus de subhasta estudiats continuen coincidint tot i fixar un preu de reserva. A més, trobarem algunes condicions que ha de complir el preu de reserva òptim des del punt de vista del venedor, per tal de maximitzar els seus beneficis esperats.

Finalment, a la Secció 6, estudiarem les conseqüències de la relaxació de les premisses del Principi d'equivalència d'ingressos, cosa que ens pot donar una idea de per què a la vida real no sempre es compleix que els ingressos siguin iguals en els dos tipus de subhasta. Així doncs, veurem com això afecta a les estratègies a seguir pels postors i demostrarem que, quan els postors són adversos al risc o presenten limitacions pressupostàries, els ingressos esperats del venedor passen a ser majors en un subhasta de sobre tancat a primer preu que en una subhasta de sobre tancat a segon preu. D'altra banda, quan hi ha asimetries entre els postors, sabem que l'estratègia a seguir en una subhasta a segon preu no es veu afectada. En canvi, trobar una expressió explícita d'una estratègia d'equilibri en una subhasta a primer preu no sempre és possible. Per tant, quan els postors són asimètrics, és difícil fer comparacions entre els dos tipus de subhastes. En aquest apartat, doncs, deduirem algunes propietats que han de complir aquestes estratègies d'equilibri i donarem l'expressió explícita en el cas concret que les valoracions segueixin una distribució uniforme asimètrica. Per acabar, presentarem un parell d'exemples on veurem que, en algun cas concret, els ingressos esperats del venedor en una subhasta a primer preu poden superar als d'una subhasta a segon preu, i viceversa.

2 Preliminars

Per l'estudi de la Teoria de Subhastes es requereixen certes nocions de Probabilitats i Teoria de Jocs, entre d'altres camps de coneixement. En aquesta secció, doncs, presentem diferents conceptes previs que són necessaris per una millor comprensió del text.

2.1 Conceptes bàsics sobre subhastes

Basant-nos en [3] i [7], introduirem alguns conceptes molt usats en Teoria de Subhastes, com són: els noms dels tipus de subhastes que estudiarem, les equivalències que podem trobar entre elles i el concepte de valoració.

2.1.1 Classificació de les subhastes

En aquest treball ens centrarem en quatre tipus de subhastes que presenten dos formats diferents, les quals són les més comunes i conegudes. Per tal de fer més entenedora l'explicació, presentem la següent classificació:

Segons el format

Subhastes obertes orals

En aquest tipus de subhasta, cada vegada que un postor fa una oferta, els altres saben el valor d'aquesta i poden decidir si retirar-se o continuar la subhasta oferint ells un nou preu. És a dir, es un tipus de subhasta seqüencial. Aquí trobem:

- **Subhasta anglesa o de preu ascendent**: És, potser, la modalitat que ens ve al cap quan pensem en una subhasta. Comença amb un preu igual a 0 o amb un preu baix (que anomenarem *preu de reserva*), segons decideixi el venedor. Aquest preu va augmentant sempre que hi hagi almenys dos postors interessats en continuar licitant. Quan només hi ha un postor restant, aquest guanya l'objecte i la subhasta acaba. L'objecte es ven, doncs, pel preu més alt que s'ha assolit quan l'ultim competidor decideix retirar-se.
- **Subhasta holandesa o de preu descendent**: Ara, el venedor comença fixant un preu elevat. De manera progressiva, aquest va disminuint fins que un postor mostra interès per comprar l'objecte a tal preu. La subhasta acaba i l'objecta el guanya aquest jugador, pagant un preu igual a l'ofert.

Subhastes de sobre tancat

En aquest tipus de subhasta, cada postor entrega una oferta en un sobre tancat i, per tant, no se sap el preu que liciten la resta de postors fins que aquests sobres no són oberts. És, doncs, un tipus de subhasta simultània. Aquí trobem:

- **Subhastes de sobre tancat a primer preu**: El postor que guanya l'objecte és aquell que ha ofert el major preu, pagant un preu igual a la seva oferta.
- **Subhastes de sobre tancat a segon preu**: El postor que guanya l'objecte és aquell que ha ofert el major preu, però paga un preu igual a la segona major oferta que s'ha presentat.

Segons les valoracions

Realitzar una subhasta pot ser útil quan no es coneix amb certesa quin es el valor real d'un objecte. Arran d'aquesta característica de les subhastes, els postors oferiran un preu o un altre segons la valoració que ells mateixos assignin a l'objecte. Aquestes valoracions poden ser de tres tipus:

- **Valoracions privades**: Són el tipus de valoracions que suposarem que tenen els postors al llarg de tot el treball. Quan les valoracions són privades, cada postor és coneixedor de la seva pròpia valoració, però no coneix amb certesa quines són les de la resta de postors. De totes formes, saber quines són tampoc afectaria al valor que assigna un postor a l'objecte. Una situació on trobem valoracions privades seria quan aquesta valoració es deriva de l'ús privat que un en pot extreure (sense pensar, per exemple, en una possible revenda).

- **Valoracions comunes**: Aquest tipus de valoració és amb el que normalment relacionem la paraula "valor" d'un objecte. Correspon al valor pel qual els postors creuen que l'objecte es podria vendre en el mercat. Cada postor tindrà una creença diferent de quin serà, segons la informació que pugui rebre prèviament (per exemple, amb l'ajuda d'un expert). En aquest cas, doncs, conèixer les valoracions de la resta de postors sí pot afectar a la pròpia valoració. Un exemple en què trobem aquest tipus de valoració podria ser en una subhasta d'un terreny on hi ha una quantitat desconeguda de petroli. Cada postor pot tenir una idea de la quantitat de petroli que pot haver-hi (com ara, fent un estudi de la zona) i farà una oferta segons la valoració que n'assigni. La valoració del terreny, però, sí serà la mateixa per tots els postors una vegada s'ha realitzat la subhasta i es pugui veure la quantitat real de petroli que hi havia.

- **Valoracions interdependents**: Corresponen a un cas intermedi entre les dues valoracions que hem vist fins ara. De fet, són les més comunes a la pràctica. Aquestes, poden derivar-se, en part, d'una valoració comuna i també d'una valoració privada. Per exemple, podem pensar en la venda d'una casa. Aquesta sabem que té un valor comú, però algú podria estar disposat a pagar un preu quelcom superior degut a raons privades (la casa pot estar a prop de la feina, en una zona propera a la família i amics...).

2.1.2 Subhastes equivalents

Entre els tipus de subhastes que acabem d'introduir, podem trobar certes equivalències estratègiques. Vegem-ho:

- **Una subhasta holandesa és estratègicament equivalent a una subhasta de sobre tancat a primer preu**: A una subhasta holandesa ningú fa cap oferta fins que no s'assoleix aquell preu que algú està disposat a pagar. En aquest moment, la subhasta acaba. Per tant, fins el final no s'ofereix entre els postors cap tipus d'informació sobre les valoracions que cadascú té de l'objecte. Així doncs, oferir una determinada quantitat en una subhasta de sobre tancat a primer preu és equivalent a oferir aquesta mateixa quantitat en una subhasta holandesa (sempre que els postors siguin racionals). En els dos casos, el postor guanyador paga el preu que ha licitat.

- **Una subhasta anglesa és estratègicament equivalent a una subhasta de sobre tancat a segon preu**: A mesura que els postors es van retirant d'una subhasta anglesa, es pot tenir informació de quina és la valoració de l'objecte per part de la resta de postors. Si les valoracions no són privades, aquest fet pot influir en les valoracions individuals de l'objecte (si els competidors han abandonat en preus molt inferiors al màxim que jo estaria disposat a pagar, ens podria fer pensar que hem sobrevalorat l'objecte!). Quan les valoracions són privades, però, l'estratègia a seguir és equivalent en els dos casos: en una subhasta de sobre tancat a segon preu, veurem que la millor opció és oferir un preu igual a la pròpia valoració i, en cas de guanyar, es pagaria la segona oferta més alta; en una subhasta anglesa, un postor va fent ofertes quelcom majors a l'últim preu fins assolir la pròpia valoració mentre quedin competidors actius. En els dos casos guanya el postor que més valora l'objecte, però paga un preu igual a la segona oferta més alta (en el cas d'una subhasta anglesa seria amb un increment de preu $\epsilon > 0$).

Vist això, al llarg d'aquest treball parlarem, principalment, dels formats de subhastes de sobre tancat a primer i segon preu amb valoracions privades.

2.2 Nocions de probabilitats

En aquest treball ens centrarem en l'estudi de distribucions contínues, ja que les variables aleatòries de les quals que es deriven les valoracions dels postors les definirem com a contínues. Així doncs, basant-nos en els capítols 1, 2 i 3 de [9], introduirem uns quants conceptes bàsics sobre distribucions contínues que s'aniran utilitzant al llarg de les diferents seccions.

Donada una variable aleatòria contínua X, que suposem que pren valors a $[0, \omega] \subseteq [0, \infty)$, definim la seva **funció de distribució** $F : [0, \omega] \to [0, 1]$ com

$$F(x) = P(X \leq x)$$

és a dir, com la probabilitat que X prengui valors menors o iguals a x. Per definició, aquesta és creixent i satisfà $F(0) = 0$ i $F(\omega) = 1$. Al ser contínua, a més, per tota $a \in [0, \omega]$ sabem que $P(X = a) = 0$.

La derivada de F correspon a la **funció de densitat**, que denotarem per $f \equiv F'$ i assumirem que és contínua i positiva. Aquesta, sabem que satisfà

$$\int_0^\omega f(x)\, dx = 1$$

Un altre concepte molt usat al llarg del treball és l'**esperança** de X. Aquesta es defineix com

$$E[X] = \int_0^\omega x f(x)\, dx$$

Anàlogament, per qualsevol funció $\gamma : [0, \omega] \to \mathbb{R}$, tenim

$$E[\gamma(X)] = \int_0^\omega \gamma(x) f(x)\, dx$$

Podem definir també l'**esperança condicionada** de X sabent que $X < x$. La funció de densitat de X un cop condicionada a $X < x$ és $\frac{f(y)}{F(x)}$, per $y < x$. Aquesta és, de fet, la mateixa funció de densitat que X, però restringida a la regió $\{y < x\}$ i normalitzada perquè la probabilitat total sigui 1. Per tant, podem escriure:

$$E[X|X < x] = \int_0^x s\,\frac{f(s)}{F(x)}\,ds = \frac{1}{F(x)}\int_0^x sf(s)\,ds$$

2.3 Ordres estocàstics

Hi ha diverses maneres de veure que una distribució F "domina" o és "més gran que" una altra distribució G (veure apèndix B de [5]). Presentarem ara algunes d'elles, les quals farem servir al llarg del nostre treball. Per redactar aquest apartat, ens hem ajudat també amb informació extreta de [10] i [11].

Dominància estocàstica de primer ordre

Donades dues funcions de distribució F i G, direm que F *domina estocàsticament (en termes de dominància estocàstica de primer ordre) a* G si, per tota $z \in [0, \omega]$ fixada, es satisfà:

$$F(z) \leq G(z)$$

Aleshores, si les variables aleatòries X i Y estan distribuïdes d'acord a F i G respectivament, direm que X *domina estocàsticament a* Y.

El fet que F domini estocàsticament a G sent aquesta "menor", recau en la pròpia definició de les funcions de distribució. Si $F(z) \leq G(z)$, tenim que la probabilitat que les variables preguin un valor igual o inferior a z és menor per X que per Y. Per tant, la probabilitat que X prengui un valor més gran que z és, precisament, major que la probabilitat que Y prengui un valor més gran que z (ja que $1 - F(z) \geq 1 - G(z)$). Com és més probable tenir valors més grans per X que per Y, deduïm que $E[X] \geq E[Y]$. Comprovem-ho també analíticament:

Suposem que $\gamma : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ és una funció creixent i diferenciable. Aleshores tenim

$$E[\gamma(X)] - E[\gamma(Y)] = \int_0^\omega \gamma(z)\,(f(z) - g(z))\;dz$$

integrant per parts (i aplicant les propietats de les funcions de distribució que hem vist en l'apartat anterior), obtenim

$$E[\gamma(X)] - E[\gamma(Y)] = -\int_0^\omega \gamma'(z)\,(F(z) - G(z))\;dz$$

Com $\gamma' > 0$ (recordem que és creixent) i tenim que $F \leq G$, aleshores $E[\gamma(X)] - E[\gamma(Y)] \geq 0$. Per tant, $E[\gamma(X)] \geq E[\gamma(Y)]$ (i, en particular, $E[X] \geq E[Y]$).

Dominància en termes de la taxa de risc

La **taxa de risc** d'una funció de distribució F (la qual suposem definida a $[0, \omega]$), correspon a la funció $\lambda : [0, \omega) \to \mathbb{R}^+$ definida com

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Intuïtivament, si F representa la probabilitat que un esdeveniment passi abans d'un temps x, aleshores la taxa de risc a x representa la probabilitat que l'esdeveniment passi just a x donat que no hagi passat fins tal moment. Fixem-nos que, si $x \to \omega$, aleshores $\lambda(x) \to \infty$.

Suposem, doncs, que F i G són dues distribucions amb taxes de risc λ_F i λ_G respectivament. Aleshores, si per tota x fixada es satisfà $\lambda_F(x) \leq \lambda_G(x)$, diem que F *domina a G en termes de la taxa de risc.* Vegem ara que això implica també que F domina a G en termes de dominància estocàstica de primer ordre:

La funció de $\lambda(x)$ es pot escriure equivalentment com:

$$-\lambda(x) = \frac{d}{dx} \ln(1 - F(x))$$

Per tant, si aïllem $F(x)$ (integrant i aplicant l'exponencial a banda i banda), arribem a:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(s)\, ds\right)$$

Això implica, com volíem veure, que

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda_F(s)\, ds\right) \leq 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda_G(s)\, ds\right) = G(x)$$

Dominància en termes de la taxa de risc inversa

La **taxa de risc inversa** d'una funció de distribució F (la qual suposem definida a $[0, \omega]$), correspon a la funció $\sigma : (0, \omega] \to \mathbb{R}^+$ definida com

$$\sigma(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

Intuïtivament, es pot interpretar com la probabilitat que un esdeveniment passi just en un temps x sabent que ha passat en un temps menor o igual que x. És a dir, es podria pensar com el concepte de taxa de risc però amb el temps anant a la inversa.

Suposem, doncs, que F i G són dues distribucions amb taxes de risc inverses σ_F i σ_G respectivament. Aleshores, si per tota x fixada es satisfà $\sigma_F(x) \geq \sigma_G(x)$, diem que F *domina a G en termes de la taxa de risc inversa.* Vegem ara que això implica també que F domina a G en termes de dominància estocàstica de primer ordre:

La funció de $\sigma(x)$ es pot escriure equivalentment com:

$$\sigma(x) = \frac{d}{dx} \ln(F(x))$$

Per tant, si aïllem $F(x)$ (integrant i aplicant l'exponencial a banda i banda), arribem a:

$$F(x) = \exp\left(-\int_x^\omega \sigma(s)\, ds\right)$$

Això implica, com volíem veure, que

$$F(x) = \exp\left(-\int_x^\omega \sigma_F(s)\, ds\right) \leq \exp\left(-\int_x^\omega \sigma_G(s)\, ds\right) = G(x)$$

2.4 Estadístics d'ordre

Un altre concepte molt utilitzat al llarg d'aquest treball és el d'estadístic d'ordre. Com veurem, apareixeran en repetides ocasions el *màxim estadístic d'ordre*, l'*estadístic d'ordre 2* i també el *mínim estadístic d'ordre* (veure [1])

Siguin $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes associades a la funció de distribució F, amb densitat f. Denotem per $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, ..., Y_n^{(n)}$ l'ordenació d'aquestes, de manera que $Y_1^{(n)} \geq Y_2^{(n)} \geq ... \geq Y_n^{(n)}$. Així doncs, ens referirem a les variables aleatòries $Y_k^{(n)}$, $k = 1, 2, ..., n$, com **estadístics d'ordre**, i denotem per $F_k^{(n)}$ i $f_k^{(n)}$ a les corresponents funcions de distribució i de densitat.

Per tal de simplificar la notació, sempre que el nombre de variables aleatòries estigui fixat a n i no hi hagi ambigüitat, escriurem Y_k en lloc de $Y_k^{(n)}$, F_k en lloc de $F_k^{(n)}$ i f_k en lloc de $f_k^{(n)}$.

Màxim estadístic d'ordre

Trobar la distribució del màxim estadístic d'ordre Y_1 no resulta una tasca complicada. Si es dona el cas en què $Y_1 \leq y$, aleshores sabem que tota la resta de variables aleatòries són també menors o iguals a y (ja que Y_1 és el màxim d'aquestes). Així doncs, tenim:

$$F_1(y) = P(Y_1 \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) = F(y)^n$$

on hem usat que cada X_k és independent i idènticament distribuïda, i està associada a la mateixa distribució F. La corresponent funció de densitat és, per definició, la derivada de F_1. Això és:

$$f_1(y) = nF(y)^{n-1} f(y)$$

Estadístic d'ordre 2

Anem a calcular la distribució de l'estadístic d'ordre 2, Y_2. Per tal que es doni $Y_2 \leq y$, s'ha de donar algun dels dos casos següents: o bé totes les X_k són més petites o iguals que y; o bé $n-1$ de les X_k són més petites o iguals a y, i una d'elles és més gran que y. Aquesta última situació es pot donar de n maneres diferents. Per tant, tenim:

$$\begin{aligned}
F_2(y) = P(Y_2 \leq y) &= P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) + \\
&+ P(X_1 > y, X_2 \leq y, ..., X_n \leq y) + ... + \\
&+ P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, ..., X_n > y) = \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) + \sum_{i=1}^{n} P(X_i > y) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P(X_j \leq y) = \\
&= F(y)^n + n(1 - F(y))F(y)^{n-1} = F(y)^n + nF(y)^{n-1} - nF(y)^n = \\
&= nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n
\end{aligned}$$

on, altra vegada, hem usat que cada X_k és independent i idènticament distribuïda, i està associada a la mateixa distribució F. La corresponent funció de densitat és, per definició, la derivada de F_1. Això és:

$$f_2(y) = n(n-1)F(y)^{n-2}f(y) - n(n-1)F(y)^{n-1}f(y) =$$
$$= n(n-1)F(y)^{n-2}f(y)(1-F(y))$$

Observació 2.1. Fixem-nos que la funció de densitat $f_2^{(n)}(y)$ que acabem de trobar es pot reescriure en funció de $f_1^{(n-1)} = (n-1)F(y)^{n-2}f(y)$ tal i com segueix:

$$f_2(y) = n(1-F(y))f_1^{(n-1)}(y)$$

Observació 2.2. Fixem-nos també que $F_2^{(n)}(y)$ es pot reescriure en termes de $F_1^{(n)}(y) = F(y)^n$ i de $F_1^{(n-1)}(y) = F(y)^{n-1}$ de la següent manera:

$$F_2^{(n)}(y) = nF_1^{(n-1)}(y) - (n-1)F_1^{(n)}(y)$$

Per tant, derivant:

$$f_2^{(n)}(y) = nf_1^{(n-1)}(y) - (n-1)f_1^{(n)}(y)$$

Mínim estadístic d'ordre

Trobar la funció de distribució del mínim estadístic d'ordre Y_n no és tan directe com en el cas del màxim estadístic d'ordre. Ara, si es dona el cas en què $Y_n \leq y$, no ens dona informació sobre si la resta de variables aleatòries són menors o majors que y. El que sí sabem és el contrari: si $Y_n > y$, aleshores tota la resta de variables aleatòries són també majors que y. És a dir:

$$P(Y_n > y) = P(X_1 > y, ..., X_n > y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n}(1 - P(X_i \leq y)) = (1-F(y))^n$$

on hem usat que cada X_k és independent i idènticament distribuïda, i està associada a la mateixa distribució F. Per tant, la distribució del mínim estadístic d'ordre és:

$$F_n(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - (1-F(y))^n$$

La funció de densitat s'obté fent la derivada de F_n, que correspon a:

$$f_n(y) = n\,(1-F(y))^{n-1}f(y)$$

2.5 Nocions de Teoria de Jocs

En Teoria de Jocs, un joc és una situació governada per unes regles o normes on diversos jugadors han de prendre decisions per arribar a un resultat. En tot joc hi ha una interacció estratègica, és a dir, el resultat depèn tant de la pròpia estratègia triada com de l'estratègia que segueixen els altres jugadors. L'objectiu d'aquesta branca de les matemàtiques és, doncs, trobar quina és la millor estratègia a seguir per cada jugador (suposant que són racionals), la qual maximitzarà la utilitat obtinguda. A partir dels capítols 1 i 3 de [4], ens centrarem en els anomenats *jocs simultanis* (en els que les accions o estratègies es realitzen de forma simultània), ja que principalment parlarem de subhastes de sobre tancat.

En aquest context, definim un **joc** com una terna $(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\Pi_i\}_{i \in N})$, els elements del qual són:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$, que correspon al conjunt dels n jugadors.
- S_i, per $i \in N$, que representa el conjunt d'estratègies que pot seguir cada jugador. Denotem per $s_i \in S_i$ a l'estratègia triada pel jugador i.
- $u_i(s_1, ..., s_i, ..., s_n) \in \mathbb{R}$, per $i \in N$, que correspon a la funció d'utilitat del jugador i quan es dona el perfil d'estratègies $(s_1, ..., s_i, ..., s_n) \in S_1 \times ... \times S_i \times ... \times S_n$.

A continuació, definirem dos conceptes molt usats en Teoria de Jocs, els quals influeixen directament en la resolució d'un joc. Aquests són:

- **Estratègia dominant**: Donat un jugador $i \in N$, diem que una estratègia $s_i^* \in S_i$ és estrictament dominant si

  $$u_i(s_1, ..., s_i^*, ..., s_n) > u_i(s_1, ..., s_i, ..., s_n), \, \forall s_i \in S_i, \, s_i \neq s_i^*$$

  És a dir, és una estratègia que fa que la utilitat obtinguda pel jugador i sigui major que la que obtindria triant-ne qualsevol altra, independentment del que facin la resta de jugadors. En el cas que la desigualtat no sigui estricta, direm que s_i^* és una estratègia dèbilment dominant.

- **Equilibri de Nash**: Direm que el perfil d'estratègies $(s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_i \times ... \times S_n$ és un equilibri de Nash si

  $$u_i(s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1, ..., s_i, ..., s_n)$$

  És a dir, un perfil d'estratègies correspon a un equilibri de Nash quan cap jugador té incentius unilaterals de canviar l'estratègia escollida, ja que tots trien l'opció que maximitza la seva utilitat donat el que fa la resta de jugadors. És per tant, la millor opció des d'un punt de vista global.

Fixem-nos que les subhastes que estudiarem al llarg d'aquest treball es poden pensar com un joc, ja que els postors (els jugadors) competeixen mitjançant ofertes (corresponents a les estratègies) per obtenir l'objecte subhastat i aconseguir un cert benefici (que dependrà de la seva funció d'utilitat). Com les valoracions les considerem privades, però, els postors no saben amb certesa quina és la valoració de la resta dels jugadors i, conseqüentment, no coneixen la utilitat que n'extraurien. Aleshores, direm que les subhastes estudiades són **jocs d'informació incompleta** o **jocs bayesians**. Els elements d'un joc bayesià són els següents:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$, que correspon al conjunt dels n jugadors.
- T_i, per $i \in N$, que és el conjunt dels possibles tipus de cada jugador. Denotem per $t_i \in T_i$ al tipus corresponent al jugador i, que es determinarà segons la informació privada que tingui. En les subhastes que estudiem en aquest treball, correspon a les possibles valoracions privades que els postors poden assignar a l'objecte.

- S_i, per $i \in N$, que representa el conjunt d'estratègies que pot seguir cada jugador. Denotem per $s_i \in S_i$ a l'estratègia triada pel jugador i, la qual és una funció del seu tipus. És a dir, $s_i = s_i(t_i)$.

- $p_i((t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n)|t_i) = p_i(t_{-i}|t_i)$, per $i \in N$, $t_i \in T_i$. Representa la distribució de probabilitats que denota les conjectures que té el jugador i sobre els tipus dels rivals, sabent el seu propi tipus.

- $u_i(s_1, ..., s_i, ..., s_n; t_1, ..., t_i, ..., t_n) \in \mathbb{R}$, per $i \in N$, que correspon a la funció d'utilitat del jugador i, que ara depèn del perfil d'estratègies i també dels tipus.

Com hi ha incertesa sobre els tipus dels altres jugadors, el que busca cada un d'ells, doncs, és maximitzar la seva utilitat esperada. Per tant, direm que el perfil d'estratègies $(s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*) \in S_1 \times ... \times S_i \times ... \times S_n$ és un equilibri de Nash si, per tota $i \in N$ i per cada tipus $t_i \in T_i$, la estratègia $s_i^*(t_i)$ és solució de

$$\max_{s_i \in S_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i}|t_i)\, u_i(s_1^*(t_1), ..., s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), ..., s_n^*(t_n); t_1, ..., t_i, ...t_n)$$

3 Subhastes amb valoracions privades

En aquesta part del treball analitzarem la metodologia bàsica de les subhastes amb valoracions privades en les que s'oferta un únic objecte entre n compradors o postors. Per fer-ho, ens basarem principalment en el capítol 2 de [5], a més de la informació que ens proporcionen [6] i [8].

A la secció anterior hem vist que, amb valoracions privades, les subhastes de sobre tancat a primer preu i les subhastes de sobre tancat a segon preu eren estratègicament equivalents a les subhastes holandeses i subhastes angleses respectivament. Per aquesta raó, és suficient centrar-nos en l'estudi dels dos formats de sobre tancat. Començarem la secció introduint uns conceptes previs necessaris per l'estudi:

Cada tipus de subhasta determina, com s'ha vist també en la secció anterior, un joc d'informació incompleta. Així doncs, denotem el conjunt dels n jugadors com $N = \{1, 2, ..., n\}$. Denotem per X_i la variable aleatòria contínua de la que es deriva la valoració x_i del jugador $i \in N$. Considerem, a més, que són independents (per tant, si un jugador té una valoració "elevada", això no afectaria a les probabilitats que la valoració d'un altre jugador fos també "elevada") i que estan idènticament distribuïdes en un interval $[0, \omega] \subseteq [0, \infty)$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, d'acord a la funció de distribució F.[1] En qualsevol cas, s'assumeix que $E[X_i] < \infty$.

Direm que tots els jugadors són *simètrics*, és a dir, que tots són iguals *ex-ante* (cap d'ells té alguna situació d'avantatge respecte els altres), degut al fet que la valoració de cada postor es deriva de la mateixa funció de probabilitat.[2] També, direm que són *neutrals al risc*. En altres paraules, la funció d'utilitat dels postors (la qual representa la satisfacció que obté un consumidor quan gaudeix d'una quantitat determinada de béns o serveis) té una relació lineal amb la funció de beneficis i, per tant, només busquen maximitzar els seus beneficis sense valorar els possibles riscs que se'n poden derivar. A més, suposarem que cada un dels postors té els recursos suficients per pagar, si fos necessari, un preu igual a la seva valoració.

Finalment, la funció que determina una estratègia a seguir per un postor $i \in N$ (és a dir, la funció que determina el preu que ofereix un jugador donat el conjunt de possibles valoracions que pot rebre) la denotem:

$$\begin{aligned} \beta_i : [0, \omega] &\to \mathbb{R}^+ \\ x_i &\mapsto \beta_i(x_i) \end{aligned}$$

3.1 Subhastes a segon preu

Tot i que el format de subhasta a primer preu ens resulta més familiar, l'estudi de les subhastes a segon preu és un bon punt de partida, ja que resulta quelcom més senzill.

En aquest tipus de subhasta, cada postor, $i \in N$, amb valoració $x_i \in [0, \omega]$ presenta un sobre tancat amb una oferta de valor $b_i \in \mathbb{R}^+$. La **funció de beneficis** corresponent

[1] Assumim que admet una funció de densitat contínua $f \equiv F'$

[2] Donat que els jugadors són simètrics, és natural que l'estratègia d'equilibri que busquem sigui també simètrica. Això és, un equilibri en què tots els jugadors segueixen la mateixa estratègia.

al jugador i ve donada per:

$$\Pi_i(b_1,...,b_i,...,b_n) = \begin{cases} x_i - \max_{j\neq i} b_j, & si \quad b_i > \max_{j\neq i} b_j \\ 0, & si \quad b_i < \max_{j\neq i} b_j \\ \frac{x_i - b_i}{\#\{j\in N \ | \ b_j = b_i\}}, & si \quad b_i = \max_{j\neq i} b_j \end{cases}$$

Això és: si b_i és la major oferta, el postor i guanya la subhasta i el seu benefici correspon a la diferència entre la seva valoració de l'objecte i l'oferta més gran d'entre els $n-1$ jugadors restants (que és el preu que ha de pagar). Si b_i és menor que la major oferta d'entre els $n-1$ jugadors restants, no guanya res. I si hi ha un empat, l'assignació de l'objecte es decideix amb la mateixa probabilitat entre els jugadors "guanyadors".

Proposició 3.1. *Per a qualsevol postor racional amb valoració x, en una subhasta de sobre tancat a segon preu licitar segons $\beta^{II}(x) = x$ és una estratègia dèbilment dominant.*

Demostració. Fixant el comportament de la resta de postors, considerarem, sense pèrdua de generalitat, només al postor $i = 1$. Denotem per $p = \max_{j\neq 1} b_j$ l'oferta més alta d'entre la competència. Suposant que el postor 1 ofereix un preu b_1 diferent a la seva valoració, tenim els següents casos:

Si fa una oferta b_1 menor al seu valor x_1 ($b_1 < x_1$):

- Si $b_1 > p$, el postor 1 guanya i continua obtenint els mateixos beneficis que si hagués ofert x_1 (és a dir, $x_1 - p$).
- Si $b_1 < p$, el postor 1 no guanya, igual que hauria passat si hagués ofert x_1 (en el cas que $x_1 < p$). Mentre que deixaria de guanyar i d'obtenir uns beneficis potencials (en el cas que $x_1 \geq p$)!
- Si $b_1 = p$, resulta en un empat, mentre que hagués guanyat segur en el cas que el postor 1 hagués ofert x_1!

Arguments similars serveixen pel cas d'oferir un preu b_1 superior a x_1 ($b_1 > x_1$):

- Si $b_1 > p$, el postor 1 guanya, podent obtenir uns beneficis potencials (en el cas que $x_1 \geq p$), però podria tenir pèrdues (en el cas que $x_1 < p$)!.
- Si $b_1 < p$, el postor 1 no guanya, com hauria passat si hagués ofert x_1.
- Si $b_1 = p$, resulta en un empat, però tindria pèrdues en cas de guanyar l'objecte (ja que $x_1 < b_1 = p$)!

Així doncs, oferir un preu diferent a la pròpia valoració no millora en cap cas la situació. Com hem vist, fer una oferta inferior a x_1 disminueix la probabilitat de guanyar la subhasta. D'altra banda, fer una oferta superior a x_1 pot arribar a provocar pèrdues. Per tant, licitar segons $\beta^{II}(x) = x$ és una estratègia dèbilment dominant.

□

Arran d'aquest resultat, a partir d'ara suposarem que tots els postors segueixen l'estratègia d'oferir un preu igual a la seva valoració.

El nostre pròxim objectiu és saber quin és el **pagament esperat** d'un postor. Per tal de simplificar la notació, ens tornem a centrar, per exemple, en el postor $i = 1$ (recordem que estem suposant que tots els jugadors segueixen la mateixa estratègia).

Denotem per $Y_1 \equiv Y_1^{(n-1)}$ al màxim estadístic d'ordre de $\{X_2, X_3, ..., X_n\}$. En altres paraules: la variable aleatòria que representa el valor més alt d'entre els $n-1$ postors restants (suposant que tots són menors que x). Sigui G la funció de distribució de Y_1. Tenim, aleshores, que $G(y) = F(y)^{n-1}$ i $g(y) = (n-1)F(y)^{n-2}f(y)$.[3]

Proposició 3.2. *En una subhasta de sobre tancat a segon preu, el pagament esperat d'un postor amb valoració x, que denotem per $m^{II}(x)$, es pot escriure com:*

$$m^{II}(x) = G(x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x] \tag{3.1}$$

Demostració. La fórmula es dedueix a partir del producte entre la probabilitat de guanyar i la quantitat a pagar. És a dir, el producte entre la probabilitat que l'oferta del postor 1 sigui la més alta i l'esperança de la segona oferta més alta (preu que paga) condicionada al fet que l'oferta del postor 1 sigui la més alta. D'altra banda, com estem en equilibri simètric, tots els jugadors segueixen l'estratègia d'oferir un preu igual a la seva valoració. Per tant, podem reescriure-ho com el producte entre la probabilitat que la valoració x del postor 1 sigui la més alta i l'esperança de la segona valoració més alta condicionada al fet que la valoració x del jugador 1 sigui la més alta. Això és:

$$m^{II}(x) = P(Y_1 < x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x] = G(x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x]$$

□

Observació 3.3. Recordant que $E[X|X < x] = \frac{1}{F(X)} \int_0^x sf(s)\,ds$, la fórmula del pagament esperat deduïda en la proposició anterior es pot reescriure com:

$$m^{II}(x) = G(x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x] = G(x) \cdot \frac{1}{G(x)} \int_0^x sg(s)\,ds = \int_0^x sg(s)\,ds \tag{3.2}$$

3.2 Subhastes a primer preu

En aquest tipus de subhasta, cada postor, $i \in N$, amb valoració privada $x_i \in [0, \omega]$ presenta un sobre tancat amb una oferta de valor $b_i \in \mathbb{R}^+$. La **funció de beneficis** corresponent al jugador i ve donada per:

$$\Pi_i(b_1, ..., b_i, ..., b_n) = \begin{cases} x_i - b_i, & si \quad b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0, & si \quad b_i < \max_{j \neq i} b_j \\ \frac{x_i - b_i}{\#\{j \in N \mid b_j = b_i\}}, & si \quad b_i = \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

Això és: si b_i és la major oferta, el postor i guanya la subhasta i el seu benefici correspon a la diferència entre la seva valoració de l'objecte i la quantitat que ha ofert (que és el preu que ha de pagar). Si b_i és menor que la major oferta d'entre els $n-1$ jugadors restants, no guanya res. I si hi ha un empat, l'assignació de l'objecte es decideix amb la mateixa probabilitat entre els jugadors "guanyadors".

[3] Veure Secció 2.4

Trobar ara una estratègia β a seguir corresponent a l'equilibri simètric de Nash no és tan senzill com en el cas anterior, ja que no hi ha cap estratègia dominant. Ara, cada postor $i \in N$ s'enfronta al següent dilema: com més gran sigui la seva oferta, més probabilitats tindrà de guanyar. Però, alhora, els seus possibles beneficis es reduiran! El nostre objectiu, doncs, esdevé buscar l'oferta b òptima (és a dir, que maximitzi els beneficis) per un jugador amb una valoració igual a x.

Com hem fet en les subhastes a segon preu, continuem denotant per $Y_1 \equiv Y_1^{(n-1)}$ al màxim estadístic d'ordre de $\{X_2, X_3, ..., X_n\}$. I recordem que, essent G la funció de distribució de Y_1, tenim que $G(y) = F(y)^{n-1}$ i $g(y) = (n-1)F(y)^{n-2}f(y)$. Considerarem, sense pèrdua de generalitat, només al postor $i = 1$ i fixarem el comportament de la resta de postors, suposant que segueixen una estratègia d'equilibri simètric $\beta^I = \beta$ creixent i diferenciable.

Proposició 3.4. *Suposem que tots els postors $j \neq 1$ segueixen una estratègia d'equilibri simètric $\beta^I = \beta$, la qual estem considerant que és una funció creixent. Suposem també que el postor 1, amb una valoració igual a x, ofereix un preu igual a b. Aleshores, el seu benefici esperat es pot escriure com:*

$$\Pi(b, x) = G(\beta^{-1}(b)) \cdot (x - b) \tag{3.3}$$

Demostració. Donat que β és una funció creixent, tenim que $\max_{i\neq 1} \beta(X_i) = \beta(\max_{i\neq 1} X_i)$ $= \beta(Y_1)$. Com el postor 1 guanya sempre que $\beta(Y_1) \leq b$, deduïm que $Y_1 \leq \beta^{-1}(b)$. Tenint això en compte i sabent que el benefici esperat es calcula fent el producte entre la probabilitat de guanyar i el benefici que s'obtindria, tenim:

$$\Pi(b, x) = P(\beta(Y_1) \leq b) \cdot (x - b) = P(Y_1 \leq \beta^{-1}(b)) \cdot (x - b) = G(\beta^{-1}(b)) \cdot (x - b)$$

□

El següent pas és buscar la b que maximitza (3.3) :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \Pi(b)}{\partial b} &= g(\beta^{-1}(b)) \cdot (\beta^{-1}(b))' \cdot (x - b) - G(\beta^{-1}(b)) = \\ &= \frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \cdot (x - b) - G(\beta^{-1}(b)) \end{aligned}$$

On en l'última igualtat hem usat el *Teorema de la Funció Inversa* (tot suposant que $\beta'(x)$ és sempre diferent de 0) per obtenir la derivada de β^{-1}. Com estem en un equilibri simètric, tenim que $b = \beta(x)$ i, per tant, $\beta^{-1}(b) = x$. Reescrivint l'equació:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g(x)}{\beta'(x)} \cdot (x - \beta(x)) - G(x) = \frac{g(x) \cdot x}{\beta'(x)} - \frac{g(x) \cdot \beta(x)}{\beta'(x)} - G(x) = \\ &= g(x) \cdot x - g(x) \cdot \beta(x) - G(x) \cdot \beta'(x) \end{aligned}$$

D'on obtenim:

$$G(x) \cdot \beta'(x) + g(x) \cdot \beta(x) = g(x) \cdot x$$

o equivalentment:

$$\frac{d}{dx}(G(x) \cdot \beta(x)) = g(x) \cdot x\,,$$

equació que correspon a una equació diferencial ordinària de primer ordre amb condició inicial $\beta(0) = 0$.[4] Per tant, resolent-la:

$$G(x) \cdot \beta(x) = \int_0^x g(s) \cdot s\, ds \implies \beta(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x g(s) \cdot s\, ds = E[Y_1 | Y_1 < x]$$

Ens falta comprovar, però, que aquesta estratègia a seguir és realment òptima en el cas que els $n-1$ postors restants segueixin també β. La següent proposició ens mostra que, efectivament, sí correspon a una estratègia d'equilibri simètric:

Proposició 3.5. *En una subhasta de sobre tancat a primer preu, una estratègia d'equilibri simètric per un postor amb una valoració igual a x ve donada per*

$$\beta^I(x) = E[Y_1 | Y_1 < x] \tag{3.4}$$

Demostració. Suposem que tots els jugadors excepte el 1 segueixen l'estratègia $\beta^I = \beta$ esmentada. Veurem que, si el jugador 1 té una valoració igual a x i ofereix una quantitat diferent a la que correspon a $\beta(x)$, mai sortirà beneficiat.

Així doncs, suposem que ofereix un preu igual a b (quantitat que correspondria a la jugada d'un postor que tingués una valoració de z, és a dir, $\beta(z) = b$). Els seus guanys serien (recordem (3.3)):

$$\begin{aligned}\Pi(b,x) = \Pi(\beta(z),x) &= G(\beta^{-1}(\beta(z))) \cdot (x - \beta(z)) = G(z) \cdot (x - \beta(z)) = \\ &= G(z) \cdot x - G(z) \cdot \beta(z) = G(z) \cdot x - G(z) \cdot E[Y_1 | Y_1 < z] = \\ &= G(z) \cdot x - \int_0^z g(s) \cdot s\, ds\end{aligned}$$

Resolem la integral amb el mètode d'integració per parts amb $u = s$, $du = 1$, $dv = g(s)$ i $v = G(s)$:

$$\begin{aligned}\Pi(b,x) &= G(z) \cdot x - \left([s \cdot G(s)]_{s=0}^{s=z} - \int_0^z G(s)\, ds \right) = \\ &= G(z) \cdot x - z \cdot G(z) + \int_0^z G(s)\, ds = \\ &= G(z) \cdot (x - z) + \int_0^z G(s)\, ds\end{aligned}$$

En canvi, si jugués segons $\beta(x)$, els seus guanys serien:

$$\Pi(\beta(x),x) = G(z) \cdot (x - x) + \int_0^x G(s)\, ds = \int_0^x G(s)\, ds$$

Ens falta comprovar que, si no juga segons $\beta(x)$, sempre obtindrà menys beneficis dels que podria arribar a aconseguir. Per fer-ho, observem que $\Pi(\beta(x),x) - \Pi(\beta(z),x) \geq 0$ independentment de si $x \leq z$ o $x \geq z$. Efectivament:

$$\begin{aligned}\Pi(\beta(x),x) - \Pi(\beta(z),x) &= \int_0^x G(s)\, ds - \left(G(z) \cdot (x - z) + \int_0^z G(s)\, ds \right) = \\ &= \int_0^x G(s)\, ds - \int_0^z G(s)\, ds - G(z) \cdot (x - z) = \\ &= G(z) \cdot (z - x) + \int_z^x G(s)\, ds = G(z) \cdot (z - x) - \int_x^z G(s)\, ds\end{aligned}$$

[4] Un postor racional que tingui una valoració de l'objecte igual a 0 mai oferirà un preu positiu, ja que tindria pèrdues en cas de guanyar. El mateix argument serveix per justificar que $\beta(x) \leq x$.

Sabent que $G(x)$ és una funció creixent, tenim:

$$\int_x^z G(s)\,ds \leq \int_x^z G(z)\,ds = G(z)\int_x^z 1\,ds = G(z)\cdot(z-x)$$

Per tant, estem restant a $G(z)\cdot(z-x)$ un element més petit que ell mateix. Conseqüentment: si $x \leq z$, obtenim $\Pi(\beta(x),x) - \Pi(\beta(z),x) \geq 0$, ja que $G(z)\cdot(z-x)$ és un terme positiu; si $x \geq z$, arribem al mateix resultat, ja que ara $G(z)\cdot(z-x)$ és un nombre negatiu al que li estem restant una quantitat més petita (és a dir, un nombre "més negatiu").

Tot això ens porta a dir que el jugador 1 no té incentius d'oferir un preu diferent a $\beta(x)$ i implica, tal i com volíem demostrar, que β és una estratègia d'equilibri simètric.

□

Corol·lari 3.6. *Seguint l'estratègia d'equilibri simètric corresponent a l'equació* (3.4) *en una subhasta de sobre tancat a primer preu, cada postor ofereix un preu per sota de la seva valoració. A més, aquest serà una quantitat major o menor depenent del nombre total de jugadors.*

Demostració. L'estratègia d'equilibri simètric corresponent a l'equació (3.4) es pot expressar com:

$$\begin{aligned}\beta^I(x) = E[Y_1|Y_1 < x] &= \frac{1}{G(x)}\int_0^x s\cdot g(s)\,ds = \\ &= \frac{1}{G(x)}\left(x\cdot G(x) - \int_0^x G(s)\,ds\right) = \\ &= x - \int_0^x \frac{G(s)}{G(x)}\,ds\end{aligned}$$

On en la penúltima igualtat hem resolt la integral mitjançant el mètode d'integració per parts.[5] Això ens mostra que l'oferta és, naturalment, inferior a la valoració x.

Recordem també que $G(x) = F(x)^{n-1}$. Aleshores:

$$\frac{G(s)}{G(x)} = \frac{F(s)^{n-1}}{F(x)^{n-1}} = \left(\frac{F(s)}{F(x)}\right)^{n-1}$$

Notem que, per $s \in [0,x)$, el quocient anterior tendeix a 0 a mesura que n augmenta. Per tant, contra més jugadors hi participin, l'oferta d'equilibri dels jugadors tendirà a x.

□

Un cop trobada aquesta estratègia d'equilibri simètric, anem a calcular quin és el **pagament esperat** d'un postor en aquest tipus de subhastes.

Proposició 3.7. *En una subhasta de sobre tancat a primer preu, el pagament esperat d'un postor amb valoració x, que denotem per $m^I(x)$, es pot escriure com:*

$$m^I(x) = G(x)\cdot E[Y_1|Y_1 < x] \tag{3.5}$$

[5] Procediment anàleg a la integració per parts feta a la demostració de la Proposició 3.5.

Demostració. La fórmula es dedueix a partir del producte entre la probabilitat de guanyar (és a dir, la probabilitat que $\beta(x) > \beta(Y_1)$ o, equivalentment, que $x > Y_1$) i la quantitat a pagar. És a dir:

$$m^I(x) = P(Y_1 < x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x] = G(x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x]$$

□

Observació 3.8. Recuperant l'equació (3.1) corresponent al pagament esperat d'un postor en les subhastes de sobre tancat a segon preu, veiem que aquesta coincideix amb l'equació (3.5). Per tant, el pagament esperat d'un postor és idèntic en ambdues subhastes. És a dir, $m^I(x) = m^{II}(x)$.

3.3 Comparació d'ingressos del venedor

El nostre objectiu actual esdevé comparar els preus de venda (que corresponen als ingressos del venedor) en els dos tipus de subhasta que estem estudiant. Ara, però, usarem la lletra A per tal de referir-nos indistintament a I o a II, donat que acabem de veure que els pagaments esperats d'un postor són idèntics en ambdós casos (veure Observació 3.8.).

Com els ingressos esperats del venedor corresponen a la suma dels pagaments esperats *ex-ante* dels postors (és a dir, abans de conèixer les seves valoracions), arribarem a la conclusió que aquests també coincideixen. Vegem-ho:

El **pagament esperat *ex-ante*** d'un postor en qualsevol de les dues subhastes és:

$$E[m^A(X)] = \int_0^\omega m^A(x) \cdot f(x)\, dx = \int_0^\omega \left(\int_0^x yg(y)\, dy \right) f(x)\, dx$$

on hem recuperat l'equació (3.2) del pagament esperat deduïda en l'observació 3.3.. Ara, intercanviant l'ordre d'integració,[6] obtenim:

$$E[m^A(X)] = \int_0^\omega \left(\int_y^\omega f(x)\, dx \right) yg(y)\, dy = \int_0^\omega (1 - F(y))\, yg(y)\, dy \tag{3.6}$$

Havent trobat quant val el pagament esperat *ex-ante*, ja podem calcular els **ingressos esperats del venedor**. Aquests són n vegades el pagament esperat *ex-ante* d'un postor individual. És a dir:

$$E[R^A] = n \cdot E[m^A(X)] = n \int_0^\omega (1 - F(y))\, yg(y)\, dy$$

Però recordant que la funció de densitat de $Y_2^{(n)}$ (la variable aleatòria que representa el segon valor més alt d'entre els n postors) és

$$f_2^{(n)}(y) = n\,(1 - F(y))\, f_1^{(n-1)}(y) = n\,(1 - F(y))\, g(y)\,,^7$$

[6] La regió d'integració correspon a $\{(x, y)|0 \leq x \leq \omega, 0 \leq y \leq x\}$. Si volem canviar l'ordre d'integració, hem de definir una regió en la qual x depengui de y, en lloc que y depengui de x. El valor de x que maximitza el domini de les y correspon a $x = \omega$, obtenint $0 \leq y \leq \omega$. Ara, prenent la segona desigualtat de la regió d'integració original, obtenim que $y \leq x$. I prenent la primera desigualtat, obtenim que $x \leq \omega$. Així doncs, la nova regió d'integració correspondria a $\{(x, y)|y \leq x \leq \omega, 0 \leq y \leq \omega\}$.

[7] Veure Secció 2.4

aleshores els ingressos esperats del venedor es poden reescriure com:

$$E[R^A] = \int_0^{\omega} y \cdot f_2^{(n)}(y)\, dy = E[Y_2^n] \tag{3.7}$$

Tot el que hem vist en aquest apartat ho resumirem en la següent proposició, que és un cas particular del *Principi d'equivalència d'ingressos* que veurem a la següent secció:

Proposició 3.9. *Si les valoracions dels postors són independents i idènticament distribuïdes, els ingressos esperats per un venedor són* $E(R^A) = E[Y_2^{(n)}]$ *tant en una subhasta de sobre tancat a primer preu com en una subhasta de sobre tancat a segon preu.*

4 Principi d'equivalència d'ingressos

Basant-nos principalment en capítol 3 de [5], a més de [6] i [8], en aquest apartat del treball ens proposem demostrar que la igualtat entre els ingressos esperats d'un venedor es produeix, no només en els dos tipus de subhastes estudiats, sinó que es verifica per tota una classe de subhastes. Comencem, però, amb la següent definició:

Definició 4.1. *Una subhasta es diu que és estàndard si les seves normes dicten que la persona que ofereix el major preu és la que guanya l'objecte.*

Els dos tipus de subhastes en els que hem centrat el nostre estudi, per exemple, comparteixen el fet de ser estàndard. Un exemple d'un mètode no estàndard seria una loteria, ja que la persona que més juga no necessàriament acabarà guanyant l'objecte. Una vegada definit aquest concepte previ, passem a enunciar i demostrar el teorema:

Teorema 4.2. *(Principi d'equivalència d'ingressos) Suposem que les valoracions són privades i que són independents i idènticament distribuïdes. Suposem també que tots els postors són neutrals al risc. Aleshores, qualsevol subhasta estàndard amb un equilibri simètric i creixent, tal que el pagament esperat d'un postor amb valoració zero sigui zero, proporciona els mateixos ingressos esperats pel venedor.*

Demostració. Sigui A una subhasta de forma estàndard, i fixem un equilibri simètric i creixent β de A. Sigui $m^A(x)$ el pagament esperat d'un postor amb valoració x a l'equilibri de la subhasta A, complint $m^A(0) = 0$. Considerem, sense pèrdua de generalitat, només al postor $i = 1$ i suposem que la resta de jugadors segueixen l'estratègia β esmentada.

Si el postor 1 ofereix un preu $\beta(z)$, guanyarà sempre que es compleixi que la seva oferta supera l'oferta més alta d'entre els competidors. És a dir, quan $\beta(z) > \beta(Y_1)$ o, equivalentment, quan $z > Y_1$. Així doncs, el seu benefici esperat (corresponent al producte entre la probabilitat de guanyar i el benefici que obtindria en aquest cas) és:

$$\begin{aligned}\Pi^A(z,x) &= P(Y_1 < z)\cdot(x-\beta(z)) = G(z)\cdot(x-\beta(z)) = \\ &= G(z)x - G(z)\beta(z) = G(z)x - m^A(z)\end{aligned}$$

on, recordant la secció anterior, hem denotat per $G(z) = F(z)^{n-1}$ la funció de distribució de Y_1. Per tal de maximitzar aquests beneficis esperats, calcularem la seva primera derivada i la igualarem a 0:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi^A(z,x) = g(z)x - \frac{d}{dz}m^A(z) = 0$$

Tenint en compte que estem en un equilibri simètric i creixent, el màxim benefici sabem que s'assoleix quan z és igual a la pròpia valoració (és a dir, quan $z = x$). Així doncs, deduïm de la condició anterior que, per qualsevol valoració y:

$$\frac{d}{dy}m^A(y) = g(y)y$$

equació que correspon a una equació diferencial ordinària de primer ordre amb condició inicial $m^A(0) = 0$. Per tant, resolent-la:

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x g(y)y\,dy = 0 + \int_0^x g(y)y\,dy =$$

$$= \int_0^x g(y)y\,dy = G(x) \cdot E[Y_1|Y_1 < x] \tag{4.1}$$

Observem que, degut al fet que $m^A(0) = 0$, la funció $m^A(x)$ trobada no depèn del tipus de subhasta en particular que s'estigui duent a terme. Conseqüentment, arribem a la conclusió que els ingressos esperats pel venedor tampoc depenen del tipus de subhasta A.

$\square$

Observació 4.3. Fixem-nos que el pagament esperat corresponent a l'equació (4.1) és el mateix que el trobat en les subhastes de sobre tancat a primer i segon preu, ja que aquestes pertanyen a un cas particular d'aquest teorema, tal i com havíem comentat.

5 Preus de reserva

Fins ara hem estat assumint que el venedor vendria l'objecte subhastat sigui quin sigui el preu que assoleixi. Però podria donar-se el cas en què el venedor es reserva el dret de no vendre l'objecte si el preu que resulta és inferior a una determinada quantitat. Aquest preu, diguem-li $r > 0$, s'anomena *preu de reserva.* En aquesta secció del treball examinarem els efectes que això té en les subhastes de sobre tancat a primer i segon preu. Per fer-ho, ens basarem principalment en capítol 2 de [5], a més de [6] i [8].

5.1 Preus de reserva en subhastes a segon preu

Suposem que el venedor fixa un preu de reserva $r > 0$. En una subhasta de sobre tancat a segon preu, el fet de posar un preu de reserva no implica cap diferència en l'actitud dels postors: oferir un preu igual a la pròpia valoració continua sent una estratègia dèbilment dominant. Observem, però, que com l'objecte subhastat no es podrà vendre a un preu inferior a r, un postor que tingui una valoració $x < r$ no obtindrà cap benefici participant-hi. Considerem, doncs, un postor amb valoració $x \geq r$.

Si la valoració coincideix amb el preu de reserva, el pagament esperat d'un postor és simplement el producte entre la probabilitat de guanyar i el preu de reserva (ja que, com hem dit, és el preu mínim a pagar independentment de si la segona major oferta és inferior a r). És a dir:

$$m^{II}(x = r, r) = P(Y_1 < x)\, r = P(Y_1 < r)\, r = G(r)\, r$$

Per tant, el pagament esperat d'un postor amb valoració $x \geq r$ resulta ser (recuperant l'equació (3.2)):

$$m^{II}(x, r) = rG(r) + \int_r^x sg(s)\, ds \tag{5.1}$$

5.2 Preus de reserva en subhastes a primer preu

Suposem que el venedor fixa un preu de reserva $r > 0$. Altra vegada, com l'objecte subhastat no es podrà vendre a un preu inferior a r, un postor que tingui una valoració $x < r$ no obtindrà cap benefici participant-hi. Considerem, doncs, un postor amb valoració $x \geq r$.

Per tal de calcular el pagament esperat, necessitem buscar primer quina és la β^I a seguir (el procediment per després veure que realment correspon a una estratègia d'equilibri simètric seria anàleg al dut a terme a la Proposició 3.5.). Aleshores, recuperant l'equació (3.4), i tenint en compte el preu de reserva, tenim:

$$\begin{aligned}
\beta^I(x) &= E[\max\{Y_1, r\} \,|\, Y_1 < x] = \\
&= \frac{1}{G(x)} \int_0^r rg(s)\, ds + \frac{1}{G(x)} \int_r^x sg(s)\, ds = \\
&= \frac{r}{G(x)} \int_0^r g(s)\, ds + \frac{1}{G(x)} \int_r^x sg(s)\, ds = \\
&= \frac{r}{G(x)}\, G(r) + \frac{1}{G(x)} \int_r^x sg(s)\, ds
\end{aligned}$$

Per tant, el pagament esperat d'un postor amb valoració $x \geq r$ resulta ser:

$$m^I(x,r) = P(Y_1 < x) \cdot \beta^I(x) = G(x) \cdot \beta^I(x) = rG(r) + \int_r^x sg(s)\,ds \tag{5.2}$$

Observació 5.1. Veiem que el pagament esperat trobat coincideix amb el pagament esperat (5.1) de les subhastes de sobre tancat a segon preu en les que hi ha preu de reserva. Així doncs, els ingressos esperats pel venedor són també iguals. Per tant, es reafirma el resultat obtingut al Proposició 3.9, també quan hi ha preu de reserva.

5.3 Efecte dels preus de reserva en els ingressos esperats del venedor

En aquest apartat, atès que acabem de veure que els pagaments esperats coincideixen, tornarem a denotar indistintament per A a les subhastes de primer i segon preu. Amb un procediment anàleg al dut a terme per obtenir (3.6), tenim que el pagament esperat *ex-ante* d'un postor és ara:

$$\begin{aligned}
E[m^A(X,r)] &= \int_r^\omega m^A(x,r)f(x)\,dx = \\
&= \int_r^\omega \left(rG(r) + \int_r^x yg(y)\,dy\right) f(x)\,dx = \\
&= \int_r^\omega \left(f(x)rG(r) + f(x)\int_r^x yg(y)\,dy\right) dx = \\
&= rG(r)\int_r^\omega f(x) + \int_r^\omega \left(\int_r^x yg(y)\,dy\right) f(x)\,dx = \\
&= rG(r)(1-F(r)) + \int_r^\omega \left(\int_y^\omega f(x)\,dx\right) yg(y)\,dy = \\
&= rG(r)(1-F(r)) + \int_r^\omega (1-F(y))\,yg(y)\,dy
\end{aligned}$$

El nostre objectiu actual esdevé trobar què ha de complir el preu de reserva, r, òptim a fixar pel venedor. És a dir, el que maximitzi els seus ingressos. Suposem, doncs, que el venedor atribueix a l'objecte un valor igual a $x_0 \in [0,\omega)$. És a dir, que si l'objecte finalment no es ven, el venedor obtindria un guany de valor x_0 derivat de la seva possessió o del seu ús. Clarament, mai fixarà un preu de reserva $r < x_0$ per tal d'evitar possibles pèrdues. Per tant, els beneficis esperats pel venedor (que denotarem per Π_0, com si el venedor fos el jugador 0) al fixar un preu de reserva $r \geq x_0$ són:

$$\begin{aligned}
\Pi_0(x_0,r) &= n \cdot E[m^A(X,r)] + F(r)^n x_0 = \\
&= n\left(rG(r)(1-F(r)) + \int_r^\omega (1-F(y))\,yg(y)\,dy\right) + F(r)^n x_0
\end{aligned}$$

resultat de sumar n vegades el pagament esperat *ex-ante* d'un postor individual amb el producte entre la probabilitat que tots els jugadors tinguin una valoració inferior a r i la pròpia valoració x_0 del venedor. Per tal de trobar la r que maximitza l'expressió anterior, derivant-la respecte a r obtenim:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi_0}{dr}(x_0,r) &= n\,[G(r)(1-F(r)) - rG(r)f(r)] + n\,F(r)^{n-1}f(r)\,x_0 = \\
&= n\,G(r)\,[1-F(r)-rf(r)] + n\,G(r)f(r)\,x_0 = \\
&= n\,G(r)\,[1-F(r)-rf(r)+f(r)\,x_0] = \\
&= n\,G(r)\,[1-F(r)-(r-x_0)f(r)]
\end{aligned}$$

on hem usat, recordem, que $G(r) = F(r)^{n-1}$. Per tal de simplificar la notació, definim $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$.[8] Per tant, reescrivint la derivada anterior:

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(x_0, r) = n\,G(r)(1 - F(r))\left[1 - (r - x_0)\frac{f(r)}{1 - F(r)}\right] =$$

$$= n\,G(r)(1 - F(r))\,[1 - (r - x_0)\lambda(r)] \tag{5.3}$$

Proposició 5.2. *Un venedor que vulgui maximitzar els seus ingressos sempre fixarà un preu de reserva, r, que sobrepassi la seva pròpia valoració, x_0, de l'objecte.*

Demostració. Suposem primer que $x_0 > 0$. En aquest cas, tornant a l'equació (5.3), si $r = x_0$ tenim:

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(x_0, r = x_0) = n\,G(x_0)(1 - F(x_0))$$

Com $n > 0$, $0 < G(x_0) < 1$ i $0 < (1 - F(x_0)) < 1$, tenim que la derivada és positiva. Per tant, en aquest cas Π_0 és creixent. Aleshores, el venedor sortiria beneficiat fixant un preu de reserva $r > x_0$.

Suposem ara que $x_0 = 0$. En el cas que $r = x_0 = 0$, tenim:

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(0, 0) = n\,G(0)(1 - F(0)) = 0$$

És a dir, que fixar un preu de reserva igual a 0 quan $x_0 = 0$ és un possible candidat a ser un mínim de la funció de beneficis. Comprovem si realment ho és, mirant si la derivada és creixent quan $r = 0 + \epsilon$:

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(0, r) = n\,G(r)(1 - F(r))\,[1 - r\lambda(r)]$$

Això és positiu sempre que $(1 - r\lambda(r)) > 0$, és a dir, quan $\lambda(r) < \frac{1}{r}$. Com r és proper a 0, és equivalent a dir que, sempre que $\lambda(r)$ estigui acotada, fixar $r = 0$ suposaria obtenir uns beneficis mínims. Per tant, fixar un preu de reserva més gran que la pròpia valoració torna a suposar un increment en els ingressos del venedor.

□

Tornant a la primera derivada (5.3), observem que només és igual a 0 quan es compleix $[1 - (r - x_0)\lambda(r)] = 0$ (ja que els altres termes són estrictament positius). D'aquí deduïm que el preu de reserva òptim, r^*, necessàriament ha de complir de manera implícita:

$$(r^* - x_0)\lambda(r^*) = 1$$

o equivalentment,

$$r^* - \frac{1}{\lambda(r^*)} = x_0 \tag{5.4}$$

Finalment, anem a veure quina seria una condició suficient per tal que es maximitzin els beneficis. Per fer-ho, calcularem la segona derivada de Π_0 i l'avaluarem a (5.4) per

[8] Noti's que coincideix amb la fórmula corresponent al concepte de *taxa de risc* (veure Secció 2.3)

trobar què s'ha de complir perquè aquesta sigui més petita que 0. La segona derivada la calculem derivant (5.3) respecte a r, obtenint:

$$n\left([g(r)(1-F(r))-G(r)f(r)]\,[1-(r-x_0)\lambda(r)]+\right.$$
$$\left.+G(r)(1-F(r))\left[-\lambda'(r)(r-x_0)-\lambda(r)\right]\right)$$

Avaluant-ho a (5.4), tenim:

$$n\,G(r)(1-F(r))\left[-\lambda'(r)\left(r-r+\frac{1}{\lambda(r)}\right)-\lambda(r)\right]=$$
$$=-\,n\,G(r)(1-F(r))\left[\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}+\lambda(r)\right]$$

Aleshores, que aquesta expressió sigui més petita que 0 implica:

$$-\,n\,G(r)(1-F(r))\left[\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}+\lambda(r)\right]<0 \iff n\,G(r)(1-F(r))\left[\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}+\lambda(r)\right]>0$$
$$\iff \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}+\lambda(r)>0 \iff \lambda'(r)>0$$

Veiem, doncs, que el fet que $\lambda(r)$ sigui creixent, és una condició suficient per tal que es maximitzin els beneficis del venedor.

Observació 5.3. Fixem-nos que l'equació (5.4) que ha de complir necessàriament el preu de reserva òptim no depèn del nombre de jugadors. Intuïtivament això té sentit, ja que el preu de reserva només influeix quan hi ha un únic jugador amb una valoració superior a tal preu de reserva: en una subhasta a primer preu, només importa que l'oferta del jugador que guanya estigui per sobre de r^* (si la resta d'ofertes són inferiors, no afecta); en una subhasta a segon preu, el preu de reserva entra en joc només quan $Y_1 < r$ (ja que si es igual o superior, tampoc afecta).

6 Extensions del principi d'equivalència d'ingressos

En aquesta nova secció estudiarem els efectes que resulten de la relaxació de les premisses del principi d'equivalència d'ingressos en les subhastes amb valoracions privades. Així doncs, basant-nos en el capítol 4 de [5], veurem les conseqüències derivades del fet que els jugadors siguin adversos al risc, de la presència de limitacions en el pressupost dels postors i també de la presència d'asimetries. Per tal d'aïllar els efectes de cada suposició, però, estudiarem cada cas per separat tot mantenint intactes la resta de premisses.

6.1 Postors adversos al risc

Un postor advers al risc és aquell que prefereix evitar la incertesa en el resultat de les seves operacions financeres. Per ells, les possibles pèrdues tenen més pes que els possibles guanys, raó per la qual la funció d'utilitat és una funció estrictament còncava dels beneficis que obtindrien (tenen una utilitat marginal decreixent). Suposem en aquest apartat, doncs, que cada postor té una *funció d'utilitat*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

que satisfà $u(0) = 0$, $u' > 0$ i $u'' < 0$. El que busquem ara és maximitzar la utilitat esperada dels postors en lloc dels beneficis esperats.

Proposició 6.1. *Suposem que tots els postors són adversos al risc i que tenen la mateixa funció d'utilitat. Aleshores, si les valoracions són simètriques i independents, els ingressos esperats pel venedor en una subhasta de sobre tancat a primer preu són més grans que en una subhasta de sobre tancat a segon preu.*

Demostració. En primer lloc, observem que l'aversió al risc no suposa cap diferència en les subhastes de sobre tancat a segon preu: oferir un preu igual a la pròpia valoració segueix sent una estratègia dèbilment dominant. Com a conseqüència, el preu esperat coincideix amb el que resultaria en una subhasta on els postors són neutrals al risc.

Estudiem ara què passa en les subhastes de sobre tancat a primer preu. Suposem que existeix una estratègia d'equilibri creixent i diferenciable donada per la funció

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \omega] &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \gamma(x) \end{aligned}$$

que satisfà $\gamma(0) = 0$. Considerem, sense pèrdua de generalitat, només al postor $i = 1$, el qual té una valoració igual a x, i suposem que la resta de jugadors segueixen l'estratègia γ esmentada. Si el postor 1 ofereix un preu $\gamma(z)$, guanyarà sempre que es compleixi que la seva oferta supera l'oferta més alta d'entre els competidors. És a dir, quan $\gamma(z) > \gamma(Y_1)$ o, equivalentment, quan $z > Y_1$. Així doncs, la seva utilitat esperada (corresponent al producte entre la probabilitat de guanyar i la utilitat que obtindria en aquest cas) és:

$$P(Y_1 < z) \cdot u(x - \gamma(z)) = G(z) \cdot u(x - \gamma(z))$$

on, recordant la secció anterior, hem denotat per $G(z) = F(z)^{n-1}$ la funció de distribució de Y_1. Per tal de maximitzar-la, calcularem la seva primera derivada respecte a z i la igualarem a 0, obtenint:

$$g(z) \cdot u(x - \gamma(z)) - G(z) \cdot u'(x - \gamma(z)) \cdot \gamma'(z) = 0$$

Tenint en compte que estem en un equilibri simètric i creixent, la màxima utilitat sabem que s'assoleix quan z és igual a la pròpia valoració (és a dir, quan $z = x$). Per tant, reescrivint l'equació:

$$g(x) \cdot u(x - \gamma(x)) - G(x) \cdot u'(x - \gamma(x)) \cdot \gamma'(x) = 0 \implies$$
$$g(x) \cdot u(x - \gamma(x)) = G(x) \cdot u'(x - \gamma(x)) \cdot \gamma'(x)$$

Ara, aïllant $\gamma'(x)$, tenim:

$$\gamma'(x) = \frac{u(x - \gamma(x))}{u'(x - \gamma(x))} \cdot \frac{g(x)}{G(x)} \tag{6.1}$$

Fixem-nos que, degut al fet que u és una funció estrictament còncava complint $u(0) = 0$, sabem que, per tot $y > 0$, se satisfà $\frac{u(y)}{u'(y)} > y$.[9] Utilitzant aquesta propietat, tenim:

$$\gamma'(x) = \frac{u(x - \gamma(x))}{u'(x - \gamma(x))} \cdot \frac{g(x)}{G(x)} > (x - \gamma(x)) \cdot \frac{g(x)}{G(x)} \tag{6.2}$$

D'altra banda, en el cas d'haver-hi neutralitat al risc (és a dir, quan $u(x) = x$), és fàcil veure que l'equació (6.1) seria:

$$\beta'(x) = (x - \beta(x)) \cdot \frac{g(x)}{G(x)} \tag{6.3}$$

on $\beta(x)$ recordem que denota l'estratègia d'equilibri quan els postors són neutrals al risc.

Per tal d'acabar la demostració, usarem el mètode de reducció a l'absurd. Suposarem primer que $\beta(x) > \gamma(x)$. Fent servir (6.2) i (6.3) obtenim:

$$\gamma'(x) > (x - \gamma(x)) \cdot \frac{g(x)}{G(x)} > (x - \beta(x)) \cdot \frac{g(x)}{G(x)} = \beta'(x)$$

Resumint, si $\beta(x)$ i $\gamma(x)$ corresponen a les estratègies d'equilibri simètric en una subhasta a primer preu amb postors neutrals al risc i postors adversos al risc respectivament, tenim:

$$\beta(x) > \gamma(x) \implies \gamma'(x) > \beta'(x) \tag{6.4}$$

Però tenint en compte que $\beta(0) = \gamma(0) = 0$ i observant la Figura 1, veiem que (6.4) suposa una contradicció: si realment $\beta(x) > \gamma(x)$, aleshores hauríem de tenir $\beta'(x) > \gamma'(x)$!

D'altra banda, si suposem que $\beta(x) = \gamma(x)$, tenim:

$$\gamma'(x) > (x - \gamma(x)) \cdot \frac{g(x)}{G(x)} = (x - \beta(x)) \cdot \frac{g(x)}{G(x)} = \beta'(x)$$

d'on obtenim també que $\gamma'(x) > \beta'(x)$, arribant a la mateixa contradicció.

Així doncs, tots aquests arguments impliquen que, per tot $x > 0$, es compleix:

$$\gamma(x) > \beta(x)$$

[9] Per definició, una funció estrictament còncava compleix que, donats dos punts qualssevol del domini, el segment que els uneix sempre queda per sota de la corba. Així doncs, per $y > 0$, la recta secant a u que passa pels punts $(0, 0)$ i $(y, u(y))$ té pendent $\frac{u(y)-u(0)}{y-0} = \frac{u(y)}{y}$. D'altra banda, es podria observar gràficament que $u'(y)$ (és a dir, el pendent de la recta tangent a u en un punt y), sempre és clarament més petit que el pendent de la recta secant esmentada. D'aquí deduïm directament que $\frac{u(y)}{u'(y)} > y$.

És a dir, l'aversió al risc provoca un increment en l'estratègia d'equilibri d'una subhasta de sobre tancat a primer preu. Sabent, a més, que aquest fet no afecta a les subhastes de sobre tancat a segon preu, arribem a la conclusió que els ingressos esperats pel venedor en una subhasta a primer preu són majors als d'una subhasta a segon preu.

□

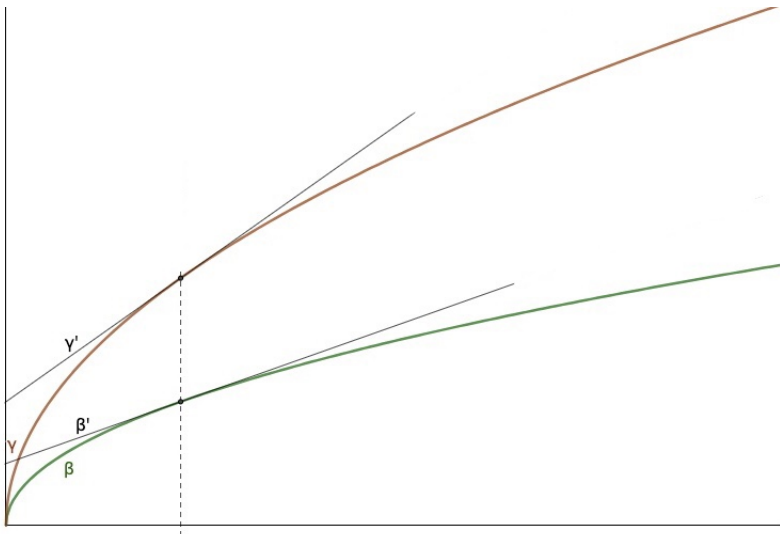

Figura 1: Gràfica de dues funcions estrictament còncaves

Observació 6.2. El fet que l'aversió al risc suposi un augment en les ofertes d'una subhasta de sobre tancat a primer preu es pot veure també de forma intuïtiva. Considerem a un postor en particular (diguem-ne el 1) amb valoració x. Suposem que ofereix un preu b i fixem l'estratègia de la resta de jugadors. Suposem ara, però, que el jugador 1 es planteja oferir un preu quelcom més baix (per exemple $b - \Delta$). En el cas de guanyar la subhasta, obtindria un guany extra igual a Δ. D'altra banda, aquesta reducció de preu podria arribar a causar que perdés! Degut al fet que, per un postor advers al risc les possibles pèrdues tenen més pes que els possibles guanys, el fet d'oferir un preu més elevat que algú neutral al risc es podria veure com si el postor "pagués una assegurança" contra la possibilitat de perdre.

6.2 Limitacions pressupostàries

Fins ara havíem estat suposant que els postors sempre disposaven dels diners necessaris per pagar un preu, si fos el cas, igual a la seva valoració. En aquest apartat, però, ens preguntem com la presència de limitacions en el pressupost afecta a les estratègies d'equilibri i als guanys del venedor en les subhastes de sobre tancat a primer i segon preu.

Ara, cada postor $i \in N$ té un tipus (X_i, W_i). És a dir, els jugadors continuen assignant a l'objecte un valor de X_i tal i com passava en les seccions anteriors. Però, a més, cada un compta amb un pressupost màxim de W_i. Per tant, un postor amb una parella de valors (x_i, w_i) no podrà oferir de cap manera un preu superior al seu w_i. Considerarem que, en cas de fer-ho i guanyar, se li imposaria també una petita penalització per no haver pogut pagar un preu igual a la seva oferta. Les parelles valoració-pressupost (X_i, W_i)

assumirem que són independents i estan idènticament distribuïdes a $[0,1] \times [0,1]$ d'acord amb la funció f.[10]

Per acabar, la funció que determina una estratègia a seguir per un postor $i \in N$ (és a dir, la funció que determina el preu que ofereix un jugador donat el conjunt de les possibles parelles valoració-pressupost que pot tenir) la denotem:

$$\begin{aligned} B_i : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{R}^+ \\ (x_i, w_i) &\mapsto B_i(x_i, w_i) \end{aligned}$$

6.2.1 Subhastes a segon preu

Començarem l'anàlisi considerant les subhastes de sobre tancat a segon preu. En aquest cas, una estratègia d'equilibri a seguir pels postors la trobem a la següent proposició:

Proposició 6.3. *Per a qualsevol postor racional amb una valoració x de l'objecte i una limitació pressupostària igual a w, en una subhasta de sobre tancat a segon preu licitar segons $B^{II}(x,w) = \min\{x,w\}$ és una estratègia dominant.*

Demostració. Per començar, volem veure que, efectivament, licitar un preu superior al pressupost no seria racional. Per fer-ho, suposarem que el postor i guanya oferint un preu superior a w_i. Ens podem trobar en les següents situacions:

- Si la segona major oferta (que correspon al preu que ha de pagar) és inferior a w_i, el postor i hagués pogut guanyar igualment oferint un preu igual al seu pressupost.
- Si, en canvi, la segona major oferta és superior a w_i, no disposarà dels diners necessaris i, a més, haurà de pagar una penalització.

Per tant, com a molt, un postor racional oferirà un preu igual a w_i. Una vegada vist això, anem a comprovar que l'estratègia esmentada és dominant:

- Suposem primer que $x_i \leq w_i$. En aquest cas, la limitació de pressupost no influeix i oferir un preu igual a la pròpia valoració continua sent una estratègia dèbilment dominant, tal i com havíem comprovat a la Proposició 3.1..
- Suposem ara que $x_i > w_i$. Clarament, no seria racional oferir un preu igual a la pròpia valoració pels arguments vists al principi d'aquesta demostració. D'altra banda, arguments similars al cas anterior ens mostren que licitar w_i domina qualsevol oferta inferior.

□

Per cada tipus (x,w), podem definir $x'' = \min\{x,w\}$. Si considerem ara un postor que tingui el tipus $(x'',1)$, aquest mai s'enfronta a un problema de limitació pressupostària (recordem que ambdós valors es mouen a l'interval $[0,1]$!). Però, fixem-nos que, com $\min\{x'',1\} = x'' = \min\{x,w\}$, tenim que $B^{II}(x,w) = B^{II}(x'',1)$. És a dir, que tots dos

[10] Assumim que la independència dels tipus se satisfà entre els postors. Sí que s'admet, però, una correlació entre la valoració i el pressupost d'un mateix postor.

postors ofereixen exactament el mateix preu (el postor amb tipus $(x'', 1)$ és, per així dir-ho, el més ric dels postors amb tipus (x, w) tals que $x'' = \min\{x, w\}$). Per tant, podem despreocupar-nos de les limitacions en el pressupost tot considerant només al postor amb tipus $(x'', 1)$. A la Figura 2, es representa el conjunt dels tipus que liciten una oferta igual a la del tipus (x, w). Aquests són tots els que es troben sobre la corba Leontief de traça fina, la cantonada de la qual es troba sobre la diagonal.

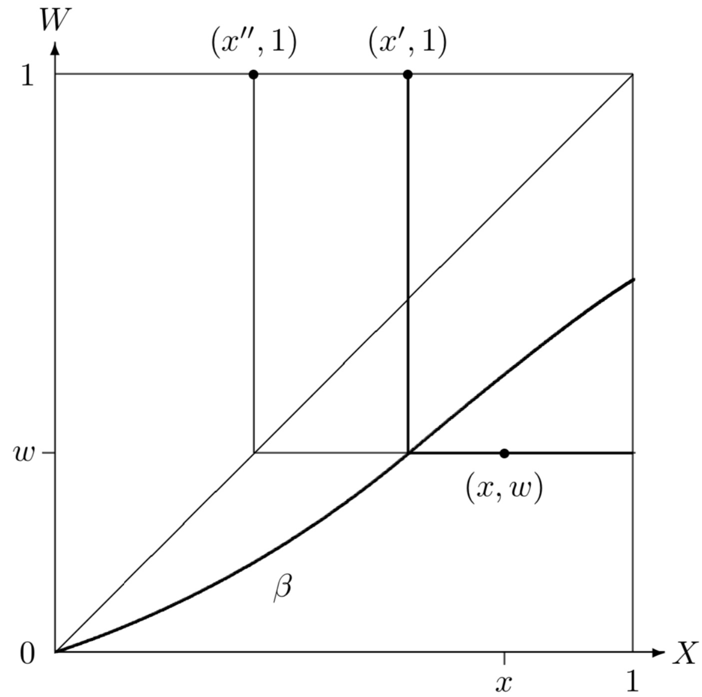

Figura 2: Ofertes en subhastes a primer i segon preu amb limitacions pressupostàries

Definim ara el conjunt de tipus que ofereixen un preu inferior al del tipus $(x'', 1)$ com:

$$\mathcal{L}^{II}(x'') = \{(X, W) : B^{II}(X, W) < B^{II}(x'', 1)\} \tag{6.5}$$

Així, ja podem definir la probabilitat que l'oferta d'un postor amb tipus $(x'', 1)$ sobrepassi l'oferta d'*un* altre postor com:

$$F^{II}(x'') = \int_{\mathcal{L}^{II}(x'')} f(X, W)dXdW \tag{6.6}$$

Per tant, la probabilitat que el postor amb tipus $(x'', 1)$ guanyi la subhasta és, directament,

$$G^{II}(x'') \equiv (F^{II}(x''))^{n-1} \tag{6.7}$$

Una vegada hem trobat l'estratègia a seguir i la probabilitat de guanyar la subhasta per un postor amb tipus $(x'', 1)$, podem passar a calcular quin és el benefici esperat quan aquest fa una oferta $B^{II}(z, 1) = z$. Sabent que correspon a la diferència entre el valor esperat i el pagament esperat (que denotem per $m^{II}(z, 1)$), tenim:

$$G^{II}(z)x'' - m^{II}(z, 1)$$

Per trobar l'expressió de $m^{II}(z,1)$ que maximitza aquests beneficis esperats, seguirem un procediment anàleg al dut a terme en la demostració del Teorema 4.2.. Per tant, calcularem la primera derivada respecte a z i la igualarem a 0, obtenint:

$$g^{II}(z)x'' - \frac{d}{dz}m^{II}(z,1) = 0$$

Tenint en compte que estem en un equilibri simètric i creixent, el màxim benefici sabem que s'assoleix quan s'ofereix $B^{II}(x'',1) = x''$. Així doncs, deduïm de la condició anterior que, per qualsevol tipus $(y,1)$:

$$\frac{d}{dy}m^{II}(y,1) = g^{II}(y)y$$

equació que correspon a una equació diferencial ordinària de primer ordre amb condició inicial $m^{II}(0,1) = 0$. Per tant, resolent-la:

$$m^{II}(x'',1) = \int_0^{x''} g^{II}(y)y\,dy \tag{6.8}$$

on g^{II} és la funció de densitat associada a G^{II}. Finalment, volem calcular els ingressos esperats del venedor. Per fer-ho, farem uns càlculs anàlegs als realitzats en l'apartat 3.3..

El pagament esperat *ex-ante* d'un postor en aquest cas és:

$$\begin{aligned}
E[m^{II}(X'',1)] &= \int_0^1 m^{II}(x'',1)\cdot f^{II}(x'')\,dx'' = \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{x''} yg^{II}(y)\,dy\right) f^{II}(x'')\,dx'' = \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^1 f^{II}(x'')\,dx''\right) yg^{II}(y)\,dy = \\
&= \int_0^1 (1 - F^{II}(y))\,yg^{II}(y)\,dy \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Per tant, els ingressos esperats del venedor són:

$$\begin{aligned}
E[R^{II}] = n\cdot E[m^{II}(X'',1)] &= n\int_0^1 (1 - F^{II}(y))\,yg^{II}(y)\,dy = \\
&= \int_0^1 y\,n(1 - F^{II}(y))g^{II}(y)\,dy = E[Y_2^{II(n)}] \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

6.2.2 Subhastes a primer preu

En una subhasta de sobre tancat a primer preu on els postors tenen limitacions de pressupost podem garantir també l'existència d'un equilibri simètric. Per tant, en aquest apartat suposarem, sense entrar en més detall, que n'existeix un i que és de la forma:

$$B^I(x,w) = \min\{\beta(x), w\} \tag{6.11}$$

on $\beta(x)$ és una funció creixent, corresponent a l'equilibri trobat en el cas que no hi hagi cap limitació de pressupost. Com sempre, si els postors són racionals, ha de complir-se que $\beta(x) < x$.

Com hem fet en les subhastes a segon preu, per cada tipus (x, w) definirem x' com la valoració d'un postor tal que $\beta(x') = \min\{\beta(x), w\}$ i considerarem només al postor de tipus $(x', 1)$ (que, com abans, sabem que no presenta cap limitació pressupostària). Altra vegada, com $\min\{\beta(x'), 1\} = \beta(x') = \min\{\beta(x), w\}$, tenim que $B^I(x, w) = B^I(x', 1)$. És a dir, que tots dos postors ofereixen exactament el mateix preu. A la Figura 2, també es representa el conjunt dels tipus que liciten una oferta igual a la del tipus (x, w) en les subhastes a primer preu. Aquests són tots els que es troben sobre la corba Leontief de traça gruixuda, la cantonada de la qual es troba sobre la corba β.

Definint el conjunt de tipus que ofereixen un preu inferior al del tipus $(x', 1)$ com:

$$\mathcal{L}^I(x') = \{(X, W) : B^I(X, W) < B^I(x', 1)\} \tag{6.12}$$

podem trobar, de manera anàloga al que hem fet a les subhastes a segon preu, les expressions de F^I, G^I i m^I:

$$F^I(x') = \int_{\mathcal{L}^I(x')} f(X, W) dX dW \tag{6.13}$$

$$G^I(x') \equiv (F^I(x'))^{n-1} \tag{6.14}$$

$$m^I(x', 1) = \int_0^{x'} g^I(y) y \, dy \tag{6.15}$$

Els mateixos raonaments també ens serveixen per demostrar que el pagament esperat *ex-ante* d'un postor és:

$$E[m^I(X', 1)] = \int_0^1 (1 - F^I(y)) \, y g^I(y) \, dy \tag{6.16}$$

i, per tant, obtenim que els ingressos esperats del venedor són ara:

$$E[R^I] = n \cdot E[m^I(X', 1)] = E[Y_2^{I(n)}] \tag{6.17}$$

6.2.3 Comparació d'ingressos del venedor

L'objectiu d'aquest apartat esdevé comparar els ingressos esperats pel venedor en els dos tipus de subhastes estudiats quan hi ha presència de limitacions pressupostàries. Vegem-ho, doncs, a la següent proposició:

Proposició 6.4. *Suposem que tots els postors tenen limitacions en el seu pressupost. Si la subhasta de sobre tancat a primer preu té un equilibri simètric de la forma* $B^I(x, w) = \min\{\beta(x), w\}$*, aleshores els ingressos esperats pel venedor en aquest cas són majors que els esperats en una subhasta de sobre tancat a segon preu.*

Demostració. Recuperant les definicions de $\mathcal{L}^{II}(x)$ i $\mathcal{L}^I(x)$ (corresponents a les equacions (6.5) i (6.12)) i degut al fet que per tota x fixada se satisfà $\beta(x) < x$, observem que aleshores es compleix $\mathcal{L}^I(x) \subset \mathcal{L}^{II}(x)$. Tenint això en compte, podem deduir a partir de les equacions (6.6) i (6.13) que, per tota x fixada, $F^I(x) \leq F^{II}(x)$. D'aquesta manera, acabem de demostrar que F^I domina estocàsticament a F^{II}.[11] Per tant, com volíem veure, això implica:

$$E[Y_2^{I(n)}] > E[Y_2^{II(n)}]$$

□

[11] Veure Secció 2.3

6.3 Asimetries entre els postors

En aquest apartat considerarem situacions en què els postors són asimètrics. És a dir, subhastes en les que els jugadors no són iguals *ex-ante*, degut al fet que les diferents valoracions es deriven de funcions de distribució diferents.

Altra vegada, aquest fet no influeix en el comportament dels postors en les subhastes de sobre tancat a segon preu, ja que oferir un preu igual a la pròpia valoració continua sent una estratègia dèbilment dominant. A les subhastes de sobre tancat a primer preu, però, l'estudi es complica considerablement. La raó és que, tot i que sabem que ha d'existir un equilibri, no sempre és possible donar-ne una expressió explícita. I, per tant, fer comparacions amb les subhastes a segon preu és difícil. Per mantenir els càlculs relativament simples, ens centrarem en el cas on només hi ha dos postors.

6.3.1 Subhastes a primer preu amb dos postors asimètrics

Suposem que hi ha dos postors amb valoracions X_1 i X_2, les quals estan independentment distribuïdes d'acord a les funcions F_1 sobre $[0, \omega_1]$ i F_2 sobre $[0, \omega_2]$, respectivament. Suposem que existeix un equilibri en el que els dos postors segueixen les estratègies β_1 i β_2, respectivament. Suposem, a més, que aquestes són creixents i diferenciables i tenen inverses $\phi_1 \equiv \beta_1^{-1}$ i $\phi_2 \equiv \beta_2^{-1}$, respectivament.

Clarament, per qualsevol postor racional es satisfà $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$, ja que altrament podria tenir pèrdues. A més, tenim $\beta_1(\omega_1) = \beta_2(\omega_2)$. Això ho podem justificar de la següent manera: si, per exemple, $\beta_1(\omega_1) > \beta_2(\omega_2)$ el jugador 1 guanyarà amb probabilitat 1 quan la seva valoració sigui ω_1, però pagaria més del que necessitaria (podria augmentar els seus beneficis oferint un preu quelcom menor a $\beta_1(\omega_1)$). Denotem, per tant, a la màxima oferta comú entre els dos postors com:

$$\bar{b} \equiv \beta_1(\omega_1) = \beta_2(\omega_2) \tag{6.18}$$

Donat que el jugador $j = 1, 2$ segueix l'estratègia β_j, el benefici esperat del postor $i \neq j$ quan la seva valoració és x_i i ofereix un preu $\beta_i(x_i) = b < \bar{b}$ és:

$$\begin{aligned} \Pi_i(b, x_i) &= P(\beta_j(X_j) < b)(x_i - b) = \\ &= P(X_j < \phi_j(b))(x_i - b) = \\ &= F_j(\phi_j(b))(x_i - b) \end{aligned}$$

Per tal de maximitzar aquests beneficis, escrivim la condició de primer ordre:

$$\begin{aligned} & f_j(\phi_j(b))\, \phi_j'(b)(x_i - b) - F_j(\phi_j(b)) = 0 \\ \Longrightarrow \;& f_j(\phi_j(b))\, \phi_j'(b)(x_i - b) = F_j(\phi_j(b)) \\ \Longrightarrow \;& f_j(\phi_j(b))\, \phi_j'(b)(\phi_i(b) - b) = F_j(\phi_j(b)) \end{aligned} \tag{6.19}$$

On hem usat que, com $\beta_i(x_i) = b$, aleshores $x_i = \phi_i(b)$. Això ara ho podem reescriure de la següent manera:

$$\phi_j'(b) = \frac{F_j(\phi_j(b))}{f_j(\phi_j(b))} \frac{1}{(\phi_i(b) - b)} \tag{6.20}$$

Fent el mateix per l'altre postor (arribaríem al mateix resultat, només canviant les i per les j, i viceversa), obtenim un sistema d'equacions diferencials, juntament amb les condicions inicials $\phi_i(0) = \phi_j(0) = 0$. Desafortunadament, però, només podem arribar a una solució explícita en alguns casos especials (com en l'exemple que veurem més endavant).[12] En comptes d'això, deduirem algunes propietats d'aquestes estratègies d'equilibri.

La "debilitat" causa "agressió"

Suposem que les valoracions del postor 1 son "estocàsticament més altes" que les del jugador 2. En particular, suposarem que la distribució F_1 *domina* F_2 *en termes de la taxa de risc inversa.*[13] Això és, $\omega_1 \geq \omega_2$ i per tota $x \in (0, \omega_2)$ fixada es satisfà:

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)} > \frac{f_2(x)}{F_2(x)} \tag{6.21}$$

Si això es compleix, direm que el postor 1 és el jugador "fort" i el postor 2 és el "dèbil".

Proposició 6.5. *Suposem que la distribució de les valoracions del postor* 1 *domina la del postor* 2 *en termes de la taxa de risc inversa. Aleshores, en una subhasta de sobre tancat a primer preu, el postor "dèbil"* 2 *licita de manera més agressiva que el postor "fort"* 1. *És a dir, fixada qualsevol $x \in (0, \omega_2)$, es compleix:*

$$\beta_1(x) < \beta_2(x)$$

Demostració. Començarem comprovant un argument que ens servirà més endavant en aquesta demostració. Observem que si existeix una c tal que $0 < c < \bar{b}$ i $\phi_1(c) = \phi_2(c) \equiv z$, aleshores (6.20) i (6.21) (que es pot escriure com $\frac{F_1(x)}{f_1(x)} < \frac{F_2(x)}{f_2(x)}$) impliquen:

$$\phi_2'(c) = \frac{F_2(z)}{f_2(z)} \frac{1}{(z-c)} > \frac{F_1(z)}{f_1(z)} \frac{1}{(z-c)} = \phi_1'(c)$$

Aplicant el *Teorema de la Funció Inversa*, sabem que, per $i = 1, 2$,

$$\phi_i'(c) = (\beta_i^{-1}(c))' = \frac{1}{\beta_i'(\phi_i(c))} = \frac{1}{\beta_i'(z)}$$

Per tant, la desigualtat anterior és equivalent a dir que, si existeix una z tal que $\beta_1(z) = \beta_2(z)$, aleshores $\beta_1'(z) > \beta_2'(z)$. En altres paraules, si les corbes β_1 i β_2 s'intersequen en algun moment, aleshores la primera té un pendent més gran que la segona (i això implica que intersequen, com a molt, una vegada).

Ara, procedirem a demostrar la proposició amb el mètode de reducció a l'absurd. Per tant, suposarem que existeix una $x \in (0, \omega_2)$ tal que $\beta_1(x) \geq \beta_2(x)$. Això implica que, o bé β_1 i β_2 mai intersequen (la desigualtat és sempre estricta); o bé intersequen únicament (pel que hem vist abans) en algun valor $z \in (0, \omega_2)$ i, aleshores, per tota x tal que $z < x < \omega_2$, tenim $\beta_1(x) > \beta_2(x)$. En qualsevol de les dues situacions, veiem que s'ha de complir $\beta_1(x) > \beta_2(x)$ per tota x propera a ω_2.

[12] El *Teorema Fonamental d'equacions diferencials* ens dona condicions suficients per demostrar l'existència i unicitat de la solució del sistema. La dificultat en aquest cas es troba, però, a la condició inicial (quan $b = 0$), ja que la segona fracció de (6.20) resulta ser $\frac{0}{0}$. Per tant, com el teorema requereix que es compleixi la condició Lipschitz, no es pot aplicar directament. De totes formes, aquestes dificultats es poden resoldre, tal i com van demostrar Plum (1992) i Lebrun (1999).

[13] Veure Secció 2.3

Com F_1 domina F_2 en termes de la taxa de risc inversa, tenim que $\omega_1 \geq \omega_2$. Així doncs, tenim dos casos:

- En el cas que $\omega_1 > \omega_2$, i recordant (6.18), sabem que $\beta_1(\omega_1) = \beta_2(\omega_2)$. Per tant, tenim $\beta_1(\omega_2) < \beta_2(\omega_2)$. Això, però, contradiu el fet que $\beta_1(x) > \beta_2(x)$ per tota x propera a ω_2.

- Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, sabem que $\beta_1(\omega) = \beta_2(\omega) = \bar{b}$. Com estem suposant que es satisfà $\beta_1(x) > \beta_2(x)$ per tota x propera a ω, aleshores es compleix també $\phi_1(b) < \phi_2(b)$ per tota b propera a $\bar{b}$. Això, juntament amb el fet que F_1 domina estocàsticament a F_2,[14] implica:

  $$H_1(b) = F_1(\phi_1(b)) \leq F_2(\phi_2(b)) = H_2(b)$$

  on hem definit $H_i(\cdot) \equiv F_i(\phi_i(\cdot))$ com la funció de distribució de les ofertes del jugador $i = 1, 2$. Definida d'aquesta manera, tenim que $H_1(\bar{b}) = H_2(\bar{b}) = 1$. Ara, perquè es compleixin ambdues coses, en b properes a $\bar{b}$ ha de passar que H_1 tingui un pendent més gran que H_2. Per tant, deduïm que $h_1(b) > h_2(b)$ (on $h_i(\cdot) = H_i'(\cdot) = f_i(\phi_i(\cdot))\, \phi_i'(\cdot)$ és la funció de densitat de les ofertes del jugador $i = 1, 2$).

  Recuperant (6.19), podem reescriure l'equació usant les funcions de distribució i de densitat de les ofertes dels jugadors que acabem de definir:

  $$h_j(b)(\phi_i(b) - b) = H_j(b)$$

  d'on deduïm:

  $$\phi_i(b) = \frac{H_j(b)}{h_j(b)} + b$$

  Per tant, (usant això i les desigualtats trobades per H_i i h_i) obtenim que, per tota b propera a $\bar{b}$:

  $$\phi_1(b) = \frac{H_2(b)}{h_2(b)} + b > \frac{H_1(b)}{h_1(b)} + b = \phi_2(b)$$

  Cosa que resulta contradictori, ja que teníem $\phi_1(b) < \phi_2(b)$.

En conclusió, fixat qualsevol $x \in (0, \omega_2)$, es compleix $\beta_1(x) < \beta_2(x)$, com volíem veure.

$\square$

Distribucions uniformes asimètriques

En una subhasta a primer preu on les dues valoracions segueixen una distribució uniforme asimètrica, trobar una estratègia d'equilibri explícita sí és possible. Suposem, doncs, que la valoració X_1 del postor 1 està uniformement distribuïda a $[0, \omega_1]$, i que la valoració X_2 del postor 2 està uniformement distribuïda a $[0, \omega_2]$. Suposem també que $\omega_1 \geq \omega_2$. Per tant, per $i = 1, 2$, podem escriure la funció de distribució que segueixen ($F_i(x) = \frac{x}{\omega_i}$) i també la seva funció de densitat ($f_i(x) = \frac{1}{\omega_i}$). Aleshores, per $i = 1, 2$, $j \neq i$ i per tota $b \in (0, \bar{b})$, la condició de primer ordre (6.20) es pot simplificar de la següent manera:

$$\phi_i'(b) = \frac{\frac{\phi_i(b)}{\omega_i}}{\frac{1}{\omega_i}} \frac{1}{\phi_j(b) - b} \implies \phi_i'(b) = \frac{\phi_i(b)}{\phi_j(b) - b} \tag{6.22}$$

[14] Com hem vist a la Secció 2.3, el fet que F_1 domini F_2 en termes de la taxa de risc inversa implica que F_1 domina estocàsticament a F_2. Aleshores, sabem que es compleix $F_1(\phi_2(b)) \leq F_2(\phi_2(b))$. Com tenim que $\phi_1(b) < \phi_2(b)$, llavors deduïm $F_1(\phi_1(b)) \leq F_2(\phi_2(b))$.

que és equivalent a escriure:

$$\begin{aligned}
&\phi_i'(b)(\phi_j(b)-b)=\phi_i(b)\\
\Longrightarrow\ &\phi_i'(b)(\phi_j(b)-b)-(\phi_j(b)-b)=\phi_i(b)-(\phi_j(b)-b)\\
\Longrightarrow\ &(\phi_i'(b)-1)(\phi_j(b)-b)=\phi_i(b)-\phi_j(b)+b
\end{aligned}$$

Sumant les dues equacions (per $i=1,2$ i $j\neq i$), obtenim:

$$\begin{aligned}
&(\phi_1'(b)-1)(\phi_2(b)-b)+(\phi_2'(b)-1)(\phi_1(b)-b)=\phi_1(b)-\phi_2(b)+b+\phi_2(b)-\phi_1(b)+b\\
\Longrightarrow\ &(\phi_1'(b)-1)(\phi_2(b)-b)+(\phi_2'(b)-1)(\phi_1(b)-b)=2b\\
\Longrightarrow\ &\frac{d}{db}((\phi_1(b)-b)(\phi_2(b)-b))=2b
\end{aligned}$$

Per tant, integrar això resulta en:

$$(\phi_1(b)-b)(\phi_2(b)-b)=b^2 \tag{6.23}$$

(La constant d'integració en aquest cas és zero [15]). Usant aquesta igualtat, les equacions corresponents a (6.22) es poden reescriure de la següent manera:

$$\phi_i'(b)=\frac{\phi_i(b)}{\phi_j(b)-b}=\frac{\phi_i(b)(\phi_i(b)-b)}{(\phi_j(b)-b)(\phi_i(b)-b)}=\frac{\phi_i(b)(\phi_i(b)-b)}{b^2} \tag{6.24}$$

tenint l'avantatge que ara les equacions són de variables separades.

A continuació, realitzarem un canvi de variables. Amb aquest objectiu, definim $\xi_i(b)$ implícitament com:

$$\phi_i(b)-b=\xi_i(b)b \tag{6.25}$$

d'on, reescrivint, deduïm $\phi_i(b)=\xi_i(b)b+b=b(\xi_i(b)+1)$. Derivant-ho respecte a b, tenim:

$$\phi_i'(b)-1=\xi_i'(b)b+\xi_i(b)$$

d'on deduïm també $\phi_i'(b)=\xi_i'(b)b+\xi_i(b)+1$. Usant tot això, l'equació diferencial (6.24) queda de la següent forma:

$$\begin{aligned}
&\xi_i'(b)b+\xi_i(b)+1=\frac{b(\xi_i(b)+1)\xi_i(b)b}{b^2}\ \Longrightarrow\ \xi_i'(b)b+\xi_i(b)+1=(\xi_i(b)+1)\xi_i(b)\\
\Longrightarrow\ &\xi_i'(b)b+\xi_i(b)+1=\xi_i(b)^2+\xi_i(b)\ \Longrightarrow\ \xi_i'(b)=\frac{\xi_i(b)^2-1}{b}\\
\Longrightarrow\ &\frac{\xi_i'(b)}{\xi_i(b)^2-1}=\frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Resolem ara l'equació diferencial:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{\xi_i(b)^2-1}\,d\,\xi_i(b)=\int\frac{1}{b}\,db\\
\Longrightarrow\ &\int\left(\frac{A}{\xi_i(b)+1}+\frac{B}{\xi_i(b)-1}\right)d\,\xi_i(b)=\ln(b)+k_i\\
\Longrightarrow\ &\int\frac{A\xi_i(b)-A+B\xi_i(b)+B}{(\xi_i(b)+1)(\xi_i(b)-1)}\,d\,\xi_i(b)=\ln(b)+k_i
\end{aligned}$$

[15] Quan integrem, obtenim $(\phi_1(b)-b)(\phi_2(b)-b)+k=b^2$. Com sabem que, per $b=0$, es compleix $\phi_i(0)=0$ (per $i=1,2$), tenim $(0-0)(0-0)+k=0$. Per tant, $k=0$.

Solucionant el sistema de variables A i B

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B - A = 1 \end{cases}$$

trobem que $A = -\frac{1}{2}$ i $B = \frac{1}{2}$. Per tant, arribem a:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\ln(\xi_i(b)+1) + \frac{1}{2}\ln(\xi_i(b)-1) &= \ln(b) + k_i \\ \Longrightarrow \ \frac{1}{2}[\ln(\xi_i(b)-1) - \ln(\xi_i(b)+1)] &= \ln(b) + k_i \\ \Longrightarrow \ \ln(\frac{\xi_i(b)-1}{\xi_i(b)+1}) &= \ln(b^2) + k_i \\ \Longrightarrow \ \frac{\xi_i(b)-1}{\xi_i(b)+1} &= b^2 k_i \end{aligned}$$

(La constant d'integració ha anat variant a mesura que es feia algun dels càlculs, però mantenim la notació k_i en tots els casos, ja que continua sent una constant). Aïllant $\xi_i(b)$, obtenim finalment la solució:

$$\begin{aligned} \xi_i(b) = k_i b^2 \xi_i(b) + k_i b^2 + 1 \implies \xi_i(b)[1 - k_i b^2] &= k_i b^2 + 1 \\ \Longrightarrow \ \xi_i(b) &= \frac{1 + k_i b^2}{1 - k_i b^2} \end{aligned}$$

Ara, recuperant (6.25), podem deduir que

$$\xi_i(b) = \frac{\phi_i(b) - b}{b}$$

Per tant, desfent el canvi de variables, ens queda:

$$\begin{aligned} \xi_i(b) = \frac{\phi_i(b) - b}{b} = \frac{1 + k_i b^2}{1 - k_i b^2} \implies \phi_i(b) &= b\,\frac{1 + k_i b^2}{1 - k_i b^2} + b \\ \Longrightarrow \ \phi_i(b) &= b\left(\frac{1 + k_i b^2}{1 - k_i b^2} + 1\right) \\ \Longrightarrow \ \phi_i(b) &= \frac{2b}{1 - k_i b^2} \end{aligned} \tag{6.26}$$

Passem ara a trobar quant val aquesta constant d'integració. Com sabem que $\beta_i(\omega_i) = \bar{b}$ per $i = 1, 2$, aleshores $\phi_i(\bar{b}) = \omega_i$. Amb això, a partir de l'equació (6.23) deduïm:

$$\begin{aligned} (\phi_i(\bar{b}) - \bar{b})(\phi_j(\bar{b}) - \bar{b}) = \bar{b}^2 &\implies (\omega_i - \bar{b})(\omega_j - \bar{b}) = \bar{b}^2 \\ \omega_i\,\omega_j - \bar{b}\,\omega_i - \bar{b}\,\omega_j + \bar{b}^2 = \bar{b}^2 &\implies \bar{b} = \frac{\omega_i\,\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \end{aligned} \tag{6.27}$$

Així doncs, la constant k_i és:

$$\begin{aligned} \phi_i(\bar{b}) = \frac{2\bar{b}}{1 - k_i\bar{b}^2} = \omega_i \implies \frac{2\bar{b}}{\omega_i} = 1 - k_i\bar{b}^2 &\implies \frac{2\omega_j}{\omega_i + \omega_j} = 1 - k_i\frac{\omega_i^2\,\omega_j^2}{(\omega_i + \omega_j)^2} \\ \Longrightarrow \ k_i\frac{\omega_i^2\,\omega_j^2}{(\omega_i + \omega_j)^2} &= 1 - \frac{2\omega_j}{\omega_i + \omega_j} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \\ \Longrightarrow \ k_i &= \frac{\omega_i - \omega_j}{\omega_i + \omega_j}\,\frac{(\omega_i + \omega_j)^2}{\omega_i^2\,\omega_j^2} = \frac{\omega_i^2 - \omega_j^2}{\omega_i^2\,\omega_j^2} \\ \Longrightarrow \ k_i &= \frac{1}{\omega_j^2} - \frac{1}{\omega_i^2} \end{aligned} \tag{6.28}$$

Finalment, les estratègies a seguir les obtenim invertint (6.26). Si la valoració d'un jugador és x i ofereix un preu $\beta(x) = b$, sabem que $\phi(b) = \beta^{-1}(b) = x$. Per tant, per $i = 1, 2$, tenim:

$$x = \frac{2b}{1 - k_i b^2} \implies x k_i b^2 + 2b - x = 0$$

Resolent l'equació de segon grau obtinguda, tenim:

$$b = \beta_i(x) = -\frac{1}{k_i x}\left(1 - \sqrt{1 + k_i x^2}\right) \tag{6.29}$$

(Faltaria veure que, efectivament, aquesta estratègia correspon a l'únic equilibri). Per acabar, fent el mateix per l'altre postor arribaríem a la mateixa expressió, només canviant les i per les j.

La figura 3 representa les estratègies d'equilibri esmentades quan $\omega_1 = \frac{4}{3}$ i $\omega_2 = \frac{4}{5}$.

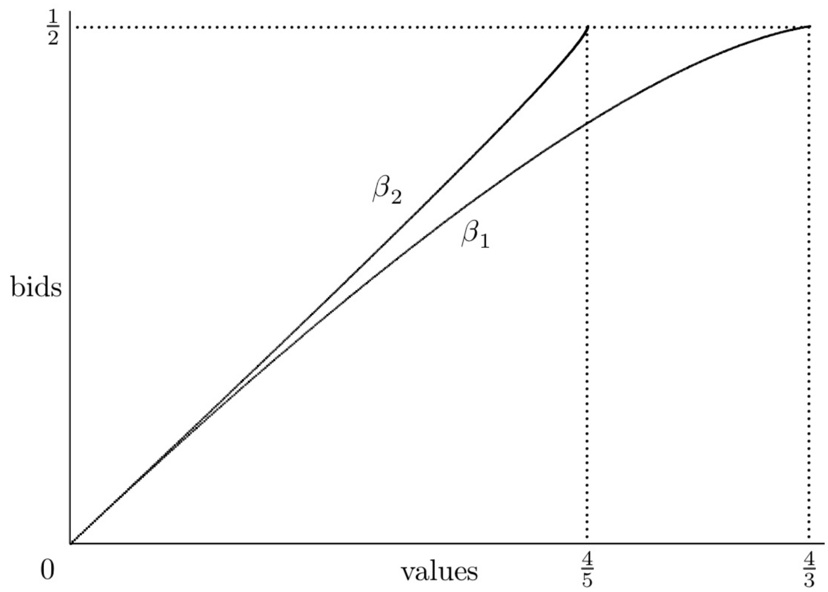

Figura 3: Estratègies d'equilibri amb distribucions uniformes asimètriques

6.3.2 Comparació d'ingressos del venedor

A partir de les estratègies d'equilibri que hem trobat veurem que, per algunes funcions de distribució, els ingressos esperats del venedor en una subhasta a primer preu poden superar els d'una subhasta a segon preu. D'altra banda, també pot passar just el contrari. Vegem-ho en els següents exemples:

Exemple 6.6. *Amb postors asimètrics, els ingressos esperats pel venedor en una subhasta de sobre tancat a primer preu poden superar als d'una subhasta de sobre tancat a segon preu.*

Estudiarem un cas especial de l'exemple on les valoracions dels jugadors segueixen distribucions uniformes diferents. Així doncs, sigui $\alpha \in [0, 1)$. Suposem que la valoració X_1 del postor 1 està uniformement distribuïda a $[0, \frac{1}{1-\alpha}]$, i que la valoració X_2 del postor 2 està uniformement distribuïda a $[0, \frac{1}{1+\alpha}]$.[16] Observem que, per $\alpha = 0$, no hi ha presència

[16] A la figura 3, es representa el cas on $\alpha = \frac{1}{4}$.

d'asimetries i, per tant, els ingressos esperats del venedor són iguals en els dos tipus de subhastes. Ens falta comparar, doncs, els ingressos esperats en quan $\alpha > 0$.

Ingressos en subhastes a segon preu

En subhastes de sobre tancat a segon preu, sabem que oferir un preu igual a la pròpia valoració continua sent una estratègia dèbilment dominant. Per tant, podem definir la distribució del preu de venda de la següent manera:

$$L_\alpha^{II}(p) = P(\min\{X_1, X_2\} \leq p)$$

on $p \in [0, \frac{1}{1+\alpha}]$ (ja que, al ser a segon preu, l'objecte es vendrà com a molt pel menor dels valors màxims que poden prendre X_1 i X_2 respectivament). Aplicant la distribució del mínim[17], tenim:

$$\begin{aligned} L_\alpha^{II}(p) &= 1 - (1 - P(X_1 < p))(1 - P(X_2 < p)) = \\ &= 1 - [1 - P(X_2 < p) - P(X_1 < p) + P(X_1 < p)P(X_2 < p)] = \\ &= P(X_1 < p) + P(X_2 < p) - P(X_1 < p)P(X_2 < p) = \\ &= F_1(p) + F_2(p) - F_1(p)F_2(p) \end{aligned}$$

Usant les fórmules de les funcions de distribució corresponents, obtenim:

$$\begin{aligned} L_\alpha^{II}(p) &= (1-\alpha)p + (1+\alpha)p - (1-\alpha)(1+\alpha)p^2 = \\ &= p - \alpha p + p + \alpha p - (1-\alpha^2)p^2 = \\ &= 2p - (1-\alpha^2)p^2 \end{aligned}$$

que es creixent per α. És a dir, es compleix

$$L_0^{II}(p) < L_\alpha^{II}(p)$$

la qual cosa implica que $L_0^{II}(p)$ domina estocàsticament a $L_\alpha^{II}(p)$. Per tant, sabem que el valor esperat del preu de venda quan $\alpha > 0$ és inferior a quan $\alpha = 0$.[18]

Ingressos en subhastes a primer preu

En subhastes de sobre tancat a primer preu, hem vist que els postors seguiran les estratègies trobades a (6.29). Per tant, podem definir la distribució del preu de venda de la següent manera:

$$L_\alpha^{I}(p) = P(\max\{\beta_1(X_1), \beta_2(X_2)\} \leq p)$$

En aquest cas, com hem definit $\omega_1 = \frac{1}{1-\alpha}$ i $\omega_2 = \frac{1}{1+\alpha}$, tenim que l'oferta màxima que farà qualsevol dels dos postors (recuperant (6.27)) és:

$$\bar{b} = \frac{\frac{1}{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\frac{1+\alpha+1-\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)}} = \frac{1}{2}$$

[17] Veure Secció 2.4

[18] Veure Secció 2.3

Així doncs, tenim que $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Aplicant la distribució del màxim, tenim:

$$\begin{aligned} L^I_\alpha(p) &= P(\beta_1(X_1) \leq p)P(\beta_2(X_2) \leq p) = \\ &= (X_1 \leq \phi_1(p))P(X_2 \leq \phi_2(p)) = \\ &= F_1(\phi_1(p))F_2(\phi_2(p)) \end{aligned}$$

Recordant ara la fórmula de les constants d'integració (corresponent a (6.28)), sabem

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{(\frac{1}{1+\alpha})^2} - \frac{1}{(\frac{1}{1-\alpha})^2} = (1+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2 = 4\alpha \\ k_2 &= \frac{1}{(\frac{1}{1-\alpha})^2} - \frac{1}{(\frac{1}{1+\alpha})^2} = (1-\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 = -4\alpha \end{aligned}$$

i, per tant, les inverses de les estratègies d'equilibri (corresponents a (6.26)) són:

$$\begin{aligned} \phi_1(b) &= \frac{2b}{1-4\alpha b^2} \\ \phi_2(b) &= \frac{2b}{1+4\alpha b^2} \end{aligned}$$

Amb tot això, i usant les fórmules de les funcions de distribució corresponents, la distribució del preu de venda es pot reescriure com:

$$L^I_\alpha(p) = (1-\alpha)\frac{2p}{1-4\alpha p^2} \cdot (1+\alpha)\frac{2p}{1+4\alpha p^2} = \frac{(1-\alpha^2)(2p)^2}{1-\alpha^2(2p)^4}$$

que es decreixent per α. És a dir, es compleix

$$L^{II}_0(p) > L^{II}_\alpha(p)$$

la qual cosa implica que $L^{II}_\alpha(p)$ domina estocàsticament a $L^{II}_0(p)$. Per tant, sabem que el valor esperat del preu de venda quan $\alpha > 0$ és major a quan $\alpha = 0$.

En resum, sabem que per $\alpha = 0$ el preu esperat de venda en els dos tipus de subhasta és el mateix. Però, alhora, un increment en el valor de α fa que el preu esperat en una subhasta a segon preu disminueixi, mentre que fa que augmenti en una subhasta a primer preu. Llavors, hem vist un exemple on, per tota $\alpha > 0$, el preu esperat de venda en una subhasta a primer preu és major al d'una subhasta a segon preu.

Exemple 6.7. *Amb postors asimètrics, els ingressos esperats pel venedor en una subhasta de sobre tancat a segon preu poden superar als d'una subhasta de sobre tancat a primer preu.*

En aquest exemple, veurem un cas on la distribució de les valoracions no és contínua. Així, suposem que la valoració del postor 1 és sempre $X_1 = 2$. La valoració del postor 2, però, pot prendre valors 0 o 2 amb la mateixa probabilitat.

En una subhasta a segon preu, el venedor rebrà un preu igual a la segona major oferta (és a dir, igual a la segona major valoració). Per tant, serà 0 o 2 depenent del valor que prengui la valoració del postor 2. Aleshores, els ingressos esperats del venedor són:

$$2P(X_2 = 2) + 0P(X_2 = 0) = 2P(X_2 = 2) = 2\,\frac{1}{2} = 1$$

Estudiem ara el cas d'una subhasta a primer preu. Si el postor 1 ofereix un preu $b = 0 + \epsilon$, guanya amb una probabilitat no inferior a $\frac{1}{2}$, i obtindria un benefici esperat d'almenys $\frac{1}{2}(2 - \epsilon) = 1 - \epsilon$. Si oferís un preu superior a 1, però, el seu benefici esperat seria inferior a 1. Per tant, mai farà una oferta superior a 1.

D'acord amb el paràgraf anterior, si el postor 2 oferís $1 + \epsilon$ quan la seva valoració és 2, el seu benefici esperat *ex-ante* seria d'almenys $\frac{1}{2}(2 - (1 + \epsilon)) = \frac{1}{2} - \epsilon$.

Aleshores, la suma dels beneficis esperats dels dos postors és, com a mínim, $1 + \frac{1}{2} - \epsilon$. I com ϵ és arbitràriament petit, els ingressos esperats pel venedor (que corresponen a la suma dels pagaments esperats *ex-ante* dels postors) són com a molt $\frac{1}{2}$. Acabem de veure, doncs, un exemple en què els ingressos esperats del venedor en una subhasta a segon preu són superiors als d'una subhasta a primer preu.

Referències

[1] Claudia Castro-Kuriss. Distribución del máximo y del mínimo de una muestra aleatoria de una variable aleatoria x. https://www.researchgate.net/publication/317178846_Distribucion_del_Maximo_y_del_Minimo_de_una_muestra_aleatoria_de_una_variable_aleatoria_X, 05 2017. Research Gate. Visitat el 19-02-2021.

[2] Fundació Enciclopèdia. Enciclopèdia.cat — el cercador de referència en català. https://www.enciclopedia.cat/, 2018. Visitat el 17-06-2021.

[3] Economics Explained. The 2020 nobel prize in economics: Explained. https://www.youtube.com/watch?v=R_wxk7Ihyok&list=LL&index=7&ab_channel=EconomicsExplained, 10 2020. Youtube. Visitat el 08-03-2021.

[4] Robert Gibbons. *Game theory for applied economists.* Princeton University Press, 1992.

[5] Vijay Krishna. *Auction theory.* Academic Press, 2002.

[6] Diego Moreno. Auctions. http://www.eco.uc3m.es/docencia/economiainformacion/notes/auctions.pdf, 04 2016. Universidad Carlos III de Madrid. Visitat el 13-03-2021.

[7] Numberphile. The ideal auction - numberphile. https://www.youtube.com/watch?v=4kWuxfVbIaU&list=LL&index=4&ab_channel=EconomicsExplainedEconomicsExplainedVerified, 11 2017. Youtube. Visitat el 08-03-2021.

[8] Alvaro J. Riascos-Villejas. Teoría de subastas de una Única unidad. http://www.alvaroriascos.com/teoriajuegos/Notas%202%20Subastas.pdf, 03 2019. Visitat el 29-03-2021.

[9] Marta Sanz. *Probabilitats.* Edicions Universitat De Barcelona, 1999.

[10] David Siegel. Module 6. https://www.youtube.com/watch?v=6iE_5y4r2FI&list=LL&index=2&t=663s, 05 2014. Youtube. Visitat el 01-05-2021.

[11] Ernesto J. Veres-Ferrer and Jose M. Pavía. On the relationship between the reversed hazard rate and elasticity. *Statistical Papers*, 55, 08 2012. doi: 10.1007/s00362-012-0470-1, https://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/44372/100305.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Visitat el 14-06-2021.