



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoria de Cues a Educació Secundària i Batxillerat

Autor: David Alsina Trallero

Director: Dr. Sergi Múria Maldonado

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica UB

Barcelona, 19 de juny de 2021

Abstract

The Queueing Theory appeared for reducing waiting time in queues. To be able to answer how to find the waiting time in queues, I study some usual models of queues with a previous brief introduction of some necessary concepts in the first part of this thesis.

In the second part of the thesis, I adapt the Queueing Theory to High School introducing them the Queueing Theory for the first time and finally studying the results achieved.

Resum

La Teoria de Cues va aparèixer per trobar la manera de reduir el temps d'espera en les cues. Per poder donar resposta a com es pot calcular aquest temps d'espera, en la primera part d'aquest treball es fa un estudi d'alguns models usuals de cues amb una breu introducció prèvia d'alguns conceptes necessaris.

En la segona part del treball, es fa una adaptació a 2n d'ESO i 1r de Batxillerat introduint-los-hi la Teoria de Cues per primera vegada i finalment es fa un estudi dels resultats obtinguts.

Agraïments

Vull començar agraint al meu tutor tota l'ajuda, consells i indicacions durant tota la creació d'aquest treball. També vull agrair a l'escola Pare Manyanet de les Corts, la seva cooperació i ajuda per poder portar a terme la part pràctica d'aquest treball i pel seu tracte exemplar amb mi.

Per altra banda m'agradaria fer un agraïment especial al meu professor de Matemàtiques de batxillerat, qui em va canviar la manera de veure les Matemàtiques i em va fer un apassionat d'elles, fins al punt de fer el grau de Matemàtiques. També voldria agrair a la meua família la paciència que ha tingut amb mi durant aquests anys que m'han suposat un canvi de visió i de pensament.

Índex

1	Introducció	1
2	Preàmbul	3
2.1	Procés de Poisson	3
2.2	Procés de Markov	4
2.2.1	Cadenes de Markov (temps discret)	4
2.2.2	Procés de Markov (temps continu)	5
2.2.3	Kolmogorov's Equations	6
2.3	Procés de Naixement i Mort	6
3	Teoria de Cues	9
3.1	Notació Kendall	9
3.2	Llei de Little	11
3.3	M/M/1	12
3.4	M/M/s	15
3.5	Relació entre models M/M/1 i M/M/s	18
3.6	M/M/ ∞	20
3.7	M/M/s/n	22
3.7.1	M/M/1/n	22
3.7.2	M/M/s/s	24
4	Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat	26
4.1	Proposta Didàctica: Teoria de Cues a 2n d'ESO	29
4.2	Proposta Didàctica: Teoria de Cues a 1r de Batxillerat	33
4.3	Resultats	37
4.4	Conclusions Proposta Didàctica	41
5	Conclusions	44
6	ANNEX	48

1 Introducció

Al llarg de la nostra vida quotidiana, tothom patim la pèrdua de temps mentre esperem en una cua, ja sigui per pagar la compra del supermercat, per anar a la perruqueria, per pagar els peatges de les autopistes...

La raó per la qual es produeixen aquestes línies d'espera sembla òbvia: aquestes apareixen quan el nombre d'usuaris supera la capacitat del servei del sistema. També sembla lògic pensar que la cua no només molesta als usuaris que la pateixen, sinó que també als responsables del sistema. Per aquest motiu, és necessari estudiar aquests sistemes amb la finalitat de poder conèixer el seu funcionament i trobar maneres de reduir el temps d'espera o el nombre de clients esperant.

En aquest treball m'he posat el repte d'introduir la Teoria de Cues a diferents nivells de Secundària i Batxillerat, els quals no estan familiaritzats en aquesta branca de les matemàtiques. D'aquesta manera es podrà veure que és possible l'adaptació de conceptes matemàtics a nivells menys elevats del que és habitual.

No va ser fins després de la Segona Guerra Mundial, que l'estudi de la teoria de la probabilitat i els processos estocàstics va obtenir més atenció per part dels matemàtics. Aquesta atenció segueix avui dia, donat que la teoria dels processos estocàstics segueix sent un focus d'investigació.

Tanmateix la primera definició matemàtica d'un procés estocàstic la va donar el matemàtic Khinchin a principis de la dècada de 1930. Anteriorment ja s'havien estudiat processos estocàstics específics en diferents escenaris, com el moviment brownià o el procés de Poisson; un altre procés que es va estudiar van ser els processos de Markov. Aquests porten el nom d'Andrey Markov, qui ho va estudiar a principis del segle XX. A més, tant el moviment brownià com els processos de Poisson, són en concret processos de Markov.

Els processos de Markov es poden dividir segons si el temps és discret o continu. En el cas de processos de Markov a temps discret, aquests són anomenats cadenes de Markov. Les cadenes de Markov tenen aplicacions en processos del món real, entre d'altres es troba la Teoria de Cues.

La Teoria de Cues té els seus orígens l'any 1909, quan el matemàtic Agner Krarup Erlang va publicar un article que tractava sobre els problemes que apareixien en el context de trucades telefòniques. En l'article, va demostrar que si les trucades es realitzaven atzarosament, seguien una distribució de Poisson i també va donar una solució parcial al problema de l'espera.

Motivació

Abans d'escollir estudiar el grau de Matemàtiques, ja m'havia cridat molt l'atenció la possibilitat d'ensenyar a alumnes, nous conceptes matemàtics; ja que, m'agradaria canviar la concepció que es té de les Matemàtiques, la qual es considera una assignatura feixuga. Finalment, quan vaig poder escollir el tema principal del meu treball de final de grau, tenia molt clar que consistiria a portar conceptes nous, a alumnes de diferents nivells i edats. Per aquest motiu, la part principal del meu treball consisteix a introduir la Teoria de Cues a alumnes d'ESO i Batxillerat.

Per altra banda, un dia mirant vídeos a YouTube, vaig veure un que explicava en què consistia la [Teoria de Cues](#), i em va començar a interessar fins a veure que hi havia

l'assignatura de Processos Estocàstics com optativa en el grau de Matemàtiques, la qual he tingut oportunitat de cursar. Aquesta conté tota la introducció necessària prèvia per entendre la Teoria de Cues. Donat que aquesta assignatura m'ha semblat molt interessant i creient que es podria aprofundir molt més; he decidit ampliar més els meus coneixements sobre aquest àmbit. A més, com la Teoria de Cues permet estudiar les línies d'espera i trobar solucions a problemes que ens trobem en la nostra vida diària, fa ús de conceptes menys abstractes i facilita l'explicació a nivells matemàtics menys elevats. Per aquest motiu, aquest treball de final de grau s'endinsa en els conceptes de la Teoria de Cues.

Objectius

Els objectius proposats en aquest treball són els següents:

- Adquirir nous coneixements sobre la Teoria de Cues, ampliant així els ja adquirits a l'assignatura de Processos Estocàstics del Grau de Matemàtiques.
- Introduir la Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat adequant-los-hi els conceptes.
- Confirmar la meua vocació com a docent de matemàtiques després d'haver tingut un primer contacte amb l'alumnat d'ESO i Batxillerat.

Estructura de la Memòria

Per poder donar resposta als meus objectius, he dividit aquest treball en dues parts clarament diferenciades. Tot i que, la primera part és estrictament necessària per poder portar a terme la segona:

- La primera part consta d'una revisió i aprofundiment dels coneixements sobre la Teoria de Cues que posteriorment fonamenten la proposta que s'implementarà a ESO i Batxillerat.
- En la segona part, s'utilitzen els continguts adquirits de la primera part, per fer i portar a terme una proposta d'introducció a la Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat.

2 Preàmbul

En aquesta secció donaré unes quantes definicions prèvies necessàries per entendre posteriorment els temes tractats de Teoria de Cues. Per donar les següents definicions, he agafat com a referència les donades a l'assignatura de processos estocàstics, també aprofitaré per definir notacions i vocabulari del qual faré ús.

Definició 2.1. *Un procés estocàstic amb espai d'estats S és una família $\{X(t) : t \in T\}$ de variables aleatòries $X_t : \Omega \rightarrow S$ indexades per un conjunt T . (En molts casos t representa el temps). El procés es diu que és de temps discret si el conjunt d'índexs T és numerable, i continu en cas contrari.*

En particular, quan $S = \mathbb{R}$ diré que és un procés de valors reals.

Definició 2.2. *Un procés estocàstic $\{X_t : t \in T\}$ amb T subconjunt de $\mathbb{R}$, es diu que té increments independents si per tot $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ les variables aleatòries $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ són independents.*

Definició 2.3. *Un procés estocàstic $\{X_t : t \in T\}$ amb T subconjunt de $\mathbb{R}$, es diu que té increments estacionaris si per tot $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ la llei de la variable aleatòria $X_{t_2} - X_{t_1}$ és la mateixa que la llei de la variable aleatòria $X_{t_2-t_1} - X_0$.*

Definició 2.4. *Segui un procés estocàstic $\{X_t : t \in T\}$ es defineixen les seves distribucions conjuntes en dimensió finita com la família de lleis multidimensionals dels vectors aleatoris $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ per tot $t_1, \dots, t_n \in T$ i per tot $n \geq 1$.*

Una vegada donades les definicions anteriors, es pot destacar que hi ha diversos tipus de processos. Alguns d'ells són:

- Processos de ramificació
- Procés de Poisson
- El moviment brownià
- Processos de Markov

En el treball em centraré en els processos de Markov, ja que tal i com he comentat a la introducció, la Teoria de Cues són casos particulars dels processos de Markov. Prèviament però, és necessari fer uns breus comentaris sobre els processos de Poisson ja que també es tractaran en el treball.

2.1 Procés de Poisson

Definició 2.5. *Un procés de comptatge és un procés aleatori $\{N_t, t \geq 0\}$ no-negatiu i creixent a valors enters, és a dir:*

- $N_0 = 0$ i $N_t \geq 0$ per tot t
- N_t és un enter
- si $s \leq t$, aleshores $N_s \leq N_t$

Definició 2.6. Un procés de comptatge $\{N_t, t \geq 0\}$ es diu que és un procés de Poisson de paràmetre $\lambda > 0$, si:

1. $N_0 = 0$
2. El procés té increments independents
3. Per a tot $s, t \geq 0$, $N_{t+s} - N_t \sim \text{Pois}(\lambda s)$, és a dir

$$P(N_{t+s} - N_t = n) = \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^n}{n!}$$

Es pot veure fàcilment, que per la definició que s'ha donat d'increments estacionaris, l'última propietat diu que té aquests increments estacionaris. De manera que, si combinem $N_0 = 0$ i l'última propietat, s'obté que $N_t \sim \text{Pois}(\lambda t)$.

2.2 Procés de Markov

Fins ara m'he referit a processos de Markov en general, a partir d'ara, quan parli de processos de Markov, faré referència a processos a temps continu, i quan faci referència a processos a temps discret, parlaré de cadenes de Markov.

2.2.1 Cadenes de Markov (temps discret)

Les cadenes de Markov són processos a temps discret $\{X_n\}_{n \geq 1}$, amb dues característiques importants:

- No té memòria del passat, és a dir, per decidir els resultats futurs només observa el present.
- El procés només pot prendre un nombre finit o numerable de valors

Definició 2.7. Una matriu $P = (p_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$ és estocàstica si, i només si,

1. $p_{i,j} \in [0, 1]$ per tot i, j
2. $\sum_{j \in I} p_{i,j} = 1$ per a tot $i \in I$

Definició 2.8. Un procés estocàstic $\{X_n\}_{n \geq 0}$ que pren valors en un conjunt d'estats I , es diu que és una cadena de Markov homogènia amb distribució inicial v i matriu de probabilitats de transició $P = (p_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$ si

1. X_0 té distribució v
2. Per a tot $i_0, \dots, i_{n+1} \in I$ i $n \geq 0$

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = p_{i_n, i_{n+1}}$$

Ara que ja he fet uns breus comentaris sobre les cadenes de Markov, serà més fàcil explicar els processos de Markov.

2.2.2 Procés de Markov (temps continu)

Definició 2.9. Un procés estocàstic $\{X_t, t \in [0, T]\}$ que pren valors en un espai d'estats E numerable, es diu que és un procés de Markov si per tot $s, t \geq 0$ i $j \in E$

$$P(X_{t+s} = j | X_u, u \leq t) = P(X_{t+s} = j | X_t)$$

Quan per a tot $i, j \in E$ i $s, t \geq 0$ es compleix que

$$p_s(i, j) = P(X_{t+s} = j | X_t = i)$$

és independent de $t \geq 0$, es diu que X és un procés de Markov homogeni en temps.

Definició 2.10. S'anomena probabilitat de transició, quan hi ha en un procés de Markov homogeni en temps, que representa la probabilitat de passar d'un estat a un altre en un determinat temps.

Notació. $P_s(i, j) = P(X_{t+s} = j | X_t = i)$

També es pot definir la matriu de probabilitats de transició com la família de matrius

$$P_t = \{P_t(i, j)\}_{(i, j) \in E \times E}$$

Quan es treballa amb un procés de Markov homogeni en temps per tot $i, j \in E$ i $s, t \geq 0$ es tenen les següents tres propietats:

1. $p_t(i, j) \geq 0$
2. $\sum_{k \in E} p_t(i, k) p_s(k, j) = p_{t+s}(i, j)$
3. $\sum_{k \in E} p_t(i, k) = 1$

És interessant també saber que tant per $p_t(i, j)$ com per $p_t(i, i)$ tenen derivada per la dreta al punt $t=0$.

1. per tot $i \in E$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_t(i, i)}{t} := q_i \in [0, \infty]$$

2. per a tot $i, j \in E$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(i, j)}{t} := q_{i, j} < \infty$$

Com que $p_0(i, i) = 1$, per l'apartat 1, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(i, i) - p_0(i, i)}{t} := -q_i$. Com $p_0(i, j) = 0$, per l'apartat 2, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(i, j) - p_0(i, j)}{t} := q_{i, j}$

Definició 2.11. Un estat $i \in E$ s'anomena regular si, i només si, $\begin{cases} q_i < \infty \\ q_i = \sum_{j \neq i} q_{i, j} \end{cases}$

Definició 2.12. S'anomena generador infinitesimal del procés de Markov a temps continu a la matriu A , tal que

$$A := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t - I}{t} = \frac{d}{dt}(P_t)|_{t=0^+}$$

Es pot observar que el procés de Poisson de paràmetre λ és un cas particular d'un procés de Markov. Degut a que, un procés de Poisson té increments independents; de manera que sigui $\{N_t, t \geq 0\}$ un procés de Poisson, aleshores és fàcil veure que:

$$P(N_{t+s} = j | N_u, u \leq t) = P(N_{t+s} = j | N_t)$$

Així doncs, aquest serà un procés de Markov.

Notació. A partir d'ara farem referència a la derivada per la dreta com $p'_{t+}(i, j)$.

2.2.3 Kolmogorov's Equations

Teorema 2.13. Kolmogorov's backward equation (KBE)

Siguin tots els elements de E regulars. Aleshores, per tot $i, j \in E$ i $t \geq 0$

$$p'_{t+}(i, j) = \sum_{k \neq i} p_t(k, j) q_{i,k} - p_t(i, j) q_i = \sum_{k \in E} p_t(k, j) p'_{0+}(i, k)$$

En notació matricial: $\frac{d}{dt} P_t = A P_t$

Teorema 2.14. Kolmogorov's forward equation (KFE)

Sigui $i \in E$ regular i $\sum_{k \in E} p_t(i, k) q_k < \infty$. Aleshores, per a $t \geq 0$

$$p'_{t+}(i, j) = \sum_{k \neq j} p_t(i, k) q_{k,j} - p_t(i, j) q_j = \sum_{k \in E} p_t(i, k) p'_{0+}(k, j)$$

En notació matricial: $\frac{d}{dt} P_t = P_t A$

2.3 Procés de Naixement i Mort

Els processos de Naixement i Mort són un cas particular de processos de Markov, on una de les seves aplicacions més importants és a la Teoria de Cues. Justament aquests processos, seran molt útils per entendre millor la Teoria de Cues.

Les característiques més importants dels processos de Naixement i Mort són:

- Com l'espai d'estats fa referència a la població, aleshores es representarà amb els nombres Naturals
- Donat un $n \in \mathbb{N}$ si es té una població de n individus, al pas d'un cert temps, la població passarà a ser $n+1$ o $n-1$, és a dir, sempre es passarà d'un estat al següent o a l'anterior, però mai saltarà més d'un estat a la vegada.

Quan es digui que hi ha un naixement, es farà referència al fet que la població (n) passa a ser $n+1$, i quan es digui que hi ha una mort es farà referència al fet que la nostra població (n) passa a ser $n-1$.

Definició 2.15. *Es diu que un procés de Naixement i Mort és un procés de Markov $\{X_t, t \geq 0\}$ amb espai d'estats $E = \mathbb{N}$ i probabilitats de transició $P_t(i, j)$.*

A més, les probabilitats de transició compleixen les següents propietats:

- $P_h(i, i+1) = \lambda_i h + o(h), \forall i \in \mathbb{N}$
- $P_h(i, i-1) = \mu_i h + o(h), \forall i \in \mathbb{N}$
- $P_h(i, i) = (1 - \lambda_i + \mu_i)h + o(h), \forall i \in \mathbb{N}$
- $\mu_0 = 0, \lambda_0 \geq 0, \lambda_i, \mu_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$

Els paràmetres λ_i i μ_i s'anomenen els índexs de naixement i mort del procés respectivament.

Es parlarà d'un procés de naixement pur quan hi hagi un procés de naixement i mort amb $\mu_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, és a dir, tots els índexs de mort del procés són 0, per tant no hi haurà mort en el procés, d'aquesta manera es pot dir que la població sempre creixerà o s'estancarà en un nombre n , però mai es reduirà.

Es parlarà d'un procés de mort pur quan es tingui un procés de naixement i mort amb $\lambda_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, és a dir, tots els índexs de naixement del procés són 0, per tant no hi haurà naixement en el procés, d'aquesta manera es pot dir que la població anirà disminuint o s'estancarà en un nombre n , fins com a molt arribar a 0, però mai augmentarà.

El procés de naixement i mort seguirà una distribució exponencial de paràmetre $\lambda_k + \mu_k$ durant el temps que estigui en un estat $k \in \mathbb{N}$.

Es pot observar doncs, que a partir de les quatre propietats de les probabilitats de transició, s'obté:

$$q_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t(i, i) - 1}{t} = \lambda_i + \mu_i$$

$$q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t(i, j) - \delta_{i,j}}{t} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1 \\ \mu_i & j = i-1 \\ 0 & |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

De manera que $q_i = \sum_{j \neq i} q_{i,j}$. Per tant, tots els estats $i \in \mathbb{N}$ són regulars.

Al ser regulars, es pot utilitzar la fórmula KBE i escriure per tot $j \geq 1$:

$$p'_{t+}(0, j) = \lambda_0 p_t(1, j) - \lambda_0 p_t(0, j)$$

$$p'_{t+}(i, j) = \mu_i p_t(i-1, j) - (\lambda_i + \mu_i) p_t(i, j) + \lambda_i p_t(i+1, j), \forall i \geq 1$$

A més, com es compleix que per tot i $\sum_k p_t(i, k) q_k < \infty$ aleshores, es pot escriure també la fórmula de KFE, de manera que per tot $i \geq 1$ s'escriurà:

$$p'_{t+}(i, 0) = -\lambda_0 p_t(i, 0) + \mu_0 p_t(i, 1)$$

$$p'_{t+}(i, j) = \mu_{j+1} p_t(i, j+1) - (\lambda_j + \mu_j) p_t(i, j) + \lambda_{j-1} p_t(i, j-1), \forall j \geq 1$$

Quan un procés estocàstic té la mateixa distribució de probabilitat en tot moment es diu que aquesta distribució és estacionària.

Definició 2.16. *Es diu que una cadena $\{X_t, t \geq 0\}$ té distribució estacionària, si existeix una successió $\{\pi_n\}_n$ tal que:*

•

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

•

$$\pi_i = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j P_{i,j}(t), \forall t \geq 0$$

Si es considerà π com un vector de probabilitats, tal que $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$, es diu que és estacionari pel procés en un temps discret, si qualsevol transició donada per la matriu de probabilitats de transició P_t compleix que $\pi P_t = \pi$.

Es pot construir doncs la distribució estacionària d'un procés de naixement i mort. De manera que es vol trobar el vector π , per això s'utilitzen les següents dues propietats:

1.

$$\pi_0 = (1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_1})^{-1}$$

2.

$$\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_1}, \forall n \geq 1$$

De totes maneres, aquesta distribució estacionària no existirà en tots els processos de naixement i mort, es pot veure que si el sumatori no fos finit, aquest no existiria. De manera que per poder garantir l'existència d'aquesta, s'ha de complir:

$$S_1 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_1} < \infty$$

3 Teoria de Cues

Una vegada ja he introduït tots els continguts necessaris, puc començar amb la part principal de la primera part del treball.

Definició 3.1. *La Teoria de Cues és l'estudi matemàtic de la formació, funció i congestió de les línies d'espera (cues).*

En essència, una situació de cues té dues parts:

- *Algú o alguna cosa que sol·licita un servei, en el treball es farà referència a ell com el client, el treball, la petició o l'usuari.*
- *Algú o alguna cosa que completa o entrega els serveis, en el treball es fa referència a ell com servidor.*

Definició 3.2. *Un sistema de cues és un conjunt de clients que arriba al sistema buscant un servei. Quan no siguin atesos, hi haurà casos que esperaran a ser-ho, i d'altres que no esperaran i abandonaran el sistema.*

3.1 Notació Kendall

Cada sistema tindrà unes propietats/característiques les quals s'utilitzaran per diferenciar-los entre ells i poder estudiar com es comporta el sistema en cada cas.

Les següents característiques seran suficients per descriure els models que explicaré en aquest treball i per utilitzar la notació de Kendall:

- Patró d'arribada dels clients
 - El procés d'arribada es caracteritza per la distribució del temps entre l'arribada de dos clients consecutius, on en general se suposarà que el temps són variables independents idènticament distribuïdes. Per aquest motiu és important saber quina llei de distribució de probabilitat segueix el procés d'arribada. A més, el temps d'arribada entre els clients, pot anar variant, de manera que la variable aleatòria també variaria respecte al temps.
En els casos que l'arribada entre clients es manté constant, es diu que és un cas estacionari.
- Patró de servei dels servidors
 - De la mateixa manera que en el patró d'arribada dels clients, el temps de servei a cada client estarà caracteritzat per una variable aleatòria. Aquesta, se suposarà de nou que són independents idènticament distribuïdes. Aquest patró serà la llei de distribució de probabilitat del temps de servei.
En aquest treball, se suposarà que tant el temps d'arribada com el de servei seran independents.
- Capacitat del sistema
 - La capacitat del sistema, tal com diu la paraula és definit pel nombre màxim de clients que el sistema pot acumular, en aquest nombre també es consideren els clients que estan sent atesos en aquell instant. D'aquesta manera és fàcil

observar que aquesta capacitat pot ser infinita (com la majoria dels casos que es tractaran en aquest treball), o finita.

- Mida de la població

- La mida de la població en el cas d'aquest treball no afectarà en els models de cua que s'explicaran, ja que se suposarà sempre que és infinita. Així i tot, és important veure que aquesta mida podria ser finita, i en aquest cas afectaria el model de cua.

- Disciplina de servei

- La informació que ens aporta la disciplina del servei és l'ordre en el qual els clients de la cua del servei són atesos. Hi ha diferents disciplines de servei, però en el treball només es farà ús de les disciplines FIFO. De totes maneres, algunes de les diferents disciplines més usades habitualment són:

- * FIFO (first in, first out): en aquesta disciplina el primer a arribar és el primer a ser atès.
- * LIFO (last in, first out): en aquesta disciplina l'últim en arribar és el primer a ser atès.
- * RSS (random selection of service): En aquesta disciplina, el servei és aleatori, és a dir, no es té en consideració l'ordre d'arribada.
- * Prioritat: en aquesta disciplina, hi ha un ordre de prioritats, de manera que si arriba un client amb major prioritat que un altre, aquest serà atès abans. Un exemple clar es trobà en les urgències d'un hospital.

És important recordar que la disciplina de servei no afecta als clients que estan sent atesos, únicament afecta als clients que es troben en la línia d'espera.

Una vegada definides les característiques dels diferents models de cues, es pot introduir la notació usada en el treball per fer referència a cada model de cua en particular.

La notació Kendall es basa en les característiques explicades anteriorment, i és la més usada a l'hora de classificar diferents models de cues. A partir d'ara, quan es parli d'un model de cues, es representarà de la següent forma:

$$A/B/c/d/e/F$$

on;

- A: indica el patró d'arribada dels clients
- B: indica el patró de servei dels servidors
- c: indica el nombre de servidors en el sistema, en general en el treball s'usarà la lletra "s" quan hi hagi més d'un servidor.
- d: indica la capacitat del sistema, en aquest treball, quan hi hagi una capacitat limitada s'indicarà amb la lletra "n".
- e: indica la mida de la població
- F: indica la disciplina del servei

En aquest treball només s'estudiaran casos en els quals tant el patró d'arribades com el patró de servei dels servidors segueixen una llei de Poisson. Per expressar que segueixen aquesta llei, s'indicarà amb la lletra "M".

Exemple 3.3. Sigui un model de cues tal que:

- Tant el temps d'arribades com el temps de servei dels servidors segueixen una llei exponencial
- Hi ha un únic servidor
- No hi ha limitació en la capacitat del sistema
- Hi ha una població infinita
- Segueix una disciplina FIFO.

A partir d'aquestes característiques, el model de cues al qual es fa referència és:

$$M/M/1/\infty/\infty/FIFO$$

Notació. En els casos que la capacitat del sistema sigui infinita, la mida de la població també sigui infinita i la disciplina de servei sigui FIFO, s'ometran aquestes característiques en la seva notació. D'aquesta manera, en l'exemple usat anteriorment, el model de cues s'indicarà de la següent forma: $M/M/1$.

La Teoria de Cues, tal i com he comentat a la introducció, té el seu origen quan s'intenta trobar la manera de reduir el temps d'espera en una cua. En aquest treball, s'estudiaran els diferents models per demostrar d'on sorgeixen les fórmules usades per saber el nombre esperat de clients en una cua i en el sistema i també el temps esperat d'espera en la cua i en el sistema. Sabent aquestes dades d'una cua, es podrien buscar maneres de solucionar els problemes de congestió d'una cua, el qual resultaria molt útil pels responsables del sistema.

És fàcil veure que hi ha molts models de cues diferents que es poden estudiar. En aquest treball es treballaran quatre models diferents, tots ells amb població infinita i disciplina FIFO.

3.2 Llei de Little

La llei de Little és un dels resultats fonamentals de la Teoria de Cues. Aquesta llei estableix una relació entre 3 variables:

- La taxa d'entrada d'usuaris en un sistema λ
- El nombre esperat d'usuaris en el mateix sistema $E[N]$
- El temps esperat d'espera en la totalitat del sistema $E[T]$

Aquesta relació ve donada per la següent fórmula:

$$E[N] = \lambda E[T]$$

La importància d'aquesta llei radica en que es pot aplicar en gairebé qualsevol sistema.

És important pel treball, veure què aquesta llei s'utilitza en un sistema el qual pot ser simplement la línia d'espera, és a dir, la cua; o també pot ser la totalitat del sistema, tenint en compte el temps de servei. Per exemple:

Exemple 3.4. En el cas que hi hagi dues arribades en un sistema, on la primera arribada es queda en el sistema dues unitats de temps i la segona 3 unitats de temps. És fàcil veure que en total, les dues arribades estaran un total de 5 unitats de temps en el sistema, també és fàcil observar que la taxa d'arribades al sistema és $\lambda = \frac{2}{5}$, és a dir, dues arribades per cada 5 unitats de temps. Per altra banda, el temps esperat d'estada en el sistema serà:

$$E[T] = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

A partir d'aquestes dades, es pot calcular el nombre esperat d'usuaris en el sistema fent ús de la llei de Little, que diu:

$$E[N] = \lambda E[T] = \frac{2}{5} \frac{5}{2} = 1$$

Doncs bé, aquest "sistema" del exemple, podria ser el nombre d'usuaris esperat en la cua o bé, el nombre d'usuaris esperat en la totalitat del sistema. En aquest treball la notació usada $E[N]$, $E[T]$ serà usada pel nombre d'usuaris esperat en la totalitat del sistema i el temps esperat d'estada en la totalitat del mateix sistema.

3.3 M/M/1

Definició 3.5. Un procés M/M/1 es tracta d'un sistema en el qual:

- El temps d'arribades és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\lambda}$
- El temps de servei també és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\mu}$
- Hi ha un únic servidor per atendre
- No hi ha limitació en la cua

Es dirà que el servei està en un estat o un altre per indicar el nombre d'usuaris que hi haurà en el sistema, és a dir:

- 0 el sistema està buit
- 1 hi ha un usuari sent atès en el sistema
- 2 hi ha un usuari sent atès i un esperant
- 3 hi ha un usuari sent atès i dos esperant
-

Per poder obtenir una distribució de probabilitats d'estat estacionari d'aquest sistema, s'utilitzaran equacions vistes en els processos de Markov, obtenint finalment casos particulars de processos de naixement i mort:

$$p_i \pi_i = \sum_{j \neq i} p_j (\pi_j p_{ji})$$

$$\sum_i p_i = 1$$

Sigui l'equació d'equilibri per l'estat 0:

$$p_0\lambda = p_1\mu$$

D'on es pot veure que:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

Observant ara per l'estat 1:

$$p_1(\lambda + \mu) = p_0\lambda + p_2\mu$$

$$p_1(\lambda + \mu) = p_1\mu + p_2\mu$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

En general, és fàcil obtenir que:

$$p_{n-1}\lambda = p_n\mu$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

Per calcular la distribució de probabilitats en l'estat estacionari, s'aplica la relació anterior per tot n , a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

Obtenint així:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1}$$

Aquest resultat ja s'ha vist en un procés de naixement i mort amb paràmetre de naixement λ_i i paràmetre de mort μ_i . Per tant, s'ha vist que s'ha de complir que el sumatori sigui finit. Com es tracta d'una sèrie geomètrica, és necessari que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Aquesta condició d'estabilitat, serà necessària i a la vegada suficient per a que el model M/M/1 tingui solució d'equilibri.

En el cas que $\rho > 1$, el sistema es sobrecarrega, és a dir, els clients arriben més ràpid del que són atesos. Si s'observa amb més detall, el sistema es sobrecarrega ja que no hi ha limitació d'entrades en el sistema. En el cas que hi hagi un límit, aleshores aquesta condició no serà necessària. Però, en un model M/M/1/ ∞ no té limitació i la condició d'estabilitat és necessària.

Per tant, en el cas d'equilibri ($\rho < 1$), s'aconsegueix el següent:

$$p_n = \begin{cases} 1 - \rho & n = 0 \\ \rho^n (1 - \rho) & n > 0 \end{cases}$$

A partir d'aquest resultat s'observa que el sistema estarà buit amb probabilitat $1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$, i per tant, la probabilitat que hi hagi com a mínim un usuari en el sistema és de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Notació. A partir d'ara, quan es faci referència a la probabilitat que hi hagi com a mínim un usuari en el sistema d'un model de cues M/M/1, s'expressarà com ρ , on $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. ρ durant tot el treball serà la condició d'equilibri dels sistemes que necessitin una, i la capacitat del sistema.

Exemple 3.6. Sigui un caixer en el qual els clients arriben seguint una distribució de Poisson de paràmetre 10 clients/hora, El temps mig que un client està en el caixer segueix una llei exponencial de paràmetre 4 minuts. Quina és la probabilitat que el caixer estigui buit? Quina és la probabilitat que hi hagi més d'un client esperant?

A partir de les dades donades, es pot calcular $\rho = \frac{2}{3}$. Per tant:

1. La probabilitat que el caixer estigui buit és de $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
2. La probabilitat que hi hagi més d'un client esperant és:

$$\sum_{n>2}^{\infty} p_n = 1 - p_0 - p_1 - p_2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Notació. Durant el treball, es parlarà de nombre mitjà d'usuaris o nombre esperat d'usuaris indistintament, d'igual manera, es parlarà del temps mitjà i el temps esperat.

Ara que ja s'ha obtingut la distribució de probabilitats del sistema, es pot continuar obtenint el nombre esperat d'usuaris en el sistema a través de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} np^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n(1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

I a partir del nombre esperat d'usuaris en el sistema, es pot utilitzar la Llei de Little per veure que el temps mitjà d'estància en el sistema és:

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Exemple 3.7. Seguint les mateixes dades de l'exemple anterior: Quin és el nombre mitjà d'usuaris en el sistema? Quin és el temps mitjà d'estància en el sistema?

$$E[N] = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2usuaris$$

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 12minuts$$

Seguidament, el càlcul del nombre mitjà d'usuaris en la cua "Q" pot trobar-se de manera anàloga al del nombre mitjà d'usuaris en el sistema, simplement, s'ha de tenir en

compte que si hi ha n usuaris en el sistema, hi ha $n-1$ a la cua per qualsevol $n > 0$. Així doncs:

$$E[Q] = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n = E[N] - (1-p_0) = E[N] - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

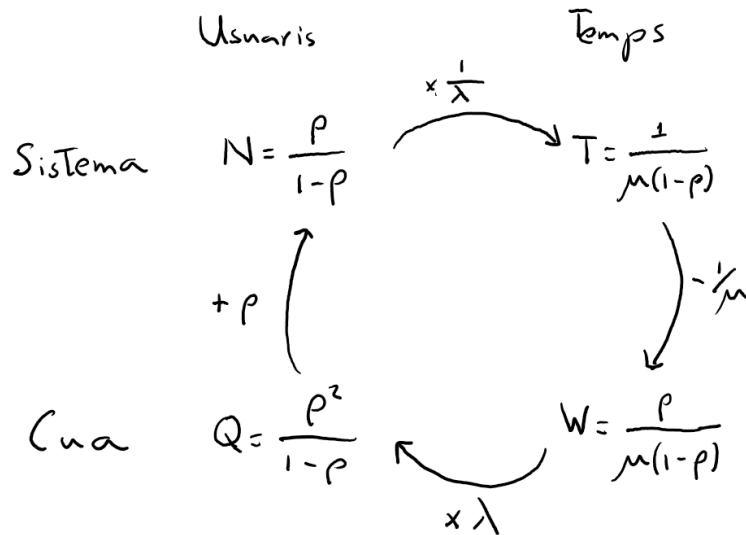
I com abans, usant la Llei de Little es pot obtenir el temps esperat "W" d'espera en la cua:

$$E[W] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Finalment, també es podria haver observat que el temps mitjà d'espera en la cua es pot trobar sabent el temps d'estància en el sistema T i el temps mitjà de servei a cada usuari $\frac{1}{\mu}$, doncs simplement serà:

$$E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Vist això, és fàcil relacionar els usuaris esperats en el sistema, el temps mitjà en el sistema, els usuaris esperats en la cua i el temps esperat en la cua a través de la Llei de Little i de les relacions entre el sistema i la cua:



3.4 M/M/s

Definició 3.8. Un procés M/M/s es tracta d'un sistema en el qual:

- El temps d'arribades és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\lambda}$
- El temps de servei també és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\mu}$
- Hi ha s servidors idèntics per atendre
- No hi ha limitació en la cua

Es pot observar, que el model M/M/s és molt similar al model M/M/1, amb la diferència que hi ha més d'un servidor tenint una única cua. És a dir, en aquest model de cues, si hi ha algun servidor lliure, quan un client arriba serà atès directament, en canvi si tots els servidors estan ocupats, el client que arriba s'esperarà fins que quedi un lliure.

D'aquesta manera, la taxa de transició de l'estat n a l'estat $n+1$ sempre serà λ , en canvi, la taxa de transició quan es redueix un estat dependrà de si és menor o major a s :

- Quan $n \leq s$, no hi ha usuaris a la cua, ja que hi ha suficients servidor com per atendre tots els clients que hi ha en el sistema. Per aquest motiu la taxa de transició de l'estat n a l'estat $n-1$ serà $n\mu$.
- Quan $n > s$, hi haurà usuaris esperant a la cua, ja que tots els servidors estaran ocupats. Així doncs, la taxa de transició serà $s\mu$.

En aquest cas, per calcular la distribució de probabilitats estacionària, es farà de manera semblant al model M/M/1. Pels estats $n \leq s$, les relacions són:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0, p_2 = \frac{\lambda}{2\mu}p_1, p_3 = \frac{\lambda}{3\mu}p_2 \dots$$

De manera que l'expressió general pels casos $n \leq s$ serà de la següent forma:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0, n \leq s$$

Per altra banda, pels estats $n > s$, les relacions són iguals que en un model M/M/1 on el paràmetre de servei és $s\mu$:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} p_s, n > s$$

Si es substitueix aquesta relació amb la trobada en els casos $n \leq s$, s'obté:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} p_0 = \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n \frac{s^s}{s!} p_0, n > s$$

Notació. A partir d'ara, s'usarà $I = \frac{\lambda}{\mu}$, i $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$, de manera que $I = s\rho$.

És important veure que ρ es defineix com la taxa d'entrada λ entre la taxa màxima de sortida amb tots els servidors ocupats $s\mu$. De manera que, com la capacitat de la cua és infinita, serà necessari que $\rho < 1$. A més, ρ s'interpreta igual que en un model M/M/1, és a dir, com el valor d'ocupació; si es pensa en els s servidors com un únic sistema en paral·lel, en el qual accedeixen els usuaris amb una taxa λ i passen un temps $\frac{1}{\mu}$. Per tant, ρ coincideix amb el percentatge de temps que un servidor està ocupat.

Si s'observa més, s'ha vist que el nombre esperat de clients en el sistema és el terme $s\rho = I$. De manera que es pot interpretar I com el mínim nombre de servidors que seran necessaris per atendre una demanda λ , si el temps mitjà de servei és $\frac{1}{\mu}$.

D'aquesta manera, les probabilitats de cada estat seran:

$$p_n = \begin{cases} \frac{I^n}{n!} p_0 & n \leq s \\ \rho^n \frac{s^s}{s!} p_0 & n > s \end{cases}$$

De nou, per trobar p_0 , s'aplica que $\sum p_n = 1$, obtenint:

$$p_0 = \left(\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{I^n}{n!} \right) + \frac{I^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}$$

Seguint la mateixa idea que en el model M/M/1, si es vol saber la probabilitat d'espera en la cua; és fàcil veure que fins que el sistema no es trobi en l'estat s , no hi haurà cua ja que els servidors no estaran plens. De manera que la probabilitat que hi hagi cua serà:

$$P(cua) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\rho^n}{s!} s^s p_0 = \frac{I^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} p_0$$

Aquesta expressió és coneguda amb el nom d'Erlang-C.

A partir de la mateixa idea, sembla senzill calcular el nombre esperat d'usuaris a la cua, ja que s'ha de tenir en compte que fins l'estat $s+1$ no hi haurà usuaris a la cua. Per tant:

$$E[Q] = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)p_n = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \rho^n \frac{s^s}{s!} p_0 = \rho^s \frac{s^s}{s!} p_0 \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) I^{n-s}$$

El que porta a:

$$E[Q] = \frac{I^s}{s!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0$$

Una vegada obtingut el nombre esperat d'usuaris a la cua, es pot aplicar la llei de Little de manera que s'obtéindrà el temps mitjà d'espera a la cua:

$$E[W] = \frac{E[Q]}{\lambda}$$

De la mateixa manera que en el model M/M/1, es pot trobar amb facilitat el temps mitjà d'espera en el sistema, doncs es sap que és:

$$E[T] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \frac{E[Q]}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

I de nou, aplicant la llei de Little, s'obtéindrà el nombre esperat de clients en el sistema:

$$E[N] = \lambda E[T] = E[Q] + I$$

Exemple 3.9. Sigui un sistema M/M/2 amb $\lambda = 2$ usuaris/segon i $\mu = 2$ usuaris/segon

$$I = \frac{\lambda}{\mu} = 1, \rho = \frac{I}{s} = \frac{1}{2} < 1$$

Per calcular el nombre esperat de clients a la cua, primer és necessari calcular p_0 :

$$p_0 = \left(\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{I^n}{n!} \right) + \frac{I^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \frac{1}{3}$$

Ara que ja es sap p_0 , es poden calcular el nombre esperat de clients a la cua i en el sistema i també el temps mitjà d'espera a la cua i en el sistema:

$$E[Q] = \frac{I^s}{s!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0 = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2! (1-\frac{1}{2})^2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

A partir d'aquest valor:

$$E[W] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{6} \text{ segons}$$

$$E[T] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ segons}$$

$$E[N] = \lambda E[T] = 2 \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Per acabar, també es pot calcular la probabilitat que un client no hagi d'esperar quan entri en el sistema:

$$P(\text{No cua}) = \sum_{n=0}^{s-1} p_n = \sum_{n=0}^1 p_n = p_0 + p_1 = \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

També es podia haver calculat fent:

$$1 - P(\text{cua}) = 1 - \frac{I^s}{s!} \frac{1}{1 - \rho} p_0 = 1 - \frac{1^2}{2!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3.5 Relació entre models M/M/1 i M/M/s

Una vegada estudiats aquests dos models de cues, és fàcil veure que tenen bastantes similituds. Però la pregunta que apareix és quin dels dos models és més eficient.

La diferència principal en plantejar els dos models és la següent:

- En el model M/M/1, en el cas de tenir n servidors, tindríem n cues diferents.
- En el model M/M/s, quan hi hagi n servidors, hi haurà una única cua.

Això implica, que en el cas de tenir n servidors, en un model M/M/s (aleshores $s = n$), els clients faran una única cua i seran atesos en quan hi hagi servidors lliures. Per altra banda, si hi ha n servidors en un model M/M/1, els clients es poden repartir de diferents maneres. Per ser exactes podria succeir el cas que tots els clients es trobessin en una única cua; també podrien repartir-se ocupant tots els servidors disponibles, amb aquesta repartició el model seria equivalent a un model M/M/s amb $s = n$.

Seguidament es posa un exemple bàsic per observar la diferència:

Exemple 3.10. Hi ha 2 sistemes diferents, amb 2 servidors cadascun. Un dels dos sistemes segueix un model M/M/1 i l'altre un model M/M/s. En cada sistema arriben 2 clients, i es suposarà que tots dos sistemes segueixen els mateixos paràmetres d'arribades i de servei.

Tal i com s'ha vist en les seccions anteriors, el model amb una cua i dos servidors (M/M/2) amb dos clients en el sistema, aquests es repartiran un a cada servidor ja que ocuparan els servidors lliures. Com hi ha dos clients en el sistema, la taxa de transició de l'estat 2 a l'estat 1, és a dir la taxa de transició de sortida d'un dels dos clients serà 2μ . Una vegada només queda un client, la taxa de transició de l'estat 1 a l'estat 0, és a dir la taxa de transició de la sortida d'aquest últim client és μ .

En el cas de tenir dues cues diferents, on cadascuna té el seu propi servidor, pot haver-hi dues situacions:

- Els dos clients es col·loquen a la mateixa cua.
- Cada client es col·loca en una cua diferent.

És fàcil veure que el segon cas serà igual al model M/M/2 comentat abans. En canvi, si els dos clients es col·loquen en la mateixa cua, aleshores la taxa de transició d'un estat al seu anterior serà μ .

A partir d'aquests resultats, i coneixent la distribució exponencial, es pot obtenir que en el cas que els dos clients estiguin distribuïts un a cada servidor (model M/M/2) el temps de servei del primer client serà menor que en el cas que tots dos clients estiguin en la mateixa cua.

Per tant, en aquest cas, els clients abandonarien abans el sistema si es té un model M/M/2.

Pot ser interessant per treure resultats veure un altre exemple més genèric:

Exemple 3.11. Sigui un sistema M/M/1 amb $\lambda = 2$ usuaris/segon i $\mu = 4$ usuaris/segon, és a dir, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}$ segons.

A partir d'aquestes dades, es pot veure que la capacitat del sistema és la mateixa que en l'exemple donat en el final de la secció d'un model M/M/s, on es tenia un model M/M/2 amb $\lambda = 2$ i $\mu = 2$. De manera que la ocupació del sistema venia donada per $\rho = \frac{1}{2}$, i en el model de l'exemple actual, la capacitat s'obté de $\rho = \frac{1}{2}$.

A partir de les dades, s'obté que en aquest exemple el temps esperat d'espera en el sistema és de:

$$E[T] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho} = \frac{1}{2} \text{ segons}$$

I a partir d'aquest, el temps esperat d'espera en la cua serà:

$$E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ segons}$$

Si s'agafen els resultats dels dos exemples amb la mateixa capacitat, es té:

$$E[W_1] = \frac{1}{4}, E[W_2] = \frac{1}{6}$$

$$E[T_1] = \frac{1}{2}, E[T_2] = \frac{2}{3}$$

I el temps mitjà de servei és:

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2}, \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{4}$$

En resum, comparant els dos exemples amb la mateixa capacitat, es té que el temps d'espera en la cua d'un sistema M/M/2 serà menor que en el model M/M/1. Però en canvi el temps esperat en el sistema i el temps mitjà de servei seran majors en el model M/M/2.

A partir dels resultats extrets en l'exemple, si es té un sistema M/M/1, i un sistema M/M/s amb les mateixes capacitats tots dos, es pot dir:

- El temps esperat d'estància en la totalitat del sistema serà menor en un model M/M/1.
- El temps esperat d'estància en una cua serà menor en un model M/M/s.
- Un altre punt important, ve donat al veure que passa si un servidor té una averia; doncs en un model M/M/1, aquesta averia implicaria un gran impacte en el sistema. En canvi en un model M/M/s, es passaria a tenir un model M/M/(s-1).

Si es consideren els models en alta capacitat i baixa capacitat:

- Si tots els servidors estan ocupats, en tots dos casos la sortida d'usuaris es produeix a màxima capacitat $\mu_1 = s\mu_2$
- Quan la capacitat del sistema sigui baixa, el sistema M/M/1 sempre aprofitarà tota la capacitat μ , en canvi el model M/M/s desapropitarà servidors fins que no hi hagi un mínim de s usuaris en el sistema.

Finalment, es pot concloure que per escollir quin model dels dos és més eficient amb la mateixa capacitat (a part que s'hauria de tenir en consideració altres paràmetres com pot ser el cost del sistema en cada cas), es veu que cada model té les seves parts positives i les seves negatives, de manera que no es pot considerar que un model sigui més eficient que un altre a no ser que s'estudiï un cas en particular.

3.6 M/M/ ∞

Definició 3.12. *Un procés M/M/ ∞ es tracta d'un sistema en el qual:*

- *El temps d'arribades és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\lambda}$*
- *El temps de servei també és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\mu}$*
- *Hi ha ∞ servidors per atendre*
- *No hi ha limitació en la cua*

Com hi ha infinits servidors per atendre, quan un client arribi no haurà d'esperar a ser atès. Aquest model és més usual trobar-se'l quan es posen exemples d'Internet. Per exemple, al enviar un correu electrònic.

Com s'ha dit, en aquest model no es formarà cua. Per tant no tindrà sentit estudiar el nombre esperat d'usuaris en la cua o el temps esperat d'espera en la cua. A més, és fàcil calcular el temps esperat d'espera en el sistema, doncs simplement serà el temps mitjà de servei en aquest sistema:

$$E[T] = \frac{1}{\mu}$$

Conseqüentment, el nombre esperat d'usuaris en el sistema vindrà donat pel nombre mitjà d'arribades per unitat de temps, pel temps mitjà que estan sent atesos en el sistema:

$$E[N] = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[T]$$

El qual és equivalent a la Llei de Little.

Trobar $E[N]$ i $E[T]$ ha sigut possible sense necessitat de saber quants usuaris hi ha en el sistema. Per saber el nombre d'usuaris, es pot veure el següent.

Si es recorda, igual que en un model M/M/s les taxes de transició de l'estat $n+1$ a l'estat n vindran donades segons l'estat en que es trobi el sistema:

- Si es troba en l'estat 1, la taxa de transició a l'estat 0 serà de μ .
- Si es troba en l'estat 2, la taxa de transició a l'estat 1 serà de 2μ .
-
- Si el sistema es troba en l'estat n , la taxa de transició a l'estat $n-1$ serà de $n\mu$.

Així doncs, es té la següent distribució estacionària:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1, \dots, p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1}$$

Per tant:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0$$

Afegint que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

S'obté:

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right)^{-1} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Per tant:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Notació. Dient $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$$

Exemple 3.13. Sigui un sistema on els usuaris arriben seguint un procés de Poisson de paràmetre 6clients/dia, i la duració del servei segueix una exponencial de paràmetre 2hores. Suposant que no hi ha límit de servidors, es pot interpretar que és un model M/M/ ∞ . El nombre esperat d'usuaris serà:

$$E[N] = \rho = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

El temps esperat d'espera en el sistema serà:

$$E[T] = \frac{1}{\mu} = 2\text{hores}$$

La probabilitat que hi hagi 3 usuaris en el sistema és:

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} e^{-\rho} = \frac{1}{2^3} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{48} e^{-\frac{1}{2}} = 0.012636$$

3.7 M/M/s/n

Definició 3.14. Un procés M/M/s/n es tracta d'un sistema en el qual:

- El temps d'arribades és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\lambda}$
- El temps de servei també és una exponencial, amb paràmetre $\frac{1}{\mu}$
- Hi ha s servidors per atendre
- Hi ha límit de n usuaris en el sistema

Quan hi ha n usuaris en el sistema, es diu que el sistema està ple i en el cas que arribi un usuari mentre el sistema està ple, aquest es perd. Per aquest motiu, es dirà que el sistema no es congestiona ja que com a molt tindrà un límit de n usuaris.

En aquest treball es veuran dos models amb limitació d'usuaris: M/M/1/n i M/M/s/s.

3.7.1 M/M/1/n

El sistema M/M/1/n és molt similar al M/M/1, l'única diferència ve donada pel nombre màxim d'usuaris en el sistema, el qual està limitat per n . És fàcil veure que la cua estarà limitada per $n-1$ usuaris, ja que el servidor estarà ocupat per un usuari.

La cadena de Markov d'aquest sistema és molt similar al model M/M/1, amb la diferència que al haver-hi límit de n usuaris, només hi haurà $n+1$ estats. I la distribució de probabilitats estacionària serà:

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \forall 1 \leq k \leq n$$

Notació. Sigui $I = \frac{\lambda}{\mu}$ diferent de ρ .

Calculant p_0 amb la suma finita:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^n I^k\right)^{-1}$$

Al ser una suma finita, es podran diferenciar dos casos:

- $I \neq 1$, és a dir, $\lambda \neq \mu$

En aquest cas el càlcul de p_0 vindrà donat per l'expressió

$$p_0 = \frac{1 - I}{1 - I^{n+1}}$$

Per tant, la distribució de probabilitats que s'obté és de:

$$p_k = \frac{1 - I}{1 - I^{n+1}} I^k, \forall 0 \leq k \leq n$$

En aquest cas hi ha una taxa efectiva d'entrada en el sistema, on només es tindran en compte les entrades reals, i no els clients que es troben el sistema ple i es perden, aquesta taxa efectiva serà:

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - p_n) = \lambda \frac{1 - I^n}{1 - I^{n+1}}$$

Ara si que es pot trobar l'ocupació mitjà del sistema, doncs vindrà donada per:

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

A partir de l'expressió p_k , resulta senzill calcular el nombre esperat d'usuaris en el sistema

$$E[N] = \sum_{k=0}^n k p_k = \frac{I}{1-I} - \frac{(n+1)}{1-I^{n+1}} I^{n+1}$$

Aplicant la Llei de Litte, el temps esperat d'estada en el sistema és:

$$E[T] = \frac{E[N]}{\bar{\lambda}} = \frac{E[N]}{\lambda(1-p_n)}$$

Seguidament, el temps esperat d'espera en la cua serà:

$$E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu}$$

Aplicant la llei de Little novament:

$$E[Q] = \frac{E[W]}{\lambda(1-p_n)}$$

Exemple 3.15. Sigui una impressora amb una capacitat màxima de 4 treballs per imprimir, on el temps d'impressió segueix una exponencial de paràmetre 24segons, i la taxa d'arribada de treballs és de 5treballs/minut.

Aquest sistema segueix un model M/M/1/4, amb temps de servei $\frac{1}{\mu} = 24seg \equiv \frac{4}{10}min$. De manera que $I = 2 \neq 1$. Per tant, la probabilitat que el sistema estigui ple és:

$$p_4 = \frac{1-2}{1-2^5} 2^4 = \frac{16}{31}$$

Aquesta probabilitat coincideix amb la probabilitat que un treball es perdi, doncs el sistema està ple. El nombre esperat de treballs en el sistema serà de:

$$E[N] = \frac{2}{1-2} - \frac{4+1}{1-2^5} 2^5 = \frac{98}{31}$$

I el temps esperat d'estada d'un treball fins ser imprès serà de:

$$E[T] = \frac{E[N]}{5(1-\frac{16}{31})} = \frac{98}{75} minutes$$

- Sigui ara $I = 1$, és a dir, $\lambda = \mu$

En aquest cas, el sistema no tendeix a quedar ple ni estar buit, estarà equilibrat. De manera que la distribució de probabilitats serà:

$$p_k = p_0, \forall 1 \leq k \leq n$$

I com $\sum p_k = 1$, s'obté

$$p_k = \frac{1}{n+1}, \forall 0 \leq k \leq n$$

És fàcil veure que el nombre esperat de clients en el sistema serà

$$E[N] = \frac{n}{2}$$

El temps esperat d'estada en el sistema serà:

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda(1-p_n)} = \frac{n+1}{2\lambda}$$

$$E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu}$$

$$E[Q] = \frac{E[W]}{\lambda(1-p_n)}$$

Exemple 3.16. Sigui ara una impressora igual que en l'exemple anterior, però ara el paràmetre d'arribades de treballs a imprimir és de $\lambda = \frac{5}{2} \text{treballs/minut}$.

Segueix sent un sistema M/M/1/4, amb $\mu = \frac{4}{10} \text{minuts}$. Però ara I=1. Per tant:

$$E[N] = \frac{4}{2} = 2$$

$$p_n = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$$E[T] = \frac{2}{\frac{5}{2}(1-\frac{1}{5})} = 1 \text{minut}$$

3.7.2 M/M/s/s

Per acabar, s'estudia el cas d'un model M/M/s/s. En aquest cas, el nombre màxim d'ocupació vindrà donat quan tots els servidors estiguin ocupats. De manera que la taxa de transició d'un estat $n+1$ a l'estat n , vindrà donat per $n\mu, \forall 1 \leq n \leq s$.

Sabent les taxes de transició, es poden trobar les distribucions estacionàries del sistema igual que s'ha fet en tots els casos anteriors, doncs:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1, p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2, \dots, p_s = \frac{\lambda}{s\mu} p_{s-1}$$

Afegint que $\sum p_n = 1$:

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^s \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} \right)^{-1}$$

$$p_s = \frac{\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!}}{\sum_{k=0}^s \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!}} = B(s, \frac{\lambda}{\mu})$$

Aquesta fórmula és anomenada **fórmula Erlang-B**, aquesta fórmula permet calcular la probabilitat que un usuari no sigui admès en el sistema donats un nombre límit d'ocupació s i el quocient $\frac{\lambda}{\mu}$

Exemple 3.17. En un edifici amb només dos telèfons es calcula que el nombre de trucades que es fan segueix una distribució de Poisson de paràmetre 4 trucades/minut. A més, les duracions de les trucades segueixen una exponencial de paràmetre 30 segons.

$$\lambda = 4, \mu = 2, \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{2} = 2$$

La probabilitat que una persona anés a trucar i no pugui degut a que tots els telèfons estan ocupats ve donat per:

$$p_2 = \frac{\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!}}{\sum_{k=0}^s \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!}} = \frac{\frac{2^2}{2!}}{\sum_{k=0}^2 \frac{2^k}{k!}} = B(2, 2) = \frac{2}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!}} = \frac{2}{5}$$

4 Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat

Un dels objectius d'aquest treball és observar que es pot introduir la Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat. D'aquesta manera, una vegada he revisat els resultats teòrics, inicio la feina d'adaptar-los als diferents nivells educatius on es vol implementar la proposta, aconseguint així uns resultats per poder donar resposta a l'objectiu establert.

Primerament, per veure que puc introduir la Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat, vaig mirar si hi havia relació amb les competències establertes als currículums vigents.

Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic a l'ESO:

1. Dimensió resolució de problemes:

- (a) Competència 1: Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
- (b) Competència 2: Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
- (c) Competència 3: Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
- (d) Competència 4: Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.

2. Dimensió raonament i prova:

- (a) Competència 5: Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan a matemàtiques.
- (b) Competència 6: Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.

3. Dimensió connexions:

- (a) Competència 7: Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i raonar.
- (b) Competència 8: Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.

4. Dimensió comunicació i representació:

- (a) Competència 9: Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
- (b) Competència 10: Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
- (c) Competència 11: Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
- (d) Competència 12: Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Competències específiques de la matèria a Batxillerat:

1. Resoldre problemes matemàtics.

2. Comunicar-se matemàticament.
3. Raonar matemàticament.
4. Valorar la matemàtica i la seva construcció.
5. Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

Per altra banda, també vaig veure els objectius que hi ha establerts en el currículum de manera que posteriorment, pogués adequar bé la proposta que portaria al centre.

Al currículum de 2n ESO no hi ha establerts uns objectius, el més similar són els criteris d'avaluació, els quals sí que estan especificats en el currículum i es podrien considerar objectius, ja que és el que un professor vol aconseguir dels seus alumnes. Aquests criteris d'avaluació a 2n ESO són:

- Dimensió resolució de problemes
 1. Resoldre problemes de la vida quotidiana en què calgui la utilització dels nombres racionals (fraccions, decimals i percentatges), les seves operacions i propietats, fent ús de la forma de càlcul més apropiada i valorant l'adequació del resultat al context.
 2. Identificar relacions de proporcionalitat numèrica i geomètrica i utilitzar-les per resoldre problemes en situacions de la vida quotidiana.
 3. Interpretar relacions funcionals senzilles (proporcionalitat directa i inversa) donades en forma de taula, gràfic, a través d'una expressió algebraica o mitjançant un enunciat, obtenir valors a partir d'elles i extreure conclusions del fenomen estudiat.
 4. Estimar i calcular longituds, àrees i volums d'espais i objectes del món físic i comprendre els processos de mesura, expressant el resultat de l'estimació o el càlcul en la unitat de mesura més adequada.
 5. Formular les preguntes adequades per conèixer les característiques d'una població i recollir, organitzar i presentar dades rellevants per respondre-les utilitzant els mètodes estadístics apropiats i les eines informàtiques adequades.
 6. Calcular la possibilitat que esdevingui un succés a partir d'informació prèviament obtinguda de forma empírica o raonada.
- Dimensió raonament i prova
 7. Fer conjectures, experimentar, argumentar, relacionar, comprovar, validar, generalitzar i particularitzar en contextos de la vida real relacionats amb: els nombres, la geometria, les funcions, l'estadística i l'atzar.
- Dimensió connexions
 8. Identificar figures i cossos geomètrics en contextos no matemàtics, utilitzar les seves propietats per classificar-les i aplicar el coneixement geomètric adquirit per interpretar i descriure el món físic fent ús de la terminologia adequada.
 9. Reconèixer situacions en contextos no matemàtics o en d'altres matèries en les quals es puguin desenvolupar les diferents fases d'un estudi estadístic: formular la pregunta, recollir informació, organitzar-la en taules i gràfics, trobar valors rellevants i extreure'n conclusions.

- Dimensió comunicació i representació
 10. Expressar oralment i per escrit raonaments, conjectures, relacions quantitatives i informacions que incorporin elements matemàtics, simbòlics o gràfics, valorant la utilitat del llenguatge matemàtic i la seva evolució al llarg de la història.
 11. Representar conceptes o relacions matemàtiques de diverses maneres, ser capaç de comprendre les dels altres i valorar la més adequada a cada situació.

Objectius 1r de Batxillerat:

- Reconèixer situacions reals concretes on la matemàtica és un instrument necessari per organitzar i interpretar informació, i per prendre decisions ben fonamentades.
- Decidir quins models matemàtics, d'entre els estudiats, s'ajusten millor a determinades situacions que puguin plantejar-se en la vida quotidiana de l'alumnat, saber representar-los simbòlicament, aplicar-los i extreure'n conclusions.
- Incorporar al propi vocabulari elements propis del llenguatge matemàtic per tal de transmetre missatges en contextos on és especialment necessària la comunicació científica.
- Distingir entre fenòmens certs i probables, i caracteritzar-los quantitativament amb la consegüent capacitat d'anàlisi i estructuració de la informació continguda en un conjunt de dades.

A partir d'aquestes competències i objectius, vaig poder preparar la proposta per tal que tingués uns continguts adequats amb els dels currículums respectius de cada nivell. A més, vaig observar que a Batxillerat podria ser més curós i a part de poder demanar un nivell més elevat, també podria endinsar-me més en el temari.

D'aquesta manera, vaig anar al centre Pare Manyanet de les Corts per portar la meua proposta, la qual va ser acceptada oferint-me 2 sessions d'una hora a 2n d'ESO i a 1r de batxillerat. A més, per tenir més mostra, el centre va oferir-me fer les dues sessions als 3 grups de 2n d'ESO, donant un total de 2 sessions d'una hora a 4 grups diferents.

Per poder tirar endavant la meua proposta didàctica em van demanar que els hi expliqués les propostes, per veure si el nivell era adequat i poder portar a terme les sessions. Per aquest motiu, vaig portar les següents propostes didàctiques:

4.1 Proposta Didàctica: Teoria de Cues a 2n d'ESO

Justificació

Amb aquesta proposta didàctica, dirigida als i les alumnes de 2n d'ESO d'un centre, els intentaré donar els recursos necessaris per aconseguir classificar alguns models de Teoria de Cues. He triat aquestes àrees de coneixement per veure que es pot arribar a adaptar el nivell dels resultats teòrics obtinguts en aquest treball a 2n d'ESO.

Dins de la proposta utilitzaré diferents metodologies, entre d'altres faré classes magistrals per mostrar la teoria i donar els continguts necessaris i treball en grup-classe per facilitar els beneficis de l'aprenentatge entre iguals. Així mateix, en l'àmbit avaluatiu tindrè en compte el treball individual de manera formativa, donant el temps necessari a cada alumne i entenent aquesta com un moment més d'aprenentatge.

Ubicació, Marc Curricular

Dins el currículum, puc trobar dins la matèria de matemàtiques, l'àrea de probabilitat i estadística en el segon curs de Secundària.

Criteris per a l'establiment d'objectius i selecció de continguts

La tria d'objectius i continguts l'he fet pensant a ajudar l'alumne a assolir uns coneixements mínims sobre la Teoria de Cues. Guiant-lo en la seva formació matemàtica. Per fer-ho, m'he ajudat del currículum de matemàtiques de Secundària.

Bases Prèvies

Per tal de realitzar la proposta didàctica sense problemes, hauran de tenir assolits els següents continguts o coneixements:

- Probabilitat: Tenir uns coneixements bàsics de probabilitat.

Objectius

- Entendre el concepte d'una Cua.
- Entendre el concepte de Teoria de Cues.
- Conèixer i comprendre la notació Kendall.
- Classificar diferents models de cues.

Continguts

- Continguts Clau

- CC1: Sentit del nombre i de les operacions.
- CC3: Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora).

- CC16: Sentit i mesura de la probabilitat.

- Continguts Curriculars

- Estadística i atzar
 - Conceptes bàsics de probabilitat
 - * Proporcionalitat per assignar probabilitats a resultats d'experiments aleatoris.

Competències Generals

- Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre els problemes.
- Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.
- Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.

Seqüència d'Activitats

Per aportar els coneixements necessaris adequats al nivell de 2n d'ESO, he preparat la següent seqüència d'activitats:

1. Activitat de presentació:

Per tal que tinguin els coneixements de què és la Teoria de Cues, faig preguntes per aconseguir arribar a la definició buscada.

- **Agrupament:** Treball individual.
- **Material i recursos:** Fulls de paper i bolígrafs.
- **Instruments d'avaluació:** Feedback en gran grup.
- **Temps:** 20 min.

2. Kahoot:

Per poder acostar més casos en els quals es troben en la vida quotidiana.

- **Agrupament:** Treball individual.
- **Material i recursos:** Tauletes/mòbils i projector.
- **Instruments d'avaluació:** Respostes obtingudes en el Kahoot.
- **Temps:** 25 min.

3. Classe magistral de Teoria:

Presentació als alumnes d'alguns models de cues i de la notació Kendall per classificar-les.

- **Agrupament:** Treball individual.
- **Material i recursos:** Pissarra i apunts Marc Teòric.
- **Instruments d'avaluació:** Feedback en gran grup.

- **Temps:** 30 min.

4. Classificació de cues:

Els alumnes hauran de respondre un qüestionari de Google classificant diferents exemples de cues en els diferents models explicats en l'activitat 3. A més, comentarem les respostes i el motiu d'aquestes en gran grup classe.

- **Agrupament:** Treball individual i gran grup-classe.
- **Material i recursos:** Tauletes/mòbils, qüestionari de Google.
- **Instruments d'avaluació:** Respostes obtingudes del qüestionari.

Per relacionar les competències usades en cada activitat, seguint la numeració establerta en l'apartat de competències generals i seguint l'ordre establert de cada activitat, es pot incloure la següent taula:

Activitats	Competències 2n d'ESO		
	C.2	C.4	C.6
A.1		X	X
A.2	X		X
A.3		X	
A.4		X	X

Grau d'assoliment dels objectius

En aquesta proposta didàctica, en el grau d'assoliment dels objectius es tindrà en consideració si la majoria de les activitats recollides han obtingut un grau d'assoliment o un altre. El grau d'assoliment dels objectius consistirà en una entrega, amb la qual observareu si han assolit els següents criteris:

- Activitat 4:
Els alumnes donen resposta a un qüestionari de Google en el qual es podrà observar el grau d'assoliment de la classificació d'alguns models de cues.

Assoliment Satisfactori	Els alumnes han sigut capaços de classificar alguns exemples en els diferents models explicats.
Assoliment Notable	Els alumnes han sigut capaços de diferenciar diferents models de cues i saben classificar la majoria dels exemples.
Assoliment Excel·lent	Els alumnes han sigut capaços de diferenciar i entendre diferents models de cues i saben classificar els exemples donats.

Metodologia i Situacions de Treball

En aquesta proposta didàctica, he utilitzat les següents metodologies i situacions de treball:

- Treball autònom a partir de la resolució de problemes, on cada alumne es trobarà amb els seus propis entrebancs i aprendrà d'aquests.

Agrupament: Treball individual

Activitats: Activitat 2, Activitat 4

- Explicació de la teoria fent ús del comandament directe, on els alumnes comprendran, escoltaran i faran preguntes dels dubtes que s'ocasionin.

Agrupament: Treball grup classe i individual

Activitats: Activitat 1, Activitat 3

Relació amb Contextos Quotidians

En aquesta proposta didàctica he buscat que totes les activitats proposades, siguin les més similars a situacions que els alumnes es puguin trobar en la vida real.

A més, els models de cues explicats en aquesta proposta didàctica, ja són en certa manera una aplicació real de les cues que ens podem trobar en la vida diària.

4.2 Proposta Didàctica: Teoria de Cues a 1r de Batxillerat

Justificació

Algunes parts de la següent proposta didàctica de 1r de Batxillerat han quedat resumides, ja que són similars a la proposta didàctica de 2n d'ESO. Per qualsevol dubte vegeu "Proposta Didàctica: Teoria de Cues a 2n d'ESO".

Dit això, la proposta de 1r de Batxillerat és una ampliació a la proposta feta a 2n d'ESO, tenint en compte els coneixements previs que ja tenen els alumnes de batxillerat per poder aprofundir més en els conceptes de la Teoria de Cues.

A part de les activitats proposades a la proposta de 2n d'ESO, es buscarà donar els conceptes necessaris als alumnes de 1r de Batxillerat per a resoldre alguna activitat senzilla del model M/M/1 de Teoria de Cues.

Igual que a la proposta de 2n d'ESO, dins d'aquesta proposta utilitzaré diferents metodologies, entre d'altres faré classes magistrals per mostrar la teoria i donar els continguts necessaris i treball en grup classe per facilitar els beneficis de l'aprenentatge entre iguals. Així mateix, en l'àmbit avaluatiu tindrà en compte el treball individual de manera formativa, donant el temps necessari a cada alumne i entenent aquesta com un moment més d'aprenentatge.

Objectius

- Entendre el concepte de Cues.
- Entendre el concepte de Teoria de Cues.
- Conèixer i comprendre la notació Kendall.
- Classificar diferents models de cues.
- Resoldre activitats bàsiques d'un model de cues M/M/1.

Continguts

- Continguts Curriculars

- Probabilitat i estadística
 - Aplicació de les tècniques de recompte i del càlcul de probabilitats per resoldre situacions i problemes en àmbits tant científics com socials.

Competències Generals

1. Resoldre problemes matemàtics.
2. Comunicar-se matemàticament.
3. Raonar matemàticament.
4. Valorar la matemàtica i la seva construcció.

Seqüència d'Activitats

Sembla lògic pensar que a partir d'un cert instant els alumnes de 2n d'ESO els hi costaria més entendre alguns conceptes que als alumnes de 1r de Batxillerat i necessitarien més temps per assimilar. Per aquest motiu, les activitats a 1r de Batxillerat han sigut les mateixes que a 2n d'ESO, fetes en una única sessió. Per la segona sessió, he afegit dues activitats per arribar a resoldre alguna activitat d'un model de cues M/M/1.

Aquestes dues activitats són:

5. Classe magistral de Teoria:

Explicació d'algunes de les diferents fórmules en el cas senzill d'un model de cues M/M/1 amb algun exemple per poder resoldre posteriorment algun problema bàsic.

- **Agrupament:** Treball grup classe i individual.
- **Material i recursos:** Pissarra i apunts Marc Teòric.
- **Instruments d'avaluació:** Feedback en gran grup.
- **Temps:** 30 min.

6. Quanta gent hi ha a la cua?

Resolució d'una activitat senzilla d'un model de cues M/M/1. Si al final de la segona sessió hi ha temps, comentar els resultats obtinguts en l'activitat.

- **Agrupament:** Treball individual.
- **Material i recursos:** Full d'exercici botiga de supermercat.
- **Instruments d'avaluació:** Resolució de l'exercici.

Per relacionar les competències usades en cada activitat, seguint la numeració establerta en l'apartat de competències generals i seguint l'ordre establert de cada activitat, es pot incloure la següent taula:

Activitats	Competències 1r de Batxillerat			
	C.1	C.2	C.3	C.4
A.1		X	X	
A.2	X		X	
A.3				X
A.4	X		X	
A.5				X
A.6	X	X	X	X

Grau d'assoliment dels objectius i Metodologia/Situació de Treball

En aquesta proposta didàctica, igual que en la proposta didàctica als alumnes de 2n d'ESO, en el grau d'assoliment dels objectius es tindrà en consideració si la majoria de les activitats recollides han obtingut un grau d'assoliment o un altre. El grau d'assoliment dels objectius consistirà en dues entregues, amb les quals observaré si han assolit o no els següents criteris:

- **Activitat 4:**

Els alumnes donen resposta a un qüestionari de Google en el qual es podrà observar el grau d'assoliment de la classificació d'alguns models de cues.

Assoliment Satisfactori	Els alumnes han sigut capaços de classificar alguns exemples en els diferents models explicats.
Assoliment Notable	Els alumnes han sigut capaços de diferenciar diferents models de cues i saben classificar la majoria dels exemples.
Assoliment Excel·lent	Els alumnes han sigut capaços de diferenciar i entendre diferents models de cues i saben classificar els exemples donats.

Metodologia: Explicació de la teoria fent ús de comandament directe.

- **Activitat 6:**

Els alumnes solucionen una proposta d'activitat on hauran de calcular la probabilitat de cua, el temps d'espera i la gent que hi haurà a la cua. Aquesta activitat es farà individualment, de manera que servirà per observar el grau d'assoliment segons els següents criteris:

Assoliment Satisfactori	Els alumnes han sigut capaços d'entendre que se'ls demana.
Assoliment Notable	Els alumnes han sigut capaços d'entendre que se'ls demana i saber quines fórmules aplicar en cada cas.
Assoliment Excel·lent	Els alumnes han sigut capaços d'entendre que se'ls demana i saber quines fórmules aplicar amb èxit en cada cas.

Metodologia: Treball autònom a partir de la resolució de problemes.

Després d'explicar les dues propostes didàctiques als professors del centre, van estar d'acord en portar la proposta a les aules. D'aquesta manera, em van oferir els següents horaris durant la segona setmana de maig de 2021:

	Dimecres	Dijous	Divendres
08:00-09:00	2n ESO C		
09:00-10:00		1r BATX	
10:00-11:00		2n ESO B	2n ESO A
11:00-11:30			
11:30-12:30	2n ESO B		
12:30-13:30			1r BATX
13:30-14:30			
14:30-15:15			
15:15-16:15		2n ESO A	
16:15-17:15		2n ESO C	

Una vegada finalitzada la setmana, a part dels fulls d'activitat i de les respostes del qüestionari, vaig poder recollir el full que van fer els alumnes de l'activitat inicial. A partir d'aquests reculls, he pogut extreure uns resultats i conclusions sobre la proposta didàctica.

4.3 Resultats

Per posteriorment poder obtenir millors conclusions, he decidit dividir en 3 els resultats:

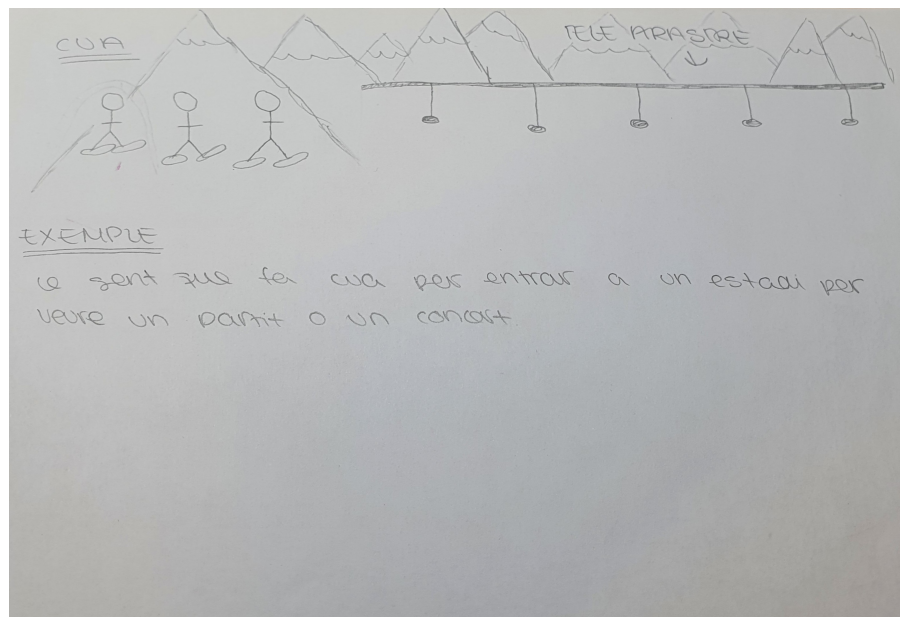
1. Activitat inicial: Tots els alumnes van escriure la definició que ells donarien d'una cua i van posar exemples variats de diferents cues. La majoria de respostes envoltaven tres temes que vaig utilitzar per acabar donant una definició formal:
 - (a) "Esperen en línia recta", "una darrere d'una altra", "respectant la seva posició"...
 - (b) "Esperen alguna cosa"
 - (c) "Grup de persones", "nombre de persones", "persones o qualsevol cosa", "seqüència de números o persones o objectes"...

A partir d'aquests 3 temes, i dels diferents exemples que van posar, vaig donar una definició més formal d'una cua:

Una cua és una línia d'espera d'un sistema amb un cert ordre.

En aquest cas he decidit no separar els resultats d'aquesta activitat entre 2n d'ESO i 1r de Batxillerat ja que no tenia cap repercussió.

En particular, els alumnes podien donar la definició i els exemples amb paraules o fent un dibuix i posteriorment explicant-lo. Per exemple:



2. [Qüestionari de Google](#): En aquest cas, les respostes estan guardades en un excel, i podria haver diferenciat els resultats entre 2n d'ESO i 1r de Batxillerat, però no ha sigut rellevant ja que les respostes de 1r de Batxillerat no han variat gaire les gràfiques finals.

Algunes de les preguntes eren les de la següent imatge extreta d'una captura de pantalla del qüestionari.

Cua en el caixer d'un supermercat *

- ☐ M/M/1
- ☐ M/M/s
- ☐ M/M/s/n
- ☐ M/M/ ∞

Avions esperant per aterrar en un aeroport, on el primer avió que arriba és el primer en aterrar. (Suposem que hi ha més d'una pista d'aterratge) *

- ☐ M/M/1
- ☐ M/M/s
- ☐ M/M/s/n
- ☐ M/M/ ∞

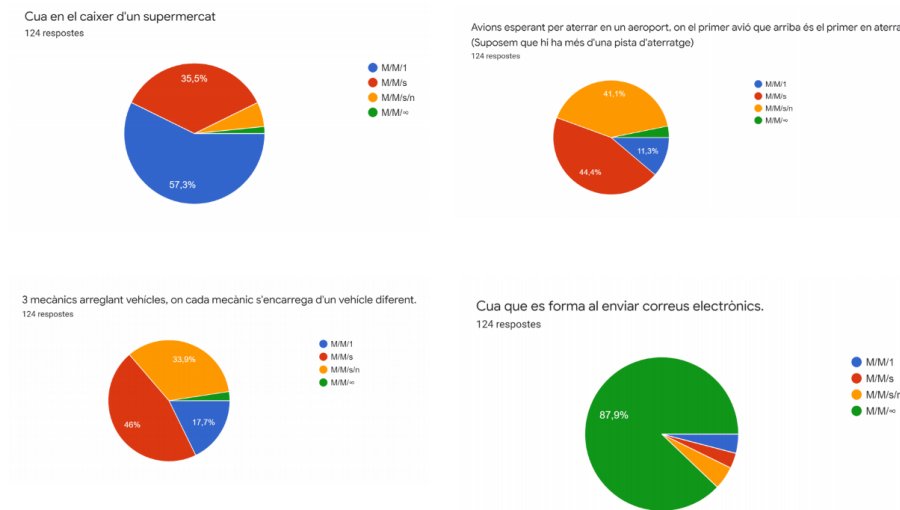
Cua que es forma al enviar correus electrònics. *

- ☐ M/M/1
- ☐ M/M/s
- ☐ M/M/s/n
- ☐ M/M/ ∞

3 mecànics arreglant vehicles, on cada mecànic s'encarrega d'un vehicle diferent. *

- ☐ M/M/1
- ☐ M/M/s

Seguidament adjunto les gràfiques obtingudes de les preguntes de la imatge anterior:



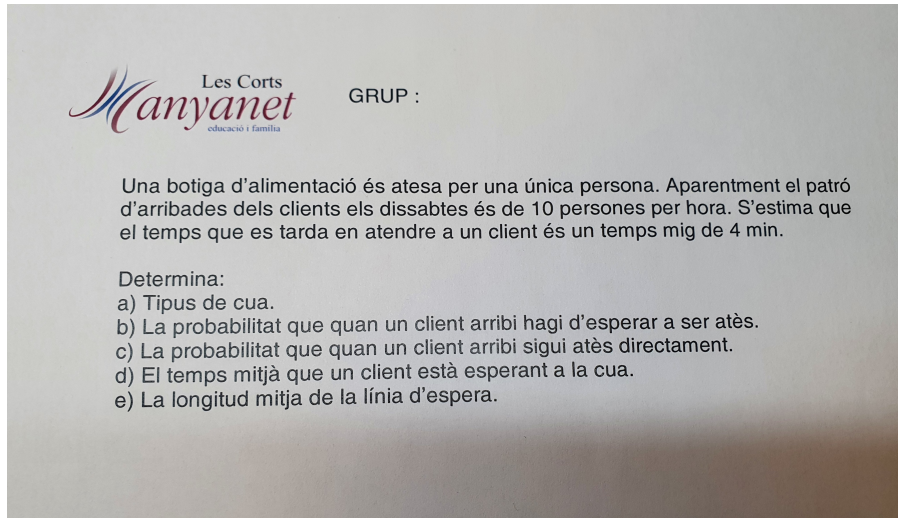
Després de revisar les gràfiques obtingudes de les respostes dels alumnes en el qüestionari, he pogut dividir les respostes segons els diferents models de cua explicats:

- (a) M/M/1
La majoria de casos on el model de cua és M/M/1, ha rebut la resposta encertada.
- (b) M/M/s
Els casos on el model de cua és M/M/s, les gràfiques mostren que la majoria donaven una resposta encertada, tot i que força igualada amb el model de cua M/M/1, o en algun cas amb el model M/M/s/n.
- (c) M/M/s/n
Els casos on el model de cua és M/M/s/n, les gràfiques mostren que la majoria d'alumnes donaven la resposta encertada.
En el cas dels alumnes de 1r de Batxillerat, vaig haver de tornar a explicar-los-hi de nou degut a un error explicatiu, el qual havia provocat que alguns alumnes responguessin erròniament algun d'aquests casos.
- (d) M/M/∞
La majoria de casos on el model de cua és M/M/∞, ha rebut la resposta encertada.

A part d'aquests quatre resultats, també vaig descobrir a partir de les justificacions donades pels alumnes, que segons la interpretació que es feia de la pregunta, la resposta d'aquesta a vegades era correcte tot i no ser l'esperada. Per exemple, en una cua d'un supermercat m'esperava la resposta M/M/1, de totes maneres, alguns alumnes van justificar la seva resposta M/M/s dient que podia ser una cua amb diferents màquines per pagar el que es volia comprar. La qual és totalment correcte també.

Així doncs, aquesta activitat, a part dels resultats obtinguts del qüestionari, és també important entendre la justificació donada pels alumnes.

3. Activitat 6. Quanta gent hi ha a la cua:



The image shows a worksheet with the logo of 'Les Corts Manyanet' (educació i família) and a section titled 'GRUP :'. The text describes a queueing problem at a grocery store. It states that a single server attends to customers, with an arrival rate of 10 people per hour on Saturdays. The service time is given as 4 minutes. Below this, it asks to determine five things: a) the type of queue, b) the probability of a customer having to wait, c) the probability of a customer being served immediately, d) the average time a customer spends waiting, and e) the average length of the queue.

Les Corts
Manyanet
educació i família

GRUP :

Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.

Determina:

- a) Tipus de cua.
- b) La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès.
- c) La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament.
- d) El temps mitjà que un client està esperant a la cua.
- e) La longitud mitja de la línia d'espera.

La majoria d'alumnes de 1r de Batxillerat, van donar una resposta encertada a totes les preguntes. L'error més comú es trobava en donar valor a λ i μ , ja que el confonien amb el seu invers. Tot i això, posteriorment, la majoria d'alumnes va entendre que $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ era necessari i van trobar així l'error que estaven cometent.

4.4 Conclusions Proposta Didàctica

A partir dels resultats obtinguts de les diferents activitats i dels successos en l'aula, puc procedir a extreure unes conclusions sobre la proposta didàctica de tots dos nivells, donant resposta als objectius proposats a l'inici de cada proposta didàctica, respectiva a cada nivell. D'aquesta manera puc concloure que:

1. Els alumnes de 2n ESO:

- (a) Saben què és una cua i saben donar exemples.
- (b) Entenen que és la Teoria de Cues, és a dir, què estudia i perquè és necessari l'estudi de les cues.
- (c) Coneixen 4 diferents models de cues ($M/M/1$, $M/M/s$, $M/M/s/n$, $M/M/\infty$) i la notació Kendall per classificar-les.
- (d) Saben classificar diferents exemples de cues entre aquests 4 models explicats.

A més de veure que s'han complert els objectius proposats a 2n d'ESO, un petit grup dels alumnes, els quals tenien més nivell o més ganes, em van demanar alguna activitat més avançada donat que els hi havia agradat molt el que havia explicat. Així doncs, vaig donar-los-hi el material necessari per poder fer l'activitat 6 proposada als alumnes de 1r de Batxillerat, i els vaig recomanar que la fessin en grup. Dues setmanes després, el seu professor em va fer arribar la següent resposta:

The image shows a handwritten student response on a worksheet. At the top left is the logo 'Les Corts Manyanet' with the tagline 'educació i família'. To the right, the group name is written: 'GRUP: Helena Fernández, Bo Rui i Marc Pedreira, ESO-2A.' The problem text is: 'Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.' Below this, five questions are listed: 'Determina: a) Tipus de cua. b) La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès. c) La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament. d) El temps mitjà que un client està esperant a la cua. e) La longitud mitjana de la línia d'espera.' The student's answers are written in blue ink: 'a) És una cua M/M1.', 'b) És d'un 10,66% que és igual a 2/3.', 'c) És d'un 0,83% que és igual a 1/3.', 'd) És d'un 0,13% que és igual a 2/15 (8 min).', and 'e) És d'un 1,3% que és igual a 4/3.'

Les Corts
Manyanet
educació i família

GRUP: Helena Fernández, Bo Rui i Marc Pedreira, ESO-2A.

Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.

Determina:

- a) Tipus de cua.
- b) La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès.
- c) La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament.
- d) El temps mitjà que un client està esperant a la cua.
- e) La longitud mitjana de la línia d'espera.

a) És una cua M/M1.

b) És d'un 10,66% que és igual a $\frac{2}{3}$.

c) És d'un 0,83% que és igual a $\frac{1}{3}$.

d) És d'un 0,13% que és igual a $\frac{2}{15}$ (8 min).

e) És d'un 1,3% que és igual a $\frac{4}{3}$.

b) $4/4 \rightarrow 1 \frac{1}{4} \text{ min}$
 $10 \frac{1}{4} \text{ h}$

c) $c = \frac{10 \text{ persones}}{1 \text{ hora}}$

$a = \frac{1 \text{ persona}}{4 \text{ min}} \rightarrow a = \frac{15 \text{ persones}}{1 \text{ hora}}$

$\frac{c}{a} = \frac{\frac{10}{1}}{\frac{15}{1}} \rightarrow \frac{10}{1} : \frac{15}{1} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

c)

$1 - \frac{2}{3} = 0,33\% = \frac{1}{3}$

d)

$T = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{15}{1} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{15}{3}} \rightarrow \frac{2}{3} : \frac{15}{3} = \frac{6}{45} \rightarrow \boxed{\frac{2}{15}} \text{ h} \rightarrow \frac{2}{15} \cdot 60 = \underline{\underline{8 \text{ min}}}$

e) $p = \frac{10}{1} \cdot \frac{2}{15} \rightarrow \frac{20}{15} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Com es pot veure, els alumnes de 2n d'ESO van tenir la capacitat de resoldre a la perfecció l'activitat proposada, deixant de banda que no van acabar de comprendre la seva resposta. Per exemple, la resposta a l'apartat "e" sobre la longitud de la cua, la donen en percentatge.

Així doncs, és obvi que a 2n d'ESO obligatòria, hi ha diferents nivells d'assoliment, de manera que alguns alumnes poden assolir nivells molt més elevats dels que s'expliquen a l'aula en aquell curs. Un clar exemple, és aquest cas que s'ha inclòs en el treball.

2. Els alumnes de 1r de Batxillerat:

- Saben què és una cua i saben donar exemples.
- Entenen que és la Teoria de Cues, és a dir, què estudia i perquè és necessari l'estudi de les cues.
- Coneixen 4 diferents models de cues ($M/M/1$, $M/M/s$, $M/M/s/n$, $M/M/\infty$) i la notació Kendall per classificar-les.
- Saben classificar diferents exemples de cues entre aquests 4 models explicats.
- Tenen la capacitat de resoldre alguna activitat senzilla d'una cua $M/M/1$, calculant el nombre esperat de persones en la cua, el temps esperat d'espera en la cua i la probabilitat d'aquesta cua.
- Són coneixedors del funcionament de la distribució normal o gaussiana.

En aquest cas, tot i que els alumnes de 1r de Batxillerat han tingut una hora menys per saber diferenciar els models de cues, han tingut la capacitat per entendre i classificar alguns exemples, deixant de banda el cas $M/M/s/n$, en el qual, tal i com s'ha explicat en els resultats, va haver un petit contratemps a l'hora d'explicar-lo i va suposar que alguns alumnes no acabessin d'entendre inicialment el concepte d'aquest model.

Finalment, es pot concloure que tant en 2n d'ESO com en 1r de Batxillerat, els alumnes han assolit els objectius plantejats a l'inici de la Proposta Didàctica corresponents. Per aquest motiu, puc dir que les propostes didàctiques han sigut un èxit.

En el cas d'haver tingut més hores disponibles, hauria pogut intentar explicar les activitats que els alumnes de 1r de Batxillerat van fer a la segona sessió, als alumnes de 2n d'ESO. També hauria pogut avançar més temari amb els alumnes de 1r de Batxillerat. De totes maneres, contra més temari s'avanci, més temps necessiten els alumnes per entendre'l.

Així doncs, tanco la conclusió veient que es pot adequar la Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat amb nivells inferiors als estudiats en el Marc Teòric d'aquest treball.

De totes maneres, després d'haver portat a terme les dues propostes, i d'haver parlat amb els professors, vaig veure la possibilitat de fer petites millores en les dues propostes mencionades.

Per començar, el més important seria modificar el qüestionari de Google, ja que les preguntes eren interpretables. Per aquest motiu, crec que hauria d'afegir l'apartat de justificar les respostes, per veure més clarament que els alumnes saben classificar diferents models de cues.

També, a 2n d'ESO he vist que alguns alumnes van poder fer l'activitat proposada a 1r de Batxillerat en grup, per aquest motiu s'obre la porta d'haver pogut avançar una mica més de temari del què vaig donar. De totes maneres, per tal que tots els alumnes ho entenguessin no es podia haver anat més ràpid. D'aquí va aparèixer la idea d'explicar els processos de Naixement i Mort abans d'explicar la Teoria de Cues, aconseguint així que els alumnes entenguessin amb més facilitat la posterior explicació de la Teoria de Cues.

Per altra banda, a 1r de Batxillerat vaig veure la possibilitat d'explicar diferents exemples de distribucions, com la normal o la gaussiana. Allà vaig veure la necessitat que hi havia d'entendre bé el funcionament de diferents distribucions com podia ser la distribució exponencial o la distribució de Poisson molt utilitzades en aquest treball, i les quals van ser necessàriament elidides pel temps del qual disposava. En el cas que les hagués explicat prèviament, hauria facilitat la posterior explicació de la Teoria de Cues, ja que es podria haver endinsat molt més en el temari explicat.

Per aquest motiu, he vist la importància de les bases prèvies, i puc fer una altra conclusió, veient que tot i que la majoria d'alumnes ha pogut seguir a la perfecció l'explicació donada a l'aula, si hagués explicat algunes bases prèvies, posteriorment hauria pogut aprofundir més en els continguts explicats.

Tot i així, amb el temps què disposava, segueixo pensant que les propostes didàctiques portades a terme han sigut les més adients al meu treball, ja que aquest tractava sobre la Teoria de Cues i no sobre les bases prèvies.

5 Conclusions

Per finalitzar el treball, faré una valoració qualitativa sobre l'assoliment dels objectius que he presentat a l'inici d'aquest treball:

- Un dels objectius era: “Adquirir nous coneixements sobre la Teoria de Cues, ampliant així els ja adquirits a l'assignatura de Processos Estocàstics del Grau de Matemàtiques.” Després d'haver escollit fonts bibliogràfiques que he considerat fiables, he revisat i aprofundit en nous conceptes sobre diferents models de Teoria de Cues dels quals prèviament no coneixia, descobrint diferents maneres d'arribar als conceptes i escollint la que he considerat més entenedora. A més, tot i haver aprofundit bastant en diferents models de cues, crec que es poden seguir ampliant els coneixements d'aquesta branca. Tot i això, en aquest treball he aprofundit molt més del que era necessari per posteriorment poder adequar els conceptes a Secundària i Batxillerat. Per aquest motiu, puc donar per assolit l'objectiu esmentat.

Després d'haver revisat els processos de naixement i mort, he considerat més fàcil explicar els diferents models de cues a partir dels processos de Markov, de totes maneres el coneixement d'aquests processos ha facilitat l'enteniment dels posteriors conceptes de Teoria de Cues. A més, molts dels resultats obtinguts en els diferents models de cues es podrien haver arribat a partir d'aquests processos. Per aquest motiu he considerat necessari fer una revisió dels conceptes dels processos de naixement i mort.

- Un dels altres objectius era “Introduir la Teoria de Cues a Secundària i Batxillerat adequant-los-hi els conceptes.” En aquest cas he hagut d'adequar a Secundària i Batxillerat els conceptes exposats. Donat que només disposava de 2 hores per presentar-los-hi una branca totalment desconeguda per ells, vaig creure convenient que primerament havien d'entendre bé alguns models de cues en els quals es poden trobar en la seva vida quotidiana. Per aquest motiu, amb els alumnes de 2n ESO només he tractat la classificació de diferents models de cues, en canvi a 1r de Batxillerat he pogut ampliar una mica més i explicar també alguns conceptes d'un model bàsic M/M/1. Així doncs, tenint en compte la disponibilitat d'hores que tenia i veient que els alumnes han tingut la capacitat de resoldre majoritàriament bé totes les activitats proposades, es pot considerar que la proposta va ser un èxit. D'aquesta manera dono també per assolit l'objectiu anteriorment esmentat.

Per altra banda, després d'haver portat a terme la proposta didàctica, he fet una petita valoració d'aquesta i he fet una breu proposta de millora en les conclusions de la proposta didàctica, buscant així que els alumnes tinguin una millor base prèvia, de manera que posteriorment tinguin més facilitat a l'hora d'entendre els conceptes tractats en aquesta proposta didàctica.

- L'últim objectiu que em queda per comentar és “Confirmar la meua vocació com a docent de Matemàtiques després d'haver tingut un primer contacte amb l'alumnat de Secundària i Batxillerat.” Després d'haver treballat amb alumnes de diferents nivells i edats; i en tenir la possibilitat de descobrir de primera mà la sensació d'ensenyar, i la satisfacció de veure com els alumnes aprenen, entenen i són conscients del que estan fent. Puc concloure que confirmo la meua vocació com a docent de Matemàtiques. Per altra banda, per conèixer si tinc les habilitats necessàries com a professor de Matemàtiques a Secundària i Batxillerat, faré ús d'unes paraules que

va dir el Dr. Sergi Múria, tutor del meu treball de final de grau; *"hi ha molt pocs matemàtics que es vulguin dedicar a la docència per vocació, i tot matemàtic té molts més dels coneixements necessaris per explicar i aprofundir en els continguts a explicar a Secundària i Batxillerat"*. Així doncs, puc afirmar que tinc les habilitats necessàries per ser professor de Matemàtiques a Secundària i Batxillerat. Per aquest motiu, aquest treball ha acabat reafirmant-me al fet que en el futur em decanti pel vessant de la docència.

Així doncs, estic molt satisfet amb l'experiència viscuda que m'ha aportat aquest treball de final de grau de Matemàtiques. Ja que, m'ha permès ampliar els meus coneixements d'un àmbit molt interessant de les Matemàtiques com és la Teoria de Cues, m'ha donat l'oportunitat de tenir un primer contacte amb diferents alumnes de diferents nivells i edats de Secundària i Batxillerat, explicant-los-hi nous conceptes i aprenent com millorar les explicacions per futurs casos; i també per reafirmar la direcció del meu futur com a matemàtic, veient que vull encaminar-me cap a la docència.

Finalment, puc acabar el treball dient que tot i fer-me veure que vull aprofundir més en el vessant de la docència, també m'ha fet veure la importància de no deixar mai d'investigar, puix que hi ha molts temes i branques de les Matemàtiques dels quals desconec o que són molt més profunds del que em puc arribar a imaginar; per aquest motiu, tot i encaminar-me cap a la docència, sempre intentaré seguir aprofundint en nous temes i àmbits de les Matemàtiques.

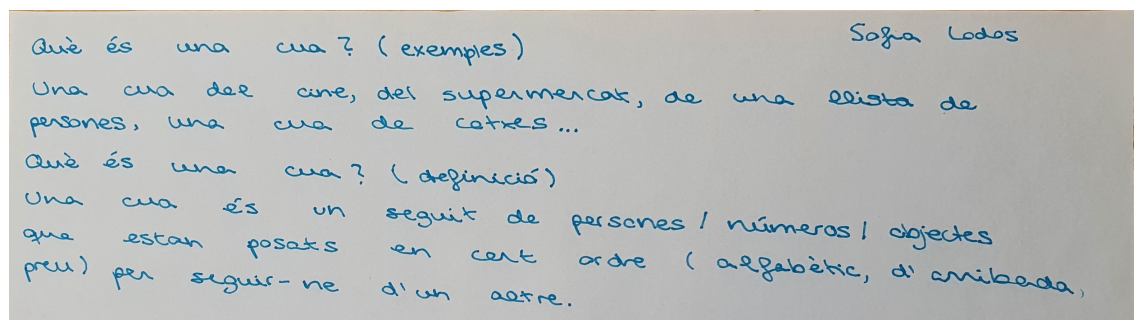
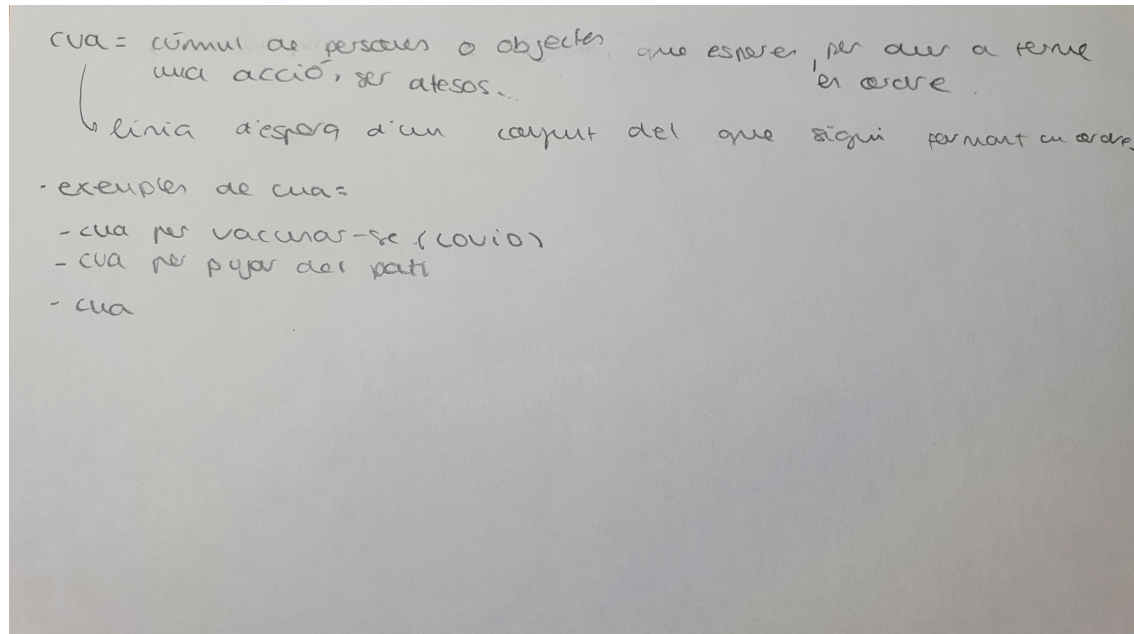
Referències

- [1] Codina, Esteve [en línia]: Teoria de Cues i simulació. Esteve Codina Sancho & Lúdia Montero Mercadé. 20 març 2020. Disponible a:
<http://www-eio.upc.es/teaching/TCiS/TdC.pdf> [Darrera consulta: 19/06/2021]
- [2] Ferrer, Vicent [en línia]: ¿Qué son las colas y que es la teoría de colas? Vicent Ferrer, 6 febrer 2019. Disponible a:
<https://vicentferrer.com/teoria-de-colas/> [Darrera consulta: 19/06/2021]
- [3] Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M., and Harris, C. M.: Fundamentals Of Queueing Theory, 4th ed. Wiley-Interscience, New York, NY, USA (2008). ISBN 978-0-471-79127-0.
- [4] Robert B. Cooper: Introduction to queueing theory. 2nd edition. Computer Systems and Management Science, Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida. 23 setembre 2010. ISBN 0-444-00379-7
Disponible també a:
http://www.cse.fau.edu/~bob/publications/IntroToQueueingTheory_Cooper.pdf [Darrera consulta: 19/06/2021]
- [5] Currículum E.S.O. DECRET 187/2015, Ordre ENS/108/2018, Currículum educació secundària obligatòria, Àmbit matemàtic (matemàtiques): Disponible a
http://www.xtec.cat/monografics/documents/curriculum/secundaria/annex4.pdf?_ga=2.23745971.88919829.1623568547-1410788754.1613582739
[Darrera consulta: 19/06/2021]
- [6] Currículum Batxillerat, DECRET 142/2008 - DOGC núm 5183, Competències específiques de la matèria. Disponible a:
<http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0082/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf> [Darrera consulta: 19/06/2021]
- [7] Sáenz, Eduardo: ¿Cuál es la fila más rápida del supermercado? — Teoría de colas. Eduardo Saenz, 18 octubre 2017. Disponible a:
<https://www.youtube.com/watch?v=VPuRoEOVogo> [Darrera consulta: 19/06/2021]
- [8] Serrano, Sara [en línia]: Ley de Little. Sara Serrano 27 octubre 2017. Disponible a:
<https://www.saraclip.com/ley-de-little/> [Darrera consulta: 19/06/2021]
- [9] Sztrik, J.: Basic Queueing Theory: Foundations of System Performance Modeling. GlobeEdit (2016). ISBN 978-3-639-73471-3.
- [10] Serrano, Pablo [en línia]: Una introducción amable a la teoría de colas, Pablo Serrano Yáñez-Mingot, José Alberto Hernández Gutiérrez, 11 d'abril de 2020. Disponible a:
<https://www.it.uc3m.es/pablo/teoria-colas/introduccion-teoria-colas.pdf> [Darrera consulta: 19/6/2021]
- [11] Araujo, César Iván [en línia]: Teoría de colas: historia, modelo, para qué sirve y ejemplos, Lifeder, César Iván Araujo, 14 de juny de 2019. Disponible a:
<https://www.lifeder.com/teoria-colas/> [Darrera consulta: 19/6/2021]

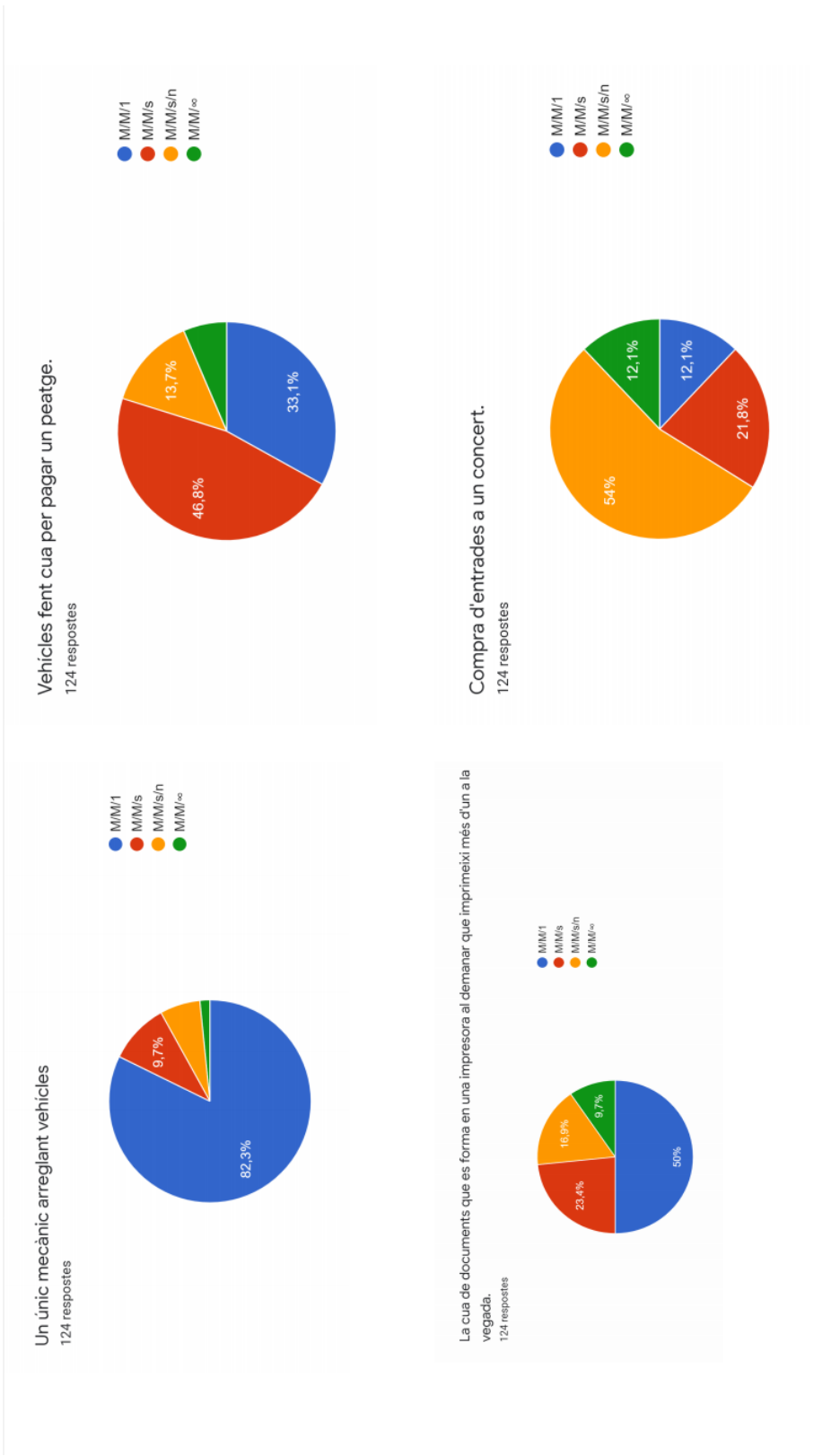
- [12] Tresserras, Lluç [en línia]: Teoria de Cues, Lluç Tresserras, 20 de juny de 2019 Disponible a: <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/156317/2/156317.pdf> [Darrera consulta: 19/6/2021]
- [13] Rovira Escofet, Carles [en línia]: Processos_3, Carles Rovira Escofet, 01 de juny de 2021. Disponible a: https://campusvirtual.ub.edu/pluginfile.php/3787014/mod_resource/content/5/Processos_3.pdf [Darrera consulta: 19/6/2021]

6 ANNEX

Algunes definicions i exemples que van donar els alumnes de l'activitat 1, donada a les propostes didàctiques, són:



Algunes gràfiques més de l'activitat de les propostes didàctiques del qüestionari de Google:



Resolucions de l'activitat d'un model de cues M/M/1 d'alguns alumnes de 1r de Batxillerat.

Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.

Determina:

- Tipus de cua.
- La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès.
- La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament.
- El temps mitjà que un client està esperant a la cua.
- La longitud mitja de la línia d'espera.

a) M/M/1

b) $P(\text{cua}) = \frac{\lambda}{\mu}$

$\lambda \rightarrow$ nombre persones (10p/h)

$\mu \rightarrow$ nombre persones ateses ($\frac{1}{15}$ h)

4min $\rightarrow \frac{1}{15}$ h

$P(\text{cua}) = \frac{10}{15} = \boxed{\frac{2}{3}}$

c) $P(\text{no cua}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

d) $W = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})}$ $W = \frac{\frac{2}{3}}{15(\frac{1}{3})} = \frac{(\frac{2}{3})^3}{15} = \frac{\frac{6}{3}}{15} = \boxed{\frac{2}{15}}$

e) $L = \lambda \cdot W$ $L = 10 \cdot \frac{2}{15} = \frac{20}{15} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.

Determina:

- Tipus de cua.
- La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès.
- La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament.
- El temps mitjà que un client està esperant a la cua.
- La longitud mitja de la línia d'espera.

$$\lambda = 10 \text{ persones / h}$$

$$\mu = 15 \text{ persones / h}$$

a) $M / M / 1$

b) $p(\text{cua}) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{66\frac{2}{3} \%}$

c) $p(\text{no cua}) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{15} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{33\frac{1}{3} \%}$

d) $w = \frac{\lambda}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})} = \frac{\frac{2}{3}}{15(1 - \frac{2}{3})} = \boxed{\frac{2}{15} \text{ h}}$

e) $L = \lambda \cdot w = 10 \cdot \frac{2}{15} = \boxed{\frac{4}{3} \text{ persones}}$

Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.

Determina:

- Tipus de cua.
- La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès.
- La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament.
- El temps mitjà que un client està esperant a la cua.
- La longitud mitja de la línia d'espera.

a) $M/M/1$

$$10 \text{ persones/hora} = \lambda$$

b) $P_{\text{cua}} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$$4 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ persones/min}$$

$$= 15 \text{ persones/hora} = \mu$$

c) $P_{\text{no cua}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

d) $W = \frac{\frac{1}{\mu}}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})} = \frac{\frac{2}{3}}{15(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15} = 8 \text{ min}$

e) $L = \lambda \cdot W = 10 \cdot \frac{2}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1 \text{ o } 2 \text{ persones}$

Una botiga d'alimentació és atesa per una única persona. Aparentment el patró d'arribades dels clients els dissabtes és de 10 persones per hora. S'estima que el temps que es tarda en atendre a un client és un temps mig de 4 min.

Determina:

- Tipus de cua.
- La probabilitat que quan un client arribi hagi d'esperar a ser atès.
- La probabilitat que quan un client arribi sigui atès directament.
- El temps mitjà que un client està esperant a la cua.
- La longitud mitja de la línia d'espera.

a) M/M/1

$$b) p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = 10$$

$$\mu = 15 \text{ pos/h}$$

~~$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$~~ ~~$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$~~

$$c) p_{\text{no atès}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$d) w = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu(1 - \frac{\lambda}{\mu})} = \frac{\frac{2}{3}}{15(1 - \frac{2}{3})} = \frac{2}{15} \text{ h}$$

$$e) L = \lambda \cdot w = 10 \cdot \frac{2}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \text{ persones}$$