UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball Final de Grau

Doble grau de Matemàtiques i Administració i Direcció d'Empreses

---

El model de Black-Litterman per a carteres d'inversió: el Sector Petroli i Energia

---

Miquel Villalonga Suñer

Tutors: **Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica

Dr. José Bonifacio Sáez Madrid
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, gener 2022

Resum

El model de Black-Litterman permet obtenir els retorns esperats del mercat combinant les expectatives dels inversors i un punt de referència neutral. Això és possible gràcies a l'estadística bayesiana. Així, aquest model, a diferència dels models tradicionals, és més estable i consistent amb les expectatives dels inversors. L'objectiu d'aquest treball és explicar tots els components d'aquest model i comparar els resultats que s'obtenen amb els que s'obtindrien aplicant altres models més tradicionals com el de Markowitz. En particular, treballarem amb un sector en concret d'un dels mercats més coneguts al nostre país, l'IBEX 35.

Abstract

The Black-Litterman (BL) model allows to obtain the market expected returns by combining investors' expectations and a neutral landmark. The latter is possible thanks to the Bayesian statistics. Hence, this model, unlike the traditional ones, is more stable and consistent with the investors' expectations. The purpose of this work is to explain all the components of the BL model and compare the obtained results with those that we would get by applying other more traditional models, such as the Markowitz one. In particular, we will base the study on a sector within one of the most well-known stock markets in Spain: the IBEX 35.

2020 Mathematics Subject Classification. 91G10, 91G70, 62P20

Agraïments

En primer lloc, vull agrair als meus tutors Josep Vives i José Sáez la seva dedicació per tirar endavant aquest treball. Sense les seves indicacions i el seu suport no hauria estat capaç de realitzar aquest TFG.

En segon lloc, i no menys important, vull mencionar a tots els meus companys de pis que m'han acompanyat durant aquests 6 anys. Gràcies per aguantar en primera persona el que ha estat sense cap dubte una muntanya russa d'emocions, de moments feliços però també de moments complicats acadèmicament parlant, en els quals era molt necessari rebre ànims de primera mà. Encara que sigui una persona que no li agrada massa expressar els seus sentiments i fa veure com si tot anàs bé, puc dir que m'han ajudat més del que es poden imaginar.

Finalment, els meus grans pilars, la meva família i els meus amics, tant els que han quedat a Mallorca com els que he conegut a Barcelona. Sempre m'han animat en els moments més difícils i sobretot, han demostrat tenir més confiança amb mi que jo mateix. Moltes gràcies pel vostre suport incondicional. Així, acaba una de les millors etapes de la meva vida, d'aquelles que segur no oblidaré mai, esperant ja que el futur sigui igual o millor que el que he viscut fins ara.

Índex

Introducció

La selecció d'actius per a formar carteres òptimes d'inversió és un dels reptes fonamentals dels inversors en els mercats financers globals. Els administradors de carteres busquen constantment mètodes que els permetin seleccionar els actius que millor s'adaptin a les seves necessitats o a les dels seus clients. Per tant, la teoria de selecció de carteres d'inversió s'ha convertit en un tema de principal interès en el món de les finances. Existeix un gran nombre d'oportunitats d'inversió i saber com optimitzar aquestes inversions i crear així les millors carteres és un aspecte fonamental.

Harry Max Markowitz (1952) va desenvolupar un model que forma part del que es coneix com la *Teoria Moderna de Carteres*, la qual combina dos objectius d'inversió: maximitzar els retorns i, al mateix temps, minimitzar el risc, per trobar així carteres eficients en termes de mitjana i variància dels retorns esperats. Aquest model és considerat la base fonamental en la teoria de selecció de carteres. En el procés de selecció de la cartera té en compte els rendiments històrics dels actius, el risc de cada un d'ells (mesurat segons la variància dels rendiments esperats) i la correlació entre cada parell d'actius. Així, es vol trobar la cartera òptima, distribuint el risc de cada actiu dins de la cartera amb l'objectiu d'assegurar el rendiment.

Des de l'aparició d'aquest model ha existit un fort consens en l'administració de carteres d'inversió. En el model de Markowitz, el risc és representat per la variància, que juntament amb l'aversió al risc donada d'un inversor específic, permet derivar la cartera òptima. Basant-se en aquest punt de vista de mitjana-variància, William Sharpe (1964) va desenvolupar un model d'equilibri, el *Capital Asset Prices Model* (CAPM), l'objectiu del qual va ser descriure els retorns dels actius.

Tot i així, diversos autors han trobat que l'aplicació de Markowitz és limitada ja que genera resultats extrems, poc intuïtius, poc diversificats, inestables i que no són apropiats per ser implementats en la cartera d'un client. A més, com que es basa en rendiments històrics per predir el comportament futur dels actius, suposa que els mercats es comporten de la mateixa manera, la qual cosa no es correspon amb la realitat observada. Amb tot això, les carteres resultants acaben concentrades en pocs títols, en aquells amb alta rendibilitat, baixa variància i baixa correlació entre ells.

Per superar aquestes limitacions i amb l'objectiu de trobar un model més aplicable en l'assignació d'actius, Fisher Black i Robert Litterman desenvoluparen el 1991 el seu model, el qual permet combinar els retorns dels actius en equilibri amb les expectatives dels inversors. D'aquesta forma es superen les limitacions del model mitjana-variància, ja que treuen ponderacions menys extremes i menys susceptibles a variacions en els paràmetres inicials.

Aquest model, utilitza informació mostral i extra mostral per minimitzar l'error d'estimació dels paràmetres. La informació extra mostral fa referència a les opinions dels inversors i per a combinar-la s'utilitza l'estadística bayesiana que és un mètode per a combinar diferents fonts d'informació. Amb tot això, una característica important del model de Black-Litterman és la idea de que els inversors han de córrer risc on tinguin opinions i, per tant, han de suportar més risc on tinguin els punts de vista més sòlids.

En aquest treball fem un estudi teòric del model de Black-Litterman i l'apliquem al mercat de l'IBEX 35. En concret, ens centrem en el sector Petroli i Energia. Per això, primer explicarem algunes nocions dels dos models a partir dels quals Black i Litterman varen desenvolupar el seu mètode, com són el model de Markowitz i el model CAPM.

Capítol 1

Conceptes bàsics

Abans d'explicar qualsevol model que faci referència a la inversió en actius financers, hauriem d'entendre en que consisteix exactament el fet d'invertir i de formar una cartera d'inversió. Vegeu [1] i [2].

Una *inversió* és l'adquisició per part d'un subjecte econòmic, que pot ser persona física o jurídica, d'un conjunt d'actius capaços de proporcionar rendes durant un determinat període de temps. Per tant, invertir implica cedir diners en un moment present, a canvi de rebre diners en el futur.

Així, qualsevol inversió ve determinada pel conjunt de pagaments que ha de realitzar l'inversor, i pel conjunt de cobraments que perceb en el futur. Com hem dit, aquest corrent financer es dona durant un període de temps al qual anomenem *horitzó temporal*.

Les inversions es poden diferenciar en *inversions reals* o *inversions financeres*. Les reals fan referència a aquelles en que l'actiu en el qual s'inverteix és un bé material, mentre que en les financeres, l'actiu és un títol financer, com per exemple les accions.

Aquests actius en els quals s'inverteix, poden ser de *renda fixa* o de *renda variable*. Els de renda fixa permeten conèixer els cobraments, mentre que en els de renda variable els cobraments són, a priori, desconeguts. Per exemple, les accions són actius de renda variable.

El fet que existeixin *carteres d'inversió* es dona perquè els inversors distribueixen els seus recursos a invertir en diferents productes. Per a conèixer quina és la *cartera òptima* cal explicar el procés conegut com a *Gestió de carteres*, el qual es divideix en les següents fases:

1. *Anàlisi dels actius.* Es fan prediccions sobre els rendiments esperats d'aquests actius, els seus riscos i les covariàncies entre ells.

2. *Anàlisi de les carteres.* Determinació del rendiment esperat de les carteres i també dels seus riscos depenent dels actius elegits anteriorment i dels recursos invertits en cada un d'ells.

3. *Selecció de la cartera òptima.* Serà aquella que més s'apropi a les preferències i objectius concrets de l'inversor.

L'anàlisi dels actius i el posterior anàlisi de la cartera s'expliquen en la *Teoria de selecció de carteres*, la qual exposa que la selecció òptima de carteres es fa per part d'inversors que actuen de manera racional i amb una determinada aversió al risc, és a dir, intenten maximitzar els seus rendiments per a cada nivell de risc o minimitzar el risc per a cada nivell de rendiment.

Un *actiu* és un instrument financer que permet rebre al seu comprador uns ingressos futurs. Suposem que la cartera està formada per n actius de risc i que en el moment inicial es disposa de C_0 euros per invertir. L'objectiu és repartir C_0 entre els n actius de manera òptima, i que es pugui obtenir així el màxim rendiment.

Sigui $c_{0i}=w_iC_0$ la quantitat que es decideix invertir en l'actiu i, on w_i és el pes de l'actiu i dins de la cartera. Per aquesta definició, s'ha de complir que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

ja que no es pot sobrepassar el pressupost disponible. Es té que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i C_0 = C_0 \sum_{i=1}^{n} w_i = C_0.$$

Definim el *retorn d'un actiu i* com la variable R_i definida per

$$R_i = \frac{c_{1i}}{c_{0i}}$$

on c_{1i} és el retorn que s'obté en el temps $t = 1$. És a dir, es té que $C_1 = c_{11} + ... + c_{1n}$, i equivalentment,

$$C_1 = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i C_0 = C_0 \sum_{i=1}^{n} R_i w_i$$

i per tant el *retorn total de la cartera* serà

$$\frac{C_1}{C_0} = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i = R.$$

D'aquesta manera, es defineix la *taxa de retorn d'un actiu i* com

$$r_i = R_i - 1 = \frac{c_{1i} - c_{0i}}{c_{0i}}$$

i es compleix que

$$c_{1i} - c_{0i} = c_{0i}(R_i - 1) \Leftrightarrow c_{1i} = c_{0i}R_i \Leftrightarrow c_{1i} = c_{0i}(r_i + 1).$$

Amb tot això, la *taxa de retorn total* serà

$$r = R - 1 = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} (R_i - 1) w_i = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i.$$

Un altre concepte que cal definir és el de la *taxa de retorn esperada d'un actiu* i, la qual ve donada per

$$m_i = E(r_i)$$

i per tant $E(c_{1i}) = E(c_{0i}(r_i + 1)) = (1 + m_i)c_{0i}$.

Així, la *taxa de retorn esperada total de la cartera* ve donada per

$$m = E(r) = E(\sum_{i=1}^{n} r_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i w_i.$$

Per acabar, podem definir la *variància entre actius* i la *covariància entre actius.* Aquests conceptes són importants ja que encara que hi ha altres formes de mesurar el risc, utilitzarem el concepte de volatilitat per fer-hi referència, seguint així la idea de Markowitz. De fet, la volatilitat és l'arrel quadrada de la variància, la qual explicarem a continuació. Pel que fa a la covariància, aquesta serà positiva si el valor d'aquests dos actius augmenta o disminueix al mateix temps, mentre que serà negativa si el valor dels actius es mou en sentit contrari. Tenint en compte que $\sigma_i^2 = Var(r_i) = E(r_i^2) - m_i^2$ i $\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = E(r_i r_j) - m_i m_j$, la *variància total de la cartera* explica com de lluny està la taxa de retorn esperada m de la cartera respecte a la vertadera taxa de retorn r i vindrà donada per

$$\sigma^2 = Var(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

Capítol 2

El model de Markowitz

Harry Max Markowitz ocupa un lloc destacat en la *Teoria moderna de carteres* ja que amb la seva publicació el 1952 de l'article *Portfolio Selection* (vegeu [5]) va desenvolupar un model per a un sistema de carteres en el que va plantejar les bases dels sistemes de carteres actuals. Consisteix en un model matemàtic que ofereix als inversors les millors garanties amb el menor risc.

El seu model va aconseguir un gran èxit a nivell teòric, donant lloc a múltiples desenvolupaments i derivacions, i definint les bases de diverses teories d'equilibri en el mercat financer. Tot i així, la seva aplicació a la pràctica no ha estat tan extensa com s'hauria suposat després del seu èxit teòric.

En aquest capítol explicarem algunes idees bàsiques del que pretenia Markowitz amb el seu model. Els resultats obtinguts varen resultar ser poc intuïtius, poc diversificats, inestables i molt sensibles als paràmetres. Són aquestes limitacions les que varen portar a desenvolupar el model que ens interessa explicar amb més detall, el de Black-Litterman. A continuació es presenten les distintes hipòtesis del model de Markowitz (vegeu [4]).

2.1 Hipòtesis sobre el comportament de l'inversor

1. Tots els inversors es comporten de manera racional i per tant maximitzen la seva funció d'utilitat esperada.

2. La funció d'utilitat esperada dels inversors només depèn del rendiment esperat com a mesura de la rendibilitat i la variància com a mesura del risc.

3. Aquestes funcions d'utilitat dels inversors són monòtones creixents i per tant amb carteres amb una mateixa variància, es prefereix la cartera de major rendiment esperat.

4. Els inversors tenen aversió al risc, per tant, amb dues carteres amb el mateix rendiment, es prefereix una cartera amb menor variància.

5. Les corbes d'indiferència són creixents (major risc implica una major rendibilitat exigida) i convexes (major risc implica que augmenta en major mesura la rendibilitat exigida) i ens permeten conèixer les combinacions rendibilitat-risc que proporcionen les mateixes utilitats per a l'inversor.

2.2 Hipòtesis sobre els actius i mercats financers

1. Els mercats són perfectes, és a dir, la informació està disponible de manera igualitària i gratuïta per a tots els individus que formen part del mercat. A més, els títols són infinitament indivisibles, el que significa que es pot invertir en ells en qualsevol proporció. Igualment, no existeixen costos de transacció a les operacions de compravenda dels actius financers, no hi ha impostos ni inflació i els inversors són preu-acceptants.
2. Tots els inversors al principi adquireixen una cartera determinada que venen al final d'un període determinat. Així és que tots els inversors tenen la mateixa amplitud en el seu horitzó de planificació, que és d'un període.
3. En els mercats financers no es contempla l'existència d'un actiu lliure de risc en el que poder invertir, sinó que existeixen n actius amb risc.
4. No es permeten les vendes en descobert. Aquesta pràctica consisteix en la venda de valors que han estat rebuts en préstec d'un tercer. La venda es fa amb la intenció de tornar-los a comprar en una data superior i retornar-los a qui va fer-li el préstec.
5. Els valors tenen liquidesa immediata després del període de referència.

2.3 La frontera eficient de Markowitz

Markowitz explica que el que busca un inversor és una cartera que presenti el menor risc possible per a un determinat nivell de rendibilitat. A través d'uns actius disponibles i d'un capital inicial, s'han de calcular els pesos de cada actiu per obtenir la cartera òptima.

El conjunt de carteres eficients pot calcular-se resolent el següent problema no lineal, en el qual es té en compte que les proporcions han de ser positives (vegeu [6]). El model original de Markowitz ho explica així, encara que Black desenvolupa el model de Markowitz indicant que les proporcions també poden ser negatives, i això és perquè en un mercat eficient les proporcions del vector w podrien ser positives o negatives. Tot i així, a la pràctica, no sempre s'admeten proporcions negatives ja que aquest fet implica l'existència de vendes al descobert en determinades accions i això en el mercat no té perquè ser sempre possible. El problema és:

$$\begin{aligned} \text{Minimitzar} \quad & Var(r) = \omega^T \Sigma \omega \\ \text{Subjecte a} \quad & E(r) = m^T \omega \geq \mu_b > 0 \\ & \mathrm{e}^T \omega = 1 \\ & \omega \geq 0, \end{aligned}$$

on:

$r = (r_1, r_2, ..., r_n)^T$ és el vector aleatori de rendibilitats.

m_i=$E(r_i)$ és la rendibilitat esperada de l'actiu i, i per tant $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$ és el vector de rendibilitats esperades.

ω=$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)^T$ és el vector de pesos associats a la cartera.

$(\sigma_{i,j})_{i,j}$=Σ, amb i, j=1,...,n, la matriu de variàncies i covariàncies de les rendibilitats respecte tots els títols.

e és el vector unitari.

μ_b és el menor retorn que accepta l'inversor.

2.4 Condicions de Karush-Kuhn-Tucker

En aquest apartat s'explicarà la resolució de problemes d'optimització no lineal per tal de poder resoldre el problema presentat anteriorment. Existeixen unes condicions necessàries i suficients que han de complir els candidats a solució òptima del problema. Aquestes condicions són *les condicions de Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) (vegeu [7]).

El que farem és presentar la resolució general del problema següent:

$$\begin{array}{lll} \text{Optimitzar} & f(x_1, ..., x_n) & \\ \text{Subjecte a} & g_j(x_1, ..., x_n) \leq 0, & j = 1, .., p \\ & \mathrm{h}_i(x_1, ...x_n) = 0, & i = 1, ..., m \end{array}$$

Definició 2.1. Una restricció de desigualtat és *activa* per a una funció g en $x \in \mathbb{R}^n$ si compleix que g(x)=0, i direm que és *inactiva* si g(x)<0.

Teorema 2.1. *Sigui $x^* \in \mathbb{R}^n$ solució del problema i suposem que el vector gradient de les restriccions actives juntament amb les restriccions d'igualtats són linealment independents en el punt x^*.*

El Lagrangià és de la forma

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ...\lambda_p, \mu_1, ..., \mu_m) = f(x_1, ..., x_n) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x_1, ...x_n) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(x_1, ...x_n)$$

obtenint així les condicions KKT següents:

1. Condició estacionària

$$\nabla f(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(x_1^*, ...x_n^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x_1^*, ...x_n^*) = 0$$

2. Condició de factibilitat

$$g_j(x_1^*, ...x_n^*) \leq 0, \quad j = 1, ..., p \quad ; \quad h_i(x_1^*, ...x_n^*) = 0, \quad i = 1, ..., m$$

3. Condició d'amplitud

$$\lambda_j g_j(x_1^*, ...x_n^*) = 0, \qquad j = 1, ..., p$$

4. Condició de signe

$$\lambda_j \leq 0$$

Per trobar els punts que compleixin les condicions KKT, primer hem de resoldre el sistema d'equacions format per la condició estacionària,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x_1^*, ...x_n^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(x_1^*, ...x_n^*) = 0, \qquad k = 1, ..., n$$

la condició de factibilitat per a les restriccions d'igualtat

$$h_i(x_1^*, ...x_n^*) = 0, \qquad i = 1, ..., m$$

i la condició d'amplitud

$$\lambda_j g_j(x_1^*, ...x_n^*) = 0, \qquad j = 1, ..., p.$$

Aquest sistema està format per (n+p+m) equacions i (n+p+m) incògnites. El més habitual és començar per la condició d'amplitud ja que les equacions proporcionen dues opcions:

$$\lambda_j g_j(x_1^*, ...x_n^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_j = 0 \\ g_j(x_1^*, ...x_n^*) = 0 \end{cases}$$

Una vegada s'ha resolt el sistema, per veure quines de les solucions que hem obtingut són punts de KKT, s'ha de comprovar que $g_j(x_1^*, ...x_n^*) \leq 0$ i per altra banda que $\lambda_j \leq 0$, $\forall j = 1, ..., p$.

2.5 Resolució del problema

Fent referència a *Portfolio mean and variance* (vegeu [2]) i *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory* (vegeu [6]), en aquest apartat trobarem la solució del problema de Markowitz utilitzant el que hem explicat anteriorment.

El Lagrangià és el següent:

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = w^T \Sigma w - \lambda_1(m^T w - \mu_b) - \lambda_2 w - \mu(e^T w - 1).$$

A més, les condicions KKT ens queden de la següent forma:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w - \lambda_1 m - \lambda_2 - \mu e = 0 \tag{2.1}$$

$$\mu_b \leq m^T w \tag{2.2}$$

$$0 \leq w \tag{2.3}$$

$$e^T w = 1 \tag{2.4}$$

$$\lambda_1(m^T w - \mu_b) = 0 \tag{2.5}$$

$$\lambda_2 w = 0 \tag{2.6}$$

per alguns λ_1, λ_2, $\mu \in \mathbb{R}$.

Sigui w^* la solució del problema, per a la seva resolució considerarem diversos casos:

Cas 1: $\mu_b < m^T w^*$ i $w^* > 0$.
Per la condició (2.5) i (2.6) tenim que $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 0$, i així les condicions KKT ens queden:

$$2\Sigma w^* - \mu e = 0 \tag{2.7}$$

$$e^T w^* = 1 \tag{2.8}$$

Com que $(w^*, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ ha de complir les condicions KKT, hem de resoldre el sistema. Partint de (2.7) i multiplicant per Σ^{-1}, ens queda $w^* = \frac{\mu}{2}\Sigma^{-1}e$ que substituïnt a (2.8) ens dona que $e^T(\frac{\mu}{2}\Sigma^{-1}e) = 1$. Per tant, $\mu = 2(e^T\Sigma^{-1}e)^{-1}$. Així,

$$w^* = (e^T\Sigma^{-1}e)^{-1}\Sigma^{-1}e$$

és la solució buscada del problema d'optimització.

Observació 2.1. *Aquest valor de w^* ens permet saber quina és la cartera de mínima variància i resol el següent problema:*

$$\begin{aligned} \text{Minimitzar} \quad & Var(r) = w^T\Sigma w \\ \text{Subjecte a} \quad & E(r) = m^T w \geq \mu_b > 0 \\ & e^T w = 1 \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

Com a conseqüència, si substituïm el valor de w^* a la desigualtat $m^T w \geq \mu_b$, tenim que el retorn associat seria

$$\mu_{min-var} = \frac{m^T\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e}, \tag{2.9}$$

posant al conjunt de pesos associats al de mínima variància de la solució w^* com $w_{min-var}$.

Cas 2: $\mu_b = m^T w^*$ i $w^* > 0$.
Igual que en el cas anterior, per (2.6) sabem que $\lambda_2 = 0$ i multiplicant (2.1) per Σ^{-1} obtenim

$$w^* = \frac{1}{2}(\lambda_1 \Sigma^{-1} m + \mu \Sigma^{-1} e).$$

Si subsituïm el resultat obtingut a (2.2) i (2.4) s'obté que

$$\mu_b = \frac{1}{2}(\lambda_1 m^T \Sigma^{-1} m + \mu m^T \Sigma^{-1} e)$$

$$1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 m^T \Sigma^{-1} e + \mu e^T \Sigma^{-1} e),$$

que expressat en forma matricial seria

$$\begin{pmatrix} m^T \Sigma^{-1} m & m^T \Sigma^{-1} e \\ m^T \Sigma^{-1} e & e^T \Sigma^{-1} e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu_b \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Observació 2.2. *La matriu* $M=\begin{pmatrix} m^T \Sigma^{-1} m & m^T \Sigma^{-1} e \\ m^T \Sigma^{-1} e & e^T \Sigma^{-1} e \end{pmatrix}$ *és semidefinida positiva ja que*

$$|M| = (m^T \Sigma^{-1} m)(e^T \Sigma^{-1} e) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2 = \delta \geq 0,$$

i això es compleix sempre que m i e siguin linealment independents.

Demostració. Per a veure que M és semidefinida positiva cal veure que tots els menors principals són positius. Per tal de simplificar la notació, sigui $S = \Sigma^{-1}$. Està clar que $m^T S m$ és positiu, ja que tots els elements de S i m són positius. Per tant, només cal veure que el determinant de M és positiu.

Suposem primer que S és una matriu diagonal D amb elements positius. Ara, utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwartz [1], ens queda:

$$(m^T De)^2 \leq (\mathrm{m}^T Dm)(e^T De),$$

la qual cosa demostra que el determinant és positiu. En general, es pot demostrar que per a tot parell de vectors linealment independents a i b, tenim $(a^T Db)^2 \leq (\mathrm{a}^T Da)(b^T Db)$.

Si S no és diagonal, com que és simètrica i semidefinida positiva (les matrius de variàncies i covariàncies sempre ho són), podem escriure $S = P^T DP$ amb $P^T P = Id$. Aleshores, escrivint la desigualtat anterior amb $a = Pm$ i $b = Pe$, arribem al resultat que volem. □

[1] La desigualtat de Cauchy-Schwartz estableix que per a tot parell de vectors x i y d'un espai de producte intern real o complex, $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$, on $(\cdot, \cdot)$ denota el producte escalar.

Cas 2.1: $\delta = 0$

En aquest cas tenim que $m = \tau e$ per algun $\tau \in \mathbb{R}$. Així, si $\mu_b/\tau \neq 1$, llavors el problema no és factible. D'altra banda, si $\mu_b/\tau = 1$, $w_{min-var}$ és solució del problema.

Cas 2.2: $\delta > 0$

En aquest cas, el sistema (2.10) es pot resoldre donant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2e^T v \\ \mu &= -2m^T v, \end{aligned}$$

on

$$v = \delta^{-1}\Sigma^{-1}(\mu_b e - m).$$

Si substituïm aquests valors a w^* obtindrem la solució òptima

$$\begin{aligned} w^* &= e^T v\Sigma^{-1}m - m^T v\Sigma^{-1}e \\ &= e^T\delta^{-1}\Sigma^{-1}(\mu_b e - m)(\Sigma^{-1}m) - m^T\delta^{-1}\Sigma^{-1}(\mu_b e - m)(\Sigma^{-1}e) \\ &= \frac{e^T\Sigma^{-1}(\mu_b e - m)}{\delta}(\Sigma^{-1}m) - \frac{m^T\Sigma^{-1}(\mu_b e - m)}{\delta}(\Sigma^{-1}e) \\ &= \frac{e^T\Sigma^{-1}\mu_b e - e^T\Sigma^{-1}m}{\delta}(\Sigma^{-1}m) - \frac{m^T\Sigma^{-1}\mu_b e - m^T\Sigma^{-1}m}{\delta}(\Sigma^{-1}e) \\ &= \frac{(e^T\Sigma^{-1}\mu_b e)(e^T\Sigma^{-1}m) - (e^T\Sigma^{-1}m)^2}{\delta}\frac{\Sigma^{-1}m}{e^T\Sigma^{-1}m} \\ &+ \frac{(m^T\Sigma^{-1}m)(e^T\Sigma^{-1}e) - \mu_b(m^T\Sigma^{-1}e)(e^T\Sigma^{-1}e)}{\delta}\frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} \\ &= \alpha w_M + (1-\alpha)w_{min-var} \end{aligned}$$

on

$$w_M = \frac{\Sigma^{-1}m}{e^T\Sigma^{-1}m}$$

és el pes del mercat i

$$\alpha = \frac{\mu_b(m^T\Sigma^{-1}e)(e^T\Sigma^{-1}e) - (m^T\Sigma^{-1}e)^2}{\delta}.$$

Cas 3: $\mu_b < m^T w^*$ i $w^* = 0$.

Cas 4: $\mu_b = m^T w^*$ i $w^* = 0$.

En ambdós casos no hem de calcular la solució ja que el que volem trobar és w^* i en aquests casos ja estem suposant que $w^* = 0$.

2.6 Maximitzar beneficis-minimitzar riscos

Realment, l'únic objectiu no és buscar la mínima volatilitat ja que això implica un menor rendiment, així com tampoc no s'espera únicament la maximització de beneficis ja que això implica un risc elevat. Així, el que s'intenta és trobar un equilibri entre els dos. Per tant, el problema a resoldre es podria escriure com:

$$\begin{aligned} \text{Minimitzar} \quad & \omega^T \Sigma \omega - \lambda_1 m^T \omega \\ \text{Subjecte a} \quad & e^T \omega = 1 \\ & \omega \geq 0 \end{aligned}$$

Per resoldre el problema, es fa de manera molt semblant a l'apartat anterior. El Lagrangià és

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = w^T \Sigma w - \lambda_1 m^T w - \lambda_2 w - \mu(e^T w - 1)$$

i per tant les condicions KKT serien:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 2\Sigma w - \lambda_1 m - \lambda_2 - \mu e = 0 \tag{2.11}$$

$$0 \leq w \tag{2.12}$$

$$e^T w = 1 \tag{2.13}$$

$$\lambda_2 w = 0 \tag{2.14}$$

Sigui w^* la solució del problema, llavors hem de considerar dos casos:

Cas 1: $w^* > 0$.
Obersevem que per (2.14) tenim que $\lambda_2 = 0$. Ara, multiplicant per Σ^{-1} a (2.11) ens queda que

$$w^* = \frac{1}{2}(\lambda_1 \Sigma^{-1} m + \mu \Sigma^{-1} e)$$

que substituïnt a (2.13) s'obté que

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 e^T \Sigma^{-1} m + \mu e^T \Sigma^{-1} e) = 1$$

i per tant,

$$\mu = \frac{2 - \lambda_1 e^T \Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} e}.$$

Si ho substituïm al valor que tenim per w^* ens queda que

$$\begin{aligned}
w^* &= \frac{1}{2}(\lambda_1 \Sigma^{-1} m + \frac{2 - \lambda_1 e^T \Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} e} \Sigma^{-1} e) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_1 \Sigma^{-1} m + \frac{2\Sigma^{-1} e - \lambda_1 e^T \Sigma^{-1} m \Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e}) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_1 \Sigma^{-1} m + \frac{2\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} - \frac{\lambda_1 (m^T \Sigma^{-1} e) \Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{2\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} + \lambda_1 (m^T \Sigma^{-1} e)(\frac{\Sigma^{-1} m}{m^T \Sigma^{-1} e} - \frac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e})) \\
&= \frac{1}{2}((2 - \alpha)\frac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} + \alpha \frac{\Sigma^{-1} m}{m^T \Sigma^{-1} e}) \\
&= \frac{1}{2}((2 - \alpha) w_{min-var} + \alpha w_M),
\end{aligned}$$

on $w_{min-var}$ i w_M són els pesos que hem definit anteriorment i $\alpha = \lambda_1 (m^T \Sigma^{-1} e)$. A més, la rendibilitat és

$$\begin{aligned}
\mu_{\lambda_1} &= m^T w_{\lambda_1} = \frac{1}{2}((2 - \alpha) m^T w_{min-var} + \alpha m^T w_M) \\
&= \frac{1}{2}(2 m^T w_{min-var} + \alpha m^T (w_M - w_{min-var})) \\
&= \frac{1}{2}(2\mu_{min-var} + \lambda_1 (m^T \Sigma^{-1} e)(w_M - w_{min-var})) \\
&= \frac{1}{2}(2\mu_{min-var} + \lambda_1 \frac{\delta}{e^T \Sigma^{-1} e})
\end{aligned}$$

on

$$\delta = (m^T \Sigma^{-1} m)(e^T \Sigma^{-1} e) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2.$$

Observació 2.3. *Si $\lambda_1 = 0$, llavors $\mu_0 = \mu_{min-var}$ ja que no estariem fixant cap rendibilitat mínima, és a dir, només volem que el nostre risc sigui mínim.*

Observació 2.4. *Fixem-nos que si $\lambda_1 \to \infty$, llavors $\mu_{\lambda_1} \to \infty$, per tant, si $\lambda_1 \in (0, \infty)$, llavors $\mu_{\lambda_1} \in (\mu_0, \infty)$. Ara, podem definir la corba $(\sqrt{w_{\lambda_1}^T \Sigma^{-1} w_{\lambda_1}}, r_{\lambda_1}) = (\sqrt{Var(r_{\lambda_1})}, E(r_{\lambda_1}))$, on $r_{\lambda_1} = w_{\lambda_1}^T r$. Aquesta corba és coneguda com la* ***Frontera Eficient****.*

Cas 2: $w^* = 0$.
En aquest cas ja hem acabat perquè el que volem calcular és w^* i ja estem suposant que $w^* = 0$.

2.7 Mètode de la línia crítica

Aquest mètode utilitza la resolució matemàtica del problema d'optimització que hem vist anteriorment per a detectar *carteres cantonada* (corner portfolios) que tenen unes propietats especials i que permeten conèixer a partir d'elles totes les carteres eficients i, per tant, la frontera eficient del problema.

Definició 2.2. Una **cartera cantonada** és una cartera eficient que té la propietat de que la seva composició canvia qualitativament a la frontera eficient si:

- S'incorpora un nou actiu a la frontera eficient que abans no hi formava part.
- Surt de la frontera eficient un actiu que abans sí hi formava part.

Teorema 2.2. *Una cartera és eficient si i només si és combinació lineal de dues carteres cantonada consecutives.*

Suposem que tenim n actius sobre els quals apliquem l'algoritme i que es detecten m carteres cantonada, sobre les quals tenim la següent informació:

Cartera cantonada	Rend.hist.mitjana	Risc	Pesos
1	R_1	σ_1^2	$X_1 = (x_{1,1}, ..., x_{1,n})$
...	...	...	...
h	R_h	σ_h^2	$X_h = (x_{h,1}, ..., x_{h,n})$
h+1	R_{h+1}	σ_{h+1}^2	$X_{h+1} = (x_{h+1,1}, ..., x_{h+1,n})$
...	...	...	...
m	R_m	σ_m^2	$X_m = (x_{m,1}, ..., x_{m,n})$

La taula anterior ens mostra la variància com a mesura del risc, però es podria arribar a un resultat anàleg amb qualsevol altre mesura de risc.

Sigui R^* la rendibilitat esperada desitjada per l'inversor, en aquest cas, la rendibilitat històrica mitjana desitjada, i que compleix:

$$R_h \geq R^* \geq R_{h+1}.$$

Llavors,

$$R^* = \lambda R_h + (1-\lambda) R_{h+1} \longrightarrow \lambda = \frac{R^* - R_{h+1}}{R_h - R_{h+1}}.$$

Així, la cartera eficient que proporciona una rendibilitat esperada R^* és:

$$X^* = \lambda X_h + (1-\lambda) X_{h+1},$$

que de forma matricial ens quedaria:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{h,1} \\ x_{h,2} \\ \dots \\ x_{h,n} \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_{h+1,1} \\ x_{h+1,2} \\ \dots \\ x_{h+1,n} \end{pmatrix}.$$

Capítol 3

El model CAPM

El model CAPM (Capital Asset Pricing Model) és un model de valoració d'actius financers que va desenvolupar William Sharpe, basant-se en diversos escrits de Harry Markowitz sobre la diversificació i la seva teoria sobre carteres d'inversió.

En aquest capítol expliquem alguns detalls sobre aquest model ja que és un dels punts de partida del model de Black-Litterman que explicarem posteriorment.

El model CAPM parteix d'unes certes hipòtesis (vegeu [3]): existeix un mercat obert en el qual tots els actius amb risc estan a disposició dels inversors, els quals també tenen accés a tota la informació d'aquest mercat (risc, rendiment esperat i covariància dels actius). A més, existeix un únic actiu lliure de risc amb una taxa de retorn r_0 i tots els inversors són adversos al risc, és a dir, tenen preferència a acceptar ofertes amb un cert nivell de risc que d'altres amb un risc superior però amb major rendibilitat.

Amb tot això, es té que tots tenen el mateix problema d'optimització de cartera amb la mateixa solució eficient, és a dir, en el moment en que tots tenen els mateixos actius financers disponibles, amb la mateixa informació sobre cada un d'ells i amb el mateix mètode de decisió a l'hora d'invertir, tots ells han de tenir la mateixa frontera d'eficiència amb la mateixa cartera, la qual surt de la combinació entre l'actiu lliure de risc i el fons creat pels actius amb risc.

Anomenarem *cartera de mercat* al fons eficient anteriorment esmentat i el notarem com $M = (\sigma_M, m_M)$. Per a aquesta cartera, podem calcular la ponderació que li correspon a cada actiu de la següent manera: es divideix el valor total de les seves accions, és a dir, el valor del capital de cada actiu, entre el valor del capital total del mercat.

Per exemple, si suposem que el mercat està format per n actius, el valor del capital total del mercat vindrà donat per $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$, on cada V_i és el valor del capital de l'actiu i. La manera de calcular-ho és la següent: si l'actiu i està representat per 1000 actius de 30€ cada un, llavors el seu valor del capital és $V_i = 1000 * 30 = 30000$. Finalment, la ponderació de cada actiu dins de la cartera de mercat és $w_i = \frac{V_i}{V}$.

Així, amb les situacions que hem descrit anteriorment, es diu que el mercat financer està en equilibri i per tant, tots els títols amb risc tenen una demanda igual a la seva oferta. A més, el tipus d'interès lliure de risc és únic i el seu valor es determina a través de l'oferta i la demanda.

Per tant, amb el model CAPM es pot conèixer quina és la rendibilitat esperada de qualsevol actiu, dins d'un mercat eficient, i podem saber quins actius ofereixen una rendibilitat major per a un determinat nivell de risc. Com major sigui el risc, representat pel coeficient beta i definit com la sensibilitat als canvis en els rendiments del conjunt del mercat, major és la prima de risc exigida pels inversors (diferència de rendibilitat entre la taxa d'interès d'un actiu lliure de risc i la rendibilitat que proporciona el mercat) i, per tant, major és la seva rendibilitat.

3.1 El retorn esperat d'un actiu

Teorema 3.1. *Sigui una cartera formada per un actiu lliure de risc i un fons d'inversions F format per actius amb risc. Llavors, qualsevol cartera eficient pot ser expressada com una combinació lineal de l'actiu sense risc i de l'esmentat fons.*

En particular, la frontera eficient és una recta que va des del punt de l'actiu lliure de risc fins al fons F. Si (σ_M, m_M) és el punt que fa referència a la cartera de mercat M, llavors tots els punts que elegeix un inversor, i que són de la forma (σ,m), estàn sobre el que es diu *línia de mercat de capital*, que és la recta

$$m = r_0 + \frac{m_M - r_0}{\sigma_M}\sigma. \tag{3.1}$$

Teorema 3.2. *Capital Asset Pricing Model (CAPM). El retorn esperat d'un actiu i, $E(r_i)$, compleix que*

$$E(r_i) = r_0 + \beta_i(E(r_M) - r_0), \tag{3.2}$$

on

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2},$$

$E(r_M)$ és el retorn esperat del mercat, $\sigma_{i,M}$ és la covariància entre l'actiu i i la cartera de mercat M i σ_M^2 és la variància del mercat M. La variable β és una variable que mesura el risc individual per a cada actiu.

Demostració. Recordem que l'objectiu del model CAPM és determinar el comportament d'una acció davant el comportament del mercat, per tant comencem suposant una cartera formada de la següent manera:

a: percentatge de la cartera col·locat en l'actiu ineficient i amb risc i.
(1-a): percentatge de la cartera col·locat en la cartera de mercat M.

Així, el valor esperat de la rendibilitat d'aquesta cartera vindrà donat pel promig ponderat dels valors esperats de la rendibilitat de cada un dels actius (i,M):

$$E(r_c) = (1-a)E(r_M) + aE(r_i).$$

D'altra banda, el risc total de la cartera no és un promig ponderat, sinó que és la combinació dels seus riscos individuals i la seva covariància:

$$\sigma_{r_c}^2 = (1-a)^2\sigma_M^2 + a^2\sigma_i^2 + 2a(1-a)\sigma_{i,M}.$$

Ara, per veure el canvi en el valor esperat de la rendibilitat i en la desviació estàndard respecte al percentatge a de la cartera invertida en l'actiu i, es determinen les derivades parcials respecte aquest percentatge a. Així, el canvi en la rendibilitat esperada vindrà donat per:

$$\frac{\partial E(r_c)}{\partial a} = E(r_i) - E(r_M).$$

I el canvi en el risc de la cartera (en termes de desviació estàndard σ_{r_c}) ve donat per:

$$\frac{\partial \sigma_{r_c}}{\partial a} = \frac{1}{2}[(1-a)^2\sigma_M^2 + a^2\sigma_i^2 + 2a(1-a)\sigma_{i,M}]^{-1/2}(2a\sigma_i^2 + 2\sigma_{i,M} - 4a\sigma_{i,M} - 2\sigma_M^2 + 2a\sigma_M^2).$$

D'altra banda, en equilibri, la cartera de mercat ja té el pes w_i invertit en l'actiu amb risc i. El percentatge a es pot interpretar com l'excés de demanda d'aquest actiu, però en equilibri, la demanda en excés de qualsevol actiu és 0. Així, en equilibri, a=0, llavors:

$$\frac{\partial E(r_c)}{\partial a}|_{a=0} = E(r_i) - E(r_M),$$

$$\frac{\partial \sigma_{r_c}}{\partial a}|_{a=0} = \frac{1}{2}[\sigma_M^2]^{-1/2}(2\sigma_{i,M} - 2\sigma_M^2) = \frac{(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2)}{\sigma_M}.$$

El pendent risc-rendiment, avaluat en el punt M, en equilibri de mercat és:

$$\frac{\frac{\partial E(r_c)}{\partial a}}{\frac{\partial \sigma_{r_c}}{\partial a}}|_{a=0} = \frac{E(r_i) - E(r_M)}{\frac{(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2)}{\sigma_M}}.$$

Al mateix temps, el pendent de M és el mateix pendent de la línia del mercat de capital, que podem trobar a la fórmula (3.1). Si igualem, ens queda:

$$\frac{E(r_i) - E(r_M)}{\frac{(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2)}{\sigma_M}} = \frac{E(r_M) - r_0}{\sigma_M}$$

$$E(r_i) - E(r_M) = \frac{E(r_M) - r_0}{\sigma_M} \cdot \frac{(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2)}{\sigma_M}$$

$$\begin{aligned}
E(r_i) &= \frac{(E(r_M) - r_0)(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2)}{\sigma_M^2} + \frac{E(r_M)\sigma_M^2}{\sigma_M^2} \\
&= \frac{E(r_M)\sigma_{i,M} - r_0\sigma_{i,M} - E(r_M)\sigma_M^2 + r_0\sigma_M^2 + E(r_M)\sigma_M^2}{\sigma_M^2} \\
&= \frac{\sigma_{i,M}(E(r_M) - r_0) + \sigma_M^2(-E(r_M) + r_0 + E(r_M))}{\sigma_M^2} \\
&= \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}[(E(r_M) - r_0)] + \frac{\sigma_M^2 r_0}{\sigma_M^2} \\
&= r_0 + [(E(r_M) - r_0)]\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}.
\end{aligned}$$

Si tenim en compte que $\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$ ja hem obtingut la fórmula que voliem. □

3.2 Taxa de retorn d'un actiu

Teorema 3.3. *Donat un actiu i, la seva taxa de retorn és*

$$r_i = r_0 + \beta_i(r_M - r_0) + \epsilon_i \tag{3.3}$$

on ϵ_i és una variable que fa referència a l'error.

De la fórmula CAPM que hem vist en la secció anterior, es pot veure immediatament que $E(\epsilon_i) = 0$. A més, aquest error està incorrelacionat amb la cartera de mercat, és a dir, $Cov(\epsilon_i, r_M) = 0$:

$$\begin{aligned}
Cov(\epsilon_i, r_M) \quad &= Cov(r_i - r_0 - \beta_i(r_M - r_0), r_M) \\
&= Cov(r_i - \beta_i(r_M - r_0), r_M) \\
&= Cov(r_i, r_M) - \beta_i Cov(r_M, r_M) \\
&= \sigma_{i,M} - \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}\sigma_M^2 \\
&= \sigma_{i,M} - \sigma_{i,M} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pel que fa a la variància, utilitzant la fórmula del model CAPM amb el terme de l'error, és a dir, la fórmula (3.3), ens queda:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + Var(\epsilon_i).$$

El terme $\beta_i^2 \sigma_M^2$ s'anomena *risc sistemàtic* i fa referència a la part del risc d'invertir en l'actiu i, mentre que $Var(\epsilon_i)$ s'anomena *risc no sistemàtic* i es pot reduir diversificant.

3.3 Limitacions del model CAPM

Després de veure les seves principals característiques, podriem dir que el model CAPM es caracteritza per la seva simplicitat a l'hora de calcular la rendibilitat esperada i el risc per a un actiu, però tot i així, hi ha molts articles que afirmen que encara que fos un avanç teòric molt potent, a la pràctica deixa molt que desitjar.

El model presenta algunes limitacions que sorgeixen bàsicament de les suposicions que fa el model. D'una banda, suposa que tots els inversors tenen la mateixa opinió sobre les rendibilitats, per tant si els inversors no tenen les mateixes creences o prediccions pel que fa al comportament de les futures rendibilitats, això suposaria una limitació molt forta a l'hora d'aplicar aquest model.

D'altra banda, alguns autors com Stephen A. Ross (1976) (vegeu [20]) es qüestionen el fet de que la rendibilitat d'un actiu depengui d'una sola beta, ja que podria dependre d'un conjunt de factors de risc o de betes que mesuren la sensibilitat d'un títol davant variacions dels dinstints factors que influiran en el risc sistemàtic. De fet, varis estudis han demostrat que la beta posseeix algunes debilitats degudes a la impossibilitat de capturar tots els factors de risc sistemàtics que influeixen. Fins i tot s'han plantejat que variables com el moment de compra del títol o la grandària de les empreses (relació entre preu de mercat i valor comptable) podrien explicar millor el rendiment esperat de l'actiu.

Per exemple, a un estudi realitzat per Eugene Fama i Kenneth French a la Universitat de Chicago el 1992 (vegeu [12]), es va demostrar que els rendiments són inversament proporcionals a la grandària de l'empresa, la qual es mesura a través de la capitalització bursàtil i a través de la ràtio valor de mercat/valor comptable.

Capítol 4

El model de Black-Litterman

Aquest capítol es desenvolupa gràcies a un article publicat per Henry Stewart (vegeu [13]).

El model de Black-Litterman (BL) es forma a partir d'una cartera d'inversió de referència (equilibri de mercat) que correspon al conjunt de retorns esperats que igualen l'oferta i la demanda d'actius financers, en el cas en que tots els inversors tinguin les mateixes expectatives (vegeu [14]). Aquest equilibri de mercat es pot entendre com el centre de gravetat sobre el que es mou el mercat i del que es desvia constantment, però al que sempre tendeix.

Aquest model va ser desenvolupat el 1991 per Fisher Black i Robert Litterman (vegeu [15]). La idea principal d'aquest model és combinar les idees del *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), el model Bayesià i el model de Markowitz amb l'objectiu de calcular la cartera de pesos òptima sota uns paràmetres específics. Recordem que en el model de Markowitz els inversors utilitzaven com a dades de partida els retorns esperats dels actius i els aplicaven al model, el qual generava la cartera òptima. Ara veurem que en el model de Black-Litterman els inversors tenen en compte el seu punt de vista sobre els retorns esperats de les carteres, de manera que el model combina els retorns esperats en equilibri amb les opinions dels inversors.

4.1 L'estadística Bayesiana

En aquesta secció utilitzem la referència [18].

En general, s'utilitzen probabilitats de manera informal per expressar la informació o incertesa que es té amb les observacions de quantitats desconegudes. Tot i així, expressar la informació mitjançant les probabilitats es pot fer d'una manera formal.

Des del punt de vista matemàtic es pot demostrar que amb el càlcul de probabilitats es pot representar de manera numèrica el conjunt racional de creences, i per tant existeix una relació directa entre informació i probabilitat, i la *regla de Bayes* proporciona un mètode natural d'actualització d'aquestes creences quan apareix nova informació. Aquest procés d'aprenentatge inductiu és la base de la *Inferència Bayesiana*. Els mètodes bayesians proporcionen:

- Estimadors dels paràmetres que tenen bones propietats estadístiques.

- Una descripció simple de les dades observades.
- Una estimació de les dades *missing* (aquelles que falten degut a qualsevol esdeveniment) i prediccions de futures observacions.
- Una metodologia computacional potent per a l'estimació, selecció i validació de models.

A més, la metodologia bayesiana consta de tres passos fonamentals:

1. Especificar un model de probabilitat que inclou algún tipus de coneixement previ (a priori) sobre els paràmetres del model donat.
2. Actualitzar el coneixement sobre els paràmetres desconeguts condicionant aquest model de probabilitat a les dades observades.
3. Avaluar l'ajust del model a les dades i la sensibilitat de les conclusions a canvis en els supòsits del model.

La diferència fonamental entre l'*estadística clàssica* (freqüentista) i la bayesiana és el concepte de probabilitat. Per a l'estadística clàssica és un concepte objectiu, que es troba a la naturalesa, mentre que per a l'estadística bayesiana es troba en l'observador, i per tant és un concepte subjectiu.

D'aquesta manera, l'estadística clàssica només té en compte com a fonts d'informació la mostra obtinguda suposant que es podria prendre una mostra infinita de manera hipotètica. D'altra banda, l'estadística bayesiana, a més de prendre la mostra, també té un paper fonamental la informació prèvia o externa que es té sobre els fenòmens que es tracten de modelitzar.

Així, el concepte bàsic de l'estadística bayesiana és el de la *probabilitat condicional*: per a dos successos A i B, es té que la probabilitat de A condicionada a B és:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Es pot aplicar aquesta definició a variables discretes o continues. Des del punt de vista bayesià, a la pràctica, totes les probabilitats són condicionals perquè quasi sempre existeix algún coneixement previ o certa experiència sobre els successos.

Teorema 4.1. *Teorema de Bayes. Es té que, per als successos $A_1, ...A_n$ i B,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}.$$

En el cas de que una variable aleatòria X sigui continua, aplicant el teorema de Bayes es té

$$f(x|y) = \frac{f(y|x)f(x)}{f(y)},$$

i com que el denominador $f(y)$ no depèn de x, llavors es pot escriure el teorema amb la forma de proporcionalitat ($\propto$):

$$f(x|y) \propto f(y|x)f(x).$$

Aquest resultat és útil per als càlculs perquè implica que es poden oblidar les constants multiplicatives fins al final en els models complicats.

D'aquesta manera, en el model de Black-Litterman s'aplica l'estadística bayesiana. La primera part tracta el càlcul de la informació a priori per estimar els retorns, i això es treu de la cartera d'equilibri CAPM. El segon pas és incorporar l'opinió dels inversors i finalment el tercer pas consisteix en la combinació del procés d'estimació dels retorns amb els punts de vista dels inversors, mitjançant el Teorema de Bayes.

4.2 Retorn implícit: el vector Π

En el model BL els retorns implícits o d'equilibri poden obtenir-se de dues formes: la primera consisteix en assumir que el mercat està en equilibri i s'utilitza un mètode d'optimització inversa, és a dir, en lloc de trobar una ponderació a partir d'una rendibilitat donada, es busca una rendibilitat esperada a través d'una ponderació donada; la segona forma és a través de la teoria del CAPM. En ambdós casos s'arriba a la següent fórmula:

$$\Pi = \lambda \Sigma \omega \tag{4.1}$$

on:

Σ : És la matriu de variàncies-covariàncies dels retorns dels actius sobre la taxa lliure de risc [1] diària.

ω : És el vector de ponderacions calculades per capitalització del mercat.

λ : És el coeficient d'aversió al risc. Representa la compensació esperada risc-retorn, és a dir, és la taxa a la qual un inversor renunciarà a una determinada rendibilitat per tenir menys risc.

Del model CAPM s'obté la següent expressió:

$$\Pi = \beta(R_M - R_f) \tag{4.2}$$

on:

R_M: És el retorn esperat del mercat M.

R_f: És el retorn de l'actiu lliure de risc que suposa que existeix el model CAPM.

β: És el quocient entre la covariància dels retorns dels actius de la cartera d'inversió amb el retorn del mercat i la variància del mercat, és a dir:

[1] La taxa lliure de risc és el tipus d'interès que un inversor obtindrà per invertir durant un període en un actiu financer sense risc. Teòricament es considera que els bons governamentals emesos per economies sòlides a curt termini són actius lliures de risc.

$$\beta = \frac{\Sigma\omega}{\omega'\Sigma\omega}. \tag{4.3}$$

Subsituïnt, ens queda:

$$\Pi = \frac{\Sigma\omega(R_M - R_f)}{\omega'\Sigma\omega} \tag{4.4}$$

on $\frac{(R_M - R_f)}{\omega'\Sigma\omega}$ és el coeficient d'aversió al risc λ, arribant així a l'expressió inicial dels retorns d'equilibri (4.1).

Aquest paràmetre λ presenta un significat diferent segons el seu valor, ja que un major λ significa que l'inversor buscarà major ponderació en actius més segurs, i un inversor amb un λ menor buscarà major ponderació en aquells actius més volàtils.

Els retorns implícits d'equilibri es podrien definir com els retorns a llarg termini que els mercats de capital proveeixen i que igualen l'oferta i la demanda d'actius financers, i en el model BL s'utilitzen per centrar la cartera d'inversió òptima al voltant d'una cartera de mercat. Així, es podria començar a introduir el vector de retorns en excés esperats del model BL, μ_{BL}, el qual s'assumeix que te una distribució de probabilitat que és proporcional al producte de dues distribucions normals.

La primera distribució representa els retorns en equilibri, i serà la probabilitat a priori per a després aplicar la teoria Bayesiana. Aquesta distribució presenta mitjana Π amb matriu de covariàncies $\tau\Sigma$. El paràmetre τ és un escalar que fa referència al grau d'incertesa associat al càlcul del vector de retorns d'equilibri.

Per tant, la primera suposició del model és la següent:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma). \tag{4.5}$$

L'escalar τ és el nivell d'incertesa que te l'inversor sobre els retorns d'equilibri. Un valor petit dóna major ponderació als retorns d'equilibri (Π), i per tant una major confiança sobre ells; un valor igual a 0 significa que l'inversor no te confiança en la seva opinió, i per tant, el retorn esperat de la cartera d'inversió serà el retorn d'equilibri.

4.3 Les opinions dels inversors: matrius P i Q

La part més significativa d'aquest model és la incoporació de les opinions, en termes de rendibilitat, que els inversors tenen sobre els actius que formen la cartera. Això permet combinar les perspectives dels inversors amb l'equilibri de mercat, de tal forma que aquest es pugui anticipar a les desviacions que presentarà tal equilibri i agafar avantatge mentre el mercat s'acomoda novament.

Com ja s'ha comentat anteriorment, l'estadística bayesiana permet combinar informació mostral amb informació no mostral (expectatives dels inversors) i modelar així la incertesa associada a tal informació. Aquest fet ha significat una contribució molt important a la pràctica de la presa de decisions ja que ha suposat una teoria estadística coherent, que ha permès estructurar i definir probabilitats subjectives en el context d'un problema de decisió.

Amb tot això, l'estadística bayesiana presenta un avantatge important per a la presa de decisions d'inversió i gestió de carteres, quan la informació mostral és limitada, permetent que la informació no mostral generi valor al procés d'optimització.

Per tant, la incorporació de les perspectives dels inversors dona lloc al principal avantatge del model, la seva flexibilitat. Això és així ja que el model permet que l'inversor pugui incloure les seves opinions i, davant l'arribada de nova informació, actualitzar-les. Així, l'inversor pot prendre risc on realment té una opinió i en una major magnitud on tingui una major confiança.

Sigui k el nombre de perspectives que té un inversor, llavors tenim la matriu $P_{k\times n}$ i la matriu $Q_{1\times k}$. La matriu P informa dels actius sobre els quals es té una perspectiva. Es construeix depenent del tipus d'opinió que es tengui, ja que aquesta opinió pot ser relativa o absoluta. Una *opinió relativa* és quan es realitza una comparació entre dos o més actius de la cartera, i per tant el retorn d'un actiu sobrepassarà al d'un altre amb un percentatge determinat, i en aquest cas les files de la matriu han de sumar 0. En canvi, una *opinió absoluta* és quan s'espera un excés de retorn fix d'un actiu en particular, i en aquest cas les files de la matriu han de sumar 1. En el cas de les opinions relatives, segons Satchell i Scowcroft (2000) (vegeu [19]), el valor de les ponderacions positives serà $\frac{+1}{x}$ on x és el nombre d'actius amb millors expectatives, mentre que el valor de les ponderacions negatives serà $\frac{-1}{y}$ on y és el nombre d'actius amb pitjors expectatives. D'altra banda la matriu Q ens mostra les rendibilitats de les opinions anteriors.

Per exemple, suposem el cas en el qual tenim 4 actius i les següents expectatives: la rendibilitat de l'actiu A podria ser igual a la rendibilitat de l'actiu C més un 3% i l'actiu B podria tenir una rendibilitat del 2%. Llavors les matrius P i Q quedarien de la següent forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,02 \end{pmatrix}.$$

Així, arribem a la segona suposició del model BL:

$$P\mu \sim N(Q, \Omega) \tag{4.6}$$

on Ω és una matriu diagonal k×k amb elements a la diagonal i zeros a la resta de posicions, ja que es suposa que les opinions no estàn correlacionades entre sí.

4.4 Confiança en les opinions dels inversors: matriu Ω

Els valors de la diagonal d'aquesta matriu representen el nivell de confiança que té l'inversor sobre les seves expectatives. Si la confiança és baixa, llavors la composició de la cartera d'inversió tendirà més cap a l'equilibri que hem calculat inicialment. En cas contrari, si la confiança és alta, la composició de la cartera d'inversió dependrà de les expectatives de l'inversor.

Així doncs, la matriu Ω depèn de la matriu de covariances inicial Σ, de l'escalar d'incertesa τ i de la matriu P (vegeu [16]):

$$\Omega = diagonal(P(\tau\Sigma)P^T). \tag{4.7}$$

4.5 Retorns esperats, fórmula de Black-Litterman

Com ja hem comentat anteriorment, el model de Black-Litterman vol donar un conjunt de retorns esperats mitjançant la incorporació d'opinions dels inversors. La manera d'incorporar aquestes opinions a l'equilibri de mercat inicialment calculat, és a través del *Teorema de Bayes.*

Abans d'aplicar el teorema, canviarem alguna notació que hem utilitzat fins ara. Sigui M la variable aleatòria referent al vector d'excés de retorn, és a dir, el rendiment real. Ho expressarem com M = m - r_0, on r_0 és el retorn de l'actiu lliure de risc. Així per tant, les dues suposicions del model que hem explicat anteriorment, ens queden de la següent forma:

$$\Pi|M \sim N(M, \tau\Sigma) \tag{4.8}$$

$$PM \sim N(Q, \Omega). \tag{4.9}$$

Amb les notacions que tenim, el teorema de Bayes s'expressaria de la següent forma:

$$f_{M|\Pi}(m|\pi) = \frac{f_{\Pi|M}(\pi|m)f_M(m)}{f_\Pi(\pi)} \propto f_{\Pi|M}(\pi|m)f_M(m) \tag{4.10}$$

ja que $f_\Pi(\pi)$ és un valor constant.

Teorema 4.2. *Amb les suposicions (4.8) i (4.9), juntament amb la fórmula (4.10), volem veure la fórmula de Black-Litterman, és a dir, volem veure que* $f_{M|\Pi}(m|\pi) \sim N(\mu_{BL}, \sigma)$*, on:*

$$\mu_{BL} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q)$$

$$\sigma = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}.$$

Demostració. Sabem per (4.9) que $PM \sim N(Q, \Omega)$, per tant la seva funció de densitat és

$$f_{PM}(Pm) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k det(\Omega)}} exp\left\{-\frac{1}{2}(Pm-Q)^T\Omega^{-1}(Pm-Q)\right\}.$$

D'altra banda, per (4.8) sabem que $\Pi|M \sim N(M, \tau\Sigma)$, i per tant tenim la següent funció de densitat:

$$f_{\Pi|M}(\pi|m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\tau\Sigma)}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\pi-m)^T(\tau\Sigma)^{-1}(\pi-m)\right\}.$$

Observació 4.1. *Amb la suposició (4.9) tenim que PM es distribueix com una Normal, però el que necessitem realment és el comportament de M per poder trobar $f_M(m)$.*

Si P fos invertible tindriem $f_M(m) = f_{PM}(Pm) \cdot det(P)^{-1}$, amb el determinant que seria un valor constant i per tant no hi hauria problema, la suposició (4.9) seria vàlida.

Com que P no és una matriu quadrada, no pot tenir inversa. Però per solucionar aquest problema, el que es fa és completar la matriu amb 0's de manera que la dimensió de P sigui nxn.

Igualment, si modifiquem la matriu P, també està canviant la matriu Ω, que també haurà de ser de dimensió nxn. Com que es desconeix el valor dels coeficients que completen aquesta matriu, el grau d'incertesa és major. Per això, la resta de coeficients de la diagonal seràn infinits, ja que al fer la inversa aquests coeficients seran 0 i no ens afectarà al resultat.

$$\Omega = \begin{pmatrix} w_{11} & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & w_{kk} & & & \\ & & & & \infty & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & \infty \end{pmatrix}$$

A continuació, ja podem aplicar les funcions de densitat que hem trobat a la fórmula de Bayes:

$$\begin{aligned} f_{\Pi|M}(\pi|m)f_{PM}(Pm) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\tau\Sigma)}} exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\pi-m)^T(\tau\Sigma)^{-1}(\pi-m)\right\} \cdot \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k det(\Omega)}} exp\left\{-\tfrac{1}{2}(Pm-Q)^T\Omega^{-1}(Pm-Q)\right\}. \end{aligned}$$

Deixant de banda les constants obtenim

$$f_{\Pi|M}(\pi|m)f_{PM}(Pm) = k \cdot exp\left\{-\frac{1}{2}(\pi-m)^T(\tau\Sigma)^{-1}(\pi-m) - \frac{1}{2}(Pm-Q)^T\Omega^{-1}(Pm-Q)\right\}.$$

Si desenvolupem el terme quadràtic de l'exponent tenim

$$m^T P^T \Omega^{-1} Pm - 2Q^T \Omega^{-1} Pm + Q^T \Omega^{-1} Q + m^T (\tau\Sigma)^{-1} m - 2\pi^T (\tau\Sigma)^{-1} m + \pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \pi.$$

Equivalentment,

$$m^T (P^T \Omega^{-1} P + (\tau\Sigma)^{-1}) m - 2(Q^T \Omega^{-1} P + \pi^T (\tau\Sigma)^{-1}) m + Q^T \Omega^{-1} Q + \pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \pi.$$

Introduim tres variables noves per a simplificar l'expressió:

$$C = (\tau\Sigma)^{-1} \pi + P^T \Omega^{-1} Q$$

$$H = P^T \Omega^{-1} P + (\tau\Sigma)^{-1}$$

$$A = Q^T \Omega^{-1} Q + \pi^T (\tau\Sigma)^{-1} \pi$$

Utilitzant la notació anterior, el fet que $H = H^T$ (és simètrica) i $H^{-1}H = I$ obtenim que

$$\begin{aligned} m^T Hm - 2C^T m + A &= mH^T H^{-1} Hm - 2C^T H^{-1} Hm + A \\ &= (Hm - C)^T H^{-1} (Hm - C) + A - C^T H^{-1} C \\ &= (m - H^{-1}C)^T H (m - H^{-1} C) + A - C^T H^{-1} C. \end{aligned}$$

Observem que com que el terme $A - C^T H^{-1} C$ no depèn de m, desapareix amb la constant d'integració. Per tant ens queda:

$$f_{M|\Pi}(m|\pi) \propto exp \left\{ -\frac{1}{2} (m - H^{-1}C)^T H (m - H^{-1}C) \right\}$$

que té mitjana

$$\mu_{BL} = H^{-1} C = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)^{-1} ((\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q)$$

i variància

$$\sigma = H^{-1} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)^{-1}.$$

□

Com que els retorns dels actius es troben correlacionats, les opinions dels inversors sobre alguns d'aquests actius provocaran canvis en els retorns esperats de tots els actius. Així, s'assegura que es generen solucions més diversificades, no com passa amb l'optimitzador de Markowitz, que genera solucions més concentrades.

Aplicant propietats matricials, podem trobar una altra expressió per a la mitjana:

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P^T((P\tau\Sigma P^T) + \Omega)^{-1}(Q - P\Pi).$$

Amb aquesta expressió es pot veure més fàcilment que si no es tenen expectatives sobre els retorns dels actius, el retorn esperat serà el retorn d'equilibri, ja que la matriu P estarà formada per zeros.

Una vegada hem determinat el vector de retorns en excés esperats, μ_{BL}, es realitza l'optimització per mitjana-variància per així coneixer les ponderacions òptimes del model BL. Per fer-ho, és necessari saber la mitjana i la covariància de la distribució de retorns esperats. La mitjana és igual a μ_{BL}, mentre que la covariància inclou un terme d'error, que reflexa l'error en l'estimació (vegeu [16]):

$$\Sigma_p = \Sigma + \sigma. \tag{4.11}$$

De tal forma, que la solució al problema d'optimització de la cartera sense restriccions ve donada pel vector de ponderacions òptimes, w_{BL}, de la següent forma:

$$w_{BL} = \mu_{BL}(\lambda\Sigma_p)^{-1}. \tag{4.12}$$

Donada la mitjana μ_{BL} i la matriu de covariàncies Σ_p, la cartera òptima pot ser construïda utilitzant el mètode d'optimització mitjana-variància. Per a un inversor amb un paràmetre d'aversió al risc λ, el problema de maximització pot ser escrit com:

$$\text{Maximitzar} \quad w^T\mu_{BL} - \frac{\lambda}{2}w^T\Sigma_p w,$$

la funció del qual fa referència a la funció d'utilitat de l'inversor. A més, la condició de primer ordre ens mostra que $\mu_{BL} = \lambda\Sigma_p w$, o equivalentment, $w = (\lambda\Sigma_p)^{-1}\mu_{BL}$. Si prenem $w_{BL} = w$ ja hem arribat a la fórmula (4.12) que hem obtingut anteriorment.

Davant la presència de restriccions d'inversió, el vector de retorns μ_{BL} i la matriu de covariàncies Σ_p són introduïts a un optimitzador de mitjana-variància.

En el següent gràfic podem observar la metodologia de Black-Litterman que s'ha presentat fins al moment:

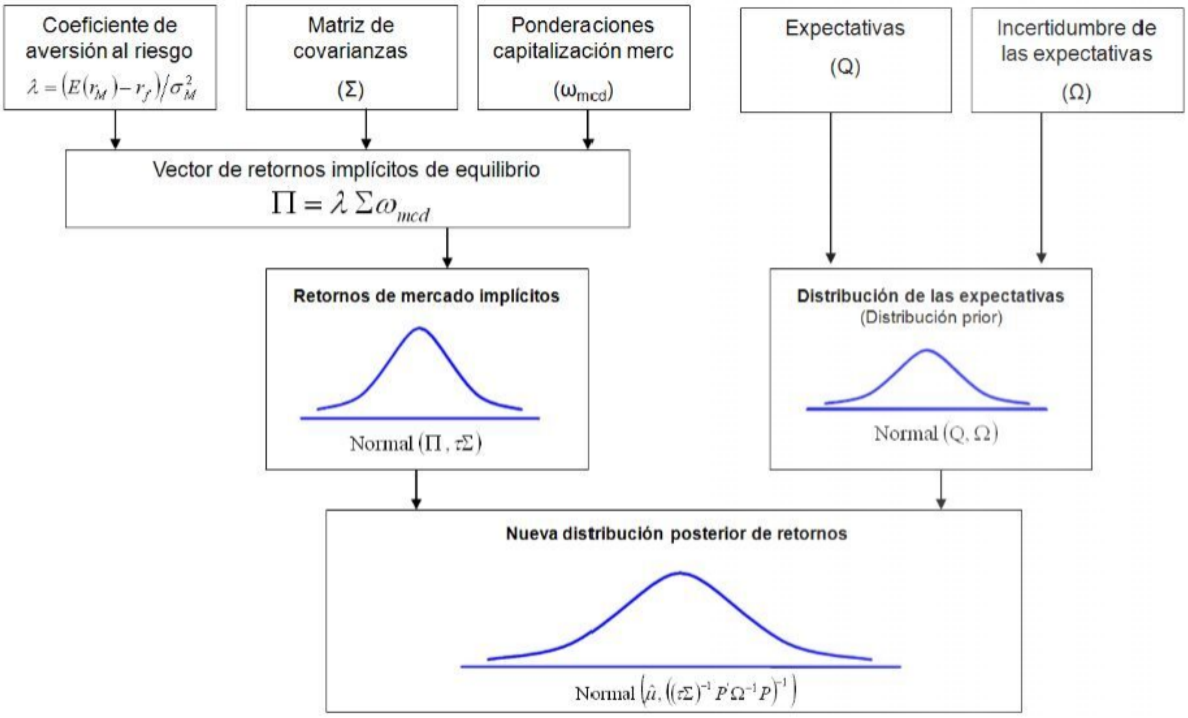

Figura 4.1: Metodologia de Black-Litterman

4.6 Avantatges del model de Black-Litterman

Entre els avantatges que presenta el model BL podriem destacar els següents:

1. Com ja hem comentat abans, el fet de que permeti introduir les opinions dels inversors fa que aquests puguin actualitzar-les amb l'arribada de nova informació. A més, aquest model no requereix que els retorns esperats de cada actiu siguin estimats. Només és necessari que l'inversor pugui preveure un retorn esperat per aquells actius sobre els quals presenta una opinió (Lee, 2000)(vegeu [8]).

2. L'inversor pot prendre risc on realment té una opinió i en una major magnitud on tingui una major confiança. El model permet diferenciar entre la força d'una opinió (magnitud de l'opinió) i la confiança en una opinió (grau de certesa amb que s'expressa) (Scherer, 2007)(vegeu [9]).

3. Aquest model dona lloc a carteres més estables en el temps ja que utilitza els retorns d'equilibri com a centre de gravetat.

4. Mitiga en gran mesura el problema de maximització de l'error d'estimació escampant els errors al llarg del vector de retorns esperats (Idzorek, 2004)(vegeu [10]). Aquesta aproximació bayesiana a la selecció de carteres té en compte directament la incertesa en l'estimació. El model explica que només amb l'ús de informació mostral no es pot controlar l'impacte d'incertesa en els paràmetres sobre la selecció de la cartera.

5. Permet expressar les opinions o expectatives de mercat de forma relativa entre els actius, és a dir, classificar l'exercici esperat d'un actiu en comparació a un altre.

Les estratègies relatives són molt comunes a la pràctica. Si totes les opinions són relatives, no hi ha necessitat de predir la direcció del mercat.

6. Permet als inversors adherir a les mateixes opinions mentre controlen diferents requeriments en les seves carteres. Amb aquest model, les restriccions de cada cartera poden ser tractades en l'etapa final d'optimització, amb les opinions aplicades de forma consistent a través de les diferents carteres. Així, els retorns esperats no s'haurien de veure afectats per les restriccions. Separant aquestes dues estapes, és molt més fàcil assegurar la consistència i explicar les diferents assignacions entre carteres (Fok i Benzschawel, 2007)(vegeu [11]).

Capítol 5

Cas Pràctic

En aquest capítol posarem en pràctica el model de Black-Litterman. El primer pas és fixar un horitzó temporal, i per això he decidit analitzar el període posterior a l'estat d'alarma provocat per la pandèmia de la COVID-19. Segons el Real Decret 926/2020, l'estat d'alarma arriba al seu final el dia 9 de maig del 2021 a partir de les 00.00 hores. Amb això, analitzarem el període comprès entre el 9 de maig del 2021 i el 31 d'octubre del 2021. Així, aquesta pràctica podria servir per analitzar l'evolució de certes empreses després de l'estat d'alarma i comparar-ho amb altres estudis que analitzin el període pre-pandèmia.

El segon pas és decidir sobre quins actius treballarem. Un dels mercats més propers i sobre el que podem extreure moltes dades és el mercat de l'IBEX 35. En concret, analitzarem el sector Petroli i Energia, ja que és un sector que en els darrers temps està agafant molta d'importància, i del qual prendrem 10 empreses que cotitzen en aquest mercat: Audax Renovables (ADX), Grenergy Renovables (GRE), Solaria Energia y Medio Ambiente (SLR), SolarPack Corporación Tecnológica (SPK), Soltec Power Holdings (SOL), Repsol (REP), Endesa (ELE), Iberdrola (IBE), Naturgy Energy Group (NTGY) y Red Eléctrica Corporación (REE). Les altres empreses que també formen part d'aquest sector han estat descartades ja que no es disposava d'informació suficient com per poder analitzar-les.

Com hem vist en anteriors capítols, el primer que necessitem calcular és el retorn dels actius, sobre els quals es calcularà després la matriu de variàncies i covariàncies. Respecte al retorn dels actius, es crearà una sèrie per a cada empresa formada per rendibilitats simples trimestrals, de manera que arribem a obtenir una mitjana mòbil diària i obtenir així dades suficients com per poder aplicar el model. El fet de fer-ho trimestralment es deu a que si decidíssim fer-ho mensualment sense una variació diària, obtindriem poques dades ja que realment estem analitzant pocs mesos, de maig a octubre. A més, en passos posteriors per al càlcul de la rendibilitat de l'actiu sense risc, prendrem la mitjana del tipus d'interès mitjà de les lletres a 3 mesos, per tant ens convé tenir les dades trimestrals.

Per al càlcul de les rendibilitats trimestrals de cada empresa, ens fixarem en la variació trimestral que ha tingut el preu de tancament diari de l'acció de cada empresa. En concret, s'utilitza el preu ajustat per dividends, incloent així els dividends ja que en cas contrari estariem infravalorant la rendibilitat d'aquelles empreses que paguen dividends respecte de les que no paguen res. Aquests preus diaris històrics de cada empresa s'han obtingut de la web *Yahoo Finanzas*.

Així, per exemple, la sèrie de rendibilitats començaria amb els següents termes:

$$r_1 = (P_{9maig} - P_{9febrer})/P_{9febrer}$$

$$r_2 = (P_{10maig} - P_{10febrer})/P_{10febrer}$$

En els Annexos es poden observar els preus de tancament de cada empresa i les sèries de rendibilitats trimestrals que hem obtingut durant el període analitzat. A partir d'aquestes sèries de rendibilitats podem calcular la matriu de variàncies i covariàncies del retorn dels actius, Σ, la qual ens queda de la següent manera:

	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
ADX	0,008199	-0,003607	0,000137	0,005426	-0,006706	-0,006591	0,004758	0,002722	0,001089	0,002210
GRE	-0,003607	0,014471	0,008672	0,010855	0,009252	-0,003545	-0,004109	-0,004561	-0,001570	0,000203
SLR	0,000137	0,008672	0,011433	0,014459	0,009007	-0,007364	-0,001058	-0,001167	-0,001074	0,000626
SPK	0,005426	0,010855	0,014459	0,038762	0,005385	-0,017905	0,001244	-0,002885	-0,000881	0,002946
SOL	-0,006706	0,009252	0,009007	0,005385	0,018054	-0,000078	-0,005478	-0,002769	-0,002344	-0,001104
REP	-0,006591	-0,003545	-0,007364	-0,017905	-0,000078	0,015060	-0,001644	0,000736	0,000586	-0,002473
ELE	0,004758	-0,004109	-0,001058	0,001244	-0,005478	-0,001644	0,004940	0,003415	0,001362	0,000988
IBE	0,002722	-0,004561	-0,001167	-0,002885	-0,002769	0,000736	0,003415	0,003838	0,000922	0,000083
NTGY	0,001089	-0,001570	-0,001074	-0,000881	-0,002344	0,000586	0,001362	0,000922	0,000698	0,000187
REE	0,002210	0,000203	0,000626	0,002946	-0,001104	-0,002473	0,000988	0,000083	0,000187	0,001585

Figura 5.1: Matriu de variàncies i covariàncies.

El següent input que necessitem és el vector de ponderacions per capitalització de mercat, w, és a dir, el valor del pes que ocupa cada empresa dins de la cartera formada per les 10 empreses que analitzem, a finals d'octubre, segons la seva capitalització bursàtil. Així, per a cada empresa, el seu pes surt de dividir la seva capitalització bursàtil (la qual obtenim de la web *El Economista*) entre la suma de les capitalitzacions bursàtils de les 10 empreses.

	Vector w
ADX	0,0043
GRE	0,0065
SLR	0,0144
SPK	0,0064
SOL	0,0047
REP	0,1205
ELE	0,1508
IBE	0,4627
NTGY	0,1589
REE	0,0708

Figura 5.2: Vector de ponderacions.

L'altre paràmetre que ens fa falta per a calcular els retorns implícits d'equilibri és el coeficient d'aversió al risc, λ, el qual depèn del retorn esperat del mercat, R_M, i del retorn de l'actiu lliure de risc, R_f. Pel que fa al retorn esperat del mercat, ens fixem en un informe publicat a la web de *Bankinter* (vegeu [17]), en el qual es preveu que l'IBEX 35 arribi als 9.933 punts a finals de l'any 2022, mentre que en el 2021, l'última dada que publica l'informe arriba als 8.929 punts. Així, podriem treure una rendibilitat esperada anual del mercat:

$$\frac{PB_{2022} - PB_{2021}}{PB_{2021}} = \frac{9.933 - 8.929}{8.929} = 0,1124$$

però com que ens interessa tenir les dades trimestralment cal dividir aquesta rendibilitat anual entre 4, i per tant ens queda $R_M = 0,0281$.

D'altra banda, per al càlcul del retorn de l'actiu sense risc, R_f, com ja hem comentat anteriorment, el que farem és una mitjana del tipus d'interès mitjà de les lletres a 3 mesos que han estat subastades dins del període que analitzem. A la següent taula podem observar les lletres a 3 mesos i el seu tipus d'interès mitjà expressat en percentatge, que hem obtingut de la web oficial del *Tesoro Público*, i amb els quals hem calculat la seva mitjana, i ha resultat que $R_f = -0,001573$. El següent quadre ens mostra les rendibilitats publicades, les quals són anuals i com que ens interessa tenir-les trimestrals, s'ha hagut de dividir cada una entre 4, abans de realitzar la mitjana.

Data subasta	Tipus d'interès mitjà
19/10/2021	-0,667
14/09/2021	-0,641
17/08/2021	-0,626
13/07/2021	-0,618
15/06/2021	-0,632
11/05/2021	-0,592

Figura 5.3: Lletres a 3 mesos.

Ara ja podem calcular el coeficient d'aversió al risc, que com hem vist en capítols anteriors s'obté de la fórmula:

$$\lambda = \frac{R_M - R_f}{w'\Sigma w}$$

i així ens queda $\lambda = 16,911893$.

Així, amb el coeficient d'aversió al risc, la matriu de variàncies i covariàncies i el vector de ponderacions, podem obtenir el vector de retorns implícits en equilibri, Π, que aplicant la fórmula (4.1) ens queda:

	Vector Π
ADX	0,025859
GRE	-0,052023
SLR	-0,022949
SPK	-0,044999
SOL	-0,038679
REP	0,026259
ELE	0,040147
IBE	0,041698
NTGY	0,013349
REE	0,001097

Figura 5.4: Retorns implícits en equilibri.

Un altre dels paràmetres més importants és l'escalar τ, que com ja hem comentat expressa el nivell d'incertesa que té l'inversor sobre els retorns d'equilibri i a la pràctica, existeixen diversos criteris per establir el valor d'aquest escalar. Black-Litterman (1992) (veure [14]) i Idzorek (2004) (veure [10]) estimen el vector de rendibilitats segons el model CAPM a un nivell de confiança entre el 95% i el 99%, ja que la incertesa que poden provocar les plusrendibilitats relatives expressades en els vectors d'opinió és molt menor que la que es provoca quan s'expressen les rendibilitats en termes absoluts, i per tant estableixen per a τ un valor baix entre 0,01 i 0,05. En aquest cas optem per establir τ=0,02.

Arribem ara a un dels punts més innovadors del model: la incorporació de les opinions dels inversors, que s'expressen a través de les matrius P i Q. Per analitzar les opinions que tenen els inversors tenim en compte les recomanacions dels analistes pel que fa a la compra o venda dels actius. És a dir, ho farem a través d'un recull aproximat de les recomanacions totals durant el període que analitzem dels analistes respecte cada empresa pel que fa a comprar, mantenir o vendre les accions.

Aquest mètode ens serveix per saber les opinions dels inversors ja que per exemple si durant un període determinat hi ha un nombre molt gran de recomanacions de compra d'actius d'una empresa en concret, significa que s'espera que aquesta empresa tingui un retorn favorable en termes de rendibilitat. Passaria tot el contrari si la majoria de recomanacions sobre aquesta empresa fóssin de vendre les accions.

A través de la web *Estrategias de inversión* i *El Economista* hem pogut obtenir el nombre total de recomanacions per a tres períodes diferents: les de fa 1 mes, les de fa 3 mesos i les de fa 5 mesos. Així amb aquestes tres divisions ja podriem cobrir tot el període que analitzem, des del dia 9 de maig del 2021 fins al dia 31 d'octubre del 2021. A les taules següents podem observar el nombre de recomanacions de comprar, mantenir o vendre per a cada empresa:

AUDAX	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	1 (100%)	1 (100%)	1 (100%)
Mantenir	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Vendre	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

SOLARPACK	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	3 (100%)	5 (83,33%)	5 (83,33%)
Mantenir	0 (0%)	1 (16,66%)	1 (16,66%)
Vendre	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

GRENERGY	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	6 (100%)	6 (100%)	6 (100%)
Mantenir	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Vendre	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

SOLTEC	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	2 (50%)	2 (66,66%)	2 (66,66%)
Mantenir	2 (50%)	1 (33,33%)	1 (33,33%)
Vendre	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)

SOLARIA	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	8 (50%)	7 (50%)	8 (57,14%)
Mantenir	5 (31,25%)	4 (28,57%)	3 (21,43%)
Vendre	3 (18,75%)	3 (21,43%)	3 (21,43%)

REPSOL	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	18 (60%)	14 (48,28%)	14 (48,28%)
Mantenir	9 (30%)	13 (44,83%)	14 (48,28%)
Vendre	3 (10%)	2 (6,89%)	1 (3,44%)

ENDESA	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	11 (50%)	11 (50%)	10 (45,45%)
Mantenir	11 (50%)	10 (45,45%)	11 (50%)
Vendre	0 (0%)	1 (4,55%)	1 (4,55%)

NATURGY	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	3 (17,65%)	3 (16,67%)	5 (23,81%)
Mantenir	10 (58,82%)	11 (61,11%)	12 (57,14%)
Vendre	4 (23,53%)	4 (22,22%)	4 (19,05%)

IBERDROLA	Fa 1 mes	Fa 3 mesos	Fa 5 mesos
Comprar	16 (57,14%)	16 (55,17%)	16 (55,17%)
Mantenir	12 (42,86%)	11 (37,93%)	11 (37,93%)
Vendre	0 (0%)	2 (6,9%)	2 (6,9%)

RED ELECTR.	Fa 1 mes	Fa 2 mesos	Fa 3 mesos
Comprar	0	0	0
Mantenir	0	0	0
Vendre	0	0	0

Figura 5.5: Recomanacions dels analistes.

Així, per exemple, del total d'opinions que va rebre Repsol fa 1 mes, el 60% eren recomanacions de compra d'accions, mentre que de les opinions de fa 3 mesos sobre Naturgy, un 22,22% són recomanacions de vendre les accions.

Tenim 3 períodes i de cada període crearem dues opinions, així tindrem un total de 6 opinions. Per a cada període, agafarem les dues empreses amb un percentatge més alt d'opinions favorables (comprar) i les dues empreses amb un percentatge més alt d'opinions desfavorables (vendre), i així crearem dues opinions relatives entre elles.

Per exemple, en el període de fa 1 mes, agafem Iberdrola i Repsol com a empreses amb un major percentatge d'opinions favorables i, Solaria i Naturgy com a empreses amb un major percentatge d'opinions desfavorables. Així, a la matriu P, tindriem dues expectatives sobre el període de fa 1 mes: Iberdrola i Repsol prendran valor 1, mentre que Solaria i Naturgy prendran valor -1.

Les empreses que no arriben a un total de 10 recomanacions han quedat descartades ja que es considera que no es pot fer un anàlisi sobre aquestes empreses que no compten amb un nombre significatiu de recomanacions. Seria el cas de Audax, Grenergy, Solarpack, Soltec i Red Eléctrica.

A més, també s'inclou una opinió personal que s'explica a continuació quan es defineix la matriu Q. En concret, és l'opinió 7 del llistat que es presenta a continuació. Aquesta opinió és la que fa referència a l'última fila de la matriu P. Amb tot això, la matriu P ens queda de la següent manera:

Matriu P	AUDAX	GRENERGY	SOLARIA	SOLARPACK	SOLTEC	REPSOL	ENDESA	IBERDROLA	NATURGY	RED.ELECTR.
Fa 5 mesos	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0
Fa 5 mesos	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
Fa 3 mesos	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
Fa 3 mesos	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
Fa 1 mes	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
Fa 1 mes	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0
Opinió personal	0	0,33	0,33	0	0	0,33	-0,33	-0,33	-0,33	0

Figura 5.6: Matriu P.

Pel que fa a la matriu Q, hem de transformar aquestes 7 opinions de manera que s'expressi de forma numèrica quina rendibilitat s'espera que tingui una empresa sobre una altra. Per fer-ho, s'han observat les sèries històriques de rendibilitats trimestrals que hem obtingut al principi i hem arribat a les següents conclusions, observant les seves tendències, les quals ens ajudaran a obtenir la matriu Q:

1. Observant la sèrie de rendibilitats trimestrals, sembla que Solaria acaba al voltant

d'un 7%, mentre que Naturgy es situa al voltant d'un 4%, per tant, suposant que el canvi no serà molt gran, s'espera que Solaria obtingui una rendibilitat del 3% per sobre de Naturgy.

2. En els moments en que Iberdrola ha obtingut més rendibilitat que Solaria, ho ha fet amb molt poca diferència, per tant, en el cas en que Iberdrola tingués una rendibilitat superior per sobre de Solaria, aquesta hauria de ser petita, així que s'espera que Iberdrola obtingui una rendibilitat de l'1% per sobre de Solaria.

3. Observant la sèrie de rendibilitats però només en els casos en que Iberdrola es situa per sobre de Naturgy, observem que la diferència entre elles sempre és d'un 3-4%, per tant s'espera que Iberdrola obtingui una rendibilitat del 3% per sobre de Naturgy.

4. Observant la sèrie de rendibilitats però només en els casos en que Endesa es situa per sobre de Solaria, observem que sempre ho fa amb una diferència d'un 5% aproximadament, per tant s'espera que Endesa obtingui una rendibilitat del 5% per sobre de Solaria.

5. En els casos en que Iberdrola ha obtingut més rendibilitat que Solaria, ho ha fet amb molt poca diferència, per tant s'espera que Iberdrola obtingui una rendibilitat de l'1% per sobre de Solaria.

6. Observant la sèrie de rendibilitats trimestrals, Repsol acaba al voltant d'un 17%, mentre que Naturgy es situa al voltant d'un 4%, per tant, suposant que el comportament es mantindrà, s'espera que Repsol obtingui una rendibilitat del 13% per sobre de Naturgy.

7. A principis de l'últim trimestre surt a la llum el pla del Govern d'esmorteir la pujada del preu de l'electricitat. Les seves intencions són recuperar 2.600 milions d'euros que les elèctriques haurien rebut com a benefici extraordinari per produïr energia que es beneficia d'aquests preus tan alts, i destinar-los a reduïr les factures dels consumidors. Per tant, la meva opinió és que s'espera que les principals empreses del subsector Petroli i Energies Renovables com són Repsol, Grenergy i Solaria presentin rendibilitats per sobre de les principals empreses del subsector Electricitat i Gas com poden ser Endesa, Iberdrola i Naturgy. Així, s'espera que aquesta rendibilitat sigui del 3%.

Per tant, la matriu Q ens queda de la següent forma:

Matriu Q
0,03
0,01
0,03
0,05
0,01
0,13
0,03

Figura 5.7: Matriu Q.

Un cop tenim la matriu P, podem calcular la matriu que expressa el nivell de confiança de l'inversor sobre les seves expectatives, la matriu Ω, que aplicant la fórmula (4.7), ens queda així:

Matriu Ω						
0,000286	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000352	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,000054	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000370	0,000000	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000352	0,000000	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000292	0,000000
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000189

Figura 5.8: Matriu Ω.

Arribats en aquest punt, ja tenim tots els inputs necessaris per a calcular el vector de retorns esperats segons el model de Black-Litterman, el qual té mitjana μ_{BL} i variància σ, que obtenim amb les fórmules que apareixen al Teorema 4.1. Finalment, també podem obtenir el vector de ponderacions òptimes, w_{BL}, que s'obté amb la fórmula (4.12).

Vector μ_BL	
-0,021007	ADX
-0,010296	GRE
-0,001532	SLR
-0,065659	SPK
0,023435	SOL
0,068890	REP
0,012010	ELE
0,028229	IBE
0,004603	NTGY
-0,010748	REE

Figura 5.9: Vector μ_{BL}.

Matriu σ										
	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
ADX	0,000086	-0,000009	0,000014	0,000065	-0,000058	-0,000063	0,000040	0,000018	0,000009	0,000027
GRE	-0,000009	0,000108	0,000029	0,000041	0,000021	-0,000006	-0,000005	-0,000016	-0,000003	0,000005
SLR	0,000014	0,000029	0,000062	0,000070	0,000033	-0,000029	0,000017	0,000014	0,000003	0,000004
SPK	0,000065	0,000041	0,000070	0,000400	-0,000020	-0,000120	0,000049	-0,000003	0,000006	0,000028
SOL	-0,000058	0,000021	0,000033	-0,000020	0,000169	0,000028	-0,000035	-0,000003	-0,000016	-0,000011
REP	-0,000063	-0,000006	-0,000029	-0,000120	0,000028	0,000125	-0,000016	0,000005	0,000005	-0,000022
ELE	0,000040	-0,000005	0,000017	0,000049	-0,000035	-0,000016	0,000050	0,000027	0,000014	0,000011
IBE	0,000018	-0,000016	0,000014	-0,000003	-0,000003	0,000005	0,000027	0,000031	0,000008	0,000000
NTGY	0,000009	-0,000003	0,000003	0,000006	-0,000016	0,000005	0,000014	0,000008	0,000009	0,000002
REE	0,000027	0,000005	0,000004	0,000028	-0,000011	-0,000022	0,000011	0,000000	0,000002	0,000026

Figura 5.10: Matriu σ.

Matriu Σ_p										
	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
ADX	0,008285	-0,003616	0,000152	0,005491	-0,006764	-0,006654	0,004798	0,002739	0,001099	0,002237
GRE	-0,003616	0,014580	0,008700	0,010895	0,009273	-0,003551	-0,004113	-0,004577	-0,001573	0,000208
SLR	0,000152	0,008700	0,011494	0,014530	0,009040	-0,007393	-0,001041	-0,001153	-0,001072	0,000630
SPK	0,005491	0,010895	0,014530	0,039162	0,005365	-0,018025	0,001293	-0,002888	-0,000875	0,002974
SOL	-0,006764	0,009273	0,009040	0,005365	0,018223	-0,000050	-0,005513	-0,002772	-0,002361	-0,001115
REP	-0,006654	-0,003551	-0,007393	-0,018025	-0,000050	0,015185	-0,001660	0,000740	0,000591	-0,002495
ELE	0,004798	-0,004113	-0,001041	0,001293	-0,005513	-0,001660	0,004989	0,003441	0,001377	0,000999
IBE	0,002739	-0,004577	-0,001153	-0,002888	-0,002772	0,000740	0,003441	0,003869	0,000931	0,000083
NTGY	0,001099	-0,001573	-0,001072	-0,000875	-0,002361	0,000591	0,001377	0,000931	0,000707	0,000190
REE	0,002237	0,000208	0,000630	0,002974	-0,001115	-0,002495	0,000999	0,000083	0,000190	0,001611

Figura 5.11: Matriu Σ_p.

w_BL	
0,0042	ADX
0,0596	GRE
0,2297	SLR
0,0063	SPK
0,0046	SOL
0,4350	REP
0,2090	ELE
0,4132	IBE
-0,4508	NTGY
0,0694	REE

Figura 5.12: Vector w_{BL}.

Així, per exemple, de Repsol podriem concloure que té un pes del 43,50% dins de la nostra cartera òptima i s'espera una rendibilitat del 6,89%. D'altra banda, podriem mencionar per exemple a Audax que ocupa un 0,42% de la cartera i s'espera una rendibilitat del -2,1%.

A la següent taula, podem observar els resultats obtinguts amb la fórmula de Black-Litterman i les corresponents ponderacions utilitzant optimització no restringida, i comparar-los també amb els retorns d'equilibri i pesos inicials.

	Vector retorns μ_BL	Vector retorns equilibri ∏	Noves ponderacions w_BL	Ponderacions de referència w
ADX	-0,021007	0,025859	0,0042	0,0043
GRE	-0,010296	-0,052023	0,0596	0,0065
SLR	-0,001532	-0,022949	0,2297	0,0144
SPK	-0,065659	-0,044999	0,0063	0,0064
SOL	0,023435	-0,038679	0,0046	0,0047
REP	0,068890	0,026259	0,4350	0,1205
ELE	0,012010	0,040147	0,2090	0,1508
IBE	0,028229	0,041698	0,4132	0,4627
NTGY	0,004603	0,013349	-0,4508	0,1589
REE	-0,010748	0,001097	0,0694	0,0708

Figura 5.13: Resultats.

Una vegada hem calculat el vector de retorns esperats μ_{BL} i la matriu de variàncies Σ_p del model BL, volem trobar la frontera eficient de Markowitz aplicant el mètode de la línia crítica. El plantejament del problema d'optimització que permet obtenir les carteres cantonada i, per tant, la frontera eficient segons el model de Markowitz és el següent:

$$\text{Minimitzar} \quad \omega^T \Sigma_p \omega$$

$$\text{Subjecte a} \quad e^T \omega = 1$$
$$\omega^T \mu_{BL} = R^*$$
$$\omega \geq 0,$$

on R^* és la rendibilitat esperada desitjada per l'inversor.

Utilitzant el complement Solver que podem trobar a l'Excel, arribem a la següent taula que ens mostra les diferents carteres cantonada amb els pesos de cada un dels actius i per tant la frontera eficient segons el model de Markowitz:

Cartera	Rend.esperada	Risc	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
1	6,9%	12,32%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%
2	6,8%	12,07%	0%	0%	0%	0%	0%	97,8%	0%	2,2%	0%	0%
3	6,4%	10,94%	0%	0%	0%	0%	0,1%	88%	0%	11,9%	0%	0%
4	4,9%	7,04%	0%	0%	1,4%	0%	9,1%	53,2%	0%	36,4%	0%	0%
5	3,6%	4,47%	0%	0,5%	21,5%	0%	1,9%	35,8%	0,6%	39,6%	0%	0%
6	3,4%	4,19%	0%	2,2%	20,3%	0,5%	2%	33,2%	1,6%	40,2%	0%	0%
7	3,2%	3,93%	0%	5,2%	16,6%	0,1%	3,1%	30,8%	8,1%	35,4%	0%	0,7%
8	2,6%	3,21%	0%	6,1%	11,9%	1,2%	3,2%	26,3%	3,9%	33,2%	2,5%	11,8%
9	2,2%	2,77%	0%	6%	8,8%	1,2%	4%	21,5%	0%	30%	15,4%	12,9%
10	1%	1,71%	0%	5,4%	0%	0,4%	8,8%	7,3%	0%	10,7%	51,9%	15,6%
11	0,9%	1,66%	4,1%	5,1%	0%	0,2%	9,7%	7,9%	0%	6,15%	53,1%	13,5%
12	0,6%	1,6%	0,4%	4,6%	0%	0,1%	8,2%	4,9%	0%	4,8%	52,1%	25%

Taula 5.1: Carteres cantonada per a τ=0,02.

La primera cartera és la de màxima rendibilitat, i per això està formada únicament per l'actiu sobre el qual s'espera un rendibilitat més alta, que en el nostre cas seria Repsol amb una rendibilitat del 6,9%. A continuació s'ha anat variant la rendibilitat esperada per l'inversor de manera que redüint una dècima en cada iteració, s'ha observat si algun actiu entrava a formar part de la cartera o si algun actiu deixava de formar part de la cartera, i per tant, en ambdues situacions, es formava una nova cartera cantonada.

Així, s'ha anat reduint la rendibilitat esperada fins arribar a la rendibilitat que té la cartera amb menor volatilitat. Aquesta última rendibilitat s'ha obtingut després de minimitzar la volatilitat (i per tant la variància) i eliminar la restricció de la rendibilitat esperada, és a dir, com a restriccions només hem tingut en compte que la suma de pesos ha de ser igual a 1 i que aquests han de ser positius o nuls. Observem que el color verd ens indica els pesos dels actius que entren a formar part de la cartera, mentre que en vermell es troben els pesos dels actius que deixen de formar part de la cartera.

Finalment, seria interessant realitzar un petit anàlisi de sensibilitat de l'escalar τ. És a dir, podriem observar com canviaria el vector de rendibilitats μ_{BL} amb un altre parell de valors de τ. Recordem que aquest escalar reflexa el grau d'incertesa respecte a la precisió amb la que s'ha calculat l'estimació del vector de rendibilitats μ_{BL}, i per tant, com més petit sigui el valor de τ, major és el nivell de confiança en el vector de rendibilitats en equilibri Π i menor és la confiança en les opinions dels inversors.

En el nostre cas pràctic que hem desenvolupat anteriorment, hem utilitzat que $\tau = 0,02$. A continuació, mostrarem els resultats que obtindriem amb $\tau = 0,05$.

Vector µ_BL	
-0,035295	ADX
-0,001716	GRE
0,002235	SLR
-0,079374	SPK
0,040459	SOL
0,090463	REP
0,008505	ELE
0,028809	IBE
0,003033	NTGY
-0,015022	REE

Figura 5.14: Vector μ_{BL} amb $\tau = 0,05$.

Per acabar, altres autors estimen el valor de τ en funció del tamany de la mostra històrica amb la que han obtingut la matriu de variàncies i covariàncies Σ, de tal forma que si T és el nombre d'observacions, llavors $\tau = \frac{1}{T}$. En el nostre cas, $T = 125$ i per tant, $\tau = 0,008$. Així, el nou vector de rendibilitats μ_{BL} que obtindriem és el següent:

Vector µ_BL	
-0,004006	ADX
-0,021016	GRE
-0,005603	SLR
-0,050734	SPK
0,003318	SOL
0,048264	REP
0,020072	ELE
0,030371	IBE
0,007120	NTGY
-0,005853	REE

Figura 5.15: Vector μ_{BL} amb $\tau = 0,008$.

Un cop hem obtingut els vectors de rendibilitats corresponents a $\tau = 0,05$ i $\tau = 0,008$, podriem veure com canvia la frontera eficient, a través de les taules que es presenten a continuació i que reflecteixen les carteres cantonada que obtindriem en aquests casos i les quas s'han calculades utilitzant el mateix procediment que la taula anterior. Amb la primera taula podem observar les 17 carteres que hem obtingut per a $\tau = 0,05$, mentre que a la segona taula observem les 14 carteres cantonada per a $\tau = 0,008$.

A més, podem representar les carteres eficients per a cada valor de τ amb eixos rendibilitat-volatilitat per comprovar com la forma de la frontera eficient es desplaça d'alguna manera a mesura que canviem el valor de l'escalar. A l'eix de les x representarem la volatilitat i a l'eix de les y la rendibilitat, ambdues expressades en forma de percentatge.

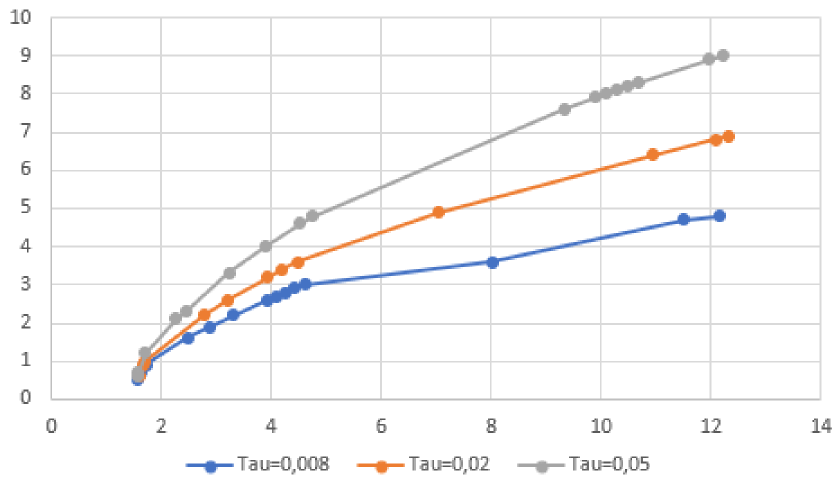

Figura 5.16: Rendibilitat-volatilitat per a cada valor de τ.

Cartera	Rend.esperada	Risc	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
1	9%	12,21%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%
2	8,9%	11,97%	0%	0%	0%	0%	2,9%	97,1%	0%	0%	0%	0%
3	8,3%	10,67%	0%	0%	0%	0%	14,7%	85,1%	0%	0,2%	0%	0%
4	8,2%	10,48%	0%	0%	0,5%	0%	15,4%	83,6%	0%	0,5%	0%	0%
5	8,1%	10,29%	0%	0%	0%	0%	15%	81,8%	0%	3,2%	0%	0%
6	8%	10,1%	0%	0%	0,2%	0%	15,6%	80,2%	0%	4%	0%	0%
7	7,9%	9,9%	0%	0%	0%	0%	15,3%	78,5%	0%	6,2%	0%	0%
8	7,6%	9,34%	0%	0%	0,6%	0%	15,3%	73,9%	0%	10,1%	0%	0%
9	4,8%	4,75%	0%	0%	23,9%	0%	3,2%	41,2%	1,1%	30,5%	0%	0%
10	4,6%	4,52%	0%	0,7%	22,9%	0%	3,9%	39,2%	5,5%	27,8%	0%	0%
11	4%	3,88%	0%	5,9%	16,6%	0,2%	5,1%	32,5%	13%	25,8%	0%	1%
12	3,3%	3,23%	3%	6,6%	12,5%	1,3%	4,8%	29,3%	7,2%	25,3%	0%	10%
13	2,3%	2,45%	8,8%	7,4%	6,8%	2,7%	4,9%	25,4%	0%	22,6%	0%	21,3%
14	2,1%	2,26%	7,1%	6,9%	5,4%	2,1%	6,1%	21,5%	0%	19,4%	13,2%	18,2%
15	1,2%	1,70%	4,2%	5,6%	0%	0,5%	9,7%	9,3%	0%	7,6%	49,6%	13,4%
16	0,7%	1,57%	4,4%	4%	0%	0,1%	10,1%	5,5%	0%	0%	61,3%	14,7%
17	0,6%	1,56%	3,3%	3,9%	0%	0,1%	9,7%	4,3%	0%	0%	62,8%	15,9%

Taula 5.2: Carteres cantonada per a $\tau = 0,05$.

Cartera	Rend.esperada	Risc	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
1	4,8%	12,15%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%
2	4,7%	11,5%	0%	0%	0%	0%	0%	92,9%	0%	7,1%	0%	0%
3	3,6%	6,02%	0%	0%	1,5%	0%	0%	34,6%	0%	63,9%	0%	0%
4	3%	4,61%	0%	0%	15,6%	0%	0%	29,7%	0,8%	54%	0%	0%
5	2,9%	4,42%	0%	0,1%	17,6%	0%	0%	29%	1,8%	51,5%	0%	0%
6	2,8%	4,24%	0%	0,1%	18,1%	0%	0,5%	29,1%	8,8%	43,5%	0%	0%
7	2,7%	4,08%	0%	0,1%	18,3%	0%	1,6%	28,6%	13,4%	37,9%	0%	0,1%
8	2,6%	3,93%	0%	0,1%	19%	0,1%	0,5%	28,4%	11,1%	37,5%	0%	3,4%
9	2,2%	3,32%	0%	4,5%	11,4%	0,9%	1,8%	23,7%	7,2%	37,8%	3,1%	9,6%
10	1,9%	2,89%	2,4%	4,8%	8,8%	1,1%	3,1%	20,7%	2%	33,8%	13,9%	9,6%
11	1,6%	2,48%	2,9%	4,9%	6,1%	1%	4,6%	16,9%	0%	28,1%	24,9%	10,5%
12	0,9%	1,73%	3,7%	5,1%	0%	0,4%	8,9%	8,2%	0%	11%	50,1%	12,7%
13	0,7%	1,62%	4,1%	4,4%	0%	0%	9,6%	6,3%	0%	4,9%	57%	13,7%
14	0,5%	1,57%	2,4%	4,2%	0%	0%	9,4%	3,9%	0%	1,6%	61,9%	16,6%

Taula 5.3: Carteres cantonada per a $\tau = 0,008$.

Per acabar, podriem comparar aquestes fronteres eficients amb la que s'obtindria sense utilitzar les rendibilitats del model BL, és a dir, únicament utilitzant les rendibilitats històriques sense tenir en compte cap tipus d'opinió. Podriem veure així l'efecte que té el model BL i es podria justificar millor la necessitat d'incloure les opinions dels inversors.

Recordem que en el nostre cas pràctic s'han utilitzat els preus de tancament diaris de cada empresa dins del període analitzat i a partir d'ells hem obtingut les rendibilitats simples trimestrals com a mitjana mòbil diària. Amb aquestes sèries de rendibilitats obtingudes, es calculen ara les rendibilitats mitjanes trimestrals per a cada empresa, les quals utilitzarem per a obtenir la frontera eficient:

Rend. Mitjana trimestral	
-0,0752	ADX
0,0130	GRE
-0,0714	SLR
0,1575	SPK
-0,1278	SOL
0,0270	REP
-0,0258	ELE
-0,0392	IBE
0,0378	NTGY
0,1365	REE

Figura 5.17: Rendibilitats mitjanes trimestrals.

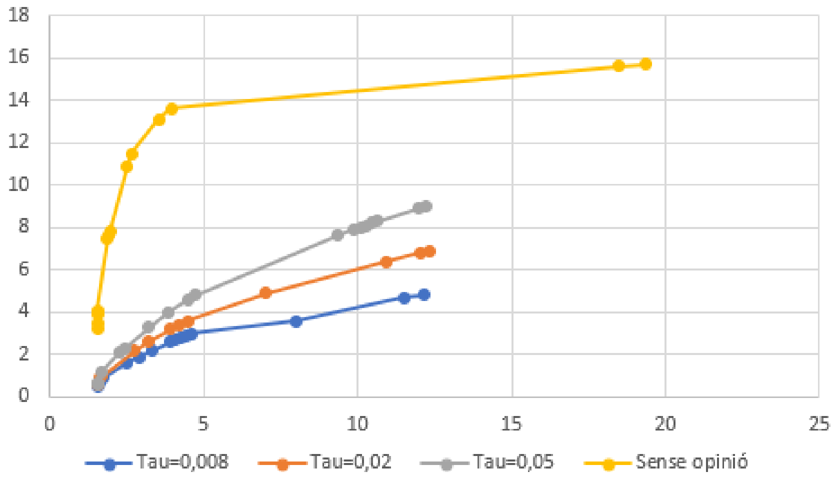

Figura 5.18: Rendibilitat-volatilitat.

Cartera	Rend.esperada	Risc	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
1	15,7%	19,38%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	15,6%	18,51%	0%	0%	0%	93%	0%	0%	0%	0%	0%	7%
3	13,6%	3,97%	0%	0%	0%	0%	0%	0,4%	0%	0%	0%	99,6%
4	13,1%	3,54%	0%	0%	0%	0,2%	0%	5%	0%	0%	0%	94,8%
5	11,5%	2,67%	0%	0%	0%	6,4%	0%	20,4%	0%	0%	0,4%	72,7%
6	10,9%	2,53%	0%	0,5%	0%	6,1%	0%	19,2%	0%	0%	7,2%	67%
7	7,8%	1,98%	0%	5,9%	0%	3,2%	0%	12,1%	0%	0,2%	38,7%	39,9%
8	7,6%	1,91%	0%	2,5%	1,5%	2,9%	2,7%	12%	0%	0%	34,9%	43,4%
9	7,5%	1,88%	0%	2,5%	0%	2,9%	4%	11,1%	0%	0%	36,7%	42,7%
10	4,1%	1,57%	0%	3,4%	0%	0%	9,1%	3,1%	0%	0%	64,8%	19,6%
11	3,9%	1,57%	0%	3,4%	0%	0%	9,3%	2,9%	0%	0,2%	66,1%	18,1%
12	3,5%	1,57%	1,2%	3,5%	0%	0%	9,7%	3,1%	0%	0%	66,4%	16,1%
13	3,2%	1,57%	3,3%	3,9%	0%	0%	9,7%	4,2%	0%	0%	63%	15,9%

Taula 5.4: Carteres cantonada sense aplicar BL.

Capítol 6

Conclusions

L'objectiu principal d'aquest treball ha estat analitzar un model d'assignació òptima per a carteres d'inversió que fos alternatiu al model tradicional de mitjana-variància de Markowitz, i que hem aplicat al mercat de l'IBEX 35. En concret, hem estudiat un dels sectors més de moda actualment com és el sector Petroli i Energia, en un període marcat per la pandèmia de la COVID-19.

El model escollit és el de Black-Litterman, el qual es basa en el model de mitjana-variància, però millora certs punts que es consideren com a inconvenients en el model original proposat per Markowitz, com el fet d'obtenir carteres poc intuïtives, poc diversificades i sense considerar la visió de l'inversor. Aquest últim punt és clarament el fet més innovador del model de Black-Litterman, la incorporació de les opinions dels inversors.

En el nostre cas, la font d'informació per tal d'incorporar les opinions dels inversors ha estat la visió que presenten alguns analistes d'inversions sobre el mercat. Per a determinar si una acció presentava una opinió positiva o negativa, hem considerat el percentatge d'analistes que recomanava una acció en particular en un moment determinat del temps. Per exemple, si un 80% dels analistes recomana comprar una acció i l'altre 20% recomana mantenir-la, clarament aquesta acció presenta una visió positiva. En canvi, si la majoria d'analistes recomana vendre una acció, aquesta presenta una visió negativa.

Observant la taula de resultats que ens mostra les rendibilitats obtingudes amb la fórmula de Black-Litterman i les corresponents ponderacions (figura 5.13), podem veure com Repsol augmenta el seu retorn esperat respecte al retorn implícit d'equilibri degut a les dues opinions positives sobre Repsol que hem representat a la matriu P. Com a conseqüència, aquest actiu reb una major ponderació en comparació a la ponderació inicial de la cartera de referència. De la mateixa manera, podem veure com el retorn esperat de Grenergy també augmenta degut a la última opinió que s'ha incorporat a la matriu P, la qual és favorable per a aquesta empresa.

Com a cas contrari, podem observar que Naturgy disminueix el retorn esperat respecte al retorn implícit d'equilibri i això es deu a les tres opinions que l'afecten negativament i que s'incorporen al model. De fet, en equilibri presenta un retorn de l'1,33% mentre que després d'aplicar el model BL, el seu retorn esperat és del 0,46%.

Després d'obtenir el vector de retorns esperats del model BL, μ_{BL}, aquest s'ha incorporat a l'optimitzador de Markowitz per tal d'obtenir la frontera eficient a través del mètode de la línia crítica. Recordem que inicialment s'ha optat per establir $\tau = 0,02$, però que quan hem canviat el valor d'aquest escalar, la forma de la frontera eficient ha variat, tal i com es pot veure a la figura 5.16. Això és així ja que com més baix és el valor de τ, major és la confiança de l'inversor en el vector de retorns en equilibri Π i per tant menys confiança té en les seves opinions. Observem que el vector Π presenta menors retorns que els vectors μ_{BL} que hem obtingut per a cada τ. A més, es pot veure que el risc al que podem arribar es mou entre els mateixos valors al llarg de les tres fronteres eficients que obtenim amb els tres valors de τ, encara que els nivells de rendibilitat baixen a mesura que disminueix τ, ja que com hem dit, els resultats han de ser similars a Π, a mesura que disminueix el valor de l'escalar.

Finalment, hem obtingut la frontera eficient utilitzant només les rendibilitats històriques i per tant sense tenir en compte cap tipus d'opinió, per comparar-la amb les fronteres eficients obtingudes amb el model BL. A la figura 5.18 ja es pot veure com la frontera eficient canvia totalment de forma, arribant a nivells de rendibilitat més alts. Això ens indica que aplicant les rendibilitats històriques s'obtenen unes carteres eficients que ofereixen unes rendibilitats molt superiors a les que realment s'obtindran tenint en compte les opinions dels inversors. És a dir, amb el model BL, la frontera eficient és més realista i posa de manifest que les rendibilitats històriques no es repetiran en el futur i aquell inversor que utilitzi la frontera eficient de Makowitz amb dades històriques estarà sobrevalorant les rendibilitats. D'aquí es pot concloure la importància del model BL, que ajuda amb l'opinió dels experts a tenir unes fronteres eficients més realistes sobre allò que s'espera que succeeixi.

A més, en quan a diversificació, si comparem les carteres cantonada que s'obtenen sense el model BL (taula 5.4) amb les carteres cantonada aplicant BL per a qualsevol nivell de τ (taules 5.1, 5.2 i 5.3), es pot veure com Black-Litterman obté un major nombre mitjà d'actius seleccionats per a les seves carteres cantonada, per tant forma carteres més diversificades, la qual cosa representa un menor risc per a l'inversor.

Així per tant, del model BL podem destacar la importància de combinar les opinions dels inversors i l'estimació del mercat en equilibri. Tot i això, les rendibilitats en equilibri, encara que siguin coherents amb l'oferta del mercat, no sempre estàn relacionades amb les opinions dels inversors i aquestes, poden ser errònies. A més, no veig que sigui fàcil expressar les opinions tal i com les requereix el model, ja que els analistes es limiten a recomanar si comprar o vendre segons pensin que el preu de l'acció tendeix a augmentar o disminuir. D'altra banda, si totes les opinions són expressades pel mateix inversor és molt poc probable que siguin independents les unes de les altres.

Em pregunto també com s'hauria de formar la nova cartera BL si arriba nova informació, ja sigui històrica o noves opinions. Podriem pensar que es pot agafar el vector que s'ha obtingut anteriorment i utilitzar-lo com a informació a priori del nou model, amb l'inconvenient que després d'unes quantes iteracions podriem obtenir unes ponderacions òptimes que s'allunyarien bastant del vector de pesos inicial que obtenim per capitalització de mercat. En canvi, si per al nou model partim de les rendibilitats en equilibri que tenim inicialment, es perdrien els guanys en informació que hem obtingut amb la primera iteració. Per tant, intueixo que s'hauria de trobar una manera intermitja entre les dues alternatives i només modificar els pesos dels actius sobre els quals l'inversor té noves opinions.

En definitiva, en el model BL es consideren factors que semblen contraris a l'eficiència del mercat, com són les opinions personals, encara que això ajuda a veure el mercat des de perspectives que s'adapten més a les persones que realment actuen i prenen decisions, combinant així el coneixement pràctic amb el teòric.

Bibliografia

[1] García Boza, Juan. (2013). *Inversiones financieras: Selección de carteras. Teoría y práctica*. Ed. Pirámide.

[2] Sigman, K. (2005). *Portafolio mean and variance.* http://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-portfolio-I.pdf

[3] Sharpe, W. F. (1964). "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk". A: *Journal of finance*. Vol. 17. Pp: 425-442.

[4] Hernández, Luís Ángel. (2017). *5 preguntas claves para entender el modelo de Markowitz.* https://www.rankia.com/blog/bolsa-desde-cero/3479118-5-claves-para-entender\ \-modelo-markowitz

[5] Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection.* Journal of Finance, Volume 7, Number 1.

[6] University of Washington, *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory.*

[7] Pacheco, Juan Manuel. (2002). *Programación cuadrática y selección de carteras de inversión.* Instituto de Investigaciones Teóricas y Aplicadas, Escuela de Estadística. https://www.fcecon.unr.edu.ar/web/sites/default/files/u16/Decimocuartas/Pacheco%20J%20M_programacion%20cuadratica.pdf

[8] Lee, M. (2000). *Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation.* Frank J. Fabozzi Associates, Pennsylvania.

[9] Scherer, B. (2007). *Portfolio Construction and Risk Budgeting.* Risk Books, Navarra.

[10] Idzorek, T. (2004). *A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating user specified confidence levels.* Zephyr Associates. https://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Idzorek_onBL.pdf

[11] Fok, H. and Benzschawel, T. (2007). *Asset Allocation Using the Black-Litterman Model.* Quantitative Credit Analyst, Citigroup.

[12] Fama, E. and French, K. (1992). *The Cross-Section of Expected Stock Returns.* The Journal of Finance, Volume 47, Number 2. Pp: 427-465.

[13] Stewart, H. (2000). *A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction.* https://www.researchgate.net/publication/31962785_A_demystification_of_the_Black-Litterman_model_Managing_quantitative_and_traditional_portfolio_construction

[14] Black, F. and Litterman, R. (1992). *Global portfolio optimization*. Financial Analysts Journal, Volume 48, Number 5. Pp: 28-43.

[15] Black, F. and Litterman, R. (1991). *Asset allocation: combining investor views with market equilibrium*. The Journal of Fixed Income, Volume 1, Number 2. Pp: 7-18.

[16] He, G. and Litterman, R. (2002). *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*. Available at SSRN 334304.

[17] https://docs.bankinter.com//file_source/blog/Contents/A-Documentos/Informes/prevision-ibex.pdf

[18] http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/Bayes/tema1bayes.pdf

[19] https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/25405/u670337.pdf?sequence=1. Pp: 15-16.

[20] Stephen A. Ross (1976). *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*. Journal of Economic Theory. Vol 13. Pp: 341-360.

Capítol 7

Annexos

Taula 7.1: Preu de tancament diari

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
9/2/2021	2,04575	37,10000	21,48000	23,00000	11,06000	8,54771	19,93617	10,62124	19,13982	13,75394
10/2/2021	2,02105	35,50000	21,80000	22,70000	10,82000	8,62740	20,34072	10,51874	19,01755	13,68086
11/2/2021	2,02599	38,00000	22,90000	22,70000	11,08000	8,53022	20,19019	10,51874	19,25269	13,53011
12/2/2021	2,00622	36,40000	21,58000	22,60000	11,66000	8,62351	20,63238	10,54803	19,74176	13,67172
15/2/2021	2,05564	37,20000	22,12000	22,40000	11,30000	9,09579	20,53829	10,49922	19,60069	13,70369
16/2/2021	2,08034	38,10000	22,02000	22,40000	11,30000	9,15021	20,35954	10,34302	19,46901	13,43876
17/2/2021	2,02105	36,30000	21,02000	21,20000	11,08000	9,18908	20,56652	10,44552	19,48782	13,62147
18/2/2021	1,99140	35,20000	19,93000	20,40000	10,72000	9,29015	20,46303	10,33326	19,42198	13,51184
19/2/2021	2,00622	36,50000	20,64000	21,10000	11,30000	9,65942	20,42539	10,26004	19,38436	13,53925
22/2/2021	1,96867	34,80000	19,44000	19,90000	10,86000	9,86349	20,11492	10,04528	19,30912	13,40678
23/2/2021	1,94495	33,10000	18,94000	19,20000	10,34000	9,85863	20,29368	10,01111	19,40317	13,44332
24/2/2021	1,89356	36,20000	18,11000	19,75000	10,24000	10,02869	19,96439	10,14778	19,28091	12,65308
25/2/2021	1,91332	35,60000	19,00000	19,55000	8,90000	10,32023	19,47516	10,04528	19,65712	12,47493
26/2/2021	1,94297	34,90000	18,60000	19,05000	8,03000	10,12101	19,33403	10,17707	19,47842	12,66678
1/3/2021	2,02105	36,90000	19,33000	19,45000	7,93000	10,40283	19,43753	10,15754	19,65712	12,79925
2/3/2021	2,01611	37,70000	18,46000	18,95000	8,32000	10,36881	19,55043	10,11849	19,52544	12,66678
3/3/2021	1,97657	34,90000	17,82000	18,60000	8,43000	10,55345	19,11764	9,77194	19,48782	12,51604
4/3/2021	1,91925	32,40000	17,52000	18,50000	8,22000	10,72837	19,65391	10,05992	19,56306	12,73530
5/3/2021	1,90739	30,40000	16,30000	17,60000	7,85000	10,65549	19,35285	9,94277	19,64771	12,70789
8/3/2021	1,93902	32,30000	17,45000	18,45000	7,85000	10,37853	19,39989	10,15266	20,11798	12,89061

Segueix a la següent pàgina

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
9/3/2021	2,00128	33,90000	18,36000	18,90000	8,57000	10,42226	19,84208	10,44552	19,99571	13,00937
10/3/2021	1,98646	32,90000	17,88000	18,80000	8,72000	10,39797	20,32190	10,46993	20,08976	13,14184
11/3/2021	2,00128	33,90000	19,14000	19,50000	8,88000	10,44656	20,40658	10,61636	20,01452	13,17382
12/3/2021	2,02105	33,90000	18,87000	19,40000	8,86000	10,65063	20,41599	10,49434	20,10857	13,16468
15/3/2021	2,00622	33,90000	18,33000	19,20000	9,42000	10,54373	20,46303	10,50410	20,12795	13,27431
16/3/2021	2,13470	34,00000	18,91000	19,75000	9,55000	10,44656	20,55711	10,64565	20,11826	13,24690
17/3/2021	2,05070	33,30000	18,08000	19,05000	8,95000	10,43198	20,39717	10,42600	20,36054	13,03221
18/3/2021	2,03093	29,70000	17,81000	19,35000	8,62000	10,41740	20,37835	10,41624	20,29270	13,03221
19/3/2021	2,06058	30,00000	17,54000	20,20000	9,26000	10,36881	20,77350	10,63589	20,08919	13,32913
22/3/2021	2,09517	29,40000	18,16000	19,65000	8,83000	10,26192	20,89581	10,53338	20,03105	13,12357
23/3/2021	2,08034	29,80000	18,50000	19,75000	9,01000	10,12587	21,16865	10,72863	20,22486	13,28345
24/3/2021	2,05564	29,30000	18,43000	19,65000	9,31000	10,38825	20,98048	10,66517	20,27332	13,23320
25/3/2021	1,99634	29,00000	17,14000	19,55000	9,24000	10,03841	21,14983	10,71886	20,34115	13,37937
26/3/2021	2,01611	29,30000	17,21000	19,70000	9,49000	10,30565	21,39445	10,71398	20,28301	13,42962
29/3/2021	2,04081	28,90000	17,32000	20,00000	9,63000	10,39797	21,48853	10,77256	20,44775	13,59863
30/3/2021	2,01611	27,90000	17,92000	20,90000	9,70000	10,36881	21,49794	10,63589	20,26363	13,63974
31/3/2021	2,07046	28,90000	18,08000	20,90000	10,52000	10,26192	21,22510	10,72375	20,25393	13,79505
1/4/2021	2,17028	29,30000	18,60000	21,10000	10,75000	10,14336	20,99930	10,77256	20,14734	13,69913
6/4/2021	2,05564	28,85000	18,12000	20,90000	10,00000	10,12004	21,28155	11,02637	20,24424	13,51641
7/4/2021	2,04180	27,85000	18,03000	20,70000	9,59000	10,18029	21,37563	10,97756	20,09888	13,69456
8/4/2021	2,09517	28,60000	18,62000	20,70000	9,60000	9,91791	21,60143	11,26067	20,37023	13,93209
9/4/2021	2,04575	27,90000	18,04000	20,85000	9,43000	9,84794	21,29096	11,23626	20,25393	13,78135
12/4/2021	2,00622	27,55000	17,49000	20,40000	9,09500	9,92180	21,30977	11,15816	20,22486	13,72653
13/4/2021	2,04378	27,00000	18,40000	20,25000	9,19500	9,83434	21,00871	11,17769	20,07950	13,63518
14/4/2021	2,03785	27,40000	18,00500	20,45000	8,98000	10,26775	20,83936	11,11911	20,21517	13,69456
15/4/2021	2,03982	27,10000	18,11500	20,35000	8,79000	10,10061	20,69824	11,24602	20,15703	13,68086
16/4/2021	2,02204	27,75000	18,31000	20,50000	8,91500	10,05979	20,92403	11,30948	20,27332	13,72197
19/4/2021	2,01611	27,00000	17,73000	20,50000	8,75000	9,96261	20,88640	11,32900	20,37023	13,98234
20/4/2021	1,95681	26,00000	16,64500	20,25000	8,38500	9,57196	20,85818	11,15328	20,17641	13,80876

Segueix a la següent pàgina

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
21/4/2021	1,93605	25,20000	16,76500	19,90000	8,22500	9,79547	20,66060	11,15816	20,32177	13,74024
22/4/2021	2,00425	26,00000	17,95500	20,70000	8,51000	9,79936	20,95226	11,39246	20,28301	13,93666
23/4/2021	1,95187	26,80000	17,97000	21,05000	8,91000	9,72745	20,88640	11,41686	20,27332	13,76765
26/4/2021	1,98250	27,65000	18,31000	21,75000	8,97500	9,84211	20,93344	11,28507	20,35084	13,79505
27/4/2021	1,98250	28,00000	18,50000	21,15000	8,91000	9,74688	20,86758	11,30460	20,37992	13,82246
28/4/2021	1,96175	26,95000	17,72000	20,30000	8,81000	9,97039	20,69824	11,09471	20,73848	13,86357
29/4/2021	1,93408	26,30000	17,15000	20,25000	8,44000	9,86544	20,58534	11,08983	20,64157	13,71283
30/4/2021	1,94100	26,15000	17,05500	19,90000	8,55000	9,65748	20,56652	10,96780	20,67064	13,95493
3/5/2021	1,93803	26,70000	17,30500	19,90000	8,67000	9,94901	20,70764	11,11911	20,74817	13,97777
4/5/2021	1,90937	25,50000	16,34500	19,30000	8,30500	10,20167	20,51007	10,91411	20,49621	13,99604
5/5/2021	1,92222	25,35000	16,51000	19,56000	8,55500	10,51847	20,84877	11,09471	20,67064	14,08740
6/5/2021	1,88565	24,40000	15,49500	19,36000	7,97000	10,49515	20,68883	11,07030	20,65126	14,36604
7/5/2021	1,93605	25,65000	16,36000	19,66000	8,25000	10,49709	21,02753	11,24602	20,81601	14,39345
10/5/2021	1,90739	24,70000	15,24000	19,38000	7,72000	10,60787	21,06516	11,19721	20,88384	14,63098
11/5/2021	1,85897	24,05000	14,96000	18,70000	7,61500	10,41352	20,65119	10,92387	20,85477	14,58987
12/5/2021	1,86786	24,45000	14,68000	18,50000	6,84000	10,71088	20,81113	10,87018	20,93230	14,58987
13/5/2021	1,92222	25,80000	14,96500	18,60000	6,85000	10,53985	21,14043	10,90923	20,83539	14,68579
14/5/2021	1,99634	27,00000	15,87500	18,76000	6,96500	10,78862	21,69551	11,01661	21,12611	14,80913
17/5/2021	1,92716	27,00000	15,59000	18,28000	6,81500	10,87219	21,77078	11,05078	21,13581	14,61271
18/5/2021	1,95780	28,10000	15,93000	18,66000	6,83000	10,86248	21,77078	11,04102	20,91291	14,79542
19/5/2021	1,97855	28,35000	15,84000	18,38000	6,79000	10,58260	21,51676	11,00197	20,80631	14,80913
20/5/2021	2,01611	29,35000	16,44500	19,34000	7,02000	10,53596	21,82723	11,19721	20,89353	14,89592
21/5/2021	2,01018	29,75000	16,36000	19,00000	6,88000	10,62536	21,72374	11,27531	20,91291	14,83653
24/5/2021	2,02599	29,90000	16,41000	18,94000	7,17500	10,73031	21,84605	11,19233	20,88384	14,85937
25/5/2021	1,98646	29,50000	16,33000	18,98000	7,11000	10,55151	21,93072	11,21185	20,87415	15,01011
26/5/2021	2,01413	29,40000	16,45000	18,72000	7,27500	10,75752	22,12830	11,13864	20,95168	15,00098
27/5/2021	2,04180	30,40000	15,69000	19,34000	7,46500	10,69533	22,10007	11,02637	20,83539	14,98727
28/5/2021	2,00425	30,10000	15,45500	18,78000	7,21000	10,65452	22,25060	11,03614	20,80631	15,00098
31/5/2021	1,99634	29,95000	15,94000	19,04000	7,08500	10,61564	20,98048	10,73351	20,76755	15,00098

Segueix a la següent pàgina

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
1/6/2021	2,00425	30,30000	16,06500	19,00000	7,01500	10,92273	20,73587	10,66029	20,68033	15,00098
2/6/2021	2,00425	30,50000	15,33000	18,70000	6,85500	10,99075	20,71705	10,51874	20,73848	15,15172
3/6/2021	2,00820	31,05000	14,71000	18,46000	6,77500	11,06849	20,45362	10,41624	20,83539	15,11061
4/6/2021	2,02796	31,35000	14,91000	18,26000	6,85000	10,93244	20,50066	10,35766	20,78693	15,15629
7/6/2021	2,02994	30,20000	14,56000	18,24000	6,72500	11,02768	20,36894	10,38695	20,95168	15,23394
8/6/2021	2,03389	30,05000	14,76500	18,00000	6,74000	10,97131	20,51007	10,44064	21,01951	15,32073
9/6/2021	2,03587	29,10000	14,68500	17,78000	6,69000	10,93827	20,42539	10,41136	21,10673	15,43950
10/6/2021	2,02599	27,95000	14,74000	17,52000	6,47000	10,90523	20,41599	10,28933	21,10673	15,46690
11/6/2021	2,02599	28,65000	15,13500	17,66000	6,60000	10,89746	20,45362	10,44064	21,22302	15,43036
14/6/2021	2,04971	29,15000	15,89500	18,30000	6,56500	11,14818	20,97108	10,56267	21,18426	15,61308
15/6/2021	2,01611	30,00000	15,82500	18,28000	6,57000	11,14818	21,12161	10,56755	21,25210	15,75925
16/6/2021	2,09517	32,25000	16,36500	26,15000	6,79000	10,95577	21,47912	10,68958	21,30055	15,84604
17/6/2021	2,02994	33,00000	16,00000	26,15000	6,99000	10,84887	21,20628	10,56267	21,31993	15,77295
18/6/2021	2,00029	31,15000	15,81500	26,25000	7,31500	10,43684	21,13102	10,47481	21,22302	15,71357
21/6/2021	2,02599	30,45000	15,75000	26,15000	7,29500	10,46405	21,25333	10,58708	21,17457	15,58110
22/6/2021	1,99041	29,20000	15,69500	26,20000	7,25000	10,51847	21,22510	10,55291	21,09704	15,10147
23/6/2021	1,94693	28,65000	15,00500	26,25000	7,24500	10,54568	20,88640	10,17707	20,97106	14,89135
24/6/2021	1,96076	28,80000	15,25000	26,25000	7,37500	10,78473	21,12161	10,22099	21,29086	15,04666
25/6/2021	1,95681	29,05000	15,39000	26,20000	7,48000	10,74586	21,14043	10,10873	21,28117	15,01925
28/6/2021	1,94297	29,00000	15,80000	26,15000	7,39000	10,38048	20,88640	10,09897	21,22302	15,08777
29/6/2021	1,95681	30,20000	16,32000	26,20000	7,56500	10,38242	20,92000	10,20635	21,25210	15,67770
30/6/2021	1,93408	30,10000	15,24000	26,15000	7,53000	10,25609	20,46000	10,03551	21,00982	15,65500
1/7/2021	1,92617	29,80000	15,36500	26,10000	7,33000	10,42323	20,78000	10,11361	21,28117	15,66500
2/7/2021	1,90542	30,20000	15,75000	26,10000	7,29000	10,32800	20,88000	10,22588	21,27148	15,65000
5/7/2021	1,95384	30,70000	15,78000	26,10000	7,20000	10,38000	20,82000	10,18195	21,32962	15,67500
6/7/2021	1,93704	30,10000	16,41000	26,15000	7,13000	10,04800	21,05000	10,31862	21,29086	15,62500
7/7/2021	1,92321	30,75000	16,96000	26,10000	7,16000	9,95500	21,42000	10,42600	21,39746	15,76000
8/7/2021	1,90739	29,55000	17,28500	26,10000	7,08500	9,73100	21,13000	10,21000	21,24241	15,62500
9/7/2021	1,90048	29,70000	16,90000	26,10000	7,05000	9,84800	21,25000	10,28000	21,38777	15,75000
12/7/2021	1,94001	30,00000	17,55000	26,10000	7,27500	9,74900	21,45000	10,41500	21,51375	15,95000

Segueix a la següent pàgina

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
13/7/2021	1,91629	29,50000	17,62500	26,15000	7,10000	9,56900	21,23000	10,39000	21,67850	15,92500
14/7/2021	1,92600	29,40000	17,11000	26,10000	6,82000	9,55900	21,04000	10,30000	21,63004	15,88000
15/7/2021	1,86600	28,55000	16,29000	26,10000	6,49000	9,32500	20,61000	10,23000	21,47499	15,89500
16/7/2021	1,88700	28,25000	16,18000	26,15000	6,44000	9,16400	20,68000	10,29500	21,49437	16,00000
19/7/2021	1,87200	27,90000	16,01500	26,10000	6,19500	8,75800	20,43000	10,13000	21,27148	15,72500
20/7/2021	1,83000	27,40000	15,75500	26,15000	6,25500	8,95000	20,57000	10,14000	21,35870	15,66500
21/7/2021	1,86800	28,95000	16,41000	26,15000	6,61500	9,24900	20,81000	10,21000	21,61066	15,90000
22/7/2021	1,92000	29,10000	16,99500	26,15000	6,58500	9,19100	21,29000	10,36500	21,75602	16,19500
23/7/2021	1,90500	28,75000	16,70500	26,10000	6,52000	9,18400	21,35000	10,42500	21,86262	16,33000
26/7/2021	1,92300	28,20000	16,85500	26,20000	6,58000	9,44100	21,23000	10,35500	21,80448	16,29500
27/7/2021	1,88200	27,50000	16,17000	26,15000	6,38500	9,43800	20,89000	10,23500	21,87231	16,37500
28/7/2021	1,90200	27,80000	16,67000	26,15000	6,63000	9,59600	21,00000	10,30000	21,61066	16,59500
29/7/2021	1,92000	27,35000	16,69000	26,15000	6,60000	9,49300	20,74000	10,34500	21,15519	16,85500
30/7/2021	1,91400	28,00000	16,26500	26,15000	6,79000	9,22100	20,51000	10,16000	21,11643	16,72500
2/8/2021	1,91100	29,10000	16,43000	26,25000	6,67500	9,25900	20,59000	10,17000	21,24416	16,79000
3/8/2021	1,91600	28,60000	16,12000	26,35000	6,79000	9,55200	21,14000	10,27000	21,51930	17,01000
4/8/2021	1,88800	27,85000	16,04000	26,25000	6,71500	9,43000	20,70000	10,23000	21,44069	16,94000
5/8/2021	1,90400	28,05000	16,03000	26,25000	6,84000	9,49200	20,53000	10,18000	21,56843	16,91000
6/8/2021	1,90100	27,95000	15,89500	26,35000	6,91500	9,55300	20,68000	10,16500	21,40138	17,00000
9/8/2021	1,89900	28,35000	16,20000	26,20000	6,83000	9,51800	20,82000	10,18000	21,32277	17,04500
10/8/2021	1,90500	29,25000	16,27500	26,20000	6,89000	9,62100	20,60000	10,16000	21,26382	17,04000
11/8/2021	1,91000	29,10000	16,15500	26,25000	7,03500	9,70000	20,76000	10,20000	21,39156	17,20000
12/8/2021	1,90600	28,75000	15,95500	26,20000	6,75000	9,74400	20,79000	10,13500	21,38173	17,22500
13/8/2021	1,87200	29,45000	15,74500	26,20000	6,78000	9,65500	20,82000	10,15000	21,42103	17,29000
16/8/2021	1,89400	29,10000	15,77500	26,20000	6,58000	9,51800	20,71000	10,21000	21,38173	17,31000
17/8/2021	1,89900	30,00000	15,72000	26,15000	6,60500	9,51700	20,40000	10,27000	21,40138	17,28000
18/8/2021	1,93500	30,60000	16,66500	26,15000	6,80000	9,58600	20,60000	10,45000	21,44069	17,40000
19/8/2021	1,92000	30,60000	16,77500	26,15000	6,75000	9,28600	20,80000	10,65500	21,47017	17,80000
20/8/2021	1,93000	30,95000	17,54500	26,15000	6,65000	9,36200	21,03000	10,76000	21,50947	17,54500

Segueix a la següent pàgina

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
23/8/2021	1,92300	30,90000	17,51500	26,25000	6,73000	9,66400	21,16000	10,67000	21,71582	17,69000
24/8/2021	1,93700	31,80000	17,39000	26,25000	6,79000	9,72000	20,75000	10,58000	21,53895	17,48500
25/8/2021	1,95000	31,00000	17,11000	26,30000	6,75000	9,71500	20,51000	10,53000	21,51930	17,18500
26/8/2021	1,92000	29,90000	16,77000	26,35000	6,76000	9,69300	20,09000	10,47500	21,40138	17,04000
27/8/2021	1,94800	29,85000	16,65000	26,25000	6,84000	9,90400	20,06000	10,45000	21,38173	17,03500
30/8/2021	1,95000	29,70000	16,65000	26,20000	6,85000	9,89600	20,10000	10,45000	21,43086	17,06500
31/8/2021	1,92000	29,50000	16,80000	26,25000	6,91500	9,70500	20,36000	10,49500	21,42103	16,89000
1/9/2021	1,89700	29,50000	16,99500	26,25000	7,04000	9,51500	20,80000	10,58500	21,58808	17,37500
2/9/2021	1,90000	30,20000	16,89000	26,30000	7,07000	9,74700	20,85000	10,62500	21,53895	17,37000
3/9/2021	1,89000	30,60000	17,18000	26,25000	6,99500	9,59100	20,81000	10,55500	21,39156	17,25000
6/9/2021	1,89600	29,80000	16,46000	26,25000	6,90000	9,60100	20,74000	10,41500	21,26382	17,16500
7/9/2021	1,87500	29,95000	15,43500	26,30000	6,71000	9,62000	20,44000	10,38000	21,27364	17,19000
8/9/2021	1,89600	30,00000	15,26000	26,30000	6,67000	9,51500	20,27000	10,35000	21,45051	17,37500
9/9/2021	1,88300	31,85000	15,05500	26,30000	6,24000	9,36100	20,32000	10,27500	21,31295	17,09000
10/9/2021	1,85000	32,00000	15,01500	26,30000	6,14000	9,45000	20,14000	10,07000	21,35225	16,85500
13/9/2021	1,85300	33,10000	15,44500	26,30000	6,16000	9,78300	20,47000	10,25500	21,59790	17,06000
14/9/2021	1,83500	32,90000	15,20500	26,30000	6,75000	9,84000	19,41000	10,08000	21,46034	17,12000
15/9/2021	1,79700	32,55000	14,50000	26,25000	6,99000	10,00200	18,17000	9,49600	21,37190	17,20500
16/9/2021	1,74400	31,95000	14,80000	26,25000	6,86500	10,03200	18,04000	9,37000	21,44069	17,32000
17/9/2021	1,79000	32,45000	14,70500	26,05000	7,16000	10,04400	18,22000	9,35400	21,21469	17,10000
20/9/2021	1,74400	32,40000	14,32000	26,15000	6,83500	9,97900	18,10000	9,26200	21,10660	17,36000
21/9/2021	1,75300	33,20000	14,93000	26,15000	6,78000	10,24200	18,33000	9,33400	21,12625	17,66500
22/9/2021	1,72000	31,90000	14,77500	26,05000	7,00500	10,47200	18,17000	9,25400	21,21469	17,51000
23/9/2021	1,75000	33,20000	14,91000	26,20000	7,43500	10,68800	18,15500	9,30000	21,27364	17,62500
24/9/2021	1,72800	34,00000	14,81500	26,20000	7,13500	10,72000	18,19500	9,21800	21,17538	17,37500
27/9/2021	1,76200	33,20000	14,83000	26,10000	7,21000	10,96600	18,25000	9,19600	21,32277	17,40000
28/9/2021	1,72500	31,55000	14,10500	26,10000	7,09500	11,02400	18,06500	8,98000	21,37190	17,24000
29/9/2021	1,73300	30,80000	14,42000	26,35000	7,19000	11,24600	17,86000	8,93400	21,52912	17,27000
30/9/2021	1,50300	30,65000	13,67500	26,25000	6,96500	11,29800	17,42000	8,68400	21,37190	17,31000

Segueix a la següent pàgina

Data	ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
1/10/2021	1,41800	30,65000	13,90000	26,35000	6,97500	11,31800	17,60000	8,72800	21,42103	17,34500
4/10/2021	1,37600	29,90000	14,02000	26,35000	6,91000	11,63600	17,59000	8,63800	21,41121	17,54000
5/10/2021	1,37300	29,30000	14,09000	26,30000	6,86000	11,66200	17,66000	8,78800	21,37190	17,58500
6/10/2021	1,36400	28,90000	14,00500	26,35000	6,79500	11,40000	17,63000	8,79800	21,45051	17,75500
7/10/2021	1,37700	29,55000	14,35000	26,30000	6,65000	11,50000	18,39000	9,41400	21,35225	17,56500
8/10/2021	1,39100	29,75000	13,94500	26,30000	6,45000	11,58200	18,50000	9,43600	21,47017	17,72000
11/10/2021	1,37300	28,70000	13,93000	26,30000	6,30000	11,45800	18,10500	9,27600	21,27364	17,63500
12/10/2021	1,42000	29,45000	14,19000	26,30000	6,58500	11,53000	18,12500	9,36000	21,68634	17,75000
13/10/2021	1,43000	30,35000	14,69000	26,30000	6,80500	11,38800	18,37000	9,48200	22,55104	17,80000
14/10/2021	1,45600	29,85000	14,83000	26,40000	6,75000	11,52600	18,84500	9,59200	23,59262	17,95000
15/10/2021	1,48700	30,15000	14,92500	26,30000	6,65500	11,58000	18,66000	9,44800	22,84583	17,65000
18/10/2021	1,44500	30,15000	14,83500	26,40000	6,62500	11,51600	18,64500	9,39400	22,69844	17,60000
19/10/2021	1,45500	31,00000	15,63000	26,40000	6,90000	11,52200	19,00000	9,64600	22,04991	17,61500
20/10/2021	1,46400	31,40000	16,54500	26,40000	7,10000	11,69000	19,04000	9,83400	21,98113	17,77500
21/10/2021	1,51200	32,50000	16,71000	26,40000	6,96500	11,45200	19,07500	9,75200	21,89269	17,60500
22/10/2021	1,52000	32,10000	16,96000	26,45000	6,98500	11,46600	19,06500	9,71600	21,64704	17,63500
25/10/2021	1,39800	32,95000	16,23500	26,45000	6,78000	11,67800	19,01500	9,65000	21,55860	17,69000
26/10/2021	1,40000	34,10000	16,64500	26,45000	7,20000	11,54000	19,41500	9,88600	22,00078	17,65000
27/10/2021	1,39300	33,10000	16,83500	26,45000	7,00000	11,46600	19,81000	10,05000	22,17765	18,06500
28/10/2021	1,42000	34,85000	17,40000	26,45000	7,32000	11,06400	19,92000	10,25000	22,31521	18,07000
29/10/2021	1,39300	35,30000	17,27000	26,45000	7,70000	11,05600	19,94500	10,21500	22,33487	18,01000

Taula 7.2: Sèrie de rendibilitats trimestrals

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
-0,0676	-0,3342	-0,2905	-0,1574	-0,3020	0,2410	0,0566	0,0542	0,0911	0,0638
-0,0802	-0,3225	-0,3138	-0,1762	-0,2962	0,2070	0,0153	0,0385	0,0966	0,0664
-0,0780	-0,3566	-0,3590	-0,1850	-0,3827	0,2556	0,0308	0,0334	0,0872	0,0783
-0,0419	-0,2912	-0,3065	-0,1770	-0,4125	0,2222	0,0246	0,0342	0,0554	0,0742
-0,0288	-0,2742	-0,2823	-0,1625	-0,3836	0,1861	0,0563	0,0493	0,0778	0,0807
-0,0736	-0,2913	-0,2920	-0,1839	-0,3969	0,1882	0,0693	0,0684	0,0856	0,0874
-0,0313	-0,2259	-0,2422	-0,1198	-0,3836	0,1821	0,0586	0,0570	0,0731	0,0862
-0,0065	-0,1946	-0,2052	-0,0990	-0,3666	0,1391	0,0515	0,0647	0,0713	0,0960
0,0049	-0,1959	-0,2032	-0,0834	-0,3788	0,0907	0,0686	0,0913	0,0779	0,1002
0,0211	-0,1451	-0,1584	-0,0452	-0,3665	0,0772	0,0800	0,1224	0,0831	0,1066
0,0417	-0,0967	-0,1336	-0,0135	-0,3061	0,0884	0,0765	0,1180	0,0763	0,1053
0,0491	-0,1851	-0,0983	-0,0390	-0,3057	0,0521	0,0985	0,1049	0,0826	0,1863
0,0527	-0,1742	-0,1342	-0,0425	-0,1826	0,0424	0,1362	0,1088	0,0659	0,2025
0,0509	-0,1289	-0,1565	0,0152	-0,0704	0,0567	0,1431	0,0835	0,0697	0,1832
-0,0083	-0,1843	-0,2005	-0,0344	-0,0908	0,0242	0,1447	0,0865	0,0585	0,1720
-0,0098	-0,2056	-0,1365	0,0047	-0,1484	0,0238	0,0731	0,0608	0,0636	0,1843
0,0140	-0,1318	-0,0985	0,0215	-0,1679	0,0350	0,0846	0,0909	0,0612	0,1985

Segueix a la següent pàgina

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
0,0443	-0,0586	-0,1250	0,0108	-0,1661	0,0245	0,0541	0,0456	0,0601	0,1897
0,0529	0,0214	-0,0975	0,0489	-0,1369	0,0388	0,0569	0,0476	0,0604	0,1891
0,0459	-0,0294	-0,1456	-0,0103	-0,1274	0,0534	0,0567	0,0202	0,0333	0,1758
0,0143	-0,1091	-0,2070	-0,0349	-0,2153	0,0581	0,0266	-0,0056	0,0478	0,1710
0,0239	-0,0866	-0,1742	-0,0426	-0,2271	0,0551	0,0093	-0,0028	0,0463	0,1658
0,0173	-0,1416	-0,2328	-0,0882	-0,2466	0,0471	0,0009	-0,0193	0,0546	0,1720
0,0024	-0,1755	-0,2189	-0,0969	-0,2698	0,0239	0,0000	-0,0195	0,0496	0,1749
0,0099	-0,1549	-0,1743	-0,0802	-0,2994	0,0335	-0,0005	-0,0060	0,0544	0,1624
-0,0398	-0,1426	-0,1594	-0,0734	-0,3126	0,0672	0,0201	-0,0078	0,0530	0,1786
-0,0169	-0,0991	-0,1247	-0,0404	-0,2659	0,0687	0,0355	0,0136	0,0438	0,2093
0,0316	0,0859	-0,0811	0,3514	-0,2123	0,0517	0,0540	0,0262	0,0497	0,2159
-0,0149	0,1000	-0,0878	0,2946	-0,2451	0,0463	0,0208	-0,0069	0,0613	0,1833
-0,0453	0,0595	-0,1291	0,3359	-0,1716	0,0170	0,0113	-0,0056	0,0595	0,1974
-0,0261	0,0218	-0,1486	0,3241	-0,1903	0,0334	0,0040	-0,0132	0,0470	0,1730
-0,0317	-0,0034	-0,1484	0,3333	-0,2213	0,0125	0,0117	-0,0105	0,0406	0,1412
-0,0248	-0,0121	-0,1246	0,3427	-0,2159	0,0505	-0,0125	-0,0505	0,0310	0,1130
-0,0275	-0,0171	-0,1139	0,3325	-0,2229	0,0465	-0,0128	-0,0460	0,0497	0,1204
-0,0412	0,0052	-0,1114	0,3100	-0,2233	0,0335	-0,0162	-0,0616	0,0408	0,1045

Segueix a la següent pàgina

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
-0,0363	0,0394	-0,1183	0,2512	-0,2381	0,0011	-0,0284	-0,0505	0,0473	0,1062
-0,0549	0,0450	-0,0973	0,2536	-0,2809	0,0117	-0,0144	-0,0482	0,0493	0,1365
-0,1088	0,0273	-0,1806	0,2393	-0,2995	0,0111	-0,0257	-0,0684	0,0428	0,1428
-0,0630	0,0329	-0,1520	0,2488	-0,2670	0,0300	-0,0236	-0,0828	0,0512	0,1590
-0,0668	0,0844	-0,1265	0,2609	-0,2398	0,0145	-0,0232	-0,0685	0,0583	0,1428
-0,0675	0,0734	-0,1525	0,2609	-0,2500	0,0466	-0,0362	-0,0958	0,0471	0,1251
-0,0531	0,0789	-0,0904	0,2542	-0,2439	0,0203	-0,0113	-0,0817	0,0512	0,1338
-0,0414	0,1162	-0,0303	0,2794	-0,2128	0,0033	0,0052	-0,0656	0,0580	0,1481
-0,0667	0,0944	-0,0606	0,2889	-0,2295	-0,0105	0,0058	-0,0866	0,0579	0,1459
-0,0674	0,0839	-0,0614	0,2763	-0,2149	-0,0409	0,0197	-0,0755	0,0580	0,1501
-0,0489	0,1070	-0,0312	0,2826	-0,1724	-0,0348	0,0363	-0,0739	0,0673	0,1659
-0,0523	0,0631	-0,0374	0,2756	-0,2036	-0,0488	0,0146	-0,0813	0,0693	0,1605
-0,0447	0,0889	-0,0350	0,2732	-0,2206	-0,0405	0,0074	-0,0908	0,0618	0,1357
-0,0464	0,0981	-0,0213	0,2889	-0,2260	-0,0258	-0,0119	-0,0828	0,0644	0,1511
-0,0253	0,1210	-0,0349	0,3141	-0,2170	-0,0645	0,0009	-0,0774	0,0577	0,1645
-0,0660	0,0731	-0,1080	0,2609	-0,2720	-0,1063	-0,0249	-0,1108	0,0487	0,1283
-0,0624	0,0224	-0,1233	0,2423	-0,2980	-0,0799	-0,0151	-0,1118	0,0535	0,1378
-0,0578	0,0470	-0,1038	0,2023	-0,2630	-0,0603	-0,0059	-0,0953	0,0619	0,1526

Segueix a la següent pàgina

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
-0,0315	0,0393	-0,0814	0,2364	-0,2609	-0,0570	0,0202	-0,0831	0,0675	0,1716
-0,0289	0,0668	-0,0573	0,2857	-0,2599	-0,0789	0,0315	-0,0604	0,0542	0,1779
-0,0057	0,0722	-0,0172	0,2938	-0,2204	-0,0430	0,0313	-0,0663	0,0563	0,1883
-0,0304	0,0516	-0,0519	0,3141	-0,2532	-0,0227	0,0157	-0,0668	0,0581	0,1734
-0,0186	0,0412	-0,0367	0,3141	-0,2353	-0,0355	0,0141	-0,0737	0,0416	0,1872
0,0056	0,0725	0,0211	0,3549	-0,2053	-0,0695	0,0112	-0,0521	0,0322	0,2043
-0,0043	0,1045	-0,0148	0,3369	-0,2063	-0,1234	-0,0162	-0,0842	0,0216	0,1872
0,0134	0,1926	0,0603	0,3559	-0,1625	-0,1178	-0,0048	-0,0813	0,0287	0,1687
-0,0104	0,1150	-0,0147	0,3403	-0,1770	-0,0900	0,0053	-0,0868	0,0338	0,1818
-0,0102	0,1275	0,0525	0,3545	-0,1302	-0,1110	-0,0173	-0,0864	0,0267	0,1578
0,0242	0,1663	0,0715	0,4037	-0,1018	-0,0885	-0,0059	-0,0681	0,0342	0,1590
0,0177	0,1431	0,0828	0,4243	0,0110	-0,1081	-0,0063	-0,0649	0,0224	0,1652
-0,0121	0,0988	0,0825	0,4086	-0,0029	-0,0970	-0,0152	-0,0668	0,0234	0,1606
-0,0458	0,0833	0,0252	0,3966	-0,0108	-0,1082	-0,0505	-0,0778	0,0065	0,1506
-0,0089	0,0778	0,0362	0,4360	0,0323	-0,1078	-0,0464	-0,0770	0,0121	0,1771
-0,0265	0,0231	0,0016	0,4041	-0,0117	-0,1030	-0,0451	-0,0821	0,0224	0,1642
-0,0539	0,0388	-0,0060	0,4255	-0,0015	-0,0877	-0,0324	-0,0774	0,0295	0,1675
-0,0606	-0,0085	-0,0407	0,3547	-0,0627	-0,0966	-0,0512	-0,0882	0,0234	0,1621

Segueix a la següent pàgina

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
-0,0553	0,0084	-0,0391	0,3763	-0,0400	-0,1043	-0,0609	-0,0892	0,0234	0,1647
-0,0449	0,0234	0,0155	0,3807	-0,0523	-0,1066	-0,0570	-0,0663	0,0267	0,1710
-0,0335	0,0373	0,0273	0,3778	-0,0506	-0,1199	-0,0516	-0,0497	0,0286	0,1859
-0,0418	0,0527	0,0666	0,3969	-0,0859	-0,1297	-0,0496	-0,0340	0,0266	0,1696
-0,0582	0,0164	0,1163	0,3573	-0,0985	-0,0964	-0,0425	-0,0323	0,0423	0,1803
-0,0336	0,0565	0,1252	0,3978	-0,0583	-0,0877	-0,0674	-0,0413	0,0352	0,1656
-0,0232	0,0351	0,0734	0,3813	-0,0473	-0,0848	-0,0224	-0,0190	0,0362	0,1456
-0,0420	-0,0132	0,0439	0,3868	-0,0364	-0,1126	-0,0311	-0,0174	0,0349	0,1359
-0,0281	-0,0213	0,0861	0,4037	-0,0022	-0,0989	-0,0317	-0,0065	0,0310	0,1243
-0,0290	-0,0435	0,1319	0,4193	0,0111	-0,1059	-0,0173	0,0032	0,0286	0,1293
-0,0532	-0,0590	0,1268	0,4376	0,0095	-0,1123	-0,0069	0,0133	0,0305	0,1144
-0,0655	-0,0232	0,1672	0,4391	0,0468	-0,1372	0,0212	0,0191	0,0304	0,1405
-0,0658	0,0050	0,1439	0,4611	0,0490	-0,1116	0,0166	0,0177	0,0247	0,1338
-0,0717	0,0515	0,1699	0,4764	0,0456	-0,1232	0,0188	0,0138	0,0135	0,1173
-0,0642	0,0662	0,1167	0,4983	0,0665	-0,1196	0,0159	0,0122	0,0074	0,1098
-0,0745	0,0454	0,0198	0,4892	0,0167	-0,1172	-0,0007	-0,0058	0,0024	0,1140
-0,0750	0,0292	-0,0399	0,4372	0,0160	-0,1465	-0,0334	-0,0201	0,0126	0,1128
-0,0660	0,0617	-0,0487	0,4387	-0,0502	-0,1603	-0,0380	-0,0277	0,0029	0,0844

Segueix a la següent pàgina

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
-0,1170	-0,0078	-0,0825	0,0057	-0,0957	-0,1374	-0,0623	-0,0580	0,0024	0,0637
-0,0872	0,0030	-0,0347	0,0057	-0,1187	-0,0982	-0,0347	-0,0291	0,0130	0,0816
-0,0826	0,0562	-0,0386	0,0019	-0,0772	-0,0572	-0,0814	-0,0377	0,0112	0,0895
-0,1130	0,0690	-0,0794	0,0038	-0,0418	-0,0442	-0,1451	-0,1031	0,0093	0,1042
-0,1238	0,0942	-0,0570	0,0019	-0,0531	-0,0462	-0,1501	-0,1121	0,0163	0,1469
-0,0806	0,1326	-0,0200	-0,0076	-0,0117	-0,0476	-0,1277	-0,0809	0,0116	0,1483
-0,1105	0,1250	-0,0610	-0,0038	-0,0732	-0,0747	-0,1431	-0,0938	-0,0087	0,1537
-0,1042	0,1429	-0,0299	-0,0019	-0,0936	-0,0469	-0,1329	-0,0766	-0,0073	0,1762
-0,1148	0,1000	-0,0649	-0,0038	-0,0521	0,0088	-0,1301	-0,0837	-0,0004	0,1605
-0,1057	0,0993	-0,0864	0,0000	-0,0172	0,0294	-0,1322	-0,0888	0,0010	0,1242
-0,1066	0,1296	-0,0279	0,0019	-0,0525	0,0452	-0,1107	-0,0815	0,0079	0,1099
-0,0852	0,1141	-0,0348	0,0000	-0,0164	0,0521	-0,1218	-0,0907	0,0020	0,1108
-0,0947	0,0447	-0,1044	0,0000	-0,0267	0,0674	-0,1348	-0,1218	0,0047	0,1016
-0,1130	0,0033	-0,0862	0,0096	-0,0014	0,0834	-0,1422	-0,1226	0,0094	0,1018
-0,2241	0,0183	-0,1667	0,0038	-0,0231	0,1244	-0,1724	-0,1584	0,0038	0,1078
-0,2627	-0,0033	-0,1804	0,0096	-0,0258	0,1369	-0,1783	-0,1629	0,0011	0,1006
-0,2786	0,0118	-0,1889	0,0096	-0,0247	0,1958	-0,1675	-0,1540	0,0079	0,1226
-0,2775	-0,0135	-0,1663	0,0077	-0,0270	0,1842	-0,1689	-0,1451	-0,0007	0,1165

Segueix a la següent pàgina

ADX	GRE	SLR	SPK	SOL	REP	ELE	IBE	NTGY	REE
-0,2969	-0,0367	-0,2020	0,0096	-0,0660	0,1694	-0,1781	-0,1553	-0,0029	0,1132
-0,2814	0,0017	-0,1858	0,0057	-0,0634	0,2018	-0,1338	-0,0939	-0,0150	0,1030
-0,2778	0,0119	-0,1850	0,0077	-0,0543	0,2116	-0,1207	-0,0839	-0,0074	0,1159
-0,2642	0,0053	-0,1449	0,0077	-0,0293	0,2287	-0,1215	-0,0933	-0,0094	0,1095
-0,2475	0,0425	-0,1230	0,0057	0,0225	0,2582	-0,1235	-0,0908	0,0089	0,1094
-0,2361	0,0878	-0,0827	0,0077	0,0985	0,3003	-0,1008	-0,0640	0,0602	0,1320
-0,2044	0,0894	-0,0587	0,0096	0,0791	0,2878	-0,0839	-0,0540	0,1046	0,1459
-0,2040	0,0415	-0,0905	0,0057	0,0060	0,2520	-0,1033	-0,0746	0,0572	0,1101
-0,2474	0,0361	-0,1271	0,0096	0,0061	0,2530	-0,1242	-0,0937	0,0433	0,0868
-0,2362	0,0783	-0,0644	0,0115	0,0583	0,2546	-0,1101	-0,0747	0,0086	0,0787
-0,2387	0,1135	-0,0184	0,0076	0,0790	0,2382	-0,1032	-0,0503	0,0081	0,0908
-0,1966	0,1818	0,0334	0,0096	0,0908	0,2134	-0,0869	-0,0472	0,0009	0,0751
-0,2008	0,1547	0,0174	0,0115	0,0535	0,1949	-0,0921	-0,0567	0,0017	0,0627
-0,2719	0,2048	-0,0273	0,0115	0,0273	0,2302	-0,0832	-0,0672	0,0191	0,0495
-0,2685	0,2179	0,0234	0,0115	0,0604	0,2515	-0,0534	-0,0270	0,0419	0,0553
-0,2711	0,1375	0,0246	0,0076	0,0487	0,2384	-0,0379	-0,0118	0,0439	0,0759
-0,2589	0,2185	0,0794	0,0038	0,0781	0,1583	-0,0577	-0,0019	0,0370	0,0623
-0,2622	0,2675	0,0767	0,0076	0,1467	0,1724	-0,0365	-0,0015	0,0417	0,0632