Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

LÒGICA INTUÏCIONISTA. TEOREMA DE GLIVENKO.

Autor: Genís Canal Ferrer

Director: Dr. Joan Gispert Brasó

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

Glivenko's theorem says that the fact that a proposition is provable in classical logic is equivalent to the double negation of this proposition being provable in intuitionistic logic. We present the intuitionistic logic and introduce two syntactic calculus: the Hilbert calculus and the natural deduction calculus. We give as well two semantics for the intuitionistic logic. A relational one, based on Kripke models and an algebraic one, based on Heyting algebras. To conclude we give three different proofs of Glivenko's theorem. A syntactic one, a semantic one based on Kripke models and a semantic one based on Heyting algebras.

Resum

El teorema de Glivenko ens diu que el fet de poder demostrar un enunciat a partir de la lògica clàssica és equivalent a poder demostrar el doble negat d'aquest enunciat a partir de la lògica intuïcionista. En aquest treball presentem la lògica intuïcionista i n'introduïm dos càlculs sintàctics: el càlcul de Hilbert i el càlcul de la deducció natural. També donem dues semàntiques per a aquesta lògica. Una de relacional basada en els models de Kripke i una d'algebraica basada en les àlgebres de Heyting. Per concloure donem tres demostracions del teorema de Glivenko. Una de sintàctica, una de semàntica basada en els models de Kripke i una altra de semàntica basada en les àlgebres de Heyting.

2020 Mathematics Subject Classification. 03B05, 03B60, 03F55, 03G10

Agraïments

Vull agrair al Dr. Joan Gispert la seva dedicació, paciència i guiatge durant aquest treball.
També vull agrair als amics i a la família, que m'han ajudat en els moments més complicats.

Índex

1 Introducció **1**

2 Preliminars **4**

3 Lògica intuïcionista **11**

4 Semàntica relacional. Models de Kripke **20**

5 Semàntica algebraica. Àlgebres de Heyting **27**

6 Teorema de Glivenko **37**

7 Conclusions **45**

1 Introducció

A l'assignatura optativa de quart curs amb el nom de "Modelització matemàtica de les formes de raonament"vam veure diferents maneres de modelitzar les formes de raonament. Entre aquestes formes de raonament, n'hi va haver una que em va despertar un interès especial: la lògica intuïcionista.

La lògica intuïcionista neix a principis del segle XX i és la lògica que va lligada a les matemàtiques constructivistes que van aparèixer en oposició als pensaments imperants de l'època, el logicisme i el formalisme. L'any 1907 L.E.J. Brouwer va intentar donar una reconstrucció de les matemàtiques a partir dels principis constructivistes, introduint les bases filosòfiques d'aquestes en la seva tesi doctoral. No obstant, no va ser fins més endavant quan va desenvolupar-les des d'un punt de vista més matemàtic. Els principis en els quals es basava la seva idea es podrien resumir, segons A.S. Troelstra en [6], de la següent manera:

1. Les matemàtiques no són formals. Els objectes matemàtics són construccions mentals en la ment dels matemàtics.
2. Les matemàtiques són independents de l'experiència del món exterior, i les matemàtiques són també independents del llenguatge.
3. Les matemàtiques no depenen de la lògica, sinó que, contràriament, la lògica depèn de les matemàtiques. És a dir, no té sentit pensar en termes de verdader o fals per a un enunciat matemàtic. Un enunciat només és pot considerar cert si en podem construir una demostració.

Observem, doncs, que això difereix de la lògica clàssica, que és la lògica usada tradicionalment en els raonaments matemàtics, en dos aspectes claus. En primer lloc Brouwer nega la idea platònica de que els enunciats matemàtics estan en algun lloc, i que a partir d'aquí aquests es poden demostrar o no. Ell creu que els enunciats només els tenim un cop els hem construït, i sabem que són certs només si en podem construir una demostració. En segon lloc, a la lògica clàssica es compleix el principi del terç exclòs, és a dir que o bé és cert un enunciat o bé es certa la negació d'aquest enunciat, és a dir que sigui φ un enunciat tenim que $\varphi \vee \neg\varphi$, sempre serà cert, on $\vee$ és la disjunció, i $\neg\varphi$ és la negació de l'enunciat φ. En canvi, per la lògica intuïcionista $\varphi \vee \neg\varphi$ només és cert quan en podem construir una demostració, això és que, o bé podem construir una demostració de φ, o bé podem construir una demostració de $\neg\varphi$.

Aquesta idea filosòfica em va cridar l'atenció, i un cop acabada l'assignatura em vaig quedar amb ganes d'aprofundir-hi més. Durant el curs vam veure que les lògiques es poden definir de dues maneres diferents. La primera és la sintàctica, on vam veure alguns càlculs com el càlcul de la deducció natural o el càlcul de Hilbert. L'altra manera de definir-la és a partir de la semàntica, on entre les que vam veure, vaig trobar d'especial interès la semàntica definida a partir dels models de Kripke, sobretot per la diferència respecte a totes les altres que vam estudiar, que es basaven principalment en prendre valors de veritat pels enunciats. Vam enunciar els teoremes de completesa per a cada una de les semàntiques estudiades respecte als càlculs sintàctics. És a dir que les dues maneres d'estudiar la lògica són equivalents. I en algun cas el vam demostrar de manera parcial i esquemàtica. Per últim, també em va interessar molt quan vam introduir el teorema de Glivenko, que estableix una relació entre la lògica clàssica i la lògica intuïcionista. El que ens diu aquest teorema és que el fet de poder demostrar un enunciat a partir de la lògica clàssica és a equivalent a poder demostrar el doble negat d'aquest enunciat a partir de la lògica intuïcionista.

En aquest treball estudiem tots aquests conceptes amb una mica més de profunditat. Ho farem a partir del llenguatge proposicional, que és el més bàsic i segurament intuïtiu, però que ja ens permet entendre la diferència entre la lògica clàssica i la lògica intuïcionista. Introduïm també una altra semàntica diferent de la de Kripke per a la lògica intuïcionista a partir de les àlgebres de Heyting. Així doncs, l'objectiu d'aquest treball és entendre millor la lògica intuïcionista i també estudiar diferents càlculs sintàctics que ens serviran per a demostrar els raonaments en aquesta lògica. També ho és conèixer diferents semàntiques per a la lògica intuïcionista, concretament dues; una que es basa en els models de Kripke i una altra a partir de les àlgebres de Heyting. Donem també la demostració del teorema de completesa per a cadascuna d'aquestes semàntiques. I per últim intentar demostrar el Teorema de Glivenko de tres maneres diferents. En primer lloc, la sintàctica i després a partir de les dues semàntiques que hem introduït al llarg del treball. Per a fer-ho he extret la informació de diferents llibres i dels apunts de l'assignatura "Modelització Matemàtica de les Formes del Raonamentïmpartida al Grau de Matemàtiques a la Universitat de Barcelona durant el semestre de primavera del curs 2019-2020 pel Dr. Joan Gispert.

El treball consta d'un capítol inicial on s'introdueixen nocions i conceptes bàsics que són fonamentals per a poder anar expressant més endavant totes les idees que volem explicar. Així doncs en aquest capítol, definim formalment el llenguatge proposicional per així poder introduir el concepte de lògica proposicional. Com a exemples recordem la semàntica clàssica basada en els valors de cert o fals i els càlculs sintàctics de la deducció natural i de Hilbert per a la lògica clàssica.

El següent capítol està dedicat a definir la lògica intuïcionista i a donar dos tipus de càlculs sintàctics per a estudiar-la. En concret són el càlcul de la deducció natural i el càlcul de Hilbert per a la lògica intuïcionista. Estudiem també algunes propietats d'aquests càlculs i demostrem que els dos càlculs són equivalents.

En el capítol que segueix estudiem la semàntica relacional basada en els models de Kripke. Primer de tot definim el concepte de model de Kripke, i la satisfabilitat d'una fórmula per a un model i un món, per a tot seguit poder donar la noció de conseqüència lògica a partir d'aquest concepte. La part fonamental d'aquest capítol és demostrar el teorema de completesa respecte dels càlculs de la lògica intuïcionista. En acabar demostrem també la propietat forta dels models finits.

Tot seguit, el capítol està dedicat a definir la semàntica algebraica per a la lògica intuïcionista, que es construeix a partir de les àlgebres de Heyting. Comencem definint el concepte de reticle, per a partir d'aquest poder definir les àlgebres de Heyting i les àlgebres de Boole. També estudiem quina relació hi ha entre aquests dos tipus d'àlgebres. Demostrem el teorema de completesa d'aquesta semàntica respecte els càlculs intuïcionistes.

Finalment recordem la completesa de la lògica clàssica respecte la semàntica algebraica definida a partir de les àlgebres de Boole.

En l'últim capítol, estudiem la relació que hi ha entre la lògica clàssica i la lògica intuïcionista. Veiem que la lògica proposicional clàssica és una extensió de la lògica proposicional intuïcionista. Enunciem també una generalització del Teorema de Glivenko que ens diu que: demostrar a partir d'unes premisses un enunciat en lògica proposicional clàssica és equivalent a demostrar el doble negat d'aquest enunciat en la lògica proposicional intuïcionista a partir de les mateixes premisses . En donem tres demostracions diferents. Una a partir dels càlculs sintàctics, una a partir de la semàntica relacional definida a partir dels models de Kripke i una a partir de les semàntiques algebraiques definides a partir de les àlgebres de Heyting i les àlgebres de Boole per a la lògica intuïcionista i clàssica respectivament.

A la part final del treball, hi ha el capítol de referències, on s'hi troben tots els recursos que s'han usat i citat durant el treball. Apareixen els llibres a partir dels quals he extret la informació per a bona part de la redacció d'aquest treball. Per a la informació dels càlculs de la lògica proposicional intuïcionista he utilitzat principalment [1], [2]. Per al capítol dels models de Kripke m'he guiat majoritàriament [1] i [4]. I per al capítol de les àlgebres de Heyting he fet servir [5] i [3]. Pel que fa a l'apartat del Teorema de Glivenko, he utilitzat tots quatre llibre, cadascun d'ells per la demostració del teorema de Glivenko a partir del càlcul o semàntica corresponent.

2 Preliminars

Històricament la *lògica* s'ha definit com la ciència que estudia els raonaments des d'un punt de vista formal. Un *raonament* consisteix en una successió, generalment finita, d'enunciats. Aquests conjunts d'enunciats els distingim en dos grups, el conjunt inicial, que anomenem *premisses* i l'enunciat final que anomenem *conclusió*.

Exemple 2.1. Tot nombre natural és enter, tot nombre enter és racional. Per tant, tot nombre natural és racional.
En aquest raonament les premisses són que tot nombre natural és enter i que tot nombre enter és racional, i la conclusió és que tot nombre natural és racional.

Per a poder estudiar i interpretar aquests raonaments des d'un punt de vista formal necessitarem definir un *llenguatge*, per a poder fer un anàlisi sistemàtic dels raonaments. Hi ha varis llenguatges que ens permeten fer aquest anàlisi, com per exemple el llenguatge proposicional, el llenguatge de predicats o de primer ordre, el llenguatge de segon ordre entre d'altres. En aquest treball ens centrarem en el llenguatge més senzill, que és el *llenguatge proposicional*. Aquest es defineix a partir de l'alfabet $\mathcal{L} = X \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\} \cup \{\top, \bot\} \cup \{(,)\}$. On X és el conjunt de proposicions atòmiques (que es poden entendre com enunciats irreductibles); $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ són la conjunció, disjunció, implicació, doble implicació i negació respectivament, i les anomenen connectives o símbols lògics; $\top$ i $\bot$ són constants lògiques que anomenem tautologia i contradicció respectivament; i per últim (,) són els símbols delimitadors. A través d'aquest alfabet podem definir el conjunt de proposicions del llenguatge proposicional, que és el que abans hem anomenat enunciats.

Definició 2.2. *Definim el conjunt de proposicions, $Prop(X)$, de manera recursiva:*

- *Si $x \in X$, aleshores $x \in Prop(X)$*
- *Si $\varphi \in Prop(X)$, aleshores $(\neg\varphi) \in Prop(X)$*
- *Si $\varphi, \psi \in Prop(X)$, aleshores $(\varphi \wedge \psi) \in Prop(X)$, $(\varphi \vee \psi) \in Prop(X)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \in Prop(X)$ i $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in Prop(X)$*
- *$\top, \bot \in Prop(X)$*

I no hi ha més proposicions que les construïdes amb aquestes regles en un nombre finit de passos.

Observació 2.3. Notem que no hem limitat que $\Sigma \subseteq Prop(X)$ sigui finit. Per tant Σ pot ser també tant un conjunt infinit com el conjunt buit.

Per a no haver d'utilitzar sempre tots els parèntesis eliminarem els parèntesis exteriors, usant la següent convenció referent a l'ordre de preferència de les connectives: en primer lloc la negació, a continuació i al mateix nivell la conjunció i la disjunció, i per últim la implicació i la doble implicació, també al mateix nivell. Veiem-ne alguns exemples.

Exemple 2.4. Siguin $p, q, r, s \in Prop(X)$

- $((r \wedge p) \rightarrow (\neg q)) = r \wedge p \rightarrow \neg q$
- $((s \wedge p) \vee ((\neg q) \wedge (s))) = (s \wedge p) \vee (\neg q \wedge s)$

- $\neg(p \to ((\neg p) \vee q)) = \neg(p \to \neg p \vee q)$

Ara que ja hem definit el llenguatge formal, té sentit voler formalitzar la idea de validesa d'un raonament. Per a fer-ho, anem a definir la lògica pel llenguatge proposicional.

Definició 2.5. *Un* raonament *és una parella* $\langle \Sigma, \varphi \rangle$ *tal que* $\Sigma \subseteq Prop(X)$ *i* $\varphi \in Prop(X)$. *Normalment ho escriurem com* $\Sigma \therefore \varphi$. *Diem que* Σ *és el* conjunt de premisses *i que* φ *és la* conclusió.

Observació 2.6. Sigui $\Sigma \subseteq Prop(X)$, Σ pot ser el conjunt buit $\emptyset$, i en aquest cas tenim un raonament sense premisses.

Definició 2.7. *Una* lògica proposicional $\rhd$ *és una* relació de conseqüència estructural *entre* $\mathcal{P}(Prop(X))$ *i* $Prop(X)$. *És a dir, compleix les següents propietats:*

1. *Axioma:*
   Sigui $\{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. *Aleshores* $\{\varphi\} \rhd \varphi$
2. *Monotonia:*
   Siguin $\Delta \cup \Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$. *Si* $\Delta \subseteq \Sigma$ *i* $\Delta \rhd \varphi$ *aleshores* $\Sigma \rhd \varphi$
3. *Tall:*
   Siguin $\Delta \cup \Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$. *Si* $\Delta \rhd \varphi$ *i* $\Sigma \cup \{\varphi\} \rhd \psi$ *aleshores* $\Delta \cup \Sigma \rhd \psi$
4. *Estructuralitat:*
   Sigui σ *una substitució. Si* $\Sigma \rhd \varphi$ *aleshores* $\sigma(\Sigma) \rhd \sigma(\varphi)$ *on* $\sigma(\Sigma) = \{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\}$

On el concepte de substitució és definit de la següent manera.

Definició 2.8. *Una* substitució *és una aplicació* $\sigma : Prop(X) \longrightarrow Prop(X)$ *tal que* $\sigma(\neg\varphi) = \neg\sigma(\varphi)$, $\sigma(\varphi \wedge \psi) = \sigma(\varphi) \wedge \sigma(\psi)$, $\sigma(\varphi \vee \psi) = \sigma(\varphi) \vee \sigma(\psi)$, $\sigma(\varphi \to \psi) = \sigma(\varphi) \to \sigma(\psi)$, $\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = \sigma(\varphi) \leftrightarrow \sigma(\psi)$, $\sigma(\top) = \top$ *i* $\sigma(\bot) = \bot$.

Observació 2.9. Notem que com que la substitució està definida recursivament n'hi ha prou definint la imatge de cadascuna de les variables.

Exemple 2.10. Sigui $\sigma : Prop(X) \longrightarrow Prop(X)$ una substitució tal que: $\sigma(x) = x \wedge z$, i $\sigma(y) = y$ per a tot $y \in X \setminus \{x\}$. Sigui $\varphi = (x \to \neg y) \vee t \to s$ una proposició, aleshores si apliquem la substitució σ obtenim la proposició $\sigma(\varphi) = (x \wedge z \to \neg y) \vee t \to s$.

Definició 2.11. *Diem que una lògica* $\rhd$ *compleix la propietat de* finitarietat *si per a tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$ *sempre que* $\Sigma \rhd \varphi$ *existeix* $\Delta \subseteq \Sigma$, *amb* Δ *finit tal que* $\Delta \rhd \varphi$.

Definició 2.12. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop(X)$, *diem que* Σ *és una* teoria *de* $\rhd$ *si per a tot* $\varphi \in Prop(X)$, $\Sigma \rhd \varphi \Leftrightarrow \varphi \rhd \Sigma$.
Donada $\Sigma \subseteq Prop(X)$, $Th(\Sigma) := \{\psi : \Sigma \rhd \psi\}$ *és la* teoria generada per Σ en $\rhd$, *és a dir, la més petita teoria teoria de* $\rhd$ *que conté* Σ.

Definició 2.13. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop(X)$ *diem que* Σ *és* inconsistent *sii* $Th(\Sigma) = Prop(X)$. *Diem que* Σ *és* consistent *sii no és inconsistent.*

Normalment tenim dues formes de definir una lògica, la *semàntica* i la *sintàctica*.
La *semàntica* es basa en la noció d'interpretació, que consisteix en assignar valors de

veritat a les proposicions per així donar una noció de satisfabilitat i estudiar la validesa dels raonaments.

Direm que la conclusió φ és una *conseqüència lògica* del conjunt de premisses Σ si sempre que les premisses són interpretades com a veritat aleshores la conclusió és també interpretada com a veritat. Generalment això ho notarem per $\Sigma \models \varphi$.

Anem a veure com a exemple de semàntica definida per a la lògica clàssica. Per a la lògica clàssica assignem el valor 0 en cas que la proposició sigui falsa i 1 en cas que la proposició sigui certa.
El problema amb el qual ens trobem és determinar el valor de veritat de $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ i $\neg\varphi$ donats els valors de veritat de φ i ψ.
Per a interpretar-ho ens valdrem de les anomenades taules de veritat, on a la columna de l'esquerra hi escrivim els possibles valors de veritat de la variable proposicional a l'esquerra del connector, i a la primera fila els possibles valors de veritat per a la variable proposicional a la dreta del connector. Les taules són les següents:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\neg$	
0	1
1	0

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

A partir d'aquestes podem definir formalment la noció d'interpretació.

Definició 2.14. *Una* interpretació *I és una aplicació $I : Prop(X) \longrightarrow \{0,1\}$ que preserva les taules de les connectives, interpretant-les de la següent manera:*

$$I(\neg\varphi) = \neg I(\varphi)$$

$$I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi) \wedge I(\psi),$$

$$I(\varphi \vee \psi) = I(\varphi) \vee I(\psi),$$

$$I(\varphi \to \psi) = I(\varphi) \to I(\psi),$$

$$I(\varphi \leftrightarrow \psi) = I(\varphi) \leftrightarrow I(\psi),$$

$$I(\top) = 1,$$

$$I(\bot) = 0$$

Definició 2.15. *Siguin $\varphi, \psi \in Prop(X)$ φ i ψ són equivalents si i només si per a tota interpretació I, $I(\varphi) = I(\psi)$ i ho notem per $\varphi \equiv \psi$.*

Exemple 2.16. Aquests són alguns exemples d'equivalències:

- $p \to p \equiv \top$
- $p \wedge \neg p \equiv \bot$
- $\varphi \to \equiv \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \to \psi$
- $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi)$
- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \psi$
- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

Ara basant-nos en el concepte d'interpretació per a la lògica clàssica, podem definir el terme conseqüència lògica de la següent manera:

Definició 2.17. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$ *direm que* φ *és* conseqüència lògica *de* Σ *i ho notarem per* $\Sigma \models_{\{0,1\}} \varphi$ *quan per a tota interpretació* I*, si* $I(\Sigma) \subseteq \{1\}$*, aleshores* $I(\varphi) = 1$.

Exemple 2.18.
- $\models_{\{0,1\}} p \to p$
  Volem veure que $I(p \to p) = 1$, és a dir, que $I(p) \to I(p) = 1$, ara si $I(p) = 0$ tenim $0 \to 0 = 1$ per la taula de veritat de $\to$, i si $I(p) = 1$ tenim $1 \to 1 = 1$ per la taula de veritat de $\to$. Per tant $I(p \to p) = 1$, com volíem veure.

- $\models_{\{0,1\}} p \vee \neg p$
  Volem veure que $I(p \vee \neg q) = 1$, és a dir, que $I(p) \vee I(\neg p) = 1$, i ara si $I(p) = 1$, aleshores $I(\neg p) = 0$ i per la taula de veritat de $\vee$ $I(p) \vee I(\neg p) = 1$. Si $I(p) = 0$, aleshores $I(\neg p) = 1$ i per la taula de veritat de $\vee$ $I(p) \vee I(\neg p) = 1$. Per tant $I(p \vee \neg q) = 1$, com volíem veure.

L'altra manera de definir una lògica és la *sintàctica*, en aquest cas per determinar si un raonament és vàlid ho fem a partir d'un *càlcul lògic*. Un *càlcul lògic* és un conjunt de regles d'inferència estructurals a partir de les quals podem construir una demostració per a un raonament. Per tant, ens cal definir el concepte de demostració.

Definició 2.19. *Una* demostració *de* φ *a partir de* Σ *en el càlcul* C *és una seqüència finita de proposicions* $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ *de* $Prop(X)$ *on* $\varphi_n = \varphi$ *i per tot* φ_i*,* $i = 1, \ldots, n$ *o bé* $\varphi_i \in \Sigma$*, o bé* φ_i *s'obté d'anteriors* $\varphi_j, \ldots, \varphi_k$ *on* $j, k < i$*, a partir d'una regla del càlcul* C*. Donat un càlcul* C *diem que* φ *es dedueix de* Σ *en el càlcul* C*, si hi ha una demostració de* φ *a partir de* Σ *en el càlcul* C*. I ho notarem per* $\Sigma \vdash_C \varphi$.

Proposició 2.20. $\vdash_C$ *és una relació de conseqüència estructural.*

Demostració. Anem a veure que es compleixen les quatre propietats que defineixen una relació de conseqüència estructural.

- Axioma: Sigui $\{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, volem veure que $\{\varphi\} \vdash \varphi$
  Que $\{\varphi\} \vdash \varphi$ és immediat si prenem la demostració de φ com la seqüència $\langle \varphi_1 \rangle$ amb $\varphi_1 = \varphi$.

- Monotonia: Siguin $\Delta \cup \Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, volem veure que si $\Delta \subseteq \Sigma$ i $\Delta \vdash \varphi$ aleshores $\Sigma \vdash \varphi$
  Si $\Delta \vdash \varphi$ aleshores existeix una demostració $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ de φ a partir de Δ, i com que $\Delta \subseteq \Sigma$, $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una demostració de φ a partir de Σ i per tant $\Sigma \vdash \varphi$.

- Tall: Siguin $\Delta \cup \Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$, volem veure que si $\Delta \vdash \varphi$ i $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ aleshores $\Delta \cup \Sigma \vdash \psi$
  Si $\Delta \vdash \varphi$, aleshores existeix una demostració $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ de φ a partir de Δ. I si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, aleshores existeix una demostració $\langle \psi_1, \ldots, \psi_n \rangle$ ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Ara si prenem $\Delta \cup \Sigma$, tenim que $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi \rangle$ és una demostració de ψ a partir de $\Delta \cup \Sigma$, i per tant $\Delta \cup \Sigma \vdash \psi$.

- Estructuralitat: Sigui σ una substitució, volem veure que si $\Sigma \vdash \varphi$ aleshores $\sigma(\Sigma) \vdash \sigma(\varphi)$ on $\sigma(\Sigma) = \{\sigma(\psi) : \psi \in \Sigma\}$

Per la definició de la substitució, si $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ és una seqüència que ens dona una demostració de φ, aleshores $\langle \sigma(\varphi_1), \ldots, \sigma(\varphi_n) \rangle$ és una demostració de $\sigma(\varphi)$, ja que les regles són estructurals.

□

Proposició 2.21. *Donat un càlcul C, $\vdash_C$ és una lògica finitària.*

Demostració. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, si $\Sigma \vdash_C \varphi$ aleshores existeix una demostració $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ de φ a partir de Σ. I ara si prenem $\Delta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cap \Sigma$, és cert que Δ és finit i que $\Delta \vdash_C \varphi$. □

Definició 2.22. *Donats un càlcul C, i $\varphi \in Prop(X)$, diem que φ és un* teorema *sii $\emptyset \vdash_C \varphi$ i ho notarem per $\vdash_C \varphi$.*

Hi ha diferents tipus de càlculs segons les regles que s'usen, alguns exemples són el càlcul de Hilbert, el càlcul de la deducció natural o el càlcul de tipus Tableaux, entre d'altres. En aquest treball ens centrarem en el dos primers, anem a veure ara com es defineixen en el cas de la lògica clàssica.

El cas del *càlcul de Hilbert clàssic proposicional* es defineix a a partir d'unes regles especials, anomenades axiomes. Aquests són unes fórmules que no necessiten precedents, i a partir de les quals podem desenvolupar una demostració d'un raonament. Els axiomes del càlcul Hilbert són els següents:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
4. $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

És important notar que els axiomes són estructurals i per tant valen per a qualssevol proposicions φ, ψ i χ. És a dir, hem d'entendre les φ, ψ i χ dels axiomes com a metavariables que poden ser substituïdes per a qualsevol proposició. El que obtindrem és el que n'anomenem instàncies d'axiomes.

Exemple 2.23. $(p \wedge q) \to ((r \vee t) \to (p \wedge q))$ és un exemple d'instància de l'Axioma 1, que és $\varphi \to (\psi \to \varphi)$. Observem que té la mateixa estructura que l'axioma 1 i $(p \wedge q)$ substitueix a φ i $(r \vee t)$ substitueix a ψ.
Un altra instància d'aquest mateix axioma seria $(\neg p \to q) \to ((r \wedge \neg t) \to (\neg p \to q)$ on $\neg p \to q$ substitueix a φ i $r \wedge \neg t$ substitueix a ψ.

El càlcul Hilbert també té una regla, que a partir d'unes premisses ens permet extreure una conclusió, aquesta és la regla de Modus Ponens (MP): $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$ on el que es troba per sobre de la línia són les premisses, i el que es troba per sota, la conclusió.

Anem a veure dos exemples de la demostració d'un raonament a partir del càlcul Hilbert.

Exemple 2.24. • Volem veure que $p \to (q \to r) \vdash_{CPC} q \to (p \to r)$.

1.	$p \to (q \to r)$	Premissa
2.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	Axioma 2
3.	$(p \to q) \to (p \to r)$	MP 1,2
4.	$((p \to q) \to (p \to r)) \to (q \to ((p \to q) \to (p \to r)))$	Axioma 1
5.	$q \to ((p \to q) \to (p \to r))$	MP 3,4
6.	$(q \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r)))$	Axioma 2
7.	$(q \to (p \to q)) \to (q \to (p \to r))$	MP 5,6
8.	$(q \to (p \to q)$	Axioma 1
9.	$q \to (p \to r)$	MP 7,8

Per tant $p \to (q \to r) \vdash_{CPC} q \to (p \to r)$.

• Volem veure que $\vdash_{CPC} p \to p$.

1.	$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$	Axioma 2
2.	$p \to ((p \to p) \to p)$	Axioma 1
3.	$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$	MP 1,2
4.	$p \to (p \to p)$	Axioma 1
5.	$p \to p$	MP 3,4

Per tant $\vdash_{CPC} p \to p$.

Pel que fa al *Càlcul de deducció natural clàssic proposicional* tenim un seguit de regles més reconeixibles que els axiomes del càlcul de Hilbert i a més ens permet obrir hipòtesis. Les regles són les següents:

Inclusió $\wedge$: $\dfrac{\varphi,\ \psi}{\varphi \wedge \psi}$

Eliminació $\wedge$: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}, \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$

Inclusió $\vee$: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}, \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

Eliminació $\vee$:
$$\begin{array}{l|l|l}
\varphi \vee \psi & \varphi \text{ (Hip.)} & \psi \text{ (Hip.)} \\ \cline{2-3}
 & \vdots & \vdots \\
 & \chi & \chi \\
\chi & &
\end{array}$$

Inclusió $\to$:
$$\begin{array}{l|l}
 & \varphi \text{ (Hip.)} \\ \cline{2-2}
 & \vdots \\
 & \psi \\
\varphi \to \psi &
\end{array}$$

Eliminació $\to$: $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$

Inclusió $\neg$:
$$\begin{array}{l|l}
 & \varphi \text{ (Hip.)} \\ \cline{2-2}
 & \vdots \\
 & \psi \\
 & \vdots \\
 & \neg\psi \\
\neg\varphi &
\end{array}$$

Eliminació $\neg$: $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$

Iteració: $\dfrac{\varphi}{\varphi}$

Notem que les regles estan escrites de manera semblant a la regla de Modus Ponens del càlcul de Hilbert. Però les regles on s'introdueixen hipòtesis estan escrites diferents. A l'esquerra hi ha les premisses, entrat a la dreta, la hipotèsi que introduïm subratllada i a on arribem a sota d'aquesta, i altre vegada a l'esquerra hi ha la conclusió. Per exemple per la regla de l'eliminació de $\vee$ tenim com a premissa $\varphi \vee \psi$ i introduïm les hipòtesis φ i ψ, i si a partir d'aquestes dues hipòtesis deduïm χ, tenim com a conclusió χ. Si mirem la regla de la inclusió de $\rightarrow$ veiem que sense premisses obrim hipòtesis de φ i si a partir d'aquí en deduïm ψ obtenim com a conclusió $\varphi \rightarrow \psi$. La inclusió de $\neg$ s'interpreta de manera semblant. Anem ara a demostrar a partir del càlcul de la deducció natural els dos exemples que hem fet pel càlcul de Hilbert.

Exemple 2.25. 1. Volem veure que: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_{(C)DN} q \rightarrow (p \rightarrow r)$

$$
\begin{array}{lll|l|l}
1. & p \rightarrow (q \rightarrow r) & & & \text{Premissa} \\
2. & & \underline{\quad q \quad} & & \text{Hipòtesis} \\
3. & & & \underline{\quad p \quad} & \text{Hipòtesis} \\
4. & & & q \rightarrow r & \text{E}\rightarrow 1,3 \\
5. & & & r & \text{E} \rightarrow 2,4 \\
6. & & p \rightarrow r & & \text{I}\rightarrow 3,5 \\
7. & q \rightarrow (p \rightarrow r) & & & \text{I}\rightarrow 2,6
\end{array}
$$

2. Volem veure que: $\vdash_{(C)DN} p \rightarrow p$

$$
\begin{array}{lll|l}
1. & & \underline{p} & \text{Hipòtesis} \\
2. & & p & \text{It.1} \\
3. & p \rightarrow p & & \text{I} \rightarrow 1,2
\end{array}
$$

Ara hem vist dos tipus de càlculs diferents. El que és interessant és veure que aquestes dues maneres d'estudiar la validesa dels raonaments són equivalents a la definició semàntica. Aquest resultat ens els donen els teoremes de completesa.

Pel cas del càlcul Hilbert tenim el següent:

Teorema 2.26. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,

$$\Sigma \models_{\{0,1\}} \varphi \ \textit{sii} \ \Sigma \vdash_{CPC} \varphi$$

Podem trobar una demostració d'aquest teorema a [8].

I pel cas de la deducció natural tenim el següent:

Teorema 2.27. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$,

$$\Sigma \models_{\{0,1\}} \varphi \ \textit{sii} \ \Sigma \vdash_{(C)DN} \varphi$$

Podem trobar una demostració d'aquest teorema a [9].

3 Lògica intuïcionista

La lògica intuïcionista neix a partir de l'estudi de la lògica de la matemàtica constructivista de L.E.J. Brouwer. Aquest basava la seva idea de les matemàtiques en que aquestes són subjectives, ja que no són res més que allò que construeix un matemàtic a partir de fer demostracions vàlides. Entén les matemàtiques com una activitat mental. I per tant, com a quelcom dinàmic i fluid. Alhora entén que la lògica matemàtica com a ciència del raonament matemàtic és una ciència empírica, ja que observa la manera de pensar dels matemàtics i, a partir d'aquí, n'extreu unes conclusions.

Aquesta lògica es basa en la idea que un raonament és cert si en sé construir una demostració. Més endavant Heyting, alumne de Brouwer, va prendre aquesta idea i va intentar desenvolupar un sistema per modelitzar la lògica intuïcionista. Aquest sistema és l'anomenada *Semàntica BHK* (Brouwer, Heyting, Kolmogorov). Defineix la noció de conseqüència lògica de la següent manera; si les premisses són veritat, aleshores la conclusió és veritat. Com que el concepte de veritat és que se'n pot construir una demostració, diem que φ és una conseqüència lògica de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ i ho notarem per $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_{BHK} \varphi$, sii per a tota $a_1, \ldots, a_n$ demostracions de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ respectivament, existeix una construcció f tal que $f(a_1, \ldots, a_n)$ és una demostració de φ. Si denotem per $\overline{\psi}$ el conjunt de demostracions de ψ, aleshores direm que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_{BHK} \varphi$, sii podem construir una $f : \overline{\varphi_1} \times \ldots \times \overline{\varphi_n} \longrightarrow \overline{\varphi}$ tal que per a tot $a_i \in \overline{\varphi_i}$, $f(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{\varphi}$.

Per veure com construïm les demostracions dels enunciats cal interpretar les connectives primitives de la semàntica BHK. Les connectives primitives són $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$ i definim a partir d'aquestes la negació; $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp$, la doble implicació; $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Per a definir la semàntica és important veure com definim les demostracions per a les proposicions amb cada una de les connectives.

- a és una demostració de $\varphi \wedge \psi$ sii $a = (b, c)$ on b és una demostració de φ i c és una demostració de ψ.
- d és una demostració de $\varphi \vee \psi$ sii $d = (0, b)$ on b és una demostració de φ o $d = (1, c)$ on c és una demostració de ψ.
- f és una demostració de $\varphi \rightarrow \psi$ sii f és una funció tal que donada qualsevol demostració b de φ aleshores $f(b)$ és una demostració de ψ.
- No hi ha demostracions de $\perp$. És a dir $\overline{\perp} = \emptyset$.

Exemple 3.1. Anem a veure un exemple de demostració a partir d'aquesta semàntica.

- $p \models_{BHK} (q \rightarrow p)$
  Definim la següent funció:
  $$\begin{array}{llllll} f: & \overline{p} & \rightarrow & \overline{(q \rightarrow p)} & & \\ & a & \rightarrow & f(a): & \overline{q} \rightarrow & \overline{p} \\ & & & & b \rightarrow & (f(a))(b) := a \end{array}$$

Càlcul de Hilbert Intuïcionista

Heyting en el seu llibre [7] defineix un càlcul de tipus Hilbert basant-se en aquesta idea semàntica de la lògica.

Els axiomes d'aquest càlcul de Hilbert intuïcionista són els següents:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
4. $\varphi \wedge \psi \to \psi$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$
6. $\psi \to \varphi \vee \psi$
7. $(\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$
8. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$
9. $\perp \to \varphi$

I també hi ha la regla de Modus Ponens:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

Aleshores per a tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, direm que φ es dedueix de Σ en un càlcul de Hilbert intuïcionista, i ho denotarem per $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$, quan existeix una demostració de φ a partir de Σ. Notem també que la noció de demostració pel càlcul Hilbert és la mateixa que en el cas clàssic, i l'únic que ha canviat és que l'axiomàtica és diferent. Aixi doncs tenim que $\vdash_{IPC}$ és una lògica proposicional finitària. És a dir que $\vdash_{IPC}$ és una relació de conseqüència estructural finitària.
A continuació donem algunes propietats del càlcul de Hilbert intuïcionista que necessitarem més endavant.

Teorema 3.2 (Deducció (TD))**.** *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$, llavors $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ si i només si $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \psi$.*

Demostració. Demostrem primer la implicació de dreta a esquerra.
Si $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \psi$ aleshores existeix $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ demostració de $\varphi \to \psi$ a partir de Σ. Ara, $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi \rangle$ és una demostració de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$, ja que i ψ es dedueix de $\varphi_n = \varphi \to \psi$ i φ a partir de Modus Ponens, i per tant $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ tal i com volíem.
Demostrem ara la implicació d'esquerra a dreta.
Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ aleshores existeix $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ demostració de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Anem a demostrar que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \varphi_i$ per inducció sobre i.

- Si $n = 1$. Aleshores $\varphi_1 = \psi$ i $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$ o ψ és una axioma. Per tant distingim dos casos.

1. Si $\psi = \varphi$, aleshores com que $\vdash_{IPC} \varphi \to \varphi$, això ho podem demostrar anàlogament a com ho hem fet pel càlcul clàssic en l'exemple 2.24, però usant l'axioma 8 a on allà usem l'axioma 2, i per monotonia obtenim que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \varphi$.
2. Si $\psi \in \Sigma$ o ψ és un axioma. Aleshores per l'axioma 1 tenim que $\vdash_{IPC} \psi \to (\varphi \to \psi)$ i per monotonia $\Sigma \vdash_{IPC} \psi \to (\varphi \to \psi)$ i com que en aquest cas o $\psi \in \Sigma$ o ψ és un axioma obtenim en ambdós casos que $\Sigma \vdash_{IPC} \psi$ i ara podem aplicar Modus Ponens i obtenim que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \psi$.

- Pas inductiu. Suposem que és cert per n i ho demostrem per $n+1$. Tenim que $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \rangle$ una demostració de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$, aleshores $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ demostra $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi_n$ i tenim que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$. Llavors distingim dos casos.

  1. Si $\varphi_{n+1} \in \Sigma \cup \{\varphi\}$ o φ_{n+1} és una axioma, procedim anàlogament al cas $n = 1$.
  2. Si φ_{n+1} s'obté d'anteriors usant Modus Ponens. Llavors existeixen $i, j \leq n$ tal que $\varphi_i = \varphi_j \to \varphi_{n+1}$ i per hipòtesis d'inducció $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \varphi_i$ i $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \varphi_j$. Ara per l'axioma 8 i per monotonia tenim que $\Sigma \vdash_{IPC} (\varphi \to \varphi_j) \to ((\varphi \to (\varphi_j \to \varphi_{n+1})) \to (\varphi \to \varphi_{n+1}))$ i si apliquem Modus Ponens obtenim que $\Sigma \vdash_{IPC} (\varphi \to (\varphi_j \to \varphi_{n+1})) \to (\varphi \to \varphi_{n+1})$ i com que $\varphi_i = \varphi_j \to \varphi_{n+1}$ podem tornar a aplicar Modus Ponens i obtenim que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \varphi_{n+1}$ tal i com volíem veure.

Així doncs hem vist que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \psi$ tal i com volíem. □

Proposició 3.3. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop(X)$, Σ *és* inconsistent *si i només si* $\Sigma \vdash_{IPC} \bot$.

Demostració. Per l'axioma 9, tenim que $\Sigma \vdash_{IPC} \bot \to \varphi$ i com que $\Sigma \vdash_{IPC} \bot$, si apliquem la regla de Modus Ponens, $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$ on φ és qualsevol proposició de $Prop(X)$. Això ens prova la implicació de dreta a esquerra. La implicació contrària és immediata per la definició d'inconsistent. □

Teorema 3.4 (Pseudo-reducció a l'absurd (PRA))**.** *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, $\Sigma \vdash_{IPC} \neg\varphi$ *si i només si* $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *és inconsistent.*

Demostració. Per definició $\Sigma \vdash_{IPC} \neg\varphi$ és el mateix que $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \to \bot$ que és equivalent, pel teorema de la deducció a $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \bot$. I per la proposició 3.3 és equivalent a que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ és inconsistent. □

Teorema 3.5 (Conjunció per la dreta (CD))**.** *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$, $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \wedge \psi$ *sii* $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$ *i* $\Sigma \vdash_{IPC} \psi$.

Demostració. Demostrem primer la implicació d'esquerra a dreta. Sigui $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \wedge \psi$ aleshores hi ha una demostració $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle$ en Σ i amb $\varphi_n = \varphi \wedge \psi$ i ara si usem l'axioma 3 i la regla de Modus Ponens obtenim una demostració $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi \wedge \psi \to \varphi, \varphi \rangle$ en Σ i per tant $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$. Anàlogament per l'axioma 4 i Modus Ponens obtenim una demostració $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n, \varphi \wedge \psi \to \psi, \psi \rangle$ en Σ i per tant $\Sigma \vdash_{IPC} \psi$ tal i com volíem veure.
Demostrem ara la implicació de dreta a esquerra. Siguin $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$ i $\Sigma \vdash_{IPC} \psi$, i si concatenem les dues demostracions i usem l'axioma 2 i Modus Ponens obtenim la demostració $\langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi_0, \ldots, \psi_n, \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi), \psi \to \varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi \rangle$ en Σ i per tant $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \wedge \psi$ tal i com volíem veure. □

Teorema 3.6 (Conjunció per l'esquerra (CE))**.** *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq Prop(X)$*,* $\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{IPC} \chi$ *sii* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash_{IPC} \chi$*.*

Demostració. Demostrem primer la implicació de dreta a esquerra. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{IPC} \chi$, per la l'axioma, la monotonia i la conjunció per la dreta tenim que $\{\varphi, \psi\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge \psi$, llavors si apliquem la propietat del tall, obtenim que $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash_{IPC} \chi$, tal i com volíem veure.
Demostrem ara la implicació d'esquerra a dreta. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash_{IPC} \chi$, per l'axioma 3 i el teorema de la deducció obtenim $\varphi \wedge \psi \vdash_{IPC} \varphi$, anàlogament per l'axioma 4 i el teorema de la deducció obtenim $\varphi \wedge \psi \vdash_{IPC} \psi$ finalment per la propietat del tall obtenim $\Sigma \cup \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{IPC} \chi$, tal i com volíem veure. □

Teorema 3.7 (Disjunció per la dreta (DD))**.** *Siguin* $\{\varphi, \psi\} \subseteq Prop(X)$*,* $\{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ *i* $\{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$*.*

Demostració. Per l'axioma 5 tenim que $\vdash_{IPC} \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ i pel teorema de deducció obtenim que $\{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ i per l'axioma 6 tenim que $\vdash_{IPC} \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$ i pel teorema de deducció obtenim que $\{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ tal i com volíem veure. □

Teorema 3.8 (Disjunció per l'esquerra o prova per casos (DE))**.** *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq Prop(X)$*,* $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{IPC} \chi$ *sii* $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \chi$ *i* $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \chi$*.*

Demostració. Demostrem primer la implicació d'esquerra a dreta. Sigui $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{IPC} \chi$ i pel teorema de disjunció per la dreta tenim també que $\{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ i ara per la propietat del tall, obtenim que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \chi$, i altre vegada pel teorema de disjunció per la dreta tenim també que $\{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ i si tornem a aplicar la propietat del tall, obtenim que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \chi$, tal i com volíem veure.
Demostrem ara la implicació de dreta a esquerra. Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \chi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \chi$, pel teorema de la deducció són equivalents a $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \rightarrow \chi$ i $\Sigma \vdash_{IPC} \psi \rightarrow \chi$. Ara per l'axioma 7 i monotonia obtenim $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)))$ i pel teorema de la deducció $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{IPC} (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi))$. I ara per monotonia i Modus Ponens amb $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \rightarrow \chi$ obtenim que $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{IPC} (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \chi$ i finalment per monotonia i Modus Ponens amb $\Sigma \vdash_{IPC} \psi \rightarrow \chi$ se'n segueix que $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{IPC} \chi$, tal i com volíem veure. □

Anem ara a veure alguns exemples de demostració d'un raonament a partir del càlcul de Hilbert per a la lògica intuïcionista, usant també les propietats que acabem d'enunciar.

Exemple 3.9.

- $\vdash_{IPC} p \rightarrow p$
  Per l'axioma $\{p\} \vdash_{IPC} p$ i per el teorema de la deducció $\vdash_{IPC} p \rightarrow p$, com volíem veure.

- $p \rightarrow q \vdash_{IPC} \neg q \rightarrow \neg p$
  $p \rightarrow q \vdash_{IPC} \neg q \rightarrow \neg p$ és equivalent pel teorema de la deducció a $p \rightarrow q, \neg q \vdash_{IPC} \neg p$ i això alhora, és equivalent, pel teorema de la pseudo-reducció a l'absurd a que el conjunt $\{p \rightarrow q, \neg q, p\}$ sigui inconsistent. Observem que si tenim $p \rightarrow q$ i p i apliquem la regla de Modus Ponens, obtenim $\{p \rightarrow q, \neg q, p\} \vdash_{IPC} q$ i alhora tenim que $\{p \rightarrow q, \neg q, p\} \vdash_{IPC} \neg q := q \rightarrow \bot$ i per tant per Modus Ponens de q i $\neg q$ tenim que $\{p \rightarrow q, \neg q, p\} \vdash_{IPC} \bot$ i per tant, per la proposició 3.3 el conjunt $\{p \rightarrow q, \neg q, p\}$ és incosistent, tal i com volíem demostrar.

- $p \vdash_{IPC} \neg\neg p$
  $p \vdash_{IPC} \neg\neg p$ és equivalent a $p \vdash_{IPC} (p \to \bot) \to \bot$ que pel teorema de la deducció és $\{p, p \to \bot\} \vdash_{IPC} \bot$ i per la regla de Modus ponens, això és cert.

- $\neg p \dashv\vdash_{IPC} \neg\neg\neg p$
  Veiem primer que $\neg p \vdash_{IPC} \neg\neg\neg p$. Com que $\vdash_{IPC}$ és una relació de conseqüència estructural, per l'exemple anterior, i la substitució de p per $\neg p$ obtenim que $\neg p \vdash_{IPC} \neg\neg\neg p$.
  Ara volem veure que $\neg\neg\neg p \vdash_{IPC} \neg p$, que per la definició de $\neg$ és equivalent a veure que $\neg\neg p \to \bot \vdash_{IPC} \neg p$, que alhora, pel teorema de pseudo reducció a l'absurd és equivalent a veure que $\{\neg\neg p \to \bot, p\}$ és inconsistent. Ara, altra vegada per l'exemple anterior, el teorema de la deducció i per monotonia obtenim que $\neg\neg p \to \bot, p \vdash_{IPC} p \to \neg\neg p$ i per l'axioma també obtenim que $\{\neg\neg p \to \bot, p\} \vdash_{IPC} p$. Llavors per la regla de Modus Ponens tenim que $\neg\neg p \to \bot, p \vdash_{IPC} \neg\neg p$ i per monotonia també tenim que $\{\neg\neg p \to \bot, p\} \vdash_{IPC} \neg\neg p \to \bot$, i si tornem a aplicar Modus Ponens obtenim que $\{\neg\neg p \to \bot, p\} \vdash_{IPC} \bot$ i per tant, per la proposició 3.3 $\{\neg\neg p \to \bot, p\}$ és inconsistent. Així doncs $\neg\neg\neg p \vdash_{IPC} \neg p$, tal i com volíem veure.

Càlcul de la Deducció Natural Intuïcionista

L'altre càlcul que presentem és el de la *deducció natural per la lògica intuïcionista*, que té les següents regles:

Inclusió $\wedge$: $\dfrac{\varphi,\ \psi}{\varphi \wedge \psi}$

Eliminació $\wedge$: $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}, \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$

Inclusió $\vee$: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}, \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

Eliminació $\vee$:
$$\begin{array}{l|c|c} \varphi \vee \psi & \varphi \text{ (Hip.)} & \psi \text{ (Hip.)} \\ \hline & \vdots & \vdots \\ & \chi & \chi \\ \chi & & \end{array}$$

Inclusió $\to$:
$$\begin{array}{l|c} & \varphi \text{ (Hip.)} \\ \hline & \vdots \\ & \psi \\ \varphi \to \psi & \end{array}$$

Eliminació $\to$: $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$

Iteració: $\dfrac{\varphi}{\varphi}$

Eliminació $\bot$: $\dfrac{\bot}{\varphi}$

Observem que la introducció i l'eliminació de la negació són derivables. Les regles són les següents:

Inclusió $\neg$:
$$\begin{array}{l|c} & \varphi \text{ (Hip.)} \\ \hline & \vdots \\ & \psi \\ & \neg\psi \\ \neg\varphi & \end{array}$$

Eliminació $\neg$: $\dfrac{\varphi,\ \neg\varphi}{\psi}$

Deduïm la regla d'inclusió de $\neg$ de la següent manera:

1.		φ	Hipòtesis
		$\vdots$	
i.		ψ	
j.		$\neg\psi := \psi \to \bot$	
j+1.		$\bot$	E $\to$ i,j
j+2.	$\neg\varphi := \varphi \to \bot$		I $\to$ 1,j+1

I deduïm la regla d'eliminació de $\neg$ com es segueix:

1.	φ	Premissa
2	$\neg\varphi = \varphi \to \bot$	Premissa
3.	$\bot$	E $\to$ 1,2
4.	ψ	E $\bot$ 3

Notem que si derivem una nova regla a partir de les existents, llavors aquella també ens serveix com a regla pel càlcul.

Per a tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, direm que φ es dedueix de Σ en un càlcul de deducció natural, i ho denotarem per $\Sigma \vdash_{(I)DN} \varphi$, quan existeix una demostració de φ a partir de Σ aplicant les regles anteriors. Observem també que el càlcul de la deducció natural intuïcionista té exactament les mateixes regles que la deducció natural clàssica, excepte la regle de l'eliminiació de la negació, que és diferent, ja que en la lògica intuïcionista $\neg\neg\varphi$ no és equivalent a φ. Aprofitem ara que enunciem la següent proposició, per a veure alguns exemples de com donar una demostració d'un raonament a partir de la deducció natural.

Proposició 3.10. *1.* $\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\vdash_{(I)DN} \neg\varphi \wedge \neg\psi$

2. $\neg\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\vdash_{(I)DN} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

3. $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash_{(I)DN} \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$

4. $\neg(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash_{(I)DN} \varphi \to \neg\psi$

5. $\neg\neg(\varphi \to \psi) \dashv\vdash_{(I)DN} \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$

6. $\varphi \to \psi \vdash_{(I)DN} \neg\psi \to \neg\varphi$

Demostració. Demostrem algunes deduccions a tall d'exemple, les altres es fan de manera semblant.

- Volem demostrar que $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash_{(I)DN} \neg\varphi \wedge \neg\psi$

1.	$\neg(\varphi \vee \psi)$		Premissa
2.		φ	Hipotèsis
3.		$\varphi \vee \psi$	I$\vee$ 2
4.		$\neg(\varphi \vee \psi)$	It. 1
5.	$\neg\varphi$		I$\neg$ 2,3,4
6.		ψ	Hipòtesis
7.		$\varphi \vee \psi$	I$\neg$ 6
8.		$\neg(\varphi \vee \psi)$	It. 1
9.	$\neg\psi$		I$\neg$ 6,7,8
10.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$		I$\wedge$ 5,9

- Volem demostrar que $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash_{(I)DN} \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$

1.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Premissa
2.	$\neg\varphi$	Hipòtesis
3.	$\varphi \wedge \psi$	Hipòtesis
4.	φ	E $\wedge$ 3
5.	$\neg\varphi$	It. 2
6.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	I $\neg$ 3,4,5
7.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	It. 1
8.	$\neg\neg\varphi$	I $\neg$ 2,6,7
9.	$\neg\psi$	Hipòtesis
10.	$\varphi \wedge \psi$	Hipòtesis
11.	ψ	E $\wedge$ 10
12.	$\neg\psi$	It. 9
13.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	I $\neg$ 10,11,12
14.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	It. 1
15.	$\neg\neg\psi$	I $\neg$ 9,13,14
16.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	I$\wedge$ 8,15

- Volem demostrar que $\neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash_{(I)DN} \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$

1.	$\neg\neg(\varphi \to \psi)$	Premissa
2.	$\neg\neg\varphi$	Hipòtesis
3.	$\neg\psi$	Hipòtesis
4.	$\varphi \to \psi$	Hipòtesis
5.	φ	Hipòtesis
6.	ψ	E $\to$ 4,5
7.	$\neg\psi$	It. 3
8.	$\neg\varphi$	I $\neg$ 5,6,7
9.	$\neg\neg\varphi$	It. 2
10.	$\neg(\varphi \to \psi)$	I $\neg$ 4,8,9
11.	$\neg\neg(\varphi \to \psi)$	It. 1
12.	$\neg\neg\psi$	I $\neg$ 3,10,11
13.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	I $\to$ 2,12

$\square$

Proposició 3.11. *El càlcul de Hilbert intuïcionista i el càlcul de deducció natural intuïcionista són equivalents.*

Demostració. En primer lloc demostrarem els axiomes i la regla del càlcul de Hilbert a partir de les regles de la deducció natural.

- Per l'*axioma 1* volem veure que $\vdash_{(I)DN} \varphi \to (\psi \to \varphi)$

1.	φ	Hipotèsis
2.	ψ	Hipotèsis
3.	φ	It.1
4.	$\varphi \to \psi$	I$\to$ 2,3
5.	$\varphi \to (\psi \to \varphi)$	I$\to$ 1,4

L'*axioma 2* és fàcilment demostrable, procedint de manera semblant a l'axioma 1.

- Per l'*axioma 3* volem veure que $\vdash_{(I)DN} \varphi \land \psi \to \varphi$

1.	$\varphi \land \psi$	Hipotèsis
2.	φ	E $\land$ 1
3.	$\varphi \land \psi \to \varphi$	I $\to$ 1,2

Els *axiomes 4,5 i 6* són fàcilment demostrables de manera semblant a l'axioma 2.

- Per l'*axioma 7* volem veure que $\vdash_{(I)DN} (\varphi \lor \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$

1.	$\varphi \lor \psi$	Hip.
2.	φ	Hip.
3.	$\varphi \to \chi$	Hip.
4.	φ	It.2
5.	χ	E$\to$ 3, 4
6.	$\psi \to \chi$	Hip.
7.	χ	It.5
8.	$(\psi \to \chi) \to \chi$	I$\to$ 6, 7
9.	$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$	I$\to$ 3, 8
10.	ψ	Hip.
11.	$\psi \to \chi$	Hip.
12.	ψ	It.10
13.	χ	E$\to$ 11, 12
14.	$(\psi \to \chi) \to \chi$	I$\to$ 11, 13
15.	$\varphi \to \chi$	Hip.
16.	$(\psi \to \chi) \to \chi$	It.14
17.	$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$	I$\to$ 15, 16
18.	$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$	E$\lor$1, 9, 17
19.	$(\varphi \lor \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$	I$\to$ 1, 18

L'*axioma 8* el podem demostrar procedint de manera semblant.

- Per l'*axioma 9* volem veure que $\vdash_{(I)DN} \bot \to \varphi$

1.	$\bot$	Hipotèsis
2.	φ	E $\bot$ 1
3.	$\bot \to \varphi$	I $\to$ 1,2

- Per últim observem que la regla de Modus Ponens és equivalent a la regla d'introducció de la implicació de la deducció natural.

Per a demostrar l'equivalència ens queda ara provar que totes les regles de la deducció natural són demostrables a partir dels axiomes i la regla de Modus Ponens del càlcul de Hilbert. Per a fer-ho reescriurem les regles de la deducció natural, i després les demostrarem.

- Regla inclusió $\land$:
  Volem veure que $\varphi, \psi \vdash_{IPC} \varphi \land \psi$.
  Notem que per l'axioma 2 $\vdash_{IPC} \varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi)) \Leftrightarrow_{TD} \varphi \vdash_{IPC} \psi \to (\varphi \land \psi)$ $\Leftrightarrow_{TD} \varphi, \psi \vdash_{IPC} \varphi \land \psi$ i per tant és cert.

- Regla eliminació $\wedge$:
  Volem veure que $\varphi \wedge \psi \vdash_{IPC} \varphi$ i que $\varphi \wedge \psi \vdash_{IPC} \psi$.
  Per l'axioma 3 tenim que $\vdash_{IPC} \varphi \wedge \psi \to \varphi$ i pel teorema de la deducció obtenim $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$.
  Es demostra anàlogament que $\varphi \wedge \psi \vdash_{IPC} \psi$ usant l'axioma 4.

- Regla inclusió $\vee$:
  Volem veure que $\varphi \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ i que $\psi \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$.
  A partir de l'axioma 5, $\vdash_{IPC} \varphi \to \varphi \vee \psi$ i com que $\vdash_{IPC} \varphi$ podem aplicar Modus Ponens i obtenim que $\vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$.
  Es demostra anàlogament que $\psi \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ usant l'axioma 6.

- Regla eliminació $\vee$:
  Volem veure que $\varphi \vdash_{IPC} \chi$, $\psi \vdash_{IPC} \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi \vdash_{IPC} \chi$.
  És immediat, ja que és la implicació $\Leftarrow$ de la propietat de la disjunció per l'esquerra amb $\Sigma = \emptyset$.

- Regla inclusió $\to$:
  Volem veure que $\varphi \vdash_{IPC} \psi \Rightarrow \varphi \to \psi$.
  És immediat, ja que és la implicació $\Rightarrow$ del teorema de la deducció amb $\Sigma = \emptyset$.

- Regla eliminació $\to$:
  Volem veure que $\varphi, \varphi \to \psi \vdash_{IPC} \psi$
  És immediat a partir de la regla de Modus Ponens.

- Regla iteració:
  Volem veure que $\varphi \vdash_{IPC} \varphi$.
  És segueix directament de la propietat de l'axioma $\varphi \vdash_{IPC} \varphi$.

- Regla eliminació $\bot$:
  Volem veure que $\bot \vdash_{IPC} \varphi$.
  Per l'axioma 9 tenim que $\vdash_{IPC} \bot \to \varphi \Leftrightarrow_{TD} \bot \vdash_{IPC} \varphi$.

$\square$

4 Semàntica relacional. Models de Kripke

La idea d'aquesta semàntica es podria explicar de la següent manera. Imaginem un matemàtic ideal que eixampla tant el seu coneixement com el seu univers d'objectes al llarg del temps. A cada moment α, que anomenarem món, aquest matemàtic té un conjunt de proposicions bàsiques, que ha demostrat, i un conjunt d'objectes que ha construït o creat, aquestes són les que es consideren veritat en aquell món. En cada moment el futur del matemàtic ideal no està determinat, i per aquesta raó els mons no estan totalment ordenats, sinó que ho estan només parcialment.

Per modelitzar aquest concepte de matemàtic ideal, introduïm els conceptes de marc de Kripke i model de Kripke.

Definició 4.1. *Diem que una parella $\langle A, \leq \rangle$ és un* marc de Kripke. *On A és un conjunt que representa els mons possibles i $A \neq \emptyset$, i $\leq$ és una relació d'ordre en A, és a dir, és una relació transitiva, reflexiva i antisimètrica en A.*

Definició 4.2. *Un* model de Kripke *és una terna $M = \langle A, \leq, V \rangle$ on $\langle A, \leq \rangle$ és un marc de Kripke i V és una aplicació $V : A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que per tot $\alpha, \beta \in A$, si $\alpha \leq \beta$, aleshores $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$. A aquesta aplicació V l'anomenem* valoració.

A continuació definim recursivament la satisfabilitat d'una proposició φ per a un model de Kripke.

Sigui M un model de Kripke, $M = \langle A, \leq, V \rangle$, $\alpha \in A$, $\varphi \in Prop(X)$ i $x \in X$, direm que φ és veritat en el món α per al model de Kripke M i ho denotarem per $M, \alpha \Vdash \varphi$ quan es compleixi el següent:

- $M, \alpha \Vdash x$ sii $x \in V(\alpha)$
- $M, \alpha \Vdash \varphi \wedge \psi$ sii $M, \alpha \Vdash \varphi$ i $M, \alpha \Vdash \psi$
- $M, \alpha \Vdash \varphi \vee \psi$ sii $M, \alpha \Vdash \varphi$ o $M, \alpha \Vdash \psi$
- $M, \alpha \Vdash \varphi \to \psi$ sii per tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \beta \Vdash \psi$
- $M, \alpha \nVdash \perp$ per a tot $\alpha \in A$

Observació 4.3. Donat que $\neg\varphi := \varphi \to \perp$. Aleshores $M, \alpha \Vdash \neg\varphi$ sii $M, \alpha \Vdash \varphi \to \perp$ sii per tot $\beta \in A$, $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \beta \Vdash \perp$ sii per a tot $\beta \in A$, $\beta \geq \alpha$, $M, \beta \nVdash \varphi$. És a dir $M, \alpha \Vdash \neg\varphi$ sii $M, \beta \nVdash \varphi$.

Anem a veure alguns exemples d'interpretació d'enunciats proposicionals a través de la semàntica de Kripke.

Exemple 4.4. Sigui $M = \langle A, \leq, V \rangle$ on:

1. $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\}$
2. $V(\alpha_1) = \emptyset$, $V(\alpha_2) = \{x\}$, $V(\alpha_3) = \{x, y\}$, $V(\alpha_4) = \{x, y\}$, $V(\alpha_5) = \{x, y, z\}$, $V(\alpha_6) = \{x, z\}$, $V(\alpha_7) = \{x, y, z\}$, $V(\alpha_8) = \{x, y, z\}$, $V(\alpha_9) = \{x, y, z, t\}$

3. $\leq$ ens determina les següents relacions d'ordre:

   - $\alpha_1 \leq \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$
   - $\alpha_2 \leq \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$
   - $\alpha_3 \leq \alpha_4, \alpha_5$
   - $\alpha_6 \leq \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$

Ho visualitzem en el següent arbre:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\alpha_4=\{x,y\} \arrow[dr, dash] & & \alpha_5=\{x,y,z\} \arrow[dl, dash] & & \alpha_7=\{x,y,z\} \arrow[dr, dash] & \alpha_8=\{x,y,z\} \arrow[d, dash] & \alpha_9=\{x,y,z,t\} \arrow[dl, dash] \\
& \alpha_3=\{x,y\} \arrow[drr, dash] & & & & \alpha_6=\{x,z\} \arrow[dll, dash] & \\
& & & \alpha_2=\{x\} \arrow[d, dash] & & & \\
& & & \alpha_1=\emptyset & & &
\end{tikzcd}$$

Estudiem ara si el següent es compleix:

- $M, \alpha_5 \Vdash x \wedge y \to y$?
  Sabem que $M, \alpha_5 \Vdash x \wedge y \to y$ sii per a tot $\beta \geq \alpha_5$ si $M, \beta \Vdash x \wedge y$, aleshores $M, \beta \Vdash y$. Tenim que només $\alpha_5 \geq \alpha_5$ i es complix que $M, \alpha_5 \Vdash x \wedge y$ i també $M, \alpha_5 \Vdash y$. Per tant es compleix per a tot $\beta \geq \alpha_5$ i per tant tenim que efectivament $M, \alpha_5 \Vdash x \wedge y \to y$.

- $M, \alpha_6 \Vdash y \vee \neg y$?
  Sabem que $M, \alpha_6 \Vdash y \vee \neg y$ sii $M, \alpha_6 \Vdash y$ o $M, \alpha_6 \Vdash \neg y$. Però $y \notin \alpha_6$, per tant $M, \alpha_6 \nVdash y$, i tindrem que $M, \alpha_6 \Vdash \neg y$ sii per tot $\beta \in A$, $\beta \geq \alpha_6$ $M, \beta \nVdash y$, però $\alpha_7 \geq \alpha_6$ i $M, \alpha_7 \Vdash y$. Per tant $M, \alpha_6 \nVdash \neg y$, i així doncs $M, \alpha_6 \nVdash y \vee \neg y$.

De la pròpia definició de Model de Kripke tenim que per tot M, per tot $\alpha, \beta \in A$ i per tot $x \in X$, si $\alpha \leq \beta$ i $M, \alpha \Vdash x$ aleshores $M, \beta \Vdash x$. El següent resultat ens diu que ho podem generalitzar per a qualsevol $\varphi \in Prop(X)$.

Lema 4.5. *Sigui $M = \langle A, \leq, V \rangle$ un model de Kripke. Sigui $\varphi \in Prop(X)$. Per tot $\alpha, \beta \in A$, si $\alpha \leq \beta$ i $M, \alpha \Vdash \varphi$, aleshores $M, \beta \Vdash \varphi$.*

Demostració. Ho demostrem per inducció sobre la construcció de φ.

- Si $\varphi = x \in X$
  Si $\alpha \leq \beta$ i $M, \alpha \Vdash x$, aleshores $x \in V(\alpha) \subseteq V(\beta)$, i per tant $M, \beta \Vdash x$, com volíem veure.

- Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$
  Si $M, \alpha \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ aleshores $M, \alpha \Vdash \varphi_1$ i $M, \alpha \Vdash \varphi_2$. Aleshores per la hipòtesi d'inducció i pe lema 4.5, obtenim que per $\beta \geq \alpha$ es compleix que $M, \beta \Vdash \varphi_1$ i $M, \beta \Vdash \varphi_2$, i per tant és cert que $M, \beta \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, com volíem veure.

- Si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$
  Si $M, \alpha \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ aleshores $M, \alpha \Vdash \varphi_1$ o $M, \alpha \Vdash \varphi_2$. Aleshores per la hipòtesi d'inducció, tenim que per $\beta \geq \alpha$ es compleix que $M, \beta \Vdash \varphi_1$ o $M, \beta \Vdash \varphi_2$, i per tant és cert que $M, \beta \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$, com volíem veure.

- Si $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$
  Si $M, \alpha \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$ aleshores per tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi_1$ aleshores $M, \beta \Vdash \varphi_2$ i volem veure que per tot $\gamma \geq \beta$ si $M, \gamma \Vdash \varphi_1$ aleshores $M, \gamma \Vdash \varphi_2$, i com que $\gamma \geq \beta$ i $\beta \geq \alpha$ iper tant $\gamma \geq \alpha$, i per hipòtesi d'inducció, si $M, \gamma \Vdash \varphi_1$ aleshores $M, \gamma \Vdash \varphi_2$ i per tant es compleix que $M, \beta \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2$.

- Si $\varphi = \perp$
  Aleshores tenim que $M, \alpha \nVdash \perp$ i $M, \beta \nVdash \perp$.

$\square$

Definició 4.6. *Sigui $M = \langle A, \leq, V \rangle$ un model de Kripke, diem que un món $\alpha \in A$ és una fulla sii no hi ha cap $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha$ i $\beta \neq \alpha$.*

Proposició 4.7. *Siguin $M = \langle A, \leq, V \rangle$ un model de Kripke finit i $\alpha \in A$ aleshores $M, \alpha \Vdash \neg\neg\varphi$ sii per a tota fulla $\delta \in A$, $M, \delta \Vdash \varphi$.*

Demostració. Siguin $M = \langle A, \leq, V \rangle$ un model de Kripke finit i $\alpha \in A$ aleshores $M, \alpha \Vdash \neg\neg\varphi$ sii per a tot $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha$ existeix $\gamma \in A$ tal que $\gamma \geq \beta$ i $M, \gamma \Vdash \varphi$, i com que M és un model finit, i pel lema 4.5 això és equivalent a que per tota fulla $\delta \in A$ $M, \delta \Vdash \varphi$, tal i com volíem veure. $\square$

Definició 4.8. *Diem que φ és una* conseqüència local *de Σ si per a tot model de Kripke $M = \langle A, \leq, V \rangle$ i tot món $\alpha \in A$, si $M, \alpha \vdash \Sigma$ aleshores $M, \alpha \vdash \varphi$. Ho notem per $\Sigma \models_l \varphi$.*

Definició 4.9. *Sigui $\varphi \in Prop(X)$ diem que φ és una tautologia intuïcionista quan $\emptyset \models_l \varphi$ i ho notem per $\models_l \varphi$.*

Exemple 4.10.

- Volem veure $\models_l \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
  Siguin $M = \langle A, \leq, V \rangle$ i $\alpha \in A$ arbitraris. Observem que $M, \alpha \Vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ sii per a tot $\beta \in A$, existeix $\gamma \in A$ tal que $\gamma \geq \beta$ tal que $M, \gamma \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$. Sigui $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha$, si existeix $\delta \geq \beta$ tal que $M, \delta \Vdash \varphi$, aleshores prenent $\gamma = \delta$ tenim que $M, \gamma \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$ i per tant ja està. Si no existeix $\delta \geq \beta$ tal que $M, \delta \Vdash \varphi$, aleshores per tot $\delta \geq \beta$, $M, \delta \nVdash \varphi$ i per tant $M, \delta \Vdash \neg\varphi$. En conseqüència, prenent $\gamma = \beta$ tenim que $M, \gamma \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$

- Volem veure $\not\models_l p \vee \neg p$
  Hem de trobar un model $M = \langle A, \leq, V \rangle$ i $\alpha \in A$ tals que $M, \alpha \nVdash p \vee \neg p$, és a dir que $M, \alpha \nVdash p$ i $M, \alpha \nVdash \neg p$ i això últim és equivalent a que existeixi un $\beta \in A$ tal que $\beta \geq \alpha$ i $M, \beta \Vdash p$. Considerem doncs $A = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \leq \alpha$, $\beta \leq \beta$ i $\alpha \leq \beta$; i $V(\alpha) = \emptyset$ i $V(\beta) = \{p\}$. Clarament com que $p \notin V(\alpha)$, $M, \alpha \nVdash p$ i com que $p \in V(\beta)$ tenim que $M, \beta \Vdash p$ i per tant $M, \alpha \nVdash \neg p$ ja que $\beta \geq \alpha$. I per tant $M, \alpha \nVdash p \vee \neg p$, és a dir $M, \alpha \not\models_l p \vee \neg p$ tal i com volíem veure.

Per veure que la semàntica definida a través dels models de Kripke és una semàntica completa respecte del càlcul intuïcionista IPC, necessitem que sigui coherent i adequada.

Primer demostrem la coherència.

Proposició 4.11. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$*;*

$$\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \Rightarrow \Sigma \models_I \varphi$$

Demostració. Només ens cal veure que tots els axiomes del càlcul Hilbert per la lògica intuïcionista són tautologies intuïcionistes i que la regla de Modus Ponens és vàlida en $\models_I$.

- Axioma 2: volem veure que $\models_I \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
  Siguin $M = \langle A, \leq, V\rangle$ i $\alpha \in A$ arbitraris. Observem que $M, \alpha \Vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ sii per a tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \beta \Vdash \psi \to \varphi \wedge \psi$, i això últim passa sii per a tot $\gamma \geq \beta$ si $M, \gamma \Vdash \psi$ aleshores $M, \gamma \Vdash \varphi \wedge \psi$, que és cert sii $M, \gamma \Vdash \varphi$ i $M, \gamma \Vdash \psi$. Ara $M, \gamma \Vdash \psi$ és cert per hipòtesis i $M, \gamma \Vdash \varphi$ és cert per hipòtesis i el lema 4.5, ja que $M, \beta \Vdash \varphi$ i $\gamma \geq \beta$. D'aquí en deduïm que $M, \Gamma \Vdash \varphi \wedge \psi$, i per tant, $M, \beta \Vdash \psi \to \varphi \wedge \psi$. I així doncs $M, \alpha \Vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$. I per l'arbitrarietat de M i α, $\models_I \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$.
  L'axioma 1 el podem demostrar de manera anàloga a l'axioma 2.

- Axioma 5: volem veure que $\models_I \varphi \to \varphi \vee \psi$
  Siguin $M = \langle A, \leq, V\rangle$ i $\alpha \in A$ arbitraris. Observem que $M, \alpha \Vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$ sii per a tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \beta \Vdash \varphi \vee \psi$ és a dir $M, \beta \Vdash \varphi$ o $M, \beta \Vdash \psi$, i com que la primera és certa per hipòtesis tenim que $M, \beta \Vdash \varphi \vee \psi$, per tant es compleix que $M, \beta \Vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$. I per l'arbitrarietat de M i α, $\models_I \varphi \wedge \psi \to \varphi$.
  Els axiomes 3,4 i 6 els podem demostrar de manera anàloga a l'axioma 5.

- Axioma 7: volem veure que $\models_I (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$
  Siguin $M = \langle A, \leq, V\rangle$ i $\alpha \in A$ arbitraris. Observem que $M, \alpha \Vdash (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$ sii per a tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash (\varphi \vee \psi)$ aleshores $M, \beta \Vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$ i això és cert sii per a tot $\gamma \geq \beta$ si $M, \gamma \Vdash \varphi \to \chi$, aleshores $M, \gamma \Vdash (\psi \to \chi) \to \chi$. I això és cert sii per a tot $\delta \geq \gamma$ si $M, \delta \Vdash \psi \to \chi$ aleshores $M, \delta \Vdash \chi$. Observem que $M, \gamma \Vdash \varphi \to \chi$ sii per a tot $\delta \geq \gamma$ si $M, \delta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \delta \Vdash \chi$ i que $M, \delta \Vdash \psi \to \chi$ sii per a tot $\lambda \geq \delta$ si $M, \lambda \Vdash \psi$ aleshores $M, \lambda \Vdash \chi$. Ara hem d'estudiar dos casos.

  1. Si $M, \beta \Vdash \varphi$ pel lema 4.5 tenim que $M, \delta \Vdash \varphi$ i com que hem suposat que $M, \gamma \Vdash \varphi \to \chi$, tenim que $M, \delta \Vdash \chi$, i per tant $M, \gamma \Vdash (\psi \to \chi) \to \chi$, i d'aquí se'n segueix que $M, \beta \Vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$, i per tant, $M, \alpha \Vdash (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$.
  2. Si $M, \beta \Vdash \psi$ pel lema 4.5 tenim que $M, \lambda \Vdash \psi$ i com que hem suposat que $M, \delta \Vdash \psi \to \chi$, aleshores tenim que $M, \lambda \Vdash \chi$, per a tot $\lambda \geq \delta$ i per tant $M, \delta\chi$, i així doncs obtenim que $M, \gamma \Vdash (\psi \to \chi) \to \chi$, i per tant, $M, \beta \Vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi)$, i per últim obtenim que $M, \alpha \Vdash (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$.

  I per l'arbitrarietat de M i α, $\models_I (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$.

- Axioma 8: volem veure que $\models_I (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$
  Siguin $M = \langle A, \leq, V\rangle$ i $\alpha \in A$ arbitraris. Observem que $M, \alpha \Vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$ sii per tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi \to \psi$ aleshores $M, \beta \Vdash ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$. I ara $M, \beta \Vdash \varphi \to \psi$ sii per tot $\gamma \geq \beta$ si $M, \gamma \Vdash \varphi$ aleshores $M, \gamma \Vdash \psi$ i $M, \beta \Vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$ sii per

tot $\gamma \geq \beta$ si $M, \gamma \Vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ aleshores $M, \gamma \Vdash \varphi \to \chi$. I ara sigui $\delta \geq \alpha$ tenim que $M, \gamma \Vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ sii, si $M, \delta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \delta \Vdash \psi \to \chi$ i que $M, \gamma \Vdash \varphi \to \chi$ sii, si $M, \delta \Vdash \varphi$ aleshores $M, \delta \Vdash \chi$, i pel lema 4.5 tenim que $M, \delta \Vdash \varphi$, i ara per hipòtesis obtenim $M, \delta \Vdash \psi \to \chi$, i altre vegada pel lema 4.5, tenim que per $M, \lambda \Vdash \psi$ i a partir de $M, \delta \Vdash \psi \to \chi$ n'obtenim que $M, \lambda \Vdash \chi$, i per tant ara es compleix que si $M, \delta \Vdash \varphi$, aleshores $M, \delta \Vdash \chi$ i per tant que $M, \gamma \Vdash \varphi \to \chi$, i així doncs tenim també que $M, \beta \Vdash ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$, i per últim obtenim que $M, \alpha \Vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$. I per l'arbitrarietat de M i α, $\models_I (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$.

- Axioma 9: volem veure que $\models_I \perp \to \varphi$
Siguin $M = \langle A, \leq, V \rangle$ i $\alpha \in A$ arbitraris. Observem que $M, \alpha \Vdash \perp \to \varphi$ sii per a tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \perp$ aleshores $M, \beta \Vdash \varphi$, però sabem que $M, \alpha \nVdash \varphi$ per a tot $\alpha \in A$, per tant serà sempre cert que $M, \alpha \Vdash \perp \to \varphi$. I per l'arbitrarietat de M i α, $\models_I \perp \to \varphi$.

□

Ara per a provar l'adequació, necessitarem introduir algunes proposicions i lemes.

Definició 4.12. *Sigui* $\Sigma \subseteq Prop(X)$ *diem que* Σ *és* primera *quan per a tota* $\varphi, \psi \in Prop(X)$*, si* $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ *aleshores* $\varphi \in \Sigma$ *o* $\psi \in \Sigma$.

Lema 4.13. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$*. Si* $\Sigma \nvdash_{IPC} \varphi$ *aleshores existeix una teoria intuïcionista primera consistent* Γ *tal que* $\Sigma \subseteq \Gamma$ *i* $\Gamma \nvdash_{IPC} \varphi$.

Demostració. Per demostra-ho, construïm una successió numerable de teories intuïcionistes $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ i posem $\Gamma_0 := Th(\Sigma)$. Suposem que $\Gamma_0 \nvdash_{IPC} \varphi$. Sigui ara un Γ_k donat tal que $\Gamma_k \nvdash_I \varphi$ pot passar que Γ_k sigui una teoria primera, i en tal cas ja acabariem la demostració. O pot passar que Γ_k no sigui una teoria primera, és a dir existeix $\psi_1 \vee \psi_2$ tal que $\Gamma_k \vdash_{IPC} \psi_1 \vee \psi_2$, però $\Gamma_k \nvdash_{IPC} \psi_1$ i $\Gamma_k \nvdash_{IPC} \psi_2$. Observem també que no és possible que ambdós $\Gamma_k, \psi_1 \vdash_{IPC} \varphi$ i $\Gamma_k, \psi_2 \vdash_{IPC} \varphi$ perquè sinó, per la prova per casos, tindríem que $\Gamma_k \vdash_{IPC} \varphi$ fet que es contradiu amb la hipòtesis. Així doncs,

$$\Gamma_{k+1} = \begin{cases} Th(\Gamma_k \cup \{\psi_1\}) & si \quad \Gamma_k, \psi_1 \nvdash_I \varphi, \\ \\ Th(\Gamma_k \cup \{\psi_2\}) & \quad altrament. \end{cases}$$

Definim ara Γ com a $\Gamma := \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$. Ara cal demostrar que efectivament la Γ definida així és una teoria primera i que $\Gamma \nvdash_{IPC} \varphi$.
Veiem primer que $\Gamma \nvdash_{IPC} \varphi$, per a fer-ho demostrarem que $\Gamma_i \nvdash \varphi$ per a tot $i \geq 0$. Per a $i = 0$, és clar, ja que tenim que $\Gamma_0 = \Sigma$ i $\Sigma \nvdash_{IPC} \varphi$ per hipòtesis.
Fem ara el pas inductiu, suposem que per a $i > 0$ es compleix que $\Gamma_i \nvdash_I \varphi$ i veiem que es compleix també per a $i + 1$. I per la construcció de Γ_{i+1} és clar que $\Gamma_{i+1} \nvdash_{IPC} \varphi$. Així doncs, tenim que $\Gamma \nvdash_{IPC} \varphi$.
Anem a veure que Γ és una teoria primera. Sigui $\psi_1 \vee \psi_2 \in Prop(X)$ i sigui k el nombre més petit tal que $\Gamma_k \vdash \psi_1 \vee \psi_2$. És clar que $\psi_1 \vee \psi_2$ no s'ha tractat en cap estadi abans que k, i $\Gamma_h \vdash \psi_1 \vee \psi_2$ per a tot $h \geq k$. I $\psi_1 \vee \psi_2$ haurà de ser tractat en algun estadi $h \geq k$, per tant $\psi_1 \in \Gamma_{h+1}$ o $\psi_2 \in \Gamma_{h+1}$ i, per tant, $\psi_1 \in \Gamma$ o $\psi_2 \in \Gamma$. això ens prova que és primera. I també que és consistent, ja que $\Gamma \nvdash_{IPC} \varphi$.

Ara si $\Gamma \vdash_{IPC} \psi$, aleshores $\Gamma_k \vdash_{IPC} \psi$ per algun k, i com que Γ_k és una teoria, $\psi \in \Gamma_k$, i per tant $\psi \in \Gamma$. Per altra banda si $\psi \in \Gamma$ és clar per axioma i monotonia que $\Gamma \vdash_{IPC} \psi$, per tant és Γ és també primera. I amb això queda vist que és una teoria primera consistent, tal i com volíem veure. $\square$

Definició 4.14. *Definim el* model canònic intuïcionista *com* $M_c = \langle A_c, \leq_c, V_c \rangle$ *on* $A_c = \{\Gamma \subseteq Prop(X) : \Gamma$ *és una teoria primera consistent*$\}$, $\leq_c = \subseteq$ *i* $V_c(\Gamma) = \Gamma \cap X$.

Lema 4.15. *Sigui* M_c *el model canònic,* $\Gamma \in A_c$ *i* $\varphi \in Prop(X)$ *aleshores* $M_c, \Gamma \Vdash \varphi$ *sii* $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi$.

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre la construcció de φ.

- Si φ és una variable. $M_c, \Gamma \Vdash \varphi$ sii $\varphi \in V_c(\Gamma) = \Gamma \cap X$, per tant $\varphi \in \Gamma$ i com que és una teoria $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi$.
- Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$. $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ sii $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1$ i $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_2$, i com que és una teoria $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_1$ i $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_2$ i ara per la propietat de la conjunció per la dreta, això és equivalent a $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_1 \wedge \varphi_2$.
- Si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$. $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ sii $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1$ o $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_2$, i per hipòtesi d'inducció és equivalent a $\varphi_1 \in \Gamma$ o $\varphi_1 \in \Gamma$, i com que és una teoria, és equivalent a $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_1$ o $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_2$, i per la propietat de la disjunció per la dreta, això implica que $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_1 \vee \varphi_2$. Això prova només la implicació de dreta a esquerra. Per la implicació recíproca suposem que $\Gamma \vdash_{IPC} \varphi_1 \vee \varphi_2$, aleshores com que Γ és una teoria primera tenim que $\varphi_1 \in \Gamma$ o $\varphi_1 \in \Gamma$, i això és equivalent a $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1$ o $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_2$ que és equivalent a $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$.
- Si $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. $M_c, \Gamma \Vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ sii per a tot Ω tal que $\Gamma \subseteq \Omega$ si $M_c, \Omega \vdash \varphi_1$ aleshores $M_c, \Omega \Vdash \varphi_2$ i per hipòtesis d'inducció és equivalent a que si $\varphi_1 \in \Omega$ aleshores $\varphi_2 \in \Omega$ i com que és una teoria, és equivalent a que si $\Omega \vdash_{IPC} \varphi_1$ aleshores $\Omega \vdash_{IPC} \varphi_2$ i això és que $\Omega \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$.
- Si $\varphi = \perp$. $M_c, \Gamma \Vdash \neg\psi$ sii $M_c, \Gamma \Vdash \psi \rightarrow \perp$ sii $\Gamma \vdash_{IPC} \psi \rightarrow \perp$ sii $\Gamma \vdash_{IPC} \neg\psi$.

$\square$

Ara podem demostrar el teorema de completesa per la semàntica de Kripke i el càlcul IPC.

Teorema 4.16 (Teorema de Completesa per Kripke)**.** *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$*;*

$$\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_l \varphi$$

Demostració. La implicació d'esquerra a dreta és la proposició 4.11 que ens dóna la coherència de la semàntica de Kripke.
Per a la implicació de dreta a esquerra ho farem pel contrarecíproc i usant els dos lemes anteriors.
Si $\Sigma \nvdash_I \varphi$ pel lema 4.13 existeix una teoria intuïcionista primera consistent Γ tal que $\Sigma \subseteq \Gamma$ i $\Gamma \nvdash_I \varphi$. Aleshores pel lema 4.15 $M_c, \Gamma \nvdash \varphi$ i $M_C, \Gamma \vdash \psi$ per a tot $\psi \in \Sigma$. Per tant $\Sigma \not\models_l \varphi$, i per tant pel contrarecíproc tenim que si $\Sigma \models_l \varphi$, aleshores $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$ tal i com volíem demostrar. $\square$

Una altra propietat que demostrem és la propietat forta dels models finits.

Teorema 4.17. *La lògica proposicional intuïcionsita satisfà la propietat forta dels models finits. És a dir:*
Siguin $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi\} \subseteq Prop(X)$*, si* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \nvdash_{IPC} \varphi$ *aleshores existeix un model de Kripke* $M = \langle A, \leq, V\rangle$ *amb* A *finit i existeix* $\alpha \in A$ *tal que* $M, \alpha \Vdash \varphi_i$ *per a tot* $i = 1, \ldots, n$ *i* $M, \alpha \nVdash \varphi$*.*

Demostració. Suposem que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \nvdash_{IPC} \varphi$, llavors pel teorema de completesa és equivalent a $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \not\models_I \varphi$,és a dir, que existeix un model $M = \langle A, \leq, V\rangle$ tal que $M, \alpha \Vdash \varphi_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ i $M, \alpha \nVdash \varphi$. Observem però que aquest model no té perquè ser finit. Anem doncs a trobar-ne un que sí que ho sigui.
Sigui ara $\Phi := SubFm(\varphi_1) \cup \ldots \cup SubFm(\varphi_n) \cup SubFm(\varphi)$ on $SubFm(\psi)$ és el conjunt de totes les subfòrmules de ψ, és a dir, totes les proposicions que apareixen en la construcció de ψ. Notem doncs que $\Phi \subseteq Prop(X)$ i que Φ és finit.
Definim ara una relació $\sim_\Phi$ en A, tal que per $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \sim_\Phi \beta$ sii per a tot $\varphi \in \Phi$ tenim que $M, \alpha \vdash \varphi \Leftrightarrow M, \beta \Vdash \varphi$. És fàcil veure que aquesta relació és d'equivalència.
A partir d'aquesta relació definim un nou model $M/\sim_\Phi = \langle A/\sim_\Phi, R, \overline{V}\langle$, on $A/\sim_\Phi$ és el conjunt quocient de les classes d'equivalència dels mons de A respecte la relació $\sim_\Phi$. La classe d'equivalència d'un món $\alpha \in A$ és $[\alpha] = \{\beta \in A : \beta \sim_\Phi \alpha\}$. Definim la relació com una relació tal que $[\alpha]R[\beta]$ sii per a tot $\psi \in \Phi$ si $M/\sim_\Phi, \alpha \Vdash \psi$ aleshores $M/\sim_\Phi, \beta \Vdash \psi$. És fàcil demostrar que R és reflexiva, transitiva i antisimètrica i per tant és un ordre. Per últim definim $\overline{V}([\alpha]) = V(\alpha) \cap \Phi$.
Observem que $|A/\sim_\Phi| \leq \mathcal{P}(\Phi)$, i com que $\mathcal{P}(\Phi)$ és finit, perquè Φ és finit, aleshores tenim que $M/\sim_\Phi$ és un model finit.
I ara es demostra per inducció sobre la construcció de ψ que per a tot $\psi \in \Phi$

$$M, \alpha \Vdash \psi \Leftrightarrow M/\sim_\Phi, [\alpha] \Vdash \psi$$

Per tant, com que estàvem suposant que $M, \alpha \Vdash \varphi_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ i $M, \alpha \nVdash \varphi$ aleshores $M/\sim_\Phi, [\alpha] \Vdash \varphi_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ i $M/\sim_\Phi, [\alpha] \nVdash \varphi$ i com que $M/\sim_\Phi$ és un model finit, hem acabat la demostració. $\square$

5 Semàntica algebraica. Àlgebres de Heyting

Observem que la semàntica basada en els models de Kripke, que defineix la noció de satisfabilitat d'un raonament a partir de la construcció d'uns models, difereix molt de la semàntica donada per la lògica clàssica, que defineix la noció de satisfabilitat a partit de l'assignació d'uns valors de veritat a les proposicions. Tindria sentit pensar que podem trobar una semàntica més semblant a la definida per les taules de veritat en la lògica clàssica. Per la lògica intuïcionista, podem provar de fer el mateix, però en aquest cas no tenim una taula de veritat, sinó que ho definim a partir de les àlgebres de Heyting.

Comencem introduint algunes nocions bàsiques. Un conjunt parcialment ordenat $\langle A, \leq \rangle$ és un *reticle* si cada subconjunt no buit de dos elements de A té ínfim i suprem. Siguin $\langle A, \leq \rangle$ un reticle i $a, b \in A$ denotarem $a \vee b := sup\{a, b\}$ i $a \wedge b := inf\{a, b\}$. Diem que un reticle està acotat, quan té mínim i màxim que notem per $\perp$ i $\top$ respectivament. Veiem ara, que els reticles poden ser definits també axiomàticament.

Proposició 5.1. *Una estructura* $\langle A, \vee, \wedge, \perp, \top \rangle$ *és un* reticle *acotat si i només si per a cada* $a, b, c \in A$ *es compleix que:*

1. $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$
2. $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
4. $a \vee \perp = a$, $a \wedge \top = a$
5. $a \vee (b \wedge a) = a$, $a \wedge (b \vee a) = a$

Demostració. Primer provem que un reticle compleix totes les condicions, i ho fem provant les condicions a partir de les definicions de reticle, $\vee, \wedge, \perp$ i $\top$.

1. $a \vee a = sup\{a, a\} = a$, $a \wedge a = inf\{a, a\} = a$.
2. $a \vee b = sup\{a, b\} = sup\{b, a\} = b \vee a$, $a \wedge b = inf\{a, b\} = inf\{b, a\} = b \wedge a$.
3. $a \vee (b \vee c) = sup\{a, sup\{b, c\}\} = sup\{sup\{a, b\}, c\} = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = inf\{a, inf\{b, c\}\} = inf\{inf\{a, b\}, c\} = (a \wedge b) \wedge c$.
4. $a \vee \perp = sup\{a, \perp\} = a$ ja que $\perp$ és el mínim del reticle. $a \wedge \top = inf\{a, \top\} = a$ ja que $\top$ és el màxim del reticle.
5. $a \vee (b \wedge a) = sup\{a, inf\{b, a\}\} = a$, $a \wedge (b \vee a) = inf\{a, sup\{b, a\}\} = a$.

Per a la implicació contrària volem veure que tota estructura $\langle A, \vee, \wedge, \perp, \top \rangle$ que compleix les condicions és un reticle acotat. Per a fer-ho definim una relació $\leq$ de la següent manera, siguin $a, b \in A$ aleshores:

$$a \leq b \text{ sii } a \vee b = b$$

Notem que $a \vee b = b$ és equivalent a $a \wedge b = a$, per tant també es compleix que $a \leq b$ sii $a \wedge b = a$.
Ara anem a veure que aquesta relació és reflexiva, transitiva i simètrica:

- Reflexiva: Sigui $a \in A$ volem veure que $a \leq a$
  $a \leq a$ sii $a \vee a = a$ i això és cert per la condició 1.

- Transitiva: Siguin $a, b, c \in A$ volem veure que si $a \leq b$ i $b \leq c$ aleshores $a \leq c$.
  Tenim que $a \leq b$ sii $a \vee b = b$ i que $b \leq c$ sii $b \vee c = c$. I donat això volem veure que $a \leq c$ que passa si $a \vee c = c$ i això, com que $b \leq c$ és igual a que $a \vee (b \vee c)$ i per la condició 3 és igual a $(a \vee b) \vee c$ i com que $a \leq b$ és igual a $b \vee c = c$ perquè $b \leq c$. I per tant obtenim que $a \vee c = c$, és a dir, $a \leq c$, com volíem veure.

- Antisimètrica: Siguin $a, b \in A$, volem veure que si $a \leq b$ i $b \leq a$ aleshores $b = a$
  Ara tenim que $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ i que $b \leq a \Leftrightarrow b \vee a = a$ i per la condició 2, tenim que $a \vee b = b \vee a$ i per tant $a = a \vee b = b \vee a = b$ i així doncs, obtenim que $a = b$ tal i com volíem veure.

Ara per a que sigui un reticle ens falta veure que cada subconjunt no buit de dos elements de A té ínfim i suprem.

- Demostrem que $a \vee b$ és el suprem, primer veiem que és cota superior, és a dir que $a \leq a \vee b$ i $b \leq a \vee b$. Ara $a \leq a \vee b$ sii $a \vee (a \vee b) = a \vee b$ i ara $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$ on hem usat la condició 1 i 3 en la primera i segona igualtat respectivament. Per altra banda $b \leq a \vee b$ sii $b \vee (a \vee b) = a \vee b$ i $b \vee (a \vee b) = b \vee (b \vee a) = (b \vee b) \vee a = b \vee a = a \vee b$. On hem usat la condició 2,3,1 i 2 per a cada una de les igualtats respectivament.
  Ara veiem que és la més petita de les cotes superior, és a dir que si hi ha un c tal que $a \leq c$ i $b \leq c$, aleshores $a \vee b \leq c$. Ara $a \vee b \leq c$ sii $(a \vee b) \vee c = c$ i $(a \vee b) \vee c = (a \vee b) \vee (c \vee c) = (a \vee c) \vee (b \vee c) = c \vee c = c$. On hem usat les condicions 1 i 3, i la suposició que $a \leq c$ i $b \leq c$. Per tant hem vist que $a \vee b = sup\{a, b\}$.

- Per a demostrar que $a \wedge b = inf\{a, b\}$ es pot fer procedint de manera anàloga i usant la definició equivalent de $a \leq b$ sii $a \wedge b = a$.

Amb això hem vist que cada subconjunt no buit de dos elements de A té ínfim i suprem. I per tant és un reticle.
Per últim és segueix de la condició 4 que és acotat, ja que $a \vee \bot = a$ i per tant $\bot \leq a$ per a tot $a \in A$ i també per la condició 4 $a \wedge \top = a$ i per tant $a \leq \top$ per a tot $a \in A$. I per tant és un reticle acotat, com volíem demostrar. $\square$

Definició 5.2. *Diem que un reticle* $\langle A, \vee, \wedge, \bot, \top \rangle$ *és* distributiu *si compleix les lleis de la distributivitat, és a dir, si per a tot* $a, b, c \in A$ *es compleix que*

- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Ara podem definir el concepte d'àlgebra de Heyting.

Definició 5.3. *Diem que un reticle distributiu* $\langle A, \vee, \wedge, \bot, \top \rangle$ *és una* àlgebra de Heyting *si per a tot* $a, b \in A$ *existeix un element* $a \to b$ *tal que per a tot* $c \in A$ *es té:*

$$c \leq a \to b \text{ sii } a \wedge c \leq b$$

$A \to$ l'anomenem implicació de Heyting, o simplement implicació. Per a tot element de l'àlgebra de Heyting podem definir $\neg a := a \to \bot$.

Observació 5.4. Notem que per la definició d'àlgebra de Heyting, n'hi ha prou que el reticle sigui acotat, d'aquí se'n seguirà que és distributiu. En podem trobar una demostració a [10].

També podem definir el concepte d'àlgebra de Heyting de manera axiomàtica.

Proposició 5.5. *Una àlgebra $\mathcal{H} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \neg, 0, 1\rangle$ on 0 i 1 representen l'element mínim i màxim de A respectivament, és una àlgebra de Heyting sii $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ és un reticle acotat i hi ha una operació $\rightarrow$ en A tal que per a tot $a, b, c \in A$:*

1. $a \rightarrow a = 1$
2. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$
3. $b \wedge (a \rightarrow b) = b$
4. $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$
5. $\neg a = a \rightarrow 0$

Demostració. Suposem que $\mathcal{H}$ satisfà les condicions de la 1 a la 5. Sigui $c \leq a \rightarrow b$ llavors per la definició de $\wedge$ tenim que $c \wedge a \leq (a \rightarrow b) \wedge a$ i per la condició 2 $c \wedge a \leq a \wedge b$, i com que per la definició de $\wedge$ es compleix que $a \wedge b \leq b$, aleshores tenim que $c \wedge a \leq b$.
Per a l'altra implicació (en la definició d'àlgebra de Heyting) provem primer que per a tot $a \in A$ l'aplicació, $(a \rightarrow \cdot)$ és monòtona, és a dir, que si $b_1 \leq b_2$ llavors $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2$, i això és cert perquè, com que $b_1 \leq b_2$ tenim que $b_1 \wedge b_2 = b_1$.
Aleshores per la condició 4 obtenim que $(a \rightarrow b_1) \wedge (a \rightarrow b_2) = a \rightarrow (b_1 \wedge b_2) = a \rightarrow b_1$. I per tant $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2$. Ara sigui $c \wedge a \leq b$, per la condició 3, $c = c \wedge (a \rightarrow c) \leq 1 \wedge (a \rightarrow c)$, ja que 1 és el màxim. Llavors per la condició 1 i la condició 4, $1 \wedge (a \rightarrow c) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow c) = a \rightarrow (a \wedge c)$. D'aquí n'obtenim que $c \leq a \rightarrow (a \wedge c)$.
I per últim com que $(a \rightarrow \cdot)$ és monòtona i com que per hipòtesis tenim que $a \wedge c \leq b$, obtenim que $a \rightarrow (a \wedge c) \leq a \rightarrow b$ i per tant $c \leq a \rightarrow b$.
Per a veure l'altra implicació provem que les condicions de la 1 a la 5 es compleixen a partir de la definició de $\rightarrow$ a la definició 5.3 ho deixem com a exercici. □

Proposició 5.6. *Sigui $\mathcal{H} = \langle A, \vee, \wedge, 0, 1, \neg\rangle$ una àlgebra de Heyting i $a, b, c \in A$ aleshores es compleix que:*

1. $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$
2. $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$
3. $a \leq \neg\neg a$
4. $a \leq b \Rightarrow \neg a \leq \neg b$
5. $\neg\neg\neg a = \neg a$ *i* $\neg\neg\neg\neg a = \neg\neg a$
6. $\neg\neg(a \rightarrow b) = \neg\neg a \rightarrow \neg\neg b$
7. $\neg\neg(a \wedge b) = \neg\neg a \wedge \neg\neg b$
8. $\neg\neg(a \vee b) = \neg(\neg a \wedge \neg b)$

Demostració. Anem a veure que són certes, en demostrem algunes i la resta les deixem com a exercici:

1. Volem veure que $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$
   Com que 1 és l'element màxim de l'àlgebra de Heyting tenim que $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow 1 \leq a \rightarrow b$, i per la definició 5.3 això és equivalent a $1 \wedge a \leq b$ i com que $1 \geq a$ per a tot $a \in A$ i per tant $1 \wedge a = a$ i $a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow 1 \leq a \rightarrow b$.

2. Volem veure que $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$
Per a fer-ho veiem que $a \to (b \to c) \leq b \to (a \to c)$ i que $b \to (a \to c) \leq a \to (b \to c)$, llavors com que $\leq$ és un ordre seràn iguals. Per la primera tenim que $a \to (b \to c) \leq b \to (a \to c)$ sii $(((a \to (b \to c)) \wedge b) \wedge a) \leq c)$ si apliquem dues vegades la definició 5.3. Ara per la propietat 3 de la proposició 5 i la propietat 2 de la 5.5 és equivalent a $(b \wedge (a \to c)) \wedge a \leq c$ i altra vegada, per les mateixes propietats que en el pas anterior, això és equivalent a $(b \wedge a) \wedge c \leq c$ i això és cert per la definició de $\wedge$. Procedim de manera anàloga per a veure que $b \to (a \to c) \leq a \to (b \to c)$.

3. Volem veure que $a \leq \neg\neg a$
Per la propietat 5 de la proposició 5.5 $a \leq \neg\neg a = \neg a \to 0$ i per la definició 5.3 és equivalent a $a \wedge \neg a \leq 0$ que és $a \wedge a \to 0 \leq 0$ i per la propietat 2 de la proposició 5.5 és equivalent a $a \wedge 0 \leq 0$ i això és sempre cert.

$\square$

Ara per a definir la semàntica necessitarem la noció d'interpretació en una àlgebra de Heyting. Sigui $\mathcal{H} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \neg, 0, 1 \rangle$ una àlgebra de Heyting i $h : Prop(X) \longrightarrow H$ una aplicació que preserva les connectives i el 0 i l'1. És a dir, siguin $\varphi, \psi \in Prop(X)$, es compleix que:

- $h(0) = 0$
- $h(1) = 1$
- $h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) \wedge h(\psi)$
- $h(\varphi \vee \psi) = h(\varphi) \vee h(\psi)$
- $h(\varphi \to \psi) = h(\varphi) \to h(\psi)$

Aleshores diem que h és una interpretació en H. Ara podem definir la noció de conseqüència lògica a partir de les àlgebres de Heyting.

Definició 5.7. *Siguin $\Sigma, \varphi \in Prop(X)$, diem que φ és una conseqüència lògica de Σ, i ho notem per $\Sigma \models_H \varphi$, si i només si per a tota àlgebra de Heyting $\mathcal{H} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \neg, 0, 1 \rangle$ i per a tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ si $h(\Sigma) = \{h(\psi) | \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, aleshores $h(\Sigma) = 1$.*

Anem a veure un exemple de demostració a partir de les àlgebres de Heyting.

Exemple 5.8. Volem veure que $\varphi \wedge \psi \models_H \varphi$. Siguin $\mathcal{H}$ una àlgebra de Heyting i $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$, llavors $h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) \wedge h(\psi) = 1$ sii $inf(h(\varphi), h(\psi)) = 1$ i es compleix que $h(\varphi) \geq inf(h(\varphi), h(\psi)) = 1$ i com que 1 és l'element màxim de l'àlgebra de Heyting, tenim que $h(\varphi) = 1$ i així doncs es compleix que $\varphi \wedge \psi \models_H \varphi$ tal i com volíem veure.

Ara podem demostrar el teorema de completesa a partir de les àlgebres de Heyting i el càlcul de Hilbert intuïcionista.

Teorema 5.9. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, aleshores*

$$\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_H \varphi$$

Demostrarem la coherència i l'adequació per separat. Comencem per la coherència.

Teorema 5.10. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$*, aleshores*

$$\Sigma \vdash_{IPC} \varphi \Rightarrow \Sigma \models_H \varphi$$

Demostració. Volem veure que tots els axiomes del càlcul Hilbert són vàlids en la semàntica definida a partir de les àlgebres de Heyting.

- Axioma 1. Volem veure que $\models_H \varphi \to (\psi \to \varphi)$, és a dir per tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que per $a, b \in A$; $h(\varphi) = a$ i $h(\psi) = b$ sigui cert que $a \to (b \to a) = 1$.
  Ara $a \to (b \to a) = 1 \Leftrightarrow a \leq b \to a \Leftrightarrow a \wedge b \leq a$ i això és cert.

- Axioma 2. Volem veure que $\models_H \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$, és a dir per tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que per $a, b \in A$; $h(\varphi) = a$ i $h(\psi) = b$ sigui cert que $a \to (b \to a \wedge b) = 1$.
  Ara $a \to (b \to a \wedge b) = 1 \Leftrightarrow a \leq (b \to a \wedge b) \Leftrightarrow a \wedge b \leq a \wedge b)$ i això és cert.

- Axioma 3. Volem veure que $\models_H \varphi \wedge \psi \to \varphi$, és a dir per tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que per $a, b \in A$; $h(\varphi) = a$ i $h(\psi) = b$ sigui cert que $(a \wedge b) \to a = 1$.
  $(a \wedge b) \to a = 1 \Leftrightarrow a \wedge b \leq a$ i això és cert.
  L'axioma 4 el demostrem de manera anàloga. I el 5 i el 6 també, però a partir de la definició de $\vee$.

- Axioma 7. Volem veure que $\models_H (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to \chi))$és a dir per tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que per $a, b, c \in A$; $h(\varphi) = a$ i $h(\psi) = b$ i $h(\chi) = c$ sigui cert que $(a \vee b) \to ((a \to c) \to ((b \to c) \to c)) = 1$

$$\begin{gathered} \text{Ara } (a \vee b) \to ((a \to c) \to ((b \to c) \to c)) = 1 \Leftrightarrow \\ a \vee b \leq ((a \to c) \to ((b \to c) \to c)) \Leftrightarrow \\ (a \vee b) \wedge (a \to c) \leq ((b \to c) \to c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \to c) \wedge (b \to c) \leq c \Leftrightarrow \\ ((a \wedge (a \to c)) \vee (b \wedge (a \to c))) \wedge (a \to c) \leq c \Leftrightarrow \\ ((a \wedge c) \wedge (b \to c)) \vee ((b \wedge (b \to c) \wedge (a \to c)) \leq c \Leftrightarrow \\ ((a \wedge c) \wedge (b \to c)) \vee ((b \wedge c) \wedge (a \to c)) \leq c \Leftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq c \text{ i això és cert.} \end{gathered}$$

  L'axioma 8 el podem demostrar de manera anàloga.

- Axioma 9. Volem veure que $\models_H \perp \to \varphi$, és a dir per tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que per $\perp = 0, a \in A$; $h(0) = 0$ i $h(\varphi) = a$ sigui cert que $0 \to a = 1$.
  Ara $0 \to a = 1 \Leftrightarrow 0 \leq a$ i això és cert.

- Regla de Modus Ponens. Volem veure que $\varphi, \varphi \to \psi \models_H \psi$, és a dir per tota interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que per $a, b \in A$; $h(\varphi) = a$ i $h(\psi) = b$ sigui cert que si $h(\varphi) = a = 1$ i $h(\varphi \to \psi) = a \to b = 1$ sigui cert que $h(\psi) = b = 1$.
  Ara si $a = 1$ i $a \to b = 1$, com que $x \to y = 1 \Leftrightarrow x \leq y$, cal que $a \leq b$ i com que $a = 1$ es segueix que $b = 1$ forçosament i per tant es compleix la regla de Modus Ponens.

$\square$

Anem a veure ara l'adequació.

Teorema 5.11. *Siguin* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$*, aleshores*

$$\Sigma \models_H \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash_{IPC} \varphi$$

Demostració. Ho demostrarem pel contrarecíproc, és a dir $\Sigma \nvdash_{IPC} \varphi \Rightarrow \Sigma \not\models_H \varphi$, a partir de la construcció d'una àlgebra de Lindenbaum.
Per a fer-ho construirem una àlgebra de Heyting $\mathcal{L}$ i una $\mathcal{L}$-interpretació h tal que $h(\Sigma) \subseteq 1$ i $h(\varphi) \neq 1$.
Definim primer una relació $\sim_\Sigma$ en el conjunt de les fórmules $Prop(X)$ com $\varphi \sim_\Sigma \psi$ si i només si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi$, es pot comprovar que aquesta és una relació d'equivalència, és a dir reflexiva, transitiva i simètrica.

- Reflexiva. Sigui $\varphi \in Prop(X)$ volem veure que $\varphi \sim_\Sigma \varphi$. I $\varphi \sim_\Sigma \varphi$ sii $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi$ i això és cert per la propietat d'axioma.

- Transitiva. Siguin $\varphi, \psi, \chi \in \Sigma$ volem veure que si $\varphi \sim_\Sigma \psi$ i $\psi \sim_\Sigma \chi$ aleshores $\varphi \sim_\Sigma \chi$. Per tant, si suposem que $\varphi \sim_\Sigma \psi$ tenim que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$, $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi$, de suposar que $\psi \sim_\Sigma \chi$ tenim que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \chi$, $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash_{IPC} \psi$. Ara si prenem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \chi$ per la propietat del tall obtenim que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \chi$, i si prenem $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash_{IPC} \psi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi$ també per la propietat del tall obtenim que $\Sigma \cup \{\chi\} \vdash_{IPC} \varphi$. I per tant, tenim que $\varphi \sim_\Sigma \chi$, tal i com volíem veure.

- Simètrica. Siguin $\varphi, \psi \in \Sigma$ volem veure que si $\varphi \sim_\Sigma \psi$ aleshores $\psi \sim_\Sigma \varphi$. Aleshores si $\varphi \sim_\Sigma \psi$ es compleix que $\Sigma \cup \varphi \vdash_{IPC} \psi$ i que $\Sigma \cup \psi \vdash_{IPC} \varphi$ i per tant és cert també que $\psi \sim_\Sigma \varphi$.

Podem veure també que és una congruència, és a dir que $\sim_\Sigma$ compleix la propietat de la substitució respecte a $\wedge, \vee, \rightarrow$ i $\perp$.

- Veiem que si $\varphi_1 \sim_\Sigma \psi_1$ i $\varphi_2 \sim_\Sigma \psi_2$ aleshores $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim_\Sigma \psi_1 \wedge \psi_2$. Suposem que es compleix que $\Sigma \cup \{\varphi_1\} \vdash_{IPC} \psi_1$ i $\Sigma \cup \{\psi_1\} \vdash_{IPC} \varphi_1$; i $\Sigma \cup \{\varphi_2\} \vdash_{IPC} \psi_2$ i $\Sigma \cup \{\psi_2\} \vdash_{IPC} \varphi_2$. I ara per monotonia tenim que $\Sigma \cup \{\varphi_1\} \cup \{\varphi_2\} \vdash_{IPC} \psi_1 \wedge \psi_2 \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \vdash_{IPC} \psi_1 \wedge \psi_2$ per la conjució per l'esquerra i aplicant el teorema de la deducció obtenim $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2$. Podem procedir de forma anàloga per veure que $\Sigma \cup \{\psi_1 \wedge \psi_2\} \vdash_{IPC} \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Aleshores $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \sim_\Sigma \psi_1 \wedge \psi_2$ com volíem veure. Ho demostrem de forma anàloga per la $\vee$.

- Veiem que si $\varphi_1 \sim_\Sigma \psi_1$ i $\varphi_2 \sim_\Sigma \psi_2$, aleshores $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \sim_\Sigma \psi_1 \rightarrow \psi_2$. Per la hipòtesis tenim que $\Sigma \cup \{\varphi_1\} \vdash_{IPC} \psi_1$ i $\Sigma \cup \{\psi_1\} \vdash_{IPC} \varphi_1$; i $\Sigma \cup \{\varphi_2\} \vdash_{IPC} \psi_2$ i $\Sigma \cup \{\psi_2\} \vdash_{IPC} \varphi_2$. I volem veure que $\Sigma \cup \{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2\} \vdash_{IPC} \psi_1 \rightarrow \psi_2$ i $\Sigma \cup \{\psi_1 \rightarrow \psi_2\} \vdash_{IPC} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Ara pel teorema de deducció la primera és equivalent a $\Sigma \cup \{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \psi_1\} \vdash_{IPC} \psi_2$ i per hipòtesis $\Sigma \cup \{\varphi_1\} \vdash_{IPC} \psi_1$ i $\Sigma \cup \{\psi_1\} \vdash_{IPC} \varphi_1$ i per tant obtenim que $\Sigma \cup \{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2, \varphi_1\} \vdash_{IPC} \psi_2$ i per Modus Ponens això és $\Sigma \cup \{\varphi_2\} \vdash_{IPC} \psi_2$ i això és cert per Hipòtesis. Es pot demostrar de forma anàloga que $\Sigma \cup \{\psi_1 \rightarrow \psi_2\} \vdash_{IPC} \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$. Aleshores $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \sim_\Sigma \psi_1 \rightarrow \psi_2$, com volíem veure.

- Observem que per $\perp$ és trivial que es compleix.

A partir d'aquí podem construir la següent àlgebra a partir de les classes d'equivalència de la relació $\sim_\Sigma$. $\mathcal{L} = \langle Prop(X)/\sim_\Sigma, \wedge, \vee, \to, \neg, 0, 1\rangle$, aquesta és l'anomenada àlgebra de Lindenbaum. Anem a comprovar que efectivament és una àlgebra de Heyting. Per a fer-ho comprovem en primer lloc que compleix les condicions de reticle. Definim la relació $\leq$ en $Prop(X)/\sim_\Sigma$ tal que per a tot $\varphi, \psi \in Prop(X)$ $[\varphi] \leq [\psi]$ sii $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ i demostrem que és un ordre, és a dir, que és reflexiva, transitiva i antisimètrica.

- Reflexiva. Siguin $\varphi, \psi \in \Sigma$ volem veure que $[\varphi] \leq [\varphi]$. I $[\varphi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi$ i això és cert per la propietat d'Axioma.
- Transitiva. Siguin $\varphi, \psi, \chi \in \Sigma$ volem veure que si $[\varphi] \leq [\psi]$ i $[\psi] \leq [\chi]$ aleshores $[\varphi] \leq [\chi]$. Per hipòtesis tenim que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ i que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \chi$, i per la propietat del tall $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \chi$ i per tant $[\varphi] \leq [\chi]$, com volíem veure.
- Antisimètrica. Siguin $\varphi, \psi \in \Sigma$ volem veure que si $[\varphi] \leq [\psi]$ i $[\psi] \leq [\varphi]$ aleshores $[\varphi] = [\psi]$. Ara tenim que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \psi$ i $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{IPC} \varphi$ i per tant són equivalents, i per tant $[\varphi] = [\psi]$.

Ara hem de veure que aquesta àlgebra té ínfim i suprem per a tot subconjunt diferent del buit de dos elements.
Per a fer-ho demostrem que $[\varphi] \vee [\psi] = sup\{[\varphi], [\psi]\}$ i hem de veure que és la més petita de les cotes superiors.

- Primer veiem que és cota superior, és a dir que $[\varphi] \leq [\varphi] \vee [\psi]$ i que $[\psi] \leq [\varphi] \vee [\psi]$. Ara $[\varphi] \leq [\varphi] \vee [\psi]$ sii $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{IPC} \varphi \vee \psi$ que és cert per la propietat de la disjunció per la dreta. Demostrem que $[\psi] \leq [\varphi] \vee [\psi]$ de manera anàloga.
  Veiem que no hi ha cap cota superior que sigui més petita, és a dir que si existeix un element χ tal que $[\varphi] \leq [\chi]$ i $[\psi] \leq [\chi]$, aleshores $[\varphi] \vee [\psi] \leq [\chi]$. Per hipòtesis tenim que $\Sigma \cup \varphi \vdash_{IPC} \chi$ i que $\Sigma \cup \psi \vdash_{IPC} \chi$ i ara per la propietat de la disjunció per l'esquerra, això és que $\Sigma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash_{IPC} \chi$ i per tant $[\varphi] \vee [\psi] \leq [\chi]$. Així doncs queda demostrat que és el suprem.
- Ara per demostrar que $[\varphi] \wedge [\psi] = inf\{[\varphi], [\psi]\}$ es pot veure que és la més gran de les cotes inferiors anàlogament a com hem demostrat el cas del suprem. Però en aquest cas s'usen les propietats de la conjunció per la dreta i per l'esquerra.

Ara ens cal veure que es compleix la propietat distributiva, és a dir, hem de veure que per a tot $\varphi, \psi, \chi \in Prop(X)$ es compleix que $[\varphi] \wedge [\psi \vee \chi] = [\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi]$.

- Veiem primer que $[\varphi] \wedge [\psi \vee \chi] \leq [\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi]$, això és equivalent a $\Sigma \cup \{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ i això, per la propietat de la conjunció per l'esquerra, és $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$. Llavors, per la disjunció per la dreta, n'hi ha prou en veure que $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \psi)$ o que $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \chi)$.
  Observem que demostrar el primer és equivalent a demostrar $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} \varphi$ i $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} \psi$, per la propietat de la conjunció per la dreta.
  Ara $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} \varphi$ és cert per l'axioma.
  Estudiem que passa amb $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} \psi$:
  Si és cert ja ho hem demostrat, perquè $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \psi)$.
  Si no és cert, observem que aleshores serà cert $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} \chi$ i per tant tindrem que $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \chi)$ és cert.
  Així doncs sempre serà cert o bé $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \psi)$ o bé $\Sigma \cup \{\varphi, (\psi \vee$

$\chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \chi)$.
Per tant $\Sigma \cup \{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)\} \vdash_{IPC} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ es compleix, és a dir $[\varphi] \wedge [\psi \vee \chi] \leq [\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi]$ és cert.

- Anem a veure ara que $[\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi] \leq [\varphi] \wedge [\psi \vee \chi]$ és compleix. Això és equivalent a $\Sigma \cup \{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ que per la propietat de la disjunció per l'esquerra és $\Sigma \cup \{(\varphi \wedge \psi)\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ i $\Sigma \cup \{(\varphi \wedge \chi)\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$.
  En el primer cas per la conjunció per l'esquerra tenim que $\Sigma \cup \{(\varphi, \psi)\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ que és equivalent a $\Sigma \cup \{(\varphi, \psi)\} \vdash_{IPC} \varphi$ i $\Sigma \cup \{(\varphi, \psi)\} \vdash_{IPC} (\psi \vee \chi)$, i el primer és cert per l'axioma i el segon per la disjunció per la dreta.
  Podem demostrar que $\Sigma \cup \{(\varphi \wedge \chi)\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ de forma anàloga.
  Així doncs $\Sigma \cup \{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)\} \vdash_{IPC} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ es compleix, és a dir $[\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi] \leq [\varphi] \wedge [\psi \vee \chi]$ és cert.

I per tant hem demostrat que $[\varphi] \wedge [\psi \vee \chi] = [\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi]$ tal i com volíem.

Per últim ens falta per veure que es compleix la residuació, és a dir que,

$$[\varphi] \wedge [\psi] \leq [\chi] \text{ sii } [\varphi] \leq [\psi] \to [\chi]$$

Per a provar-ho observem que $\vdash_{IPC} \varphi \wedge \psi \to \chi \Leftrightarrow_{TD} \{\varphi \wedge \psi\} \vdash_{IPC} \chi \Leftrightarrow_{CE} \{\varphi, \psi\} \vdash_{IPC} \chi \Leftrightarrow_{TD} \varphi \vdash_{IPC} \psi \to \chi \Leftrightarrow_{TD} \vdash_{IPC} \varphi \to (\psi \to \chi)$ i per tant $\varphi \wedge \psi \to \chi \dashv\vdash_{IPC} \varphi \to (\psi \to \chi)$ i observem també que $[\varphi \to \psi] = [1] \Leftrightarrow [\varphi] \to [\psi] = [1] \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi]$. Ara tenim que $[\varphi] \wedge [\psi] \leq [\chi] \Leftrightarrow [\varphi] \wedge [\psi] \to [\chi] = 1 \Leftrightarrow [\varphi] \to ([\psi] \to [\chi]) = [1] \Leftrightarrow [\varphi] \to ([\psi \to \chi]) = 1 \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi \to \chi] \Leftrightarrow [\varphi] \leq [\psi] \to [\chi]$ com volíem demostrar.

Així doncs hem vist que l'àlgebra $\mathcal{L} = \langle Prop(X)/\sim_\Sigma, \wedge, \vee, \to, \neg, 0, 1\rangle$ és una àlgebra de Heyting.

Ara suposem que $\Sigma \nvdash_{IPC} \varphi$ i prenem l'aplicació $h : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que per a tot $\psi \in Prop(X)$ $h(\psi) = [\psi]$. Llavors com que per hipòtesis hem suposat que $\Sigma \nvdash_{IPC} \varphi$ tenim que $h(\Sigma) \subseteq \{1\}$ i que $h(\varphi) \neq 1$ i per tant φ no és conseqüencia lògica de Σ a partir de la semàntica donada per les àlgebres de Heyting. És a dir $\Sigma \not\models_H \varphi$ tal i com volíem veure. □

Ara podem definir les àlgebres de Boole, que normalment es defineixen com un reticle distributiu, acotat i complementat, com per exemple a [11]. Podem també però definir una àlgebra de Boole a partir de la definició d'una àlgebra de Heyting.

Definició 5.12. *Una àlgebra $\mathcal{B} = \langle A, \vee, \wedge, \to, \neg, 0, 1\rangle$ és una àlgebra de Boole si i només si és una àlgebra de Heyting i es compleix la regla de la doble negació, és a dir, $\neg\neg a = a$ per a tot $a \in A$ on $\neg a := a \to 0$.*

Observació 5.13. Notem que per tant tota àlgebra de Boole és una àlgebra de Heyting.

Té sentit ara preguntar-nos si podem establir algun altre tipus de relació entre les àlgebres de Heyting i les àlgebres de Boole. A partir d'una àlgebra de Heyting

$$\mathcal{H} = \langle A, \wedge_A, \vee_A, \to_A, \neg_A, 0, 1\rangle$$

podem definir una àlgebra

$$\mathcal{B}(A) := \langle B(A), \wedge_{B(A)}, \vee_{B(A)}, \rightarrow_{B(A)}, \neg_{B(A)}, 0, 1\rangle$$

tal que $B(A) := \{\neg\neg a : a \in A\}$ i per a tot $c, d \in \mathcal{B}(A)$ definim:

- $c \wedge_{B(A)} d := c \wedge_A d$
- $c \vee_{B(A)} d := \neg\neg(c \vee_A d)$
- $c \rightarrow_{B(A)} d := c \rightarrow_A d$
- $\neg_{B(A)} c := \neg_A c$
- El 0 i l'1 de $B(A)$ són els mateixos que els d'A.

Proposició 5.14. *L'àlgebra $\mathcal{B}(A) := \langle B(A), \wedge_{B(A)}, \vee_{B(A)}, \rightarrow_{B(A)}, 0, 1, \neg_{B(A)}\rangle$ és una àlgebra de Boole.*

Demostració. Siguin $c, d \in B(A)$ Definim la relació $\leq$ com $c \leq d \Leftrightarrow c \wedge_{B(A)} d = c$. Podem veure que aquesta relació és un ordre, és a dir que és reflexiva, transitiva i antisimètrica.

- Reflexiva: Volem veure que $c \leq c$, és a dir que $c \leq c$. I ara $c \leq c$ sii $c \wedge_{B(A)} c$ que és igual a $c \wedge c$ i com que A és un reticle es compleix que $c \wedge c = c$, i per tant $c \wedge c = c$ tal i com volíem veure.

- Transitiva: Volem veure que si $c \leq d$ i $d \leq c$, aleshores $c \leq e$. Per hipòtesis tenim que $c \wedge_{B(A)} d = c$ i que $d \wedge_{B(A)} e = d$. I volem veure que $c \wedge_{B(A)} e = c$. Ara $c \wedge_{B(A)} e = (c \wedge_{B(A)} d) \wedge_{B(A)} e = (c \wedge_A d) \wedge_A e = c \wedge_A (d \wedge_A e) = c \wedge_{B(A)} (d \wedge_{B(A)} e) = c \wedge_{B(A)} d = c$, on hem usat les hipòtesis, la definició de $\wedge_{B(A)}$ i qe A és un reticle. Per tant hem vist que $c \leq e$.

- Antisimètrica: Volem veure que si $c \leq d$ i $d \leq c$, aleshores $c = d$. Per hipòtesis $c \wedge_{B(A)} d = c$ i $d \wedge_{B(A)} c = d$. Llavors $c = c \wedge_{B(A)} = c \wedge_A d = d \wedge_A c = d \wedge_{B(A)} c = c$. AIxí doncs $d = c$, tal i com volíem veure.

Ara anem a veure que tot subconjunt de dos elements de $B(A)$ té un ínfim i un suprem. Volem demostrar que $c \wedge_{B(A)} d = inf\{c, d\}$ i que $c \vee_{B(A)} d = sup\{c, d\}$.

- Veiem primer que $c \wedge_{B(A)} d = inf\{c, d\}$. És a dir, volem veure que $c \wedge_{B(A)} d \leq c$ i que $c \wedge_{B(A)} d \leq d$, i que si hi ha un e tal que $e \leq c$ i $e \leq d$ llavors $e \leq c \wedge_{B(A)} d$.
  Ara $(c \wedge_{B(A)} d) \wedge_{B(A)} c = (c \wedge_A d) \wedge_A c = (c \wedge_A c) \wedge_A d = c \wedge_A d = c \wedge_{B(A)} d$, per tant $c \wedge_{B(A)} d \leq c$, tal i com volíem veure. Per altra banda $(c \wedge_{B(A)} d) \wedge_{B(A)} d = (c \wedge_A d) \wedge_A d = c \wedge_A (d \wedge_A d) = c \wedge_A d = c \wedge_{B(A)} d$, per tant $c \wedge_{B(A)} d \leq d$.
  Sigui ara e tal que $e \leq c$ i $e \leq d$, és a dir $e \wedge_{B(A)} c = e$ i $e \wedge_{B(A)} d = e$, volem veure que $c \wedge_{B(A)} d \leq e$, és a dir, que $e \wedge_{B(A)} (c \wedge_{B(A)} d) = c \wedge_{B(A)} d$. Ara $e \wedge_{B(A)} (c \wedge_{B(A)} d) = e \wedge_A (c \wedge_A d) = (e \wedge_A c) \wedge_A d = (e \wedge_{B(A)} c) \wedge_{B(A)} d = e \wedge_{B(A)} d = e$. Així doncs $e \wedge_{B(A)} (c \wedge_{B(A)} d) = e$ i per tant $e \leq c \wedge_{B(A)} d$ tal i com volíem veure.

- Veiem ara que $c \vee_{B(A)} d = sup\{c, d\}$. És a dir, volem veure que $c \leq c \vee_{B(A)} d$ i que $d \leq c \vee_{B(A)} d$, i que si hi ha un e tal que $c \leq e$ i $d \leq e$, aleshores $c \vee_{B(A)} d \leq e$.
  Ara $c \leq c \vee_{B(A)} d = \neg_A \neg_A (c \vee_A d) = \neg_A(\neg_A c \wedge_A \neg_A d)$. On hem usat que A és d'una

àlgebra de Heyting i la propietat 8 de la proposició 5.6. Ara $c \leq \neg_A(\neg_A c \wedge_A \neg_A d) \Leftrightarrow c \leq (\neg_A c \wedge_A \neg_A d) \rightarrow_A 0 \Leftrightarrow c \wedge_A (\neg_A c \wedge_A \neg_A d) \leq 0 \Leftrightarrow (c \wedge_A \neg_A c) \wedge_A \neg_A d) \leq 0$ i ara com que $c \wedge_A \neg_A c = c \wedge_A (c \rightarrow_A 0) = c \wedge_A 0 = 0$, tenim que és equivalent a $0 \wedge_A d \leq 0$ que és cert.
Anàlogament podem veure que $d \leq c \vee_{B(A)} d$.
Ara volem veure que si $c \leq e$ i $d \leq c$, aleshores $c \vee_{B(A)} d \leq e$. Ara $c \vee_{B(A)} d = \neg_A \neg_A (c \vee_A d) = \neg_A(\neg_A c \wedge_A \neg_A d)$ per la propietat 8 de 5.6, ara com que suposem que $c \leq e$ i $d \leq c$ i per la propietat 4 de la mateixa proposició $\neg_A(\neg_A c \wedge_A \neg_A d) \leq \neg_A(\neg_A e \wedge_A \neg_A e) = \neg_A \neg_A e$. I ara com $e = \neg\neg f$ per $f \in A$, i com que és de Heyting, per la propietat 5 de la proposició 5.6 tenim que $\neg_A \neg_A e = \neg_A \neg_A \neg_A \neg_A f = \neg_A \neg_A f = e$, i per tant $c \vee_{B(A)} d \leq e$, tal i com volíem veure.

Ara si veiem que és acotat, i desprès provem que es compleix la residuació, llavors per l'observació 5.4 es segueix que és distributiu. I efectivament és acotat, ja que $0 \wedge_{B(A)} c = 0 \wedge_{B(A)} c = 0$ per a tot $c \in B(A)$, i per tant $0 \leq c$ per a tot $c \in B(A)$, i $c \wedge 1 = c \wedge_A 1 = c$ per a tot $c \in B(A)$, i per tant $c \leq 1$ per a tot $c \in B(A)$. Així doncs, el reticle està acotat.

Veiem ara que es compleix la llei de la residuació. Volem veure que $e \leq c \rightarrow_{B(A)} d \Leftrightarrow c \wedge_{B(A)} e \leq d$. Ara $e \leq c \rightarrow_{B(A)} d \Leftrightarrow e \leq c \rightarrow_A d \Leftrightarrow c \wedge_A e \leq d \Leftrightarrow c \wedge_{B(A)} e \leq d$. On hem usat que A és de Heyting i la definició de $\rightarrow$ i $\wedge$.

Amb això ja hem vist que és una àlgebra de Heyting, ara ens falta veure que és una àlgebra Boole. Per a fer-ho hem de veure que és compleix la llei de la doble negació. És a dir que $\neg\neg c = c$ per a tot $c \in B(A)$. I ara $\neg_{B(A)} \neg_{B(A)} c = \neg_A \neg_A \neg_A \neg_A a = \neg_A \neg_A = c$. On hem usat que $c = \neg_A \neg_A a$ i que en les àlgebres de Heyting es compleix que $\neg\neg\neg\neg a = \neg\neg a$. Per tant hem vist que per a tot $c \in B(A)$ $\neg_{B(A)} \neg_{B(A)} = c$. I així doncs queda demostrat que és una àlgebra de Boole. $\square$

La relació de conseqüència lògica a partir de les àlgebres de Boole $\models_B$ la definim de la següent manera.

Definició 5.15. *Siguin $\Sigma, \varphi \in Prop(X)$, diem que $\Sigma \models_B \varphi$ si i només si per a tota àlgebra de Boole $\mathcal{B}$ i per a tota interpretació $g : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{B}$ si $g(\Sigma) = \{g(\psi) | \psi \in \Sigma\} \subseteq \{1\}$, aleshores $g(\Sigma) = 1$.*

Aleshores a partir de les àlgebres de Boole, també ens permeten demostrar un teorema de completesa respecta a el càlcul clàssic CPC.

Teorema 5.16. *Siguin $\Sigma, \varphi \in Prop(X)$ aleshores $\Sigma \vdash_{CPC} \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_B \varphi$*

Una demostració d'aquest teorema la podem trobar a [12].

6 Teorema de Glivenko

Una pregunta natural a fer-se després de conèixer la lògica intuïcionista és si guarda alguna relació amb la lògica clàssica. Veurem que sí, però anem a estudiar quina és la naturalesa d'aquesta relació.

Donades dues lògiques en el mateix llenguatge $\rhd_1$ i $\rhd_2$ direm que $\rhd_2$ és una *extensió* de $\rhd_1$ quan per a tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, $\Sigma \rhd_1 \varphi$ implica $\Sigma \rhd_2 \varphi$. Ho denotarem per $\rhd_1 \leq \rhd_2$. A més a més direm que $\rhd_2$ és una *extensió pròpia* de $\rhd_1$, quan $\rhd_1 \leq \rhd_2$ però $\rhd_2 \not\leq \rhd_1$.

Teorema 6.1. *La lògica proposicional clàssica és una extensió pròpia de la lògica proposicional intuïcionista.*

Demostració. A partir del càlcul de la deducció natural intuïcionista ((I)DN), observem que la majoria de les regles del càlcul intuïcionista són també regles del càlcul clàssic. De fet, les úniques regles de (I)DN que no apareixen en el càlcul de la deducció natural clàssic ((C)DN) són les regles I $\perp$ i $E\perp$ que fan referència a $\perp$ que és una constant primitiva el en (I)DN, però que és definible en el càlcul clàssic com $\perp := p \wedge \neg p$. Anem a demostrar que són derivables si definim $\perp$ en el càlcul clàssic com $p \wedge \neg p$.

- Regla I $\perp$:

1.	φ		Premissa
2.	$\neg\varphi$		Premissa
3.		p	Hipòtesis
4.		φ	It. 1
5.		$\neg\varphi$	It. 2
6.	$\neg p$		I $\neg$ 3,4,5
7.		$\neg p$	Hipòtesis
8.		φ	It. 1
9.		$\neg\varphi$	It. 2
10.	$\neg\neg p$		I $\neg$ 7,8,9
11.	p		E $\neg$ 10
12.	$\perp := p \wedge \neg p$		I $\wedge$ 6,11

- Regla E $\perp$:

1.	$\perp := p \wedge \neg p$		Premissa
2.		$\neg\psi$	Hipòtesis
3.		p	E $\wedge$ 1
4.		$\neg p$	E $\wedge$ 1
5.	$\neg\neg\psi$		I $\neg$ 2,3,4
6.	ψ		E $\neg$ 5

Per tant podem afegir al càlcul (C)DN les regles I $\perp$ i E $\perp$. Ara si $\Sigma \vdash_{IPC} \varphi$, aleshores tenim una demostració $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ en el càlcul intuïcionista. Com que les regles intuicionistes són també vàlides en el càclul (C)DN, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ és també una demostració en (C)DN i per tant $\Sigma \vdash_{CPC} \varphi$. I així doncs, la lògica clàssica és una extensió de la lògica intuïcionista. Per a veure que és pròpia n'hi ha prou amb recordar per exemple que $\vdash_{CPC} p \wedge \neg p$, mentre que $\nvdash_{IPC} p \wedge \neg p$. El primer surt de l'exemple 2.18 i el teorema 2.26. I el segon surt de l'exemple 4.10 i el teorema 4.16. $\square$

Al veure que no és pròpia, tindria sentit seguir-se preguntat si existeix alguna manera d'interpretar CPC a dins de IPC. L'any 1929 Valeri Glivenko va veure que existia una manera de fer-ho, i ho va formalitzar en el següent teorema que va publicar i demostrar en [13].

Teorema 6.2 (Glivenko)**.** *Sigui $\varphi \in Prop(X)$ aleshores:*

$$\vdash_{CPC} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$$

La demostració que en va donar ell en primera instància i la majoria de les que s'han anat donant a posteriori, són fetes a partir de la definició sintàctica de la lògica proposicional.

Com que en aquest treball hem vist semàntiques completes respecte al càlcul té sentit estudiar si el podem enunciar i demostrar a partir d'aquestes. Així doncs, en aquest apartat donarem en primera instància la demostració a partir del càlcul sintàctic i tot seguit a partir de les semàntiques completes respecte al càlcul introduïdes en els apartats anteriors. És a dir donarem una demostració del teorema a partir dels models de Kripke i una altra a partir de les àlgebres de Heyting.

Començarem demostrant-ho sintàcticament. Per a fer-ho necessitem introduir algunes definicions i teoremes que ens ajudaran a relacionar ambdues lògiques.

Definició 6.3. *Definim la* traducció de Gödel *recursivament de la següent forma. És una aplicació $^\circ : Prop(X) \longrightarrow Prop(X)$ tal que:*

- $\perp^\circ = \perp$
- *Si* $x \in X$, $x^\circ = \neg\neg x$
- $(\varphi \wedge \psi)^\circ = \varphi^\circ \wedge \psi^\circ$
- $(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg(\neg(\varphi^\circ) \wedge \neg(\psi^\circ))$
- $(\neg\varphi)^\circ = \neg(\varphi^\circ)$

Observem que està ben definida, ja que $(\neg\varphi)^\circ = \neg(\varphi^\circ) = (\varphi^\circ) \to \perp = (\varphi \to \perp)^\circ$

Proposició 6.4. *Sigui $\varphi \in Prop(X)$*

1. $\varphi \dashv\vdash_{CPC} \varphi^\circ$
2. $(\varphi^\circ)^\circ \dashv\vdash_{IPC} \varphi^\circ$
3. $\neg\neg\varphi \dashv\vdash_{IPC} \varphi^\circ$

Demostració. Ho demostrarem per inducció sobre la construcció de φ.

1. Volem veure que $\varphi \dashv\vdash_{CPC} \varphi^\circ$. Es pot veure fàcilment per inducció sobre la construcció de φ i pel fet que en la lògica clàssica $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ (exemple 2.16) i del teorema 2.26.

2. Volem veure que $(\varphi^\circ)^\circ \dashv\vdash_{IPC} \varphi^\circ$. Es pot veure fàcilment per inducció sobre la construcció de φ i pel fet que $\neg\neg\neg\varphi \dashv\vdash_{IPC} \neg\varphi$, vist a l'exemple 3.9.

3. Volem veure que $\neg\neg\varphi \dashv\vdash_{IPC} \varphi^\circ$.

   - Si $\varphi \in X$ és $\neg\neg\varphi \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$ que és cert.
   - Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, aleshores $\varphi^\circ = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)^\circ = \varphi_1^\circ \wedge \varphi_2^\circ = \neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\varphi_2$ i per 3 de la proposició 3.10 $\neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \dashv\vdash_{IPC} \neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\varphi_2$.
     Per tant $\neg\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \dashv\vdash_{IPC} (\varphi_1 \wedge \varphi_2)^\circ$.
   - Si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$, aleshores $\varphi^\circ = (\varphi_1 \vee \varphi_2)^\circ = \neg(\neg(\varphi_1^\circ) \wedge \neg(\varphi_2^\circ)) = \neg(\neg\neg\neg\varphi_1 \wedge \neg\neg\neg\varphi_2)$ i com que $\neg\neg\neg\varphi \dashv\vdash_{IPC} \neg\varphi$, com hem vist a l'exemple 3.9, això és igual a $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ i per altra banda per 2 de la proposició 3.10 $\neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \dashv\vdash_{IPC} \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$.
     Per tant $\neg\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \dashv\vdash_{IPC} (\varphi_1 \vee \varphi_2)^\circ$.
   - Si $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$, aleshores $\varphi^\circ = (\varphi_1 \to \varphi_2)^\circ = \varphi_1^\circ \to \varphi_2^\circ = \neg\neg\varphi_1 \to \neg\neg\varphi_2$ i per altra banda per 5 de la proposició 3.10 $\neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \dashv\vdash_{IPC} \neg\neg\varphi_1 \to \neg\neg\varphi_2$.
     Per tant $\neg\neg(\varphi_1 \to \varphi_2) \dashv\vdash_{IPC} (\varphi_1 \to \varphi_2)^\circ$.

$\square$

Observació 6.5. De 2 i 3, podem deduir-ne $\neg\neg(\varphi^\circ) \dashv\vdash_{IPC} \varphi^\circ$.

Teorema 6.6. *Per a tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$

$$\Sigma \vdash_{CPC} \varphi \textit{ si i només si } \Sigma^\circ \vdash_{IPC} \varphi^\circ$$

on $\Sigma^\circ = \{\psi^\circ : \psi \in \Sigma\}$

Demostració. Per a l'implicació de dreta a esquerra, com que pel teorema 6.1 $\vdash_{IPC} \leq \vdash_{CPC}$ tenim que si $\Sigma^\circ \vdash_{IPC} \varphi^\circ$ aleshores $\Sigma^\circ \vdash_{CPC} \varphi^\circ$ i com que $\varphi \dashv\vdash_{CPC} \varphi^\circ$ obtenim que $\Sigma \vdash_{CPC} \varphi$.

Per a la implicació contrària ho demostrarem veient que la transformada de Gödel de tota regla de la deducció natural clàssica és vàlida en la deducció natural intuïcionista, com que hem vist que el càlcul de la deducció natural i el càlcul de Hilbert són equivalents, n'hi ha prou en veure-ho pel càlcul de la deducció natural.

- Inclusió $\wedge$: $\dfrac{\varphi^\circ, \psi^\circ}{(\varphi \wedge \psi)^\circ}$

1.	φ°	Premissa
2.	ψ°	Premissa
3.	$\varphi^\circ \wedge \psi^\circ = (\varphi \wedge \psi)^\circ$	I $\wedge$ 1,2

- Eliminació $\wedge$: $\dfrac{(\varphi \wedge \psi)^\circ}{\varphi^\circ}$

1.	$(\varphi \wedge \psi)^\circ = \varphi^\circ \wedge \psi^\circ$	Premissa
2.	φ°	E $\wedge$ 1

- Inclusió $\vee$: $\dfrac{\varphi^\circ}{\neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ) = (\varphi \vee \psi)^\circ}$

1.	φ°	Premissa
2.	$\mid\ \neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ$	Hipòtesis
3.	$\mid\ \neg\varphi^\circ$	E $\wedge$ 1
4.	$\mid\ \varphi^\circ$	It. 1
5.	$\neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ) = (\varphi \vee \psi)^\circ$	I $\neg$ 2,3,4

- Eliminació $\vee$:

$(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$	φ° (Hip.)	ψ° (Hip.)
	$\vdots$	$\vdots$
	χ°	χ°
χ°		

1.	$(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$	Premissa
2.	$\mid\ \neg\chi^\circ$	Hipòtesis
3.	$\mid\ \mid\ \varphi^\circ$	Hipòtesis
4.	$\mid\ \mid\ \mid\ \varphi^\circ$	Hipòtesis
$\vdots$	$\mid\ \mid\ \mid\ \vdots$	
i.	$\mid\ \mid\ \mid\ \chi^\circ$	
i+1.	$\mid\ \mid\ \varphi^\circ \to \chi^\circ$	I $\to$ 4,i
i+2.	$\mid\ \mid\ \chi^\circ$	E $\to$ 3,i+1
i+3.	$\mid\ \mid\ \neg\chi^\circ$	It. 2
i+4.	$\mid\ \neg\varphi^\circ$	I $\neg$ 3,i+2,i+3
i+5.	$\mid\ \mid\ \psi^\circ$	Hipòtesis
i+6.	$\mid\ \mid\ \mid\ \psi^\circ$	Hipòtesis
$\vdots$	$\mid\ \mid\ \mid\ \vdots$	
j.	$\mid\ \mid\ \mid\ \chi^\circ$	
j+1.	$\mid\ \mid\ \psi^\circ \to \chi^\circ$	I $\to$ i+6,j
j+2.	$\mid\ \mid\ \chi^\circ$	E $\to$ i+5,j+1
j+3.	$\mid\ \mid\ \neg\chi^\circ$	It. 2
j+4.	$\mid\ \neg\psi^\circ$	I $\neg$ i+5,j+2,j+3
j+5.	$\mid\ \neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ$	I $\wedge$ j+5,i+4
j+6.	$\mid\ \neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$	It. 1
j+7.	$\neg\neg\chi^\circ$	I $\neg$ 2,j+5,j+6

Notem ara que com hem vist a l'observació 6.5, $\neg\neg\chi^\circ \dashv\vdash_{IPC} \chi^\circ$, per tant el que hem deduït, és χ°, tal i com volíem.

- Inclusió $\to$:

$$\begin{array}{l|l} & \varphi^\circ \text{ (Hip.)} \\ \cline{2-2} & \vdots \\ & \psi^\circ \\ (\varphi \to \psi)^\circ & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|ll} 1. & & & \varphi^\circ & \text{Hipòtesis} \\ \cline{4-4} \vdots & & & \vdots & \\ \text{n.} & & & \psi^\circ & \\ \text{n+1.} & \varphi^\circ \to \psi^\circ = (\varphi \to \psi)^\circ & & & \text{I} \to \text{1,n} \end{array}$$

- Eliminació $\to$: $\dfrac{\varphi^\circ,\ \varphi^\circ \to \psi^\circ}{\psi^\circ}$

$$\begin{array}{lcc} 1. & \varphi^\circ & \text{Premissa} \\ 2. & (\varphi \to \psi)^\circ = \varphi^\circ \to \psi^\circ & \text{Premissa} \\ 3. & \psi^\circ & \text{MP 1,2} \end{array}$$

- Inclusió $\neg$:

$$\begin{array}{l|l} & \varphi^\circ \text{ (Hip.)} \\ \cline{2-2} & \vdots \\ & \psi^\circ \\ & \vdots \\ & \neg(\psi^\circ) \\ (\neg\varphi)^\circ & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll} 1. & \varphi^\circ & \varphi^\circ & \text{Hipòtesis} \\ \cline{3-3} & & \vdots & \\ \text{i.} & & \psi^\circ & \\ & & \vdots & \\ \text{j.} & & \neg(\psi^\circ) & \\ \text{j+1.} & \neg(\varphi^\circ) = (\neg\varphi)^\circ & & \text{I} \neg \text{1,i,j} \end{array}$$

- Eliminació $\neg$: $\dfrac{(\neg\neg\varphi)^\circ}{\varphi^\circ}$

$$\begin{array}{lcc} 1. & (\neg\neg\varphi)^\circ = \neg\neg(\varphi^\circ) & \text{Premissa} \\ 2. & \neg\neg\varphi = \varphi^\circ & \text{E} \perp 1 \end{array}$$

Per tant hem pogut demostar que la transformada de Gödel de tota regla de la (C)DN és vàlida en (I)DN, i així doncs $\Sigma \vdash_{CPC} \varphi \Rightarrow \Sigma^\circ \vdash_{IPC} \varphi^\circ$, com volíem veure. $\square$

Anem a demostrar ara una generalització del teorema de Glivenko.

Teorema 6.7. *Per a tot* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$

$$\Sigma \vdash_{CPC} \varphi \textit{ sii } \neg\neg\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi \textit{ sii } \Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi \textit{ on } \neg\neg\Sigma = \{\neg\neg\psi : \psi \in \Sigma\}$$

Demostració. Pel teorema 6.6 $\Sigma \vdash_{CPC} \varphi$ sii $\Sigma^\circ \vdash_{IPC} \varphi^\circ$i per la propietat 3 de la proposició 6.4 $\Sigma^\circ \vdash_{CPC} \varphi^\circ$ sii $\neg\neg\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$.
Ara demostrem que $\neg\neg\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$. Recordem que com hem vist a l'exemple 3.9 $\psi \in Prop(X)$ $\psi \vdash_{IPC} \neg\neg\psi$, aleshores és cert també que $\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\Sigma$. I com que per hipòtesis $\neg\neg\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$ obtenim pel tall que $\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$.
Ara demostrem que $\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \vdash_{CPC} \varphi$. Si suposem $\Sigma \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$ aleshores $\Sigma \vdash_{CPC} \neg\neg\varphi$ i com que per la propietat 1 de la proposició 6.4 $\varphi \dashv\vdash_{CPC} \varphi^\circ = \neg\neg\varphi$, obtenim que $\Sigma \vdash_{CPC} \varphi$ tal i com volíem veure. □

Corol·lari 6.8. *Sigui $\varphi \in Prop(X)$, aleshores*

$$\vdash_{CPC} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{IPC} \neg\neg\varphi$$

Anem a demostrar-ho ara a partir de la semàntica definida pels models de Kripke. Pel cas de la lògica clàssica, utilitzarem la semàntica definida a partir de les taules de veritat.

Teorema 6.9. *Siguin $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, aleshores*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_{\{0,1\}} \varphi \text{ sii } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_l \neg\neg\varphi$$

Demostració. Per a demostrar la implicació de dreta a esquerra suposem que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_l \varphi$ i volem veure que per a tota interpretació clàssica I tal que si $I(\varphi_i) = 1$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ aleshores $I(\varphi) = 1$.

Sigui ara doncs I una interpretació clàssica, tal que $I(\varphi_i) = 1$ per a tot $i = 1, \ldots, n$, prenem un model de Kripke $M = \langle \{\alpha\}, \leq, V \rangle$ on la valoració ve donada per $V : \{\alpha\} \to \{x : I(x) = 1\}$.Veiem per inducció sobre φ que $M, \alpha \Vdash \varphi \Leftrightarrow I(\varphi) = 1$.

- Si $\varphi = x \in X$, llavors tenim que $M, \alpha \Vdash x \Leftrightarrow x \in V \Leftrightarrow I(x) = 1$
- Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ llavors $M, \alpha \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow M, \alpha \Vdash \varphi_1$ i $M, \alpha \Vdash \varphi_2 \Leftrightarrow_{HI} I(\varphi_1) = 1$ i $I(\varphi_2) = 1 \Leftrightarrow_{CE} I(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 1$.
- Si $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ llavors $M, \alpha \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \Leftrightarrow M, \alpha \Vdash \varphi_1$ o $M, \alpha \Vdash \varphi_2 \Leftrightarrow_{HI} I(\varphi_1) = 1$ o $I(\varphi_2) = 1 \Leftrightarrow_{DE} I(\varphi_1 \vee \varphi_2) = 1$.
- Si $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$ llavors $M, \alpha \Vdash \varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow$ per a tot $\beta \geq \alpha$ si $M, \beta \Vdash \varphi_1$ aleshores $M, \beta \Vdash \varphi_2$, però com que l'únic $\beta \geq \alpha$ és α tenim que és equivalent, per hipòtesis d'inducció, a que si $M, \alpha \Vdash \varphi_1$ aleshores $M, \alpha \Vdash \varphi_2$. I per tant és equivalent a dir que si $I(\varphi_1) = 1$ aleshores $I(\varphi_2) = 1$, i això és equivalent a $I(\varphi_1 \to \varphi_2) = 1$.
- Si $\varphi = \neg\varphi_1$ llavors $M, \alpha \Vdash \neg\varphi_1 \Leftrightarrow M, \alpha \nVdash \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1 \notin V \Leftrightarrow I(\varphi_1) \neq 1 \Leftrightarrow I(\varphi_1) = 0 \Leftrightarrow I(\neg\varphi_1) = 1$.

Com que per hipòtesis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_l \neg\neg\varphi$ aleshores tenim que pel model M que hem definit si $M, \alpha \Vdash \varphi_1, \ldots M, \alpha \Vdash \varphi_n$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ aleshores $M, \alpha \Vdash \neg\neg\varphi$.
Ara sigui I tal que $I(\varphi_1) = 1, \ldots, I(\varphi_n) = 1$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ aleshores tenim que $M, \alpha \Vdash \varphi_1, \ldots M, \alpha \Vdash \varphi_n$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ i d'aquí en podem deduir $M, \alpha \Vdash \neg\neg\varphi$ que és equivalent a $I(\neg\neg\varphi) = 1$ i com que I és una interpretació clàssica $I(\varphi) = I(\neg\neg\varphi) = 1$ per l'arbitrarietat de I obtenim que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models_{\{0,1\}} \varphi$.

Demostrem la implicació contrària pel contrarecíproc és a dir veurem que $\varphi_1, \dots \varphi_n \not\models_l \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi_1, \dots \varphi_n \not\models_{\{0,1\}} \varphi$.
Així doncs volem trobar una interpretació clàssica I tal que $I(\varphi_i) = 1$ per a tot $i = 1, \dots, n$ i $I(\varphi) \neq 1$. Com que per hipòtesis $\varphi_1, \dots \varphi_n \not\models_l \neg\neg\varphi$, per la propietat forta dels models finits tenim que existeix un model finit $M = \langle A, \leq, V \rangle$ tal que $M, \alpha \Vdash \varphi_1, \dots M, \alpha \Vdash \varphi_n$ per a tot $i = 1, \dots, n$ i $M, \alpha \nVdash \neg\neg\varphi$. Recordem que, per la proposició 4.7, si $M, \alpha \nVdash \neg\neg\varphi$ aleshores existeix una fulla $\delta \geq \alpha$ tal que $M, \delta \nVdash \varphi$. I si $M, \alpha \Vdash \varphi_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$, com que $\delta \geq \alpha$, pel lema 4.5, es compleix que $M, \delta \Vdash \varphi_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$. Ara definim la interpretació $I_\delta(x) : X \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que

$$I_\delta = \begin{cases} 1 & si \quad M, \delta \Vdash x \\ 0 & si \quad M, \delta \nVdash x \end{cases}$$

Es pot veure anàlogament a com hem fet en l'altre implicació, per inducció sobre la construcció de ψ, que per a tot $\psi \in Prop(X)$, $M, \delta \Vdash \psi \Leftrightarrow I_\delta(\psi) = 1$.
I com que tenim que si $M, \delta \Vdash \psi_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$ aleshores $M, \delta \nVdash \neg\neg\varphi$, aleshores si $I(\psi_i) = 1$ per a tot $i = 1, \dots, n$, podem deduir anàlogament a com hem fet en l'altra implicació que $I(\neg\neg\varphi) = 0$ i per tant $I(\varphi) = 0$ i així doncs hem trobat la interpretació que volíem. I pel contrarecíproc es compleix que $\varphi_1, \dots \varphi_n \models_{\{0,1\}} \varphi \Rightarrow \varphi_1, \dots \varphi_n \models_l \neg\neg\varphi$ tal i com volíem demostrar. $\square$

Corol·lari 6.10. *Sigui $\varphi \in Prop(X)$, aleshores*

$$\models_{\{0,1\}} \varphi \Leftrightarrow \models_l \neg\neg\varphi$$

Per últim anem a enunciar i demostrar una generalització del teorema a partir de les àlgebres de Heyting i de les àlgebres de Boole.

Teorema 6.11. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Prop(X)$, aleshores*

$$\Sigma \models_B \varphi \ sii \ \Sigma \models_H \neg\neg\varphi$$

Demostració. Provem primer que $\Sigma \models_H \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \models_B \varphi$
Per definició sabem que tota àlgebra de Boole és també una àlgebra de Heyting. Així doncs tenim que

$$\Sigma \models_H \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \models_B \neg\neg\varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_B \varphi$$

on l'última equivalència es segueix de que φ i $\neg\neg\varphi$ són equivalents ja que per a tota àlgebra de Boole és cert que $a = \neg\neg a$ per a tot a de l'àlgebra de Boole.

Demostrem la implicació recíproca a partir del contrarecíproc, és a dir, veurem que $\Sigma \not\models_H \neg\neg\varphi \Rightarrow \Sigma \not\models_B \varphi$.
Suposem doncs que $\Sigma \not\models_H \neg\neg\varphi$, és a dir suposem que tenim una àlgebra de Heyting $\mathcal{H} := \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$ i una interpretació $h : Prop(X) \longrightarrow A$ tal que $h(\Sigma) = \{1\}$ i que $h(\neg\neg\varphi) \neq 1$.
Sigui ara A una àlgebra de Heyting, i $\mathcal{B}(\mathcal{A}) := \langle B(A), \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$ on $B(A) := \{\neg\neg a : a \in A\}$ l'àlgebra de Boole (i per tant de Heyting), definida en l'apartat anterior. Prenem l'aplicació $h_{\neg\neg} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$, tal que $h_{\neg\neg}(a) = \neg\neg a$ i veiem que és un homomorfisme entre àlgebres de Heyting.

- $h_{\neg\neg}(a \wedge_A b) = \neg\neg(a \wedge_A b) = \neg\neg a \wedge_A \neg\neg b = \neg\neg a \wedge_{B(A)} \neg\neg b = h_{\neg\neg}(a) \wedge_{B(A)} h_{\neg\neg}(b)$ on hem utilitzat la propietat 7 de la proposició 5.6.

- $h_{\neg\neg}(a \vee_A b) = \neg\neg(a \vee_A b) = \neg\neg a \vee_{B(A)} \neg\neg b = h_{\neg\neg}(a) \vee_{B(A)} h_{\neg\neg}(b)$.

- $h_{\neg\neg}(a \to_A b) = \neg\neg(a \to_A b) = \neg\neg a \to_A \neg\neg b = h_{\neg\neg}(a) \to_{B(A)} h_{\neg\neg}(b)$ on hem utilitzat la propietat 6 de la proposició 5.6.

- $h_{\neg\neg}(0) = \neg\neg 0 = 0$.

- $h_{\neg\neg}(1) = \neg\neg 1 = 1$.

Si restringim ara aquesta aplicació a $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, $h_{\neg\neg} \restriction_{B(A)}: \mathcal{B}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$ i com que $B(A) = \{a : \neg\neg a = a\}$, tenim que $h_{\neg\neg} \restriction_{B(A)} (a) = \neg\neg a = a$, i per tant és equivalent a la identitat. Ara per demostrar el teorema volem veure que existeix una àlgebra de Boole $\mathcal{B}$ i una interpretació $g : Prop(X) \longrightarrow \mathcal{B}$ t.q. $g(\Sigma) = \{1\}$ i $g(\varphi) \neq 1$, si prenem g com la següent composició d'aplicacions:

$$g : Prop(X) \longrightarrow^{h} \mathcal{H} \longrightarrow^{h_{\neg\neg}} \mathcal{B}(\mathcal{A})$$

Aquesta g és una interpretació de Boole, ja que és una composició d'homomorfismes i per tant és també un homomorfisme. Ara

$$g(\Sigma) = h_{\neg\neg} \circ h(\Sigma) = h_{\neg\neg}(h(\Sigma)) h_{\neg\neg}(\{1\}) = \{1\}$$
$$g(\varphi) = h_{\neg\neg} \circ h(\varphi) = h_{\neg\neg}(h(\varphi)) = \neg\neg h(\varphi) = h(\neg\neg\varphi) \neq 1$$

Per tant hem trobat g una interpretació en àlgebres de Boole tal que $g(\Sigma) = \{1\}$ i $g(\varphi) \neq 1$. Així doncs $\Sigma \not\models_B \varphi$, tal i com volíem veure. $\square$

Corol·lari 6.12. *Sigui $\varphi \in Prop(X)$, aleshores*

$$\models_B \varphi \Leftrightarrow \models_H \neg\neg\varphi$$

7 Conclusions

Un dels objectius d'aquest treball era demostrar el teorema de Glivenko. Per a fer-ho ha calgut estudiar la lògica clàssica i la lògica intuïcionista. Ens hem centrat en aquesta última. Això ens ha servit per a poder veure i entendre maneres diferents de definir la lògica intuïcionista. Un dels resultats importants ha sigut veure que aquestes maneres de definir-la són equivalents. Hem vist així l'equivalència dels dos càlculs sintàctics que hem donat, el càlcul de Hilbert i el càlcul de la deducció natural. Aquest és un resultat important, ja que ens diu que podem usar indistintament qualsevol dels dos a l'intentar demostrar la validesa d'un raonament sintàcticament. Un altre part important del meu estudi ha sigut veure els teoremes de completesa per a les dues semàntiques intuïcionistes definides durant el treball. Tant per la semàntica definida a partir dels models de Kripke, com per la semàntica definida a partir de les àlgebres de Heyting. La importància d'aquests teoremes rau en que demostra que la definició sintàctica i la semàntica de la lògica, en ambdós casos que hem donat, són equivalents. Finalment hem pogut establir la relació entre la lògica clàssica i la intuïcionista demostrant el Teorema de Glivenko. Aquest és un resultat important ja que, si bé no ens dona una equivalència directa entre entre les dues lògiques, ens permet traduir-ne proposicions i raonaments de l'una a l'altra.

A nivell personal, m'ha resultat molt interessant aquest treball per poder endinsar-me una mica més en el món de la lògica, encara que hagi sigut mínimament, ja que he pogut veure que és un món molt més extens del què m'imaginava abans de començar el treball. També m'ha permès conèixer resultats importants d'aquesta branca de les matemàtiques, i poder comprendre quin paper hi juga dins d'aquest. En conclusió, he pogut endinsar-me en un camp de les matemàtiques del que hem vist poques coses durant el grau, però a partir del qual he pogut consolidar aprenentatges transversals adquirits durant aquest. També m'ha ajudat a entendre millor la forma de pensar que he anat desenvolupant al llarg dels meus estudis.

En un futur m'agradaria poder traslladar aquest aprenentatge a un altre camp fora de les matemàtiques pel qual tinc un interès especial, la lingüística. Durant aquest treball m'he adonat que seria interessant aprofundir en l'estudi d'aquests dos camps i la relació que hi ha entre ells. M'ha donat la sensació que podria ser molt enriquidor combinar aquestes dues disciplines i intentar trobar-ne algunes relacions, per així poder descobrir noves maneres d'entendre, interpretar i modelitzar aspectes relacionats amb la lingüística gràcies a la lògica formal i a les matemàtiques.

Referències

[1] Van Dalen, D.: *Logic and Structure*, Second Edition, Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1989.

[2] Troelstra, A.S., van Dalen, D.: *Constructivism in Mathemathics. An Introduction. Volume I*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.

[3] Troelstra, A.S., van Dalen, D.: *Constructivism in Mathemathics. An Introduction. Volume II*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.

[4] Dummet, M.: *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, 2000.

[5] Ono, H.: *Proof Theory and Algebra in Logic*, Springer, 2019.

[6] Troelstra, A.S.: *A History of Constructivism in the 20th Century*, Chapter 4, Section 4.1, University of Amsterdam, ITLI Prepublication Series ML-91-05, 1991.

[7] Heyting, A.: *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften: 42–71, 158–169, 1930.

[8] Wasilewska, A.: *Logics for Computer Science*, Chapter 5, Section 5.2, Springer Nature Switzerland AG, 2018.

[9] Van Dalen, D.: *Logic and Structure*, Second Edition, Chapter 3, Section 3.1, Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1989.

[10] Dummet, M.: *Elements of Intuitionism*, Chapter 5, Section 5.2., Oxford University Press, 2000.

[11] Birkhoff, G.; *Lattice Theory*, Third Edition, p. 17-19, American Mathematical Society, 1973.

[12] Ono, H.: *Proof Theory and Algebra in Logic*, Chapter 6, Section 6.4, Springer, 2019.

[13] Glivenko, V.: *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, Bull. Soc. Math. Belg. 15, 183-188, 1929.