Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

APLICACIONS DIDÀCTIQUES DE LA TEORIA DE JOCS

Autora: Sara Esteve Sánchez

Director: Dr. Sergi Múria Maldonado
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

In this project, we introduce the game theory, specifically the equilibria of strategic games, and its application in the classroom.
After introducing previous and necessary concepts, we will study the existence of a Nash equilibrium in dynamic games and static games with pure and mixed strategies.
In the main part of the paper, we explore the implementation of game theory in secondary education and A levels current curriculum. In the didactic proposal, we delve the students into the world of game theory through a workshop and we analyze the obtained results.

Resum

En aquest treball presentem la teoria de jocs, concretament els equilibris dels jocs estratègics, i la seva aplicació a l'aula.
Després d'introduir els conceptes prèvis i necessaris, estudiarem l'existència de l'equilibri de Nash en els jocs dinàmics i els jocs estàtics amb estratègies pures i mixtes.
En la part principal del treball, plantegem l'implementació de la teoria de jocs en el currículum vigent de secundària i batxillerat. En la proposta didàctica, endinsarem als alumnes en el món de la teoria de jocs a través d'un taller i analitzem els resultats obtinguts.

2020 Mathematics Subject Classification. 11G91, 11G97

Agraïments

En primer lloc, vull agrair al Sergi Múria, el tutor d'aquest treball, per l'orientació, la dedicació i l'adaptació al meu horari impossible. Ha estat un plaer aprendre al seu costat. Gràcies per confiar en mi durant tot el procés del treball i aconsellar-me quan més indecisa estava.

En segon lloc, no em puc oblidar dels professors de la meva antiga escola, l'Escola Sant Gervasi; especialment al meu professor de matemàtiques i exalumne de la nostra facultat el Pedro Román i als professors de matemàtiques de primer d'E.S.O., la Mercè Tarragó i el Xavier Caminals. Agraeixo l'oportunitat i la confiança que heu dipositat en mi a l'hora de realitzar el taller. Sense la vostra col·laboració la implementació no hauria estat possible, ha estat un plaer treballar al vostre costat. L'escola Sant Gervasi segueix fent *"cantera"*!

Vull agrair als meus amics Guillem, Oriol, Zaira, Nico, Adriana i Víctor per la seva col·laboració com a conillets d'Índies durant el procés de disseny de les activitats. Em vau preparar per al pitjor dels casos. També vull agrair especialment a l'Ariadna per animar-me quan el món em queia a sobre, grácies per ajudar-me a volar més amunt.

Finalment al Nèstor i a la meva mare, pel suport incondicional i la paciència infinita. Aquesta aventura no ha estat gens fàcil i sóc conscient que no puc tenir millors copilots al meu costat.

A tots, gràcies.

Índex

1 Introducció

En el Diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans podem trobar la definició de joc com: "Entreteniment, exercici recreatiu, sotmès a regles, en el qual entren en competència l'habilitat i la sort dels participants".

Si tenim en compte la definició anterior, sembla paradoxal l'encaix entre els conceptes "joc" i "matemàtiques" les quals, tradicionalment han estat interpretades com una matèria "seriosa". Tot i que els jocs es relacionen directament amb l'oci, és factible considerar com a joc la competència entre empreses en el mercat, entre les forces polítiques (eleccions) i les estratègies militars en una guerra.

Així doncs podem definir la teoria de jocs com una branca de matemàtiques aplicades on s'estudia els models de conflicte i cooperació entre individus racionals. L'anàlisi de jocs ens permet entendre el comportament d'aquests individus i el resultat d'aquestes situacions competitives, així com anticipar els moviments de l'adversari i tindre'ls en compte a l'hora de decidir els nostres moviments.

Des dels primers anys de vida i inclús abans d'aprendre a caminar o parlar, els humans interactuen amb objectes i persones a través dels jocs. Segons Huizinga [21] (1938), *"hi ha hagut un factor de competició lúdica més antiga que la mateixa cultura que impregna tota la vida a la manera d'un ferment cultural, per la qual cosa que podem dir que el joc va ser part integrant de la civilització en les seves primeres fases".*

Així doncs, probablement el joc és connatural a l'essència humana. De fet, al llarg de la història, podem trobar arreu del món la presència dels jocs. Hom considera, però, que no és fins a la guerra freda i a mans de John von Neumann i Oskar Morgensern que no es formalitza la teoria de jocs, a causa de la seva aplicació en qüestions d'intel·ligència i estratègia militar. Posteriorment John Forbes Nash, en la seva tesi doctoral, va demostrar l'existència de l'equilibri de Nash en una extensió mixta mitjançant el teorema del punt fix de Kakutani, una generalització del teorema del punt fix de Brower.

El treball que es presenta a continuació es planteja al voltant de l'equilibri de Nash en els jocs estratègics, aprofundint en la demostració de l'existència d'equilibri en jocs dinàmics i en jocs estàtics on podem determinar la millor resposta de cada jugador.

Un cop establertes les bases teòriques necessàries per a l'aplicació didàctica, reconeixerem l'aportació de diferents referents didàctics en el camp de la teoria de jocs, donant a conèixer algunes de les publicacions més destacades que relacionen els jocs amb les matemàtiques i l'ensenyament d'aquestes.

En l'àmbit didàctic, explorarem la relació entre la resolució de problemes i l'anàlisi d'un joc i plantejarem la implementació de la teoria de jocs en el currículum vigent de secundària i batxillerat.

La proposta didàctica consisteix en un taller de teoria de jocs de tres sessions, posat en pràctica amb tots els grups de primer d'E.S.O de l'Escola Sant Gervasi. En la primera sessió, endinsarem als alumnes en el món de la teoria de jocs a través del clàssic dilema del presoner en model estàtic i dinàmic, amb el qual aprendran com prendre decisions mitjançant la dominància estricta i la inducció enrere. Observarem quin paper juga el factor de l'atzar en els jocs i com tenir en compte la probabilitat en la presa de decisions. En la segona sessió, els alumnes desenvoluparan les activitats en grups, aquestes tres activitats han estat dissenyades de manera que en cada activitat treballa l'equilibri d'un dels jocs estudiats en la part teòrica.
Per acabar, es proposa una última sessió on els alumnes poden demostrar tot el que han après a través d'un concurs.

Finalment, analitzarem les respostes obtingudes en el taller i es procedirà a formular les conclusions derivades dels resultats obtinguts. A més es plantejarà una proposa de millora i unes pautes per investigacions futures.

L'annex inclourà totes les activitats, respostes dels alumnes, anàlisis, càlculs i material desenvolupat durant l'elaboració del treball.

2 Motivació i objectius

Des d'un primer moment vaig decidir que no voldria fer una proposta merament teòrica, ja que considero que en un treball s'ha d'aportar el teu granet de sorra. Així doncs, en aquest treball ha intentat unir dues de les meves branques preferides d'aplicacions de les matemàtiques: la didàctica i la teoria de jocs.

El motiu principal pel qual hem donat un gran pes a la part didàctica és la meva vocació educativa. Des de batxillerat ja sabia que volia fer el grau de matemàtiques per poder dedicar-me al seu ensenyament i l'elecció de la universitat va ser fàcil, ja que, d'entre les que imparteixen matemàtiques, la Universitat de Barcelona era l'única que oferia l'assignatura de didàctica.
Durant el semestre que vaig cursar didàctica, els professors ens van oferir un petit testatge del què ens trobaríem al màster d'ensenyament, de manera que vaig poder reafirmar la meva trajectòria professional.

Per altra banda, en l'assignatura de teoria de jocs vaig poder comprovar que aquesta branca de les matemàtiques té múltiples aplicacions en l'actualitat, tant en l'àmbit laboral com en l'àmbit social. La seva aplicabilitat en l'economia, la biologia evolutiva, la política, el món dels negocis i, òbviament, en la presa de decisions fa que sigui imprescindible en el nostre dia a dia.
D'aquesta manera, és natural arribar a la conclusió que aquesta branca de les matemàtiques aplicades hauria de formar part en la formació de les futures generacions. Un altre motiu seria la gran adaptabilitat que presenta respecte al nivell i contingut matemàtic, tot i no ser ensenyada fins a l'etapa universitària en forma d'assignatura optativa.

Amb motiu d'aquests fets, ens hem proposat en aquest treball uns objectius específics en cada activitat, que comentarem en la secció d'aplicacions didàctiques, i els següents objectius principals:

- Analitzar l'equilibri de Nash i estudiar-ne la problemàtica de l'existència en estratègies pures.
- Mostrar l'existència d'equilibri de Nash amb l'extensió mixta d'un joc.
- Analitzar i demostrar l'existència d'equilibri en jocs dinàmics.
- Reconèixer l'aportació de referents didàctics en el camp de la teoria de jocs.
- Mostrar que la teoria de jocs té cabuda dins el currículum de matemàtiques de secundària i batxillerat, gràcies al lligam que guarda amb les competències de l'àmbit matemàtic establertes pel currículum vigent. [10] [9]
- Endinsar els alumnes en el món de la teoria de jocs i treballar la resolució de problemes matemàtics, on es treballen continguts claus del currículum, des del punt de vista de l'anàlisi d'un joc.
- Dissenyar activitats pràctiques que permetin desenvolupar capacitats crítiques com la presa de decisions i l'estudi analític de situacions conflictives.

3 Definicions prèvies

En aquest apartat definirem els conceptes bàsics de la teoria de jocs acompanyats d'alguns exemples. Així com aprofitarem aquesta secció per fixar la notació i el vocabulari als quals farem referència al llarg de tot el treball.

3.1 Elements d'un joc

Considerarem com a joc qualsevol situació social que involucra la presa de decisions de dos o més individus. Els individus involucrats en un joc els anomenarem jugadors i en tot moment suposarem que són racionals i intel·ligents. El conjunt d'accions que un jugador pot seguir en un joc l'anomenarem estratègia.
Entendrem per racionalitat la presa de decisions conseqüents amb els nostres objectius i assumirem que l'objectiu de tot jugador és maximitzar el seu benefici, el qual vindrà donat per la funció d'utilitat.
Direm que un jugador és intel·ligent si comprèn el joc i pot arribar a qualsevol conclusió que nosaltres puguem arribar.

Definició 3.1. *Un joc de n-jugadors és una terna (N,S,u) on*

- $N = \{1,2,3,...,n\}$ *és el conjunt de jugadors involucrats en un joc.*
- *Anomenem* S_i *el conjunt d'estratègies del jugador i* ($i \in N$)*, és a dir, el conjunt d'accions que pot fer el jugador i en el joc. Definim* $S = S_1 \times ... \times S_n$ *com el conjunt de perfils estratègics.*
- $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *funció d'utilitat del jugador i* ($i \in N$) *assigna el benefici que obté el jugador i per a cada perfil estratègic. És a dir, ens determina el benefici del jugador i en funció de la seva estratègia i l'estratègia de la resta de jugadors.*

Exemple 3.2. Dilema del presoner formalitzat per Albert W. Tucker (1950).[27]
"La policia arresta dos sospitosos i, després d'haver-los separat, els interroga i els ofereix el mateix tracte. Si un confessa i el seu còmplice no, el còmplice serà condemnat a deu anys de presó, i el primer serà alliberat. Si un calla i el còmplice confessa, el primer rebrà aquesta pena i serà el còmplice qui sortirà lliure. Si els dos sospitosos decideixen callar, com a màxim podran tancar-los durant un any. Si ambdós confessen, ambdós seran condemnats a sis anys."

	Culpar (C)	No Culpar (NC)
Culpar (C)	-6,-6	0,-10
No culpar (NC)	-10,0	-1,-1

Taula 1: Dilema del presoner

$$N = \{P_1, P_2\} \qquad \begin{array}{l} S_1 = \{C, NC\} \\ u_1(C,C) = -6 \\ u_1(C,NC) = 0 \\ u_1(NC,C) = -10 \\ u_1(NC,NC) = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} S_2 = \{C, NC\} \\ u_2(C,C) = -6 \\ u_2(C,NC) = -10 \\ u_2(NC,C) = 0 \\ u_2(NC,NC) = -1 \end{array}$$

3.2 Classificació i representació dels jocs:

Els jocs es poden classificar segons diversos criteris com per exemple el nombre de jugadors, el nombre d'estratègies, si són jocs cooperatius o no cooperatius, ... Però nosaltres ens centrarem en dos criteris:
Segons la temporalitat:

- Jocs estàtics o simultanis: els jugadors realitzen l'acció alhora i en conseqüència cada jugador decideix quina acció realitzarà sense saber l'estratègia triada per l'adversari.
- Joc dinàmic: els jugadors realitzen l'acció per torns i per tant el jugador i sap quines accions han realitzat els jugadors antecessors.

Segons la informació:

- Informació completa: tots els jugadors tenen tota la informació del joc a la seva disposició (nombre de jugadors, estratègies i utilitats de tots els jugadors).
- Informació incompleta: no tots els jugadors tenen tota la informació del joc, és a dir, alguns jugadors disposen de menys informació sobre algun o diversos elements del joc.

Per tal de poder analitzar correctament un joc o una situació conflictiva és necessari un model que ens descrigui el joc i els seus elements. Els dos models de representació més utilitzats són la forma extensiva i la forma normal.
La forma extensiva, estandarditzada gràcies a Khun (1953), descriu el joc mitjançant un diagrama d'arbre (*Figura 1*) on cada possible seqüència d'esdeveniments que es poden produir al joc està representada per un camí de branques des de l'arrel fins a un node terminal. A cada node terminal, l'arbre mostra un conjunt de nombres que representen la recompensa que obtindria cada jugador si el camí de joc acabés en aquest node.

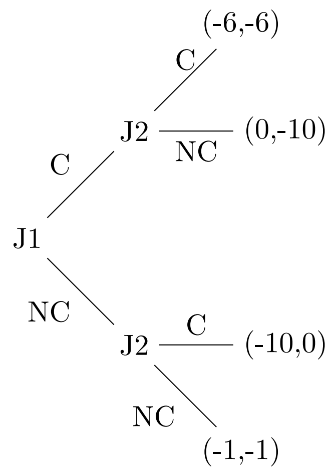


Figura 1: Dilema del presoner.

La forma normal és la representació més senzilla d'un joc de dos jugadors que han d'escollir entre un nombre finit d'estratègies diferents. El joc és descrit mitjançant una bimatriu on les cel·les contenen els beneficis que obté cada jugador per a cada possible combinació d'estratègies. La *Taula 1: Dilema del presoner* és un clar exemple d'un joc representat en forma normal.

Notació 1. *Si l'esdeveniment o la tria ve donada per l'atzar, assignarem "0"(zero) al node atzar. Les branques mostren el camí del joc segons les probabilitats que es mostren.*

Exemple 3.3. Sigui un joc (N, S, u) representat en forma extensiva per l'arbre següent:

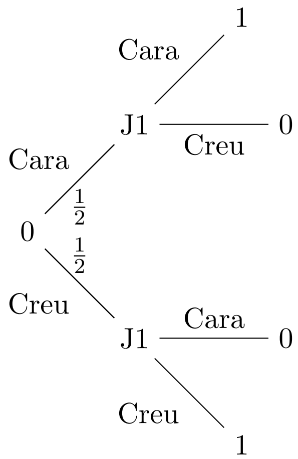


Figura 2: Llançament d'una moneda amb un jugador.

Aquest joc està format per un node arrel d'atzar que assigna un 50% de probabilitats al fet que surti cara i un 50% al fet que surti creu.

En la secció extensió mixta d'un joc aprofundirem en l'anàlisi d'aquest estil de jocs.

3.3 Dominància d'estratègies

Un cop definits els elements d'un joc, és natural que els jugadors es preguntin quina és la millor estratègia, ja que d'aquesta tria dependrà el resultat del joc i en conseqüència l'obtenció d'uns determinats beneficis.

Notació 2. *Donat $G = (N, S, u)$ un joc, utilitzarem les següents notacions:*

- S_{-i}: *conjunt de tots els perfils d'estratègies de tots els jugadors excepte el jugador i, és a dir:* $S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$.
- *Els elements de* S_{-i} *els denotarem com* $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ *on* s_j *són les estratègies dels jugadors* $j \neq i$ *i que no inclou l'estratègia triada pel jugador i.*
- *Donat un perfil estratègic* $s \in S$, *denotarem per* (s_i^*, s_{-i}) *el perfil estratègic* $(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, ..., s_n)$.

Definició 3.4. *Donat un jugador $i \in N$, diem que l'estratègia $s_i^* \in S_i$ domina estrictament l'estratègia $s_i \in S_i$ si*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

És a dir, independentment de les decisions de la resta dels jugadors, la utilitat (beneficis) del jugador i és estrictament major quan selecciona s_i^* que quan selecciona s_i.

Direm que s_i^* domina dèbilment l'estratègia s_i si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Definició 3.5. *Direm que l'estratègia $s_i^* \in S_i$ és dominant (dèbilment dominant) si domina estrictament (dèbilment) totes les altres estratègies, és a dir, si*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

De la mateixa manera direm que una estratègia $s_i \in S_i$ és dominada o estrictament dominada si existeix s_i^* tal que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Observació 3.6. Només pot haver-hi una única estratègia dominant per definició. En canvi, poden haver-hi més d'una estratègia dèbilment dominant.

Exemple 3.7. Sigui el joc (N, S, u) següent:
$N = 1, 2$
$S_1 = \{X, Y\}$ i $S_2 = \{A, B, C\}$

	A	B	C
X	3,2	1,3	0,1
Y	3,1	2,1	1,4

Observem que, respecte el jugador 1, Y no domina estrictament a X, ja que, encara que $u_1(Y, B) = 2 > 1 = u_1(X, B)$ i $u_1(Y, C) = 1 > 0 = u_1(X, C)$, tenim que $u_1(Y, A) = 3 \not> 3 = u_1(X, A)$.
En canvi, podem afirmar que l'estratègia Y del jugador 1 domina dèbilment a X:
$u_1(Y, B) > u_1(X, B)$, $u_1(Y, C) > u_1(X, C)$ i $u_1(Y, A) = 3 \geq 3 = u_1(X, A)$.

Definició 3.8. *Sigui $G = (N, S, u)$ un joc. La funció millor resposta del jugador $i \in N$ assigna l'estratègia del jugador i que maximitza els seus beneficis depenent de qualsevol combinació d'estratègies dels altres jugadors.*

$$R_i : S_{-i} \longrightarrow S_i$$
$$R_i(s_{-i}) = \{s_i^* \in S_i \text{ tal que } u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})\} \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Exemple 3.9. Tornant a l'exemple del dilema del presoner *(Taula 1)* podem observar clarament que culpar (C) domina estrictament a no culpar (NC) pels dos jugadors, ja que $u_1(C,C) = -6 > -10 = u_1(NC,C)$ i $u_2(C,C) = -6 > -10 = u_2(C,NC)$.

Per tant podem dir que culpar (C) és dominant. I de la mateixa manera observem que l'estratègia No Culpar (NC) és estrictament dominada per Culpar (C) en el cas dels dos jugadors.

Definim les millors respostes de cada jugador:

Jugador 1	Jugador 2
$R : S_2 \longrightarrow S_1$	$R : S_1 \longrightarrow S_2$
$C \longrightarrow C$	$C \longrightarrow C$
$NC \longrightarrow C$	$NC \longrightarrow C$

Aleshores veiem que

- La millor resposta pel jugador 1, independentment de la decisió que pren el jugador 2, és Culpar (C).

$$R_1(s_2) = C \quad \forall s_2 \in S_2.$$

- De la mateixa manera observem que la millor resposta pel jugador 2 també és culpar (C).

$$R_2(s_1) = C \quad \forall s_1 \in S_1.$$

4 Equilibri de Nash

Si consideréssim un joc com un problema, la seva solució seria identificar les estratègies escollides pels jugadors. Aquesta solució la denominarem equilibri del joc, ja que es tracta d'un perfil d'estratègies en el que cap jugador racional té incentius per moure's. I per tant s'obté un punt d'equilibri en el joc.

Cal remarcar la importància de la racionalitat en els jugadors, ja que ens assegura que l'objectiu de tot jugador és obtenir el benefici més gran possible.

John F. Nash (1950) va proposar el que es considera el primer concepte de solució de referència dels jocs simultanis: l'equilibri de Nash.

Definició 4.1. *Sigui* $G = (N, S, u)$ *un joc, un perfil d'estratègies* $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ *és un equilibri de Nash (EN) si* $\forall i \in N, \quad u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$.

Observació 4.2. Un perfil d'estratègies s^* és un equilibri de Nash si, i només si, cap jugador racional $i \in N$ no pot incrementar el seu benefici en canviar d'estratègia si la resta de jugadors segueixen l'estratègia determinada per s^*.
Per tant, gràcies a l'equilibri de Nash, podem determinar el resultat d'un joc si tots els jugadors són racionals.

Proposició 4.3. $(s_1^*, ..., s_n^*)$ *és un equilibri de Nash si, i només si,* $R_i(s_{-i}^*) = s_i^* \quad \forall i \in N$.

Demostració. A continuació veurem que la demostració es realitza quasi per definició. Sigui (N, S, u) un joc.

$\Longrightarrow$ Suposem que $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ és l'equilibri de Nash, per definició tenim que: $\forall i \in N \quad u_i(s^*) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$, aleshores observem clarament que la millor resposta per qualsevol jugador $i \in N$ sempre serà s_i^*, és a dir, $R_i(s_{-i}^*) = s_i^* \quad \forall i \in N$.

$\Longleftarrow$ Suposem que $\forall i \in N \quad R_i(s_{-i}^*) = s_i^*$, és a dir, suposem que la millor resposta per a qualsevol jugador és s_i^*. Si es dóna aquest cas, per definició tenim que per a qualsevol jugador $i \in N$, $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$. Per tant, donat $s* = (s_i^*, s_{-i}^*) \in S$ tenim que $\forall i \in N \quad u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$. $\square$

Observació 4.4. Recuperem l'exemple del Dilema del presoner de la *Taula 1.*
Tal com havíem comentat en l'exemple 3.9:

- La millor resposta del jugador 1 era culpar (C).
- La millor resposta del jugador 2 també era culpar (C).

Aleshores podem concloure, per la proposició anterior, que l'equilibri de Nash del Dilema del presoner és (C, C).

4.1 Equilibri en jocs estàtics

La proposició anterior ens pot portar a pensar que eliminar una estratègia estrictament dominada per una altra no afectarà en l'equilibri de Nash i, en conseqüència tampoc alterarà el resultat i l'anàlisi del joc.

Aquest raonament clarament és cert, ja que el jugador $i \in N$ mai no escolliria l'estratègia que està estrictament dominada i, pel concepte d'intel·ligència que hem esmentat al principi del capítol, la resta de jugadors seran conscients d'aquest fet evident.

Observació 4.5. Del raonament anterior podem extreure les següents observacions:

- Quan eliminem una o diverses estratègies estrictament dominades per una altra, pot passar que altres estratègies que no eren estrictament dominades abans de l'eliminació, ara sí que ho siguin.
- Quan eliminem una estratègia estrictament dominada per una altra, mai no s'elimina un equilibri de Nash.
- Si eliminem una estratègia dèbilment dominada, correm el risc d'eliminar l'equilibri de Nash.
- Si en el procés iteratiu d'eliminació d'estratègies dominades només "sobreviu" una estratègia per a cada jugador, aleshores aquest perfil estratègic és l'únic equilibri de Nash del joc.

Exemple 4.6. Sigui el joc (N, S, u) següent:
$N = 1, 2$
$S_1 = \{X, Y\}$ i $S_2 = \{A, B, C\}$

	A	B	C
X	2,3	3,1	1,0
Y	1,3	1,6	4,2

$$\begin{array}{ll} u_1(X,A) = 2 & u_2(X,A) = 3 \\ u_1(X,B) = 3 & u_2(X,B) = 1 \\ u_1(X,C) = 1 & u_2(X,C) = 0 \\ u_1(Y,A) = 1 & u_2(Y,A) = 3 \\ u_1(Y,B) = 1 & u_2(Y,B) = 6 \\ u_1(Y,C) = 4 & u_2(Y,C) = 2 \end{array}$$

Observem que, respecte el jugador 1, Y no és estrictament dominada per X, ja que, encara que $u_1(X,A) = 2 > 1 = u_1(Y,A)$ i $u_1(X,B) = 3 > 1 = u_1(Y,B)$, tenim que $u_1(X,C) = 1 < 4 = u_1(Y,C)$.

En canvi, respecte el jugador 2, C és estrictament dominada per A ja que $u_2(X,A) = 3 > 0 = u_2(X,C)$ i $u_2(Y,A) = 3 > 2 = u_2(Y,C)$.

Aleshores per racionalitat podem eliminar l'estratègia C del jugador 2, ja que és estrictament dominada per A. D'aquesta eliminació ens resulta el següent subjoc:

	A	B
X	2,3	3,1
Y	1,3	1,6

Observem que, respecte el jugador 2, B no és estrictament dominada per A, ja que, encara que $u_2(X, A) = 3 > 1 = u_2(X, B)$, tenim que $u_2(Y, A) = 3 < 6 = u_2(Y, B)$.

Notem ara que, degut a l'eliminació de l'estratègia C, l'estratègia Y del jugador 1 ha passat a ser estrictament dominada per l'estratègia X:
$u_1(X, A) = 2 > 1 = u_1(Y, A)$ i $u_1(X, B) = 3 > 1 = u_1(Y, B)$
Per tant, tenim que $R_1(S_2) = X$, és a dir, la millor resposta del jugador 1 és X.

Aleshores per racionalitat podem descartar l'estratègia Y del jugador 1, ja que és estrictament dominada per X. D'aquesta eliminació ens resulta el següent subjoc:

	A	B
X	2,3	3,1

Per acabar, com $u_2(X, A) = 3 > 1 = u_2(X, B)$, sabem que $R_2(S_1) = A$, és a dir, la millor resposta del jugador 2 és l'estratègia A.

Sabent la millor resposta de cada jugador i aplicant la proposició 3.12, obtenim (X,A) com a equilibri de Nash d'aquest joc.

Problema 4.7. Un cop hem demostrat l'existència de l'equilibri d'estratègies en els jocs estàtics on podem determinar la millor resposta de cada jugador, és natural preguntar-se per l'existència de l'equilibri de Nash en els jocs on no ens és possible trobar la millor resposta.

Exemple 4.8. El pedra-paper-tisores és un joc de mans format pels tres elements que indica el seu nom. La pedra aixafa a les tisores, les tisores tallen el paper i el paper embolica la pedra.
Aleshores obtenim el joc (N, S, u) representat en forma normal:

	R	P	T
R	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
T	-1,1	1,-1	0,0

$N = 1, 2$
$S_1 = \{pedra(R), paper(P), tisores(T)\}$ i $S_2 = \{pedra(R), paper(P), tisores(T)\}$.
Els beneficis venen donats per la taula.

Observem que, com cap estratègia de cap jugador és estrictament dominada per una altra, no podem realitzar l'eliminació per dominància.

Definim les millors respostes de cada jugador:

Jugador 1	Jugador 2
$R : S_2 \longrightarrow S_1$	$R : S_1 \longrightarrow S_2$
$R \longrightarrow P$	$R \longrightarrow P$
$P \longrightarrow T$	$P \longrightarrow T$
$T \longrightarrow R$	$T \longrightarrow R$

Llavors ens trobem davant d'una situació en la qual no podem determinar l'equilibri de Nash, ja que no podem determinar quina serà la millor resposta d'un jugador independentment de la tria de l'altre jugador.

4.2 Extensió mixta d'un joc

Fins ara hem suposat que cada vegada que un jugador prenia una decisió en un joc, utilitzava una estratègia pura, és a dir, una estratègia ben definida. Però, tal com havíem vist en el joc de pedra-paper-tisores, en estratègies pures ens podem trobar amb la problemàtica de no poder determinar l'equilibri de Nash en alguns jocs.

Per tant, necessitem una nova eina per poder apropar-nos a l'equilibri d'aquest estil de jocs on no podem preveure quina estratègia seguirà cada jugador.

En aquesta secció estudiarem com afecta l'assignació d'una probabilitat determinada a una estratègia, el que en teoria de jocs es coneix com a estratègies mixtes. D'aquesta manera, busquem resoldre la problemàtica de l'existència de l'equilibri de Nash en els jocs estàtics.

Definició 4.9. *Sigui un joc (N, S, u) on $\forall i \in N, S_i$ és finit. Per cada jugador $i \in N$, definim Σ_i com el conjunt de les probabilitats assignades a cadascuna de les estratègies, és a dir,*

$$\Sigma_i = \{\sigma \in \mathbb{R}^{\#S_i} \textit{ tal que } \forall j = 1, ..., \#S_i \quad \sigma_j \geq 0 \quad i \quad \textstyle\sum_{j=0}^{\#S_i} \sigma_j = 1\}$$

on $\#S_i$ denota el nombre d'estatègies del jugador i.

Per tant podem definir $\Sigma = \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$ com l'espai definit per les probabilitats assignades a cadascuna de les estratègies de cada jugador.

Un cop hem assignat una probabilitat a cada estratègia de cada jugador, ens trobem amb la necessitat de redefinir la funció d'utilitat d'un joc, ja que aquesta funció ens determinava el benefici esperat de cada jugador en funció de la seva estratègia i la de la resta de jugadors.

Definició 4.10. *Definim $U_i : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció d'utilitat esperada del jugador $i \in N$ que ens assigna el benefici esperat que obtindrà el jugador $i \in N$ en funció del perfil d'estratègies mixtes Σ de la següent manera:*

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S}[(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j)) \cdot u_i(s)] \quad \text{on } \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n).$$

Definició 4.11. *Donat un joc $G = (N, S, u)$, definim l'extensió mixta de G al joc $G' = (N, \Sigma, U)$ resultant d'assignar-li el perfil d'estratègies mixtes Σ i la funció d'utilitat esperada U.*

Observació 4.12. Un joc en estratègies pures és un cas particular d'una extensió mixta on $\sigma_i(s_i) = 1$, és a dir, la probabilitat de cada estratègia és 1.

Exemple 4.13. Pedra-Paper-Tisores (exemple 4.8)

	R	P	T
R	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
T	-1,1	1,-1	0,0

Recuperant el joc de Pedra-Paper-Tisores, podem assignar el perfil d'estratègies mixtes $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ tal que:

$$\Sigma_1 = (p_R, p_P, p_T = 1 - p_R - p_P)$$
$$\Sigma_2 = (q_R, q_P, q_T = 1 - q_R - q_P)$$

on p_R i q_R és la probabilitat que cada jugador jugui pedra (R), p_P i q_P és la probabilitat pel paper (P) i p_T i q_T és la probabilitat per les tisores (T).

D'aquesta manera podem calcular la funció d'utilitat esperada per cada jugador:

- Utilitat del jugador 1:
  $U_1(\sigma_1, \sigma_2) = p_R \cdot q_R \cdot u_1(R, R) + p_R \cdot q_P \cdot u_1(R, P) + p_R \cdot q_T \cdot u_1(R, T) + p_P \cdot q_R \cdot u_1(P, R) + p_P \cdot q_P \cdot u_1(P, P) + p_P \cdot q_T \cdot u_1(P, T) + p_T \cdot q_R \cdot u_1(T, R) + p_T \cdot q_P \cdot u_1(T, P) + p_T \cdot q_T \cdot u_1(T, T)$
  $= p_R \cdot q_R \cdot 0 + p_R \cdot q_P \cdot (-1) + p_R \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot 1 + p_P \cdot q_R \cdot 1 + p_P \cdot q_P \cdot 0 + p_P \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot (-1) + (1 - p_R - p_P) \cdot q_R \cdot (-1) + (1 - p_R - p_P) \cdot q_P \cdot 1 + (1 - p_R - p_P) \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot 0 = ... ^{\text{A}} =$
  $= p_R - p_P - q_R + q_P - 3 \cdot p_R \cdot q_P + 3 \cdot p_P \cdot q_R$

  Aleshores la utilitat de $U_1(\sigma_1, \sigma_2) = p_R - p_P - q_R + q_P - 3 \cdot p_R \cdot q_P + 3 \cdot p_P \cdot q_R$ (1)

- Utilitat del jugador 2:
$U_2(\sigma_1,\sigma_2) = p_R \cdot q_R \cdot u_2(R,R) + p_R \cdot q_P \cdot u_2(R,P) + p_R \cdot q_T \cdot u_2(R,T) + p_P \cdot q_R \cdot u_2(P,R) + p_P \cdot q_P \cdot u_2(P,P) + p_P \cdot q_T \cdot u_2(P,T) + p_T \cdot q_R \cdot u_2(T,R) + p_T \cdot q_P \cdot u_2(T,P) + p_T \cdot q_T \cdot u_2(T,T)$
$= p_R \cdot q_R \cdot 0 + p_R \cdot q_P \cdot 1 + p_R \cdot (1-q_R-q_P) \cdot (-1) + p_P \cdot q_R \cdot (-1) + p_P \cdot q_P \cdot 0 + p_P \cdot (1-q_R-q_P) \cdot 1 + (1-p_R-p_P) \cdot q_R \cdot 1 + (1-p_R-p_P) \cdot q_P \cdot (-1) + (1-p_R-p_P) \cdot (1-q_R-q_P) \cdot 0 = \ldots\ ^{\text{A}} =$
$= -p_R + p_P + q_R - q_P + 3 \cdot p_R \cdot q_P - 3 \cdot p_P \cdot q_R$

  Aleshores la utilitat de $U_2(\sigma_1,\sigma_2) = -p_R + p_P + q_R - q_P + 3 \cdot p_R \cdot q_P - 3 \cdot p_P \cdot q_R$ (2)

Per tal de trobar la millor resposta de cada jugador, haurem d'estudiar la utilitat de cada jugador en funció de les probabilitats assignades a cada estratègia:

Millor resposta pel jugador 1:
Podem expressar la utilitat (1) com $U_1(\sigma_1,\sigma_2) = p_R(1-3q_P) + p_P(-1+3q_R) - q_R + q_P$
Observem que $-q_R + q_P$ no afecta la decisió del jugador 1, ja que estan fixades pel jugador 2. De manera que, si volem maximitzar el valor de la funció d'utilitat esperada, obtenim que:

$$R_1(q_P) = \begin{cases} p_R = 1 & si \quad 1-3q_P > 0 \\ p_R = 0 & si \quad 1-3q_P < 0 \\ p_R \in [0,1] & si \quad 1-3q_P = 0 \end{cases} \longrightarrow R_1(q_P) = \begin{cases} p_R = 1 & si \quad q_P < \frac{1}{3} \\ p_R = 0 & si \quad q_P > \frac{1}{3} \\ p_R \in [0,1] & si \quad q_P = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$R_1(q_R) = \begin{cases} p_P = 1 & si \quad -1+3q_R > 0 \\ p_P = 0 & si \quad -1+3q_R < 0 \\ p_P \in [0,1] & si \quad -1+3q_R = 0 \end{cases} \longrightarrow R_1(q_R) = \begin{cases} p_P = 1 & si \quad q_R > \frac{1}{3} \\ p_P = 0 & si \quad q_R < \frac{1}{3} \\ p_P \in [0,1] & si \quad q_R = \frac{1}{3} \end{cases}$$

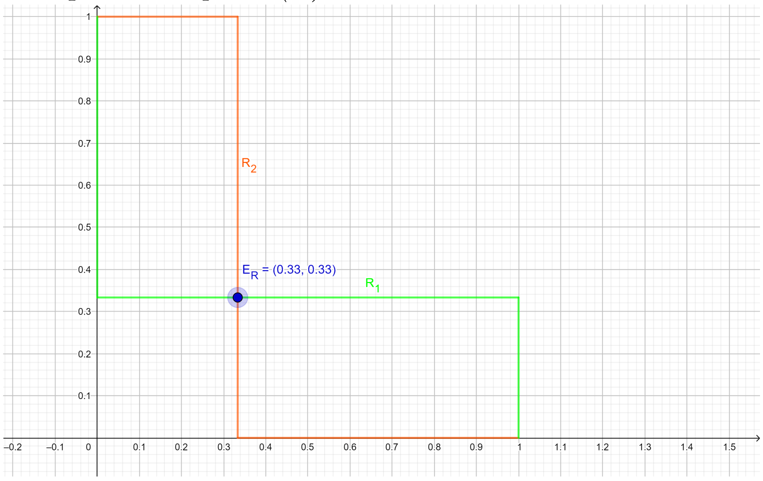
Millor resposta pel jugador 2:
Podem expressar la utilitat (2) com $U_2(\sigma_1,\sigma_2) = q_R(1-3p_P) + q_P(-1+3p_R) - p_R + p_P$
Observem que $-p_R + p_P$ no afecta la decisió del jugador 2, ja que estan fixades pel jugador 1. De manera que obtenim anàlogament:

$$R_2(p_P) = \begin{cases} q_R = 1 & si \quad 1-3p_P > 0 \\ q_R = 0 & si \quad 1-3p_P < 0 \\ q_R \in [0,1] & si \quad 1-3p_P = 0 \end{cases} \longrightarrow R_2(p_P) = \begin{cases} q_R = 1 & si \quad p_P < \frac{1}{3} \\ q_R = 0 & si \quad p_P > \frac{1}{3} \\ q_R \in [0,1] & si \quad p_P = \frac{1}{3} \end{cases}$$

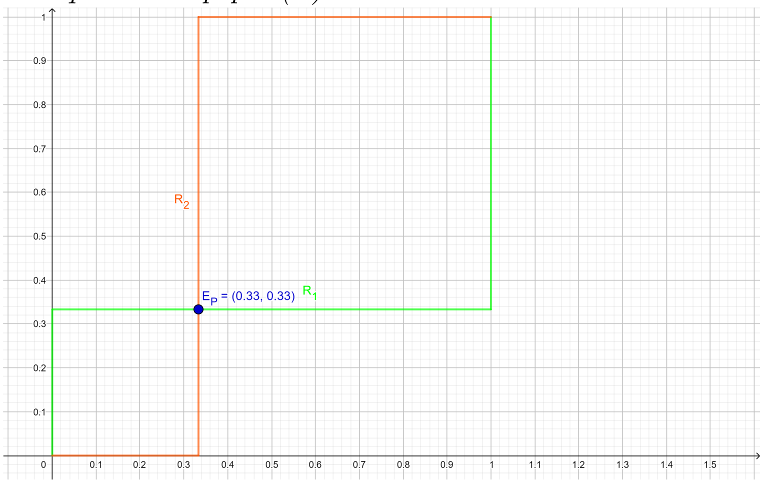
$$R_2(p_R) = \begin{cases} q_P = 1 & si \quad -1+3p_R > 0 \\ q_P = 0 & si \quad -1+3p_R < 0 \\ q_P \in [0,1] & si \quad -1+3p_R = 0 \end{cases} \longrightarrow R_2(p_R) = \begin{cases} q_P = 1 & si \quad p_R > \frac{1}{3} \\ q_P = 0 & si \quad p_R < \frac{1}{3} \\ q_P \in [0,1] & si \quad p_R = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Per tal de trobar l'equilibri hem de calcular la intersecció de les millors respostes de cada jugador:

Equilibri en pedra (R):



Equilibri en paper (P):



Recordem que la probabilitat de tisores (T) complia la propietat $p_T = 1 - p_R - p_P$ pel jugador 1 i $q_T = 1 - q_R - q_P$. Aleshores obtenim que l'equilibri s'assoleix quan assignem les probabilitats:

	Pedra (R)	**Paper (P)**	**Tisores (T)**
Jugador 1	$p_R = \frac{1}{3}$	$p_P = \frac{1}{3}$	$p_T = \frac{1}{3}$
Jugador 2	$q_R = \frac{1}{3}$	$q_P = \frac{1}{3}$	$q_T = \frac{1}{3}$

Per tant hem trobat l'equilibri de Nash: $EN = ((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}); (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$.

Així doncs podem interpretar que l'equilibri de Nash s'assoleix quan els jugadors assignen la mateixa probabilitat a cada estratègia.

4.2.1 Teorema de Nash

El teorema del punt fix de Kakutani és una generalització del teorema del punt fix de Brouwer que va permetre a J.F. Nash assegurar l'existència de l'equilibri de Nash en una extensió mixta.

En aquest treball ens limitarem a anunciar els dos teoremes, ja que demostrar-lo no es tracta d'un dels nostres objectius i l'extensió del treball és limitada. Per poder anunciar el teorema de Kakutani necessitem definir uns conceptes previs.

Definició 4.14. *Una correspondència $\Gamma : X \longrightarrow Y$ és una aplicació que ens assigna cada element $p \in X$ a un subconjunt de Y, és a dir*

$$\Gamma(p) \subseteq Y \quad \forall p \in X$$

Definició 4.15. *Siguin X i Y espais topològics, una correspondència $\Gamma : X \longrightarrow Y$ és semicontínua superiorment en $p \in X$ si, per tot obert $U \subset Y$ amb $\Gamma(p) \subset U$, existeix un entorn V de p tal que $\Gamma(z) \subset U \quad \forall z \in V$.*
Direm que una correspondència és semicontínua superiorment si ho és per tot $\forall p \in X$.

Teorema. ***del punt fix de Kakutani*** *[31]*
Sigui S un subconjunt d'un espai vectorial de dimensió finita no buit, convex, acotat i tancat. Sigui $\Gamma : S \longrightarrow S$ una correspondència semicontínua superiorment tal que $\Gamma(p)$ és un subconjunt de S convex i no buit $\forall p \in S$. Aleshores existeix un punt fix , és a dir, existeix $z^* \in S$ tal que $z^* \in \Gamma(z^*)$.

Tal com havíem anunciat en el principi del capítol, J. F. Nash definia el concepte d'equilibri d'un joc com el perfil d'estratègies en el que cap jugador racional té incentius per moure's.

Donat un joc G = (N, S, u) i aplicant en la seva extensió mixta $G' = (N, \Sigma, U)$ una correspondència adequada, per a cada jugador $i \in N$ podem assignar a cada perfil d'estratègies mixtes $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ el perfil d'estratègies que maximitzen els beneficis. Aquesta construcció ve donada pel que es denomina la correspondència de millor resposta.

Per com estan definits els conceptes, observem que l'equilibri de Nash coincideix amb els punts fixos de la correspondència de millor resposta.

Anunciem doncs el teorema de Nash que ens assegura l'existència de l'equilibri de Nash en un joc amb estratègies mixtes.

Teorema. ***de Nash*** *Donat qualsevol joc G i la seva extensió mixta G', existeix com a mínim un equilibri en G'.*

4.3 Equilibri en jocs dinàmics

Com havíem vist en l'apartat de classificació i representació dels jocs, la forma extensiva és la millor estructura per analitzar un joc dinàmic, ja que en ella es mostra cada possible seqüència d'esdeveniments.

En el cas dels jocs dinàmics, és natural arribar a la conclusió que l'estratègia presa pel primer jugador afectarà directament en la presa de decisions de la resta de jugadors.

Per tant, en el cas dels jocs dinàmics utilitzem un procés de raonament per trobar les millors estratègies per a cada jugador anomenat inducció cap enrere. Al ser capaç de trobar les millors respostes dels jugadors, aquest mètode és utilitzat en la teoria de jocs per a trobar l'equilibri de Nash en els jocs dinàmics.

Suposant racionalitat i intel·ligència en els jugadors, iniciem l'anàlisi del joc pel final, ja que, abans de prendre qualsevol decisió, el jugador 1 analitzarà quines possibles reaccions provocarà la seva tria en la resta de jugadors. Mitjançant l'anticipació de l'acció que realitzarà l'últim jugador, és possible preveure quina estratègia escollirà el penúltim jugador i així successivament fins a arribar al primer jugador.

Observació 4.16. Els jugadors que no tenen successors trien la millor estratègia per ells. En canvi, els jugadors amb successors hauran d'analitzar quina estratègia triaran els següents jugadors per poder prendre una decisió.

Definició 4.17. *Donat un joc (N, S, u) representat en forma extensiva mitjançant un arbre, utilitzarem les següents definicions:*

- *Cada node d'un arbre representarà o bé un jugador o bé el factor atzar "0".*
- *Les diferents branques que surten d'un node representen les possibles estratègies que pot seguir el jugador.*
- *Anomenem node arrel o arrel al punt de sortida, és a dir, al primer node d'un arbre.*
- *Direm nodes fills als nodes descendents i nodes pares als nodes ascendents. Cada node pot tenir zero o més fills. Tots els nodes tenen un node pare excepte l'arrel.*
- *Anomenem node terminal aquell que no té nodes descendents, és a dir, que no té fills. Aquest node ens mostra els beneficis que rep cada jugador en funció de les decisions que han conduït al resultat del joc fins aquell node terminal.*
- *Sigui P un jugador i c una estratègia de P, definim el camí (P, c) com el camí des de l'arrel de T fins al node terminal tal que, si u és un node d'aquest camí del jugador P, aleshores la branca (u, c(u)) és una branca d'aquest camí. Per tant anomenarem subarbre de tria determinat per P i c a la unió de tots els camins (P, c).*
- *La funció altura d'un arbre $A(T)$ ens assigna el nivell màxim d'un node en l'arbre. Entenem per nivell d'un node el nombre de branques que hi ha des de l'arrel fins al node.*

- *Sigui u un node de T, anomenarem tall T_u al subarbre generat pel node u. Obtenim doncs un subarbre format per l'arrel u, tots els nodes descendents d'u i les branques que tenen com a origen l'arrel u i els nodes descendents.*

Definició 4.18. *Sigui T un arbre que representa el joc (N, S, u) i sigui l'estratègia $s_i \in S_i$ per $i \in N$. Si w és un node terminal de $\bigcap\limits_{i=1}^{n} s_i$ i si R és el camí des de l'arrel fins al node w, aleshores la probabilitat que el joc acabi en el node w és*

$$Pr(s_1, ..., s_n; w) = \prod \{Pr(u,\ x) \text{ on } u \text{ representa un node atzar i } (u, v) \in R\}.$$

El benefici esperat $u_i(s_1, ..., s_n)$ pel jugador P_i, com a conseqüència dels subarbres de tria $s_i \in S_i$, està definit com:

$$u_i(s_1, ..., s_n) = \sum Pr(s_1, ..., s_n; w)u_i(w)$$

on es realitza la suma per a tot node terminal $w \in \bigcap_{j=1}^{n} s_i$.

Observació 4.19. Si no hi ha nodes d'atzar en el camí R, aleshores $Pr(s_1, ..., s_n; w) = 1$

Proposició 4.20. *Sigui T un arbre amb arrel r que representa en forma extensiva un joc (N, S, u). Siguin $s_1, ..., s_n$ els subarbres tria dels jugadors $P_1, ..., P_n$. Aleshores tenim que:*

1. *Si r correspon a un jugador P_i i la branca $(r, u) \in s_i$, on u és un node fill de l'arrel r, aleshores per $1 \geq j \geq n$,*

$$u_j(s_1, ..., sn) = u_j(s_1 \cap T_u, ..., s_n \cap T_u).$$

2. *Si r correspon a un node d'atzar, aleshores per $1 \geq j \geq n$ i F(r) el conjunt de nodes fills de r,*

$$u_j(s_1, ..., sn) = \textstyle\sum_{u \in F(r)} Pr(r, u)u_j(s_1 \cap T_u, ..., s_n \cap T_u).$$

Demostració. de la proposició:

1. Observem que cada $s_k \cap T_u$ és un subarbre tria de T_u pel jugador P_k, ja que, com $u \in s_k$ per $1 \geq k \geq n$, $s_k \cap T_u \neq \emptyset$. Aleshores observem que $\bigcap\limits_{k=1}^{n} s_k$ és $\bigcap\limits_{k=1}^{n} (s_k \cap T_u)$ juntament amb la branca (r,u). D'aquesta manera, el subarbre $\bigcap\limits_{k=1}^{n} s_k$ de T i el subarbre $\bigcap\limits_{k=1}^{n} (s_k \cap T_u)$ de T_u tenen els mateixos nodes terminals. Per tant, els dos arbres mostraran els mateixos resultats del joc.

2. De la mateixa manera obtenim que $s_k \cap T_u$ és un subarbre de tria per a cada k i per cada node u fill de l'arrel r. Observem que

$$Pr(s_1, ..., s_n; w) = Pr(r, u)Pr(s_1 \cap T_u, ..., s_n \cap T_u; w),$$

per qualsevol node terminal $w \in \bigcap_{k=1}^{n} (s_k \cap T_u)$. Aleshores per $u_j := u_j(s_1, ..., s_n)$ i fent la suma de tots els nodes terminals $w \in \bigcap_{k=1}^{n} s_k$ obtenim:

$u_j = \sum Pr(s_1, ..., s_n; w)u_j(w)$

$= \sum_{u \in F(r)} \sum_{w \in (s_k \cap T_u)} Pr(s_1, ..., s_n; w)u_j(w)$

$= \sum_{u \in F(r)} Pr(r, u) \sum_{w \in (s_k \cap T_u)} Pr(s_1 \cap T_u, ..., s_n \cap T_u; w)u_j(w)$

$= \sum_{u \in F(r)} Pr(r, u)u_j(s_1 \cap T_u, ..., s_n \cap T_u).$

$\square$

A continuació analitzarem l'equilibri en els jocs dinàmics. Seguirem entenent que una N-tupla d'estratègies està en equilibri si cap jugador té incentius per canviar la seva estratègia.

D'aquesta manera els jocs dinàmics es desenvolupen segons aquest equilibri, un cop el primer jugador actua segons indica la N-tupla, els jugadors successius tenen motius per seguir l'estratègia marcada per la N-tupla.

Definició 4.21. *Sigui un joc (N, S, u) en forma extensiva, una N-tupla $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$, on $s_i^* \in S_i \quad \forall i \in N$, és un equilibri si*

$$\forall i \in N, \quad u_i(s_1^*, ..., s_i, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, s_i^*, s_n^*) \quad \forall s_i \in S_i.$$

Definició 4.22. *Anomenem estratègia d'un jugador a un pla complet d'acció, el qual especifica una acció per cada possible node de decisió per aquest jugador.*

Exemple 4.23. Sigui l'exemple del dilema del presoner en dinàmic representat en forma extensiva en forma d'arbre per la *Figura 1*, obtenim que les següents estratègies per a cada jugador:
$S_1 = \{C, NC\}$
$S_2 = \{(C, C), (C, NC), (NC, C), (NC, NC)\}$
Les estratègies de S_2 les llegirem de la següent manera:

(X,Y) ens descriu que el jugador 2 triarà Y si el jugador 1 juga X.

Per exemple l'estratègia (NC,C) ens diu que el jugador dos tria l'estratègia C si el jugador 1 ha escollit NC.

Definició 4.24. *Sigui (N, S, u) un joc representat en forma extensiva, direm que aquest joc és d'informació completa si, per cada jugador, cada subarbre generat per una tria és una estratègia.*

Teorema 4.25. *Sigui (N, S, u) un joc en forma extensiva. Si el joc és d'informació perfecta, aleshores existeix una N-tupla d'estratègies en equilibri.*

Demostració. Provarem el teorema per inducció sobre l'altura de l'arbre T que representa el joc (N, S, u).

Cas inicial: $A(T) = 1$.
En aquest cas, l'arbre està format per un node (arrel) acompanyat per les branques, que representen les possibles estratègies del jugador que escull, i els nodes terminals que mostren els beneficis. Observem clarament que, en aquest cas de $A(T) = 1$, com a màxim un jugador pren una decisió, depenent de si es tracta d'un node d'atzar o d'un jugador.

Estudiem els casos:

- Si el node arrel es tracta d'un node atzar, el subarbre de tria de cada jugador ha de ser considerat tot T, ja que no existeixen altres possibilitats.
- Si el node arrel correspon a un jugador, aquest jugador escollirà l'estratègia que maximitza els seus beneficis, és a dir, donat el jugador $i \in N$ aquest triarà l'estratègia $s_i^* \in S_i$ tal que $u_i(s_i^*) \geq u_i(s_i) \quad \forall s_i \in S_i$.
  El subarbre generat per la tria tan sols consisteix d'una branca que desemboca en el node terminal el qual mostra els beneficis que obté cada jugador. Per tant, tornem a considerar tot T el subarbre de tria de cada jugador, ja que no hi ha altres possibilitats.

Queda demostrat per $A(T) = 1$.

Suposem ara que $A(T) = m$ per $m > 1$ i que el teorema és cert per tots els jocs de $A(T) < m$ amb informació perfecta.

Sigui r l'arrel de l'arbre T, per cada fill u de r, el tall T_u és un arbre on $A(T_u) < A(T)$. Considerem T_u l'arbre d'un joc d'informació perfecta i definim el conjunt d'estratègies de cada jugador com el conjunt de tots els subarbres de tria determinats per aquest jugador.

Per hipòtesis d'inducció, existeix una N-tupla d'estratègies en equilibri en T_u que denotarem com $(s_1^u, ..., s_n^u)$.

Donats els diferents nodes fills de l'arrel, volem unir-los per formar una N-tupla d'estratègies en T. Tenim dos casos:

- Si l'arrel r de T correspon al jugador P_j, escollim el node u, d'entre el conjunt de nodes fills de l'arrel r $F(r)$, de tal manera que ens maximitzi la utilitat $u_j(s_1^u, ..., s_n^u)$. Definim s_j^* com la unió de s_j^u i la branca (r, u) que uneix l'arrel r i el node u triat. Per $1 \geq i \geq N$ i $i \neq j$, definim s_i^* com $\bigcup_{v \in F(r)} ((r, v) \cup s_i^v)$.

- Si l'arrel r de T correspon a un node d'atzar, definim cada s_i^* en funció a la definició anterior.

Llavors queda definida una N-tupla de subarbres de tria. Com que el joc és d'informació perfecta, tots aquests subarbres de tria són estratègies. Només ens queda veure que aquesta N-tupla d'estratègies és un equilibri.

Suposem que el jugador P_i, en comptes de seguir l'estratègia s_i^*, pren s_i com a decisió. Considerem els següents casos:

1. Suposem que l'arrel correspon al jugador P_i. Si $(r, w) \in s_i$, aleshores per la proposició anterior tenim que

$$u_i(s_1^*, ..., s_i, ..., s_n^*) = u_i(s_1^* \cap T_w, ..., s_i \cap T_w, ..., s_n^* \cap T_w).$$

   Com $(s_1^w, ..., s_n^w)$ és una N-tupla en equilibri en Tw, tenim que

$$u_i(s_1^* \cap T_w, ..., s_i \cap T_w, ..., s_n^* \cap T_w) \leq u_i(s_1^w, ..., s_n^w).$$

   Si la branca (r, u) correspon a s_i^*, per la manera com s'ha triat, tenim que $u_i(s_1^w, ..., s_n^w) \leq u_i(s_1^u, ..., s_n^u)$. I per tant ens queda la següent desigualtat:

$$u_i(s_1^*, ..., s_i, ..., s_n^*) \leq u_i(s_1^u, ..., s_n^u). \textbf{ (1.1)}$$

   Per definició de les estratègies s_i^*, $u_i(s_1^* \cap T_u, ..., s_n^* \cap T_u) = u_i(s_1^u, ..., s_n^u)$. I, per la proposició anterior, sabem que

$$u_i(s_1^*, ..., s_n^*) = u_i(s_1^* \cap T_u, ..., s_n^* \cap T_u).$$

   Per tant tenim que $u_i(s_1^u, ..., s_n^u) = u_i(s_1^*, ..., s_n^*)$. **(1.2)**

   Si recuperem **(1.1)** i ho ajuntem amb **(1.2)**, obtenim com a resultat la desigualtat que volíem provar:

$$u_i(s_1^*, ..., s_i, ..., s_n^*) \leq u_i(s_1^*, ..., s_n^*).$$

2. Suposem que l'arrel correspon a un jugador P_j diferent de P_i. Agafem el node u fill de l'arrel r de manera que $(r, u) \in s_j^*$. D'aquesta manera obtenim:

$$u_i(s_1^*, ..., s_i, ..., s_n^*) = u_i(s_i^* \cap T_u, ..., s_i \cap T_u, ..., s_n^* \cap T_u) \leq u_i(s_1^u, ..., s_n^u)$$

Com $u_i(s_1^u, ..., s_n^u) = u_i(s_1^*, ..., s_n^n)$, obtenim com a resultat la desigualtat que volíem provar:

$$u_i(s_1^*, ..., s_i, ..., s_n^*) \leq u_i(s_1^*, ..., s_n^*).$$

3. Suposem que l'arrel correspon a un node d'atzar, aleshores per a cada node u fill de l'arrel r tenim que:

$$u_i(s_1^* \cap T_u, ..., s_i \cap T_u, ..., s_n^* \cap T_u) \leq u_i(s_i^* \cap T_u, ..., s_n^* \cap T_u)$$

Si apliquem el segon punt (2) de la proposició 3.17, obtenim com a resultat la desigualtat que volíem provar:

$$u_i(s_1^*, ..., s_i, ..., s_n^*) \leq u_i(s_1^*, ..., s_n^*).$$

Per tant queda provat que el jugador $i \in N$ obtindrà un benefici menor si canvia la seva estratègia. En conseqüència la N-tupla $(s_1^*, ..., s_n^*)$ és l'equilibri.
$\square$

5 Referents didàctics

En aquesta secció busquem reconèixer l'aportació de diferents referents didàctics en el camp de la teoria de jocs, així com donar a conèixer algunes de les publicacions més destacades que relacionen els jocs amb les matemàtiques i l'ensenyament d'aquestes.

5.1 Jordi Deulofeu

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (1977) i Doctor en Didàctica de les Matemàtiques en la Universitat Autònoma de Barcelona (1993). Des de 1978 és professor titular de Didàctica de les Matemàtiques a la Universitat Autònoma de Barcelona. Amb més de quaranta anys involucrat en l'educació matemàtica, Jordi Deulofeu també disposa d'un ampli historial com a investigador del qual és reconegut internacionalment, en especial a Amèrica Llatina.

Entre els seus interessos trobem la resolució de problemes i l'ús de jocs com a context per a treballar les matemàtiques. En aquest sentit, Deulofeu afirma que:

"más allá de lo que podría ser un simple recurso didáctico, la utilización de juegos y la organización de actividades de carácter lúdico alrededor de las matemáticas, constituye un elemento educativo importante que puede incidir en la visión que los alumnos se forman sobre las matemáticas, ayudándoles a verlas como una ciencia cuya práctica puede provocar placer y diversión". [11]

Tal com recull una entrevista realitzada per *Consola y tablero* [4], Deulofeu remarca que la relació entre les matemàtiques i els jocs és molt gran i cita a Miguel de Guzmán, un dels seus mestres, "Les matemàtiques són un joc i els jocs s'analitzen a través de les matemàtiques". Celebra que cada cop s'introdueixen més els jocs en les aules i declara que hi ha jocs per a cada edat i nivell gràcies a la diversitat que presenten pel que fa a la complexitat, negant que els jocs siguin només per alumnes de primària. Per finalitzar l'entrevista, Deulofeu emfatitza la importància dels jocs i afirma que quan un juga està prenent decisions i, en funció de com siguin de bones, li anirà millor o pitjor en el joc i ho relaciona amb la vida quotidiana.

Ha publicat alguns llibres dedicats a la resolució de problemes i la teoria de jocs, entre les seves obres més distingides destaquem:

- *"Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes: teoria de juegos"* [12] és un llibre divulgatiu de teoria de jocs que mostra la relació que hi ha entre els jocs i les matemàtiques al llarg de la història. En aquest recorregut històric, trobem des del mil·lenari joc del Senet als dilemes de la gallina o el presoner, passant pels escacs, el dominó i altres jocs en què intervenen l'atzar, l'estratègia, la reflexió i la paradoxa.
- *"Una recreación matemática: historias, juegos y problemas"* [13] és un llibre divulgatiu que té com a propòsit mostrar la importància de les matemàtiques en qüestions crucials per la humanitat i inclou nombrosos jocs d'estratègia i problemes de matemàtiques elementals que conviden al lector a submergir-se en aquest món.

També podem trobar algunes de les seves aportacions sobre la relació entre els jocs i l'ensenyament de les matemàtiques. Algunes de les seves publicacions i articles a revistes més reconegudes són:

- *L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes* [1]. En aquesta proposta de Deulofeu juntament amb Edelmira Badillo i Maria Mercè Edo, es mostra que és possible desenvolupar competècies matemàtiques en un context d'ús didàctic de jocs de taula. En particular, se centren en el desenvolupament d'estratègies de resolució de problemes i tècniques de càlcul mental i, en general, en el desenvolupament del sentit numèric fraccionari.

- Conjuntament amb Edo i Badillo, Deulofeu també va participar en *Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema* [16] que comentarem en la següent secció d'aplicacions didàctiques. Així com van realitzar un taller on es mostra, a través d'exemples de jocs, com els jocs ofereixen oportunitats d'aprenentatge matemàtic als alumnes de primària en aspectes conceptuals (sentit numèric), en la pràctica de tècniques (càlcul mental) i en el desenvolupament d'estratègies (resolució de problemes). A més possibilita un treball cooperatiu i un desenvolupament progressiu de l'autonomia. [18]

- Marta Berini i Jordi Deulofeu van participar en el projecte *ESTALMAT*, estímul del talent matemàtic precoç, aportant una sèrie de propostes didàctiques com *Pequeños juegos de estrategia: utilizando la simetría* i *Pequeños juegos de estrategia: juegos de tipo numérico.*

- En la *"Investigación sobre procesos de resolución de problemas en un entorno de juegos de estrategia"* de Edo, M., Deulofeu, J., y Baeza, M. [17] podem trobar evidències empíriques de l'ús dels jocs d'estratègia com eina metodològica per desenvolupar habilitats de resolució de problemes en alumnes de primària.

A banda dels seus articles i publicacions, també ha dirigit diverses tesis doctorals sobre la teoria de jocs i l'ús dels jocs a l'aula rellevants dins de l'àmbit educatiu:

- *Juegos de estrategia en formato tecnológico y resolución de problemas en la ESO* [22] de María Esther Lorenzo Fernández, en la qual se segueix la línia d'investigació iniciada per la tesi de Fernando Corbalán, també dirigida per Deulofeu i que posteriorment comentaré. En la seva tesi, Lorenzo estudia els jocs d'estratègia lligats a la resolució de problemes i quin impacte té l'ús d'eines tecnològiques.

- *La influència de l'ús de jocs d'estratègia en l'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques a l'educació secundària* [19] d'Anna Navarro Farré. Tal com indica el títol de la tesi, es va treballar amb alumnes de secundària i alumnes del programa d'Estímul del Talent Matemàtic (ESTALMAT) la influència que el treball amb jocs d'estratègia pot tenir en la millora de l'aprenentatge de la resolució de problemes.

- *Joc, interacció i construcció de coneixements matemàtics* [15] de M. Mercè Edo i Basté. En la seva tesi, Edo aporta evidències, a partir del disseny i implementació d'un taller de jocs matemàtics, de l'impacte en l'aprenentatge matemàtic en una situació lúdica en els alumnes, i com aquest fet augmenta la capacitat de resolució de problemes.

5.2 Fernando Corbalán

Matemàtic i professor de secundària i batxillerat en un institut aragonès, Fernando Corbalán està fortament implicat en diversos projectes divulgatius de les matemàtiques com per exemple:

- *DivulgaMat*, portal virtual de divulgació de la Real Societat Matemàtica Espanyola.
- Codirector de la destacada revista de didàctica de les matemàtiques *UNO*
- Redactor de la secció setmanal *Mates de cerca* en el diari "Heraldo de Aragón".
- Coordinador de l'espai *MATHSLAB* dedicat a activitats artístiques i matemàtiques.
- Creador del programa *Matemática Vital* del departament d'educació del Govern d'Aragó.

Sempre ha estat un gran aficionat als jocs, i tal com remarca a l'entrevista [28] realitzada pel blog d'educació i Tic *Tiching*: *"Al principi, l'ensenyament de les matemàtiques es realitza a través dels jocs. Però arriba un moment, al voltant dels set anys, en el que el sistema s'encarrega de dir que ja n'hi ha prou..."*.
Durant els seus anys com a docent ha comprovat que els jocs d'estratègia tenen una gran acollida a l'aula i afirma que les persones mostren interès en les matemàtiques quan aquestes suposen un repte. *"Els professors han de procurar preguntes, no respostes. Les preguntes es poden plantejar amb jocs, que són la base de les matemàtiques i del coneixement en general".*

En la seva tesi doctoral *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y topología de jugadores en el alumnado de secundaria* [6], dirigida per Jordi Deulofeu, Corbalán analitza les respostes dels alumnes de secundària obtingudes en jugar en parelles a "Atrapa la Rana" i "Margarita", jocs on no intervé l'atzar i que es caracteritzen per ser ràpids i amb una estratègia guanyadora. En aquesta investigació s'estudien els processos i els raonaments que utilitzen els estudiants per arribar a les estratègies i si aquestes guarden alguna relació amb l'edat i una afició per les matemàtiques. Les dades obtingudes en el seu estudi confirmen els beneficis de l'ús de jocs a l'aula com recurs didàctic en la resolució de problemes.

Ha realitzat algunes publicacions i articles sobre la teoria de jocs en l'ensenyament de les matem'atiques, entre les seves aportacions més distingides destaquem:

- *Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos* [5] de la revista SUMA. En aquest article, Corbalán descriu una investigació realitzada a alumnes de 13-14 anys que pretén contestar dues preguntes: Per què utilitzar els jocs? i Per quin motiu utilitzar-los?; i on s'analitza i contrasta l'ús d'estratègies. Els jocs triats per realitzar l'aplicació van ser, com a joc solitaris, *Sol y sombra, Estrella de oro* i *El párking* i, com jocs per a dos jugadors, *Quitamanchas, Llegar el primero* i *Margarita.* Com a resultat obtenen que el joc *Quitafichas* és molt apropiat per desenvolupar l'estratègia de començar pel final i l'estudi revela que els alumnes no tenen gens assumida l'estudi sistemàtic de casos i l'ús de la simetria.

- Juntament amb Deulofeu ha publicat en la revista UNO, reconeguda per ser la revista refrent de didàctica de les matemàtiques, l'article *Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas* [7], on donen propostes per introduir en l'aula jocs de quatres tipus: de procediment conegut, petits jocs d'estratègia, cartes i puzles. A més a més, es presenta una investigació que busca determinar els procediments que segueixen els alumnes per obtenir les estratègies guanyadores i els efectes de l'ús dels jocs en l'ensenyament.

- *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato* [8] és un llibre on Corbalán mostra la importància dels jocs en l'educació i, especialment, en les matemàtiques i fa una reflexió sobre els avantatges i inconvenients d'introduir-los en l'aula. Corbalán classifica i analitza les estratègies guanyadores de diversos jocs i algunes possibles variants, així com el material, normes, objectius i coneixements previs necessaris.

5.3 Martin Gardner

Llicenciat en filosofia i redactor científic en diverses revistes, Martin Gardner és conegut arreu del món per la seva gran aportació en les matemàtiques recreatives. Tot i tenir poca formació matemàtica, durant vint-i-cinc anys Gardner va publicar mensualment una columna en la famosa revista *Scientific American* i va acabar dirigint una secció dedicada a les matemàtiques recreatives.

Aficionat a la màgia, els puzles i les il·lusions òptiques, tot va començar quan Gardner va quedar meravellat per unes misterioses figueres amb més cares del que és habitual. Amb ganes de saber més dels flexàgons, es va posar en contacte amb el seu descobridor, un estudiant de la universitat de Princeton. Per mitjà de la seva primera publicació de 1956 amb el títol *"Hexaflexagons"* i altres publicacions posteriors de la mateixa temàtica, Gardner va popularitzar els flexàgons.

Assegurava que el secret de l'èxit de la seva columna residia en la seva mancança en les matemàtiques: *"Dedicava tant de temps entendre del que estava escrivint que sabia com escriure-ho de manera que la majoria de lectors ho entengués"*. I és que, les seves publicacions van arribar a tots els públics gràcies a una redacció entenedora, informativa i atractiva.

Entre els seus articles trobem:

- *The three Prisioners problem (1959)* on es plantejava una variant del problema del Monty Hall, però en comptes d'un concurs amb premi el problema tractava de tres presoners i una execució.

- *Hex*: joc per a dos jugadors creat per Piet Hein i John Nash on l'atzar juga un paper mínim i es premia l'estratègia i la lògica. L'objectiu del joc és col·locar les peces de manera que permetin connectar els dos costats del tauler. John Nash va demostrar que es tracta d'un joc determinat, és a dir, el joc no pot acabar en taules.

- *Joc de la vida*: joc de zero jugadors creat per John Horton Conway. Es tracta d'un tauler on cada cel·la té dos estats possibles (vida o mort) i interacciona amb les seves vuit cel·les veïnes (vertical, horitzontal i diagonal) segons unes normes.

A banda dels articles, Gardner va publicar altres llibres sobre passatemps matemàtics i divulgació científica, entre ells cal destacar *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*, on revela les solucions de diverses paradoxes matemàtiques de manera didàctica i entretinguda.

Posteriorment va publicar diversos llibres, entre ells *"Nuevos pasatiempos matemáticos", "Circo" [20], "Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas" i " Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas"*, on recull alguns dels seus articles de jocs i continguts matemàtics més destacats: els nombres cíclics, tangrams, l'àlgebra de Boole, l'àbac, il·lusions òptiques, fractals ... Així com podem trobar activitats lúdiques amb bitllets, peces d'escacs, llumins i altres objectes manipulatius.

Segons Gardner és difícil definir el concepte de joc, ja que: " Podem definir jocs matemàtics o matemàtiques recreatives com matemàtiques amb una forta component lúdica, però això no diu gaire, ja que *joc, recreacioó* i *lúdic* són pràcticament semblants". Tot i que posteriorment va donar la següent definició en un dels seus articles [25]: "activitat que involucra un desafiament contra una tasca o un o més adversaris, com una tasca comuna que ha de ser abordada o bé individualment o bé en conjunció amb altres". I és que Gardner sempre ha cregut que el millor camí per fer més interessants les matemàtiques als alumnes és a través dels jocs.

Així doncs, si l'argumentació teòrica i estudis empírics com els que hem mencionat demostren que l'ús adequat dels jocs d'estratègia és beneficiós pels estudiants en termes de comprensió de conceptes teòrics, desenvolupament de contingut, obtenció de competències i motivació, és natural arribar a la conclusió que tenim el deure d'aprofitar i potenciar aquesta eina a les aules.

6 Aplicacions didàctiques

Branques de les matemàtiques com la geometria, la probabilitat i el càlcul busquen dotar als alumnes de les eines necessàries per fer front a problemes contextualitzats i quotidians de manera analítica.

A diferència dels exercicis, que no requereixen una activitat intensa de pensament per la seva resolució i, generalment, es tracta d'una aplicació mecànica d'algoritmes memoritzats; la resolució de problemes suposa un repte i contribueix en el desenvolupament de l'anàlisi, la capacitat argumentativa, la creativitat i l'autonomia personal. Per aquest motiu, la resolució de problemes és una de les activitats més importants, complexes i necessàries a la qual s'enfronten els alumnes.

Un dels objectius principals d'aquest treball és presentar un taller de teoria de jocs dirigit a alumnes de secundària que pretén mostrar una visió més propera i entretinguda de les matemàtiques. D'aquesta manera els alumnes desenvoluparan estratègies de resolució de problemes en presentar-los un joc com una situació conflictiva a resoldre.

Per tal de fer el taller fluid i possible de realitzar en poques sessions, s'ha intentat que els alumnes s'endinsin en el món dels jocs i la seva anàlisi, involucrant el mínim nombre possible de contingut per poder treballar al màxim el pensament lògic matemàtic i la resolució de problemes.

6.1 Relació entre la resolució de problemes i l'anàlisi d'un joc

Tal com recull l'article 31 de la *Convención sobre los Derechos del Niño* [29],

> *"Los Estados Partes reconocen el derecho del niño al descanso y el esparcimiento, al juego y a las actividades recreativas propias de su edad y a participar libremente en la vida cultural y en las artes."*

Des dels primers anys de vida, el joc està directament lligat amb l'aprenentatge. Segons Vigotski, els jocs són una eina essencial en el desenvolupament cognitiu, emocional i social [30].

Un dels primers estudis de l'impacte de la utilització dels jocs en l'ensenyament matemàtic, *Learning and mathematics Games* [2], va ser realitzat en mans de Bright, Harvey i Wheeler. En aquest informe van concloure que introduir els alumnes a jocs que incorporin contingut formal de matemàtiques, seguint algunes instruccions del professor si és necessari, contribuiria en la millora dels coneixements, la comprensió i les habilitats d'aplicació dels estudiants.

El punt 227 de *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft* [3] del ministeri d'ensenyament i ciència manifesta:

Sea cual fuere su nivel de conocimientos, el empleo cuidadosamente planificado de rompecabezas y ≪juegos≫ matemáticos puede contribuir a clarificar las ideas del programa y a desarrollar el pensamiento lógico.

Per altra banda, resultats d'estudis realitzats per Corbalán i Deulofeu [7] relacionen els jocs amb la resolució de problemes en les matemàtiques. En particular, es va analitzar el lligam entre les fases de la resolució d'un problema i el procés de recerca de l'estratègia guanyadora d'un joc.

A continuació presentem el paral·lelisme proposat per Edo, Baeza, Deulofeu i Badillo (2008) [16] entre les fases de la resolució d'un problema matemàtic segons Pólya (1979) i les fases de resolució d'un joc:

Fases de resolució de problemes (Pólya, 1979)	Fases de resolució d'un joc (Edo, 2002)
1. Comprensió del problema	1. Comprensió dels objectius del joc i de les normes que cal seguir
2. Disseny i execució d'un pla general o de plans parcials successius	2. Desenvolupament de la partida: experimentació, realització de conjectures, disseny de plans parcials, planificació d'una estratègia
3. Verificació de la solució obtinguda	3. Validació o rebuig de l'estratègia i anàlisi del que ha passat

6.2 Competències i continguts claus relacionats

En aquesta secció veurem com la teoria de jocs podria ser fàcilment adaptada al currículum de secundària, i inclús primària, gràcies a la riquesa dels seus continguts, metodologies i aplicacions. I com aquests guarden una forta relació amb les competències de l'àmbit matemàtic.

A continuació presentem les competències vigents establertes pel departament d'educació de Catalunya.

Competències E.S.O [10]

1. Dimensió resolució de problemes:
   - Competència 1: Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
   - Competència 2: Emprar conceptes, eines i estratégies matemàtiques per resoldre problemes.
   - Competència 3: Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
   - Competència 4: Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.
2. Dimensió raonament i prova:
   - Competència 5: Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.
   - Competència 6: Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.
3. Dimensió connexions:
   - Competència 7: Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.
   - Competència 8: Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.
4. Dimensió comunicació i representació:
   - Competència 9: Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
   - Competència 10: Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
   - Competència 11: Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
   - Competència 12: Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Competències Batxillerat [9]

Com veurem més endavant, aquest taller s'ha portat a aules de primer d'E.S.O, però és fàcilment ampliable a qualsevol nivell, inclús batxillerat. La teoria de jocs també guarda forts lligams amb les competències de l'àmbit matemàtic del batxillerat científic i social:

- Resoldre problemes matemàtics.
- Comunicar-se matemàticament.
- Raonar matemàticament.
- Valorar la matemàtica i la seva construcció.

- Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

Continguts [10] [9]

En els jocs i situacions conflictives que hem dissenyat, els alumnes treballaran els continguts claus:

- CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.
- CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.
- CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.
- CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Gràcies a la gran adaptabilitat que ens ofereixen els jocs o situacions conflictives, també podem desenvolupar en forma d'introducció o pràctica altres continguts del currículum. En els jocs on l'atzar intervé, els alumnes clarament poden experimentar o profunditzar amb els continguts claus de "CC16. Sentit i mesura de la probabilitat" en la E.S.O. [10] i els continguts de "probabilitat i estadística"de Batxillerat [9]. De la mateixa manera podem enfocar els jocs de manera que es relacionin amb continguts claus de càlcul i geometria com per exemple es pot introduir la idea de coordenades i punts a través de jocs de batalla naval.

El taller de Teoria de Jocs es podria haver implementat a Batxillerat incloent contingut d'anàlisi com l'estudi de funcions i problemes d'optimització en competències de quantitats (Cournot - Stackelberg) i en competències de preu (Bertrand - Stackelberg).

6.3 Objectius

En tractar-se d'un taller de tres sessions, descrites en el següent apartat, ens vam proposar una sèrie d'objectius per a cadascuna d'aquestes:

Primera sessió

- Diferenciar jocs d'estratègics / no estratègics i classificar-los segons: atzar, temporalitat (simultanis/dinàmics) i cooperació.
- Conèixer els elements d'un joc: jugadors, estratègies i utilitats.
- Entendre el concepte millor resposta i equilibri de Nash.
- Representar en forma normal els jocs simultanis i forma extensiva els jocs dinàmics.
- Entendre la dominància estricta d'estratègies.
- Aprendre l'eliminació per dominància estricta i la inducció enrere.
- Introducció a la probabilitat amb jocs on intervé l'atzar.

Segona sessió

En la segona sessió ens vam proposar, a banda dels objectius específics de cada activitat que comentaré en la descripció d'aquesta, els següents objectius generals:

- Traduir, organitzar i representar la informació en un llenguatge matemàtic.
- Saber elegir i utilitzar diversos mètodes de raonament.
- Analitzar situacions i els possibles resultats.
- Afrontar la presa de decisions mitjançant dominància i/o inducció enrere.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors d'aquestes.
- Interpretar factors externs (no racionals) que poden influir en la presa de decisions.

Tercera sessió

- Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
- Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
- Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i entendre la magnitud de la complexitat d'algunes d'aquestes.

6.4 Contextualització i temporització

Per tal de portar a l'aula el taller, em vaig posar en contacte amb un professor de matemàtiques de l'Escola Sant Gervasi on vaig cursar la secundària. La primera idea era portar l'activitat a Batxillerat i E.S.O, però, per falta de temps a Batxillerat, només es va realitzar a l'E.S.O. La proposta del taller va tenir molt bona rebuda i, després d'unes quantes reunions i trucades amb antics professors, es va acordar portar l'activitat a l'aula l'última setmana d'abril amb els diferents grups de primer d'E.S.O.

Tot i que la idea era fer dues sessions amb dos dels quatre grups de primer, es van acabar fent dues sessions amb els quatre grups i es va ampliar una tercera sessió per un dels grups, el qual no vaig poder assistir per normatives i protocols de Coronavirus.

El taller va consistir en tres sessions:

- Tot i que en un primer moment s'havia plantejat fer en la primera sessió la part teòrica i les activitats, ho vam reconsiderar i finalment la primera sessió va ser introductòria.
- En la segona sessió es van dividir els alumnes en tres grups, de manera que cadascun desenvolupava una de les activitats en parelles o en grups de 3-4 persones.
- Per acabar, es va proposar fer una última sessió on els alumnes podrien demostrar tot el que havien après a través d'un concurs.

Primera sessió

Primerament es va demanar als alumnes que definissin el concepte de joc i en donessin alguns exemples, mitjançant una taula vam classificar conjuntament els exemples proposats segons la temporalitat, la cooperativitat i si hi jugava un paper l'atzar. En tot moment l'explicació va ser acompanyada d'una presentació de diapositives [B].

A continuació es va presentar el dilema del presoner i els alumnes van argumentar quina seria la millor estratègia sense tenir cap noció prèvia de teoria de jocs. Es van elaborar les preguntes de manera que els conceptes més teòrics com jugadors, conjunt d'estratègies, millor resposta, dominància i equilibri de Nash sorgissin de manera natural, com per exemple: si fóssim el jugador 1, quina seria la nostra millor estratègia en cas que el jugador 2 ens acusés? I si no ens acusés?

Seguidament es va presentar el dilema del presoner en la variant dinàmica i es va repetir el procediment. En aquest cas es va encaminar als alumnes de manera que pel seu compte analitzessin el joc per inducció enrere, trobant així les millors estratègies de cada jugador i l'equilibri de Nash.

Finalment es va proposar el joc de pedra-paper-tisores. Conjuntament els alumnes van intentar analitzar. Ràpidament van observar que no hi havia cap estratègia dominant ni cap estratègia estava dominada per una altra, de manera que no era possible trobar l'equilibri de Nash com havíem fet anteriorment. Guiant-los adequadament, els alumnes van esbrinar que la probabilitat jugava un paper important, ja que hi havia la mateixa probabilitat que el nostre oponent jugués pedra, paper o tisores i en conseqüència la nostra resposta hauria de ser aleatòria.

Per acabar la sessió, després d'observar que el primer grup presentava dificultats a l'hora d'iniciar la segona sessió, es va decidir dedicar els últims deu minuts a presentar les activitats proposades. Aquesta decisió va ser molt encertada, ja que es va comprovar que l'endemà els alumnes encaraven les activitats amb més autonomia i seguretat.

Segona sessió

Després d'un petit recordatori dels conceptes claus apressos en la primera sessió, es van repartir els alumnes en 3 grups. Es van formar els grups de manera que els integrants de dos d'ells fossin parells per poder fer l'activitat en parelles. Cada alumne va descarregar el document de l'activitat assignada al seu grup i es va repartir el material necessari.

Durant tota la sessió es va prioritzar que els alumnes treballessin de manera autònoma per tal de fomentar la presa de decisions, l'aprenentatge dels errors i l'actitud de recerca. Conjuntament amb els professors de matemàtiques, es van resoldre els diferents dubtes que van sorgir rellegint les indicacions, ja marcades en l'enunciat, i els exemples, ja descrits en l'activitat, per tal d'evitar influir en les respostes dels alumnes.

Ens hauria agradat que les activitats s'haguessin dut a terme en una distribució de taula rodona on cada parella pogués comunicar-se amb la resta dels integrants del grup, però per normativa covid s'havia de respectar la distància de seguretat.

Per finalitzar la sessió i un cop pujats els fitxers de les activitats al campus virtual de l'escola, es van comentar per sobre les solucions de les activitats i un representant de cada grup va realitzar un petit resum del què havien observat durant l'activitat per a la resta de la classe.

Tercera sessió

Per motius de protocol de seguretat pel Coronavirus només podia assistir a l'escola dos dies, però igualment un dels professors de matemàtiques va poder realitzar la tercera sessió en un dels grups.

Aquesta sessió consistia a celebrar un concurs on els alumnes podrien demostrar tot el que havien après en la sessió anterior, ja que cada prova era una situació semblant a cadascuna de les activitats treballades. Es van repartir els alumnes en 4 grups de manera que cada equip estigués format, com a mínim, per dos alumnes de cada activitat.

Cada grup va participar com un únic jugador, de manera que els alumnes van haver de debatre i concordar una solució en el temps estipulat per torn. Per tal de deduir la millor resposta i l'equilibri de Nash, els alumnes van poder comptar amb l'ajuda dels materials manipulatius i podien consultar l'activitat realitzada en la sessió anterior.

Per tal de facilitar la feina al professor i fer el concurs més contextualitzat, vaig crear una presentació [B] que simulava un concurs de televisió on apareixien les preguntes i un temporitzador. Un cop finalitzat el temps i després que cada equip hagués donat la seva resposta final, el professor, amb l'ajuda de les diapositives, comentava la resposta correcta i es declarava el/els equip/s guanyadors.
En els jocs de N jugadors, cada equip representava un jugador diferent i el guanyador era aquell que obtenia més beneficis. En canvi, en els jocs de 2 jugadors cada grup jugava contra el professor i es proclamava equip guanyador aquell que obtenia millors beneficis contra el professor.

Tot i que no vaig poder assistir, per finalitzar el taller havia proposat una sèrie de preguntes per ampliar i convidar als alumnes a reflexionar:

- Cada jugador té les mateixes probabilitats de guanyar? El jugador que comença té avantatges?
- És just un joc? Com podem fer-lo just? Com podem fer que guanyi l'opció X?
- És possible determinar en qualsevol joc l'estratègia guanyadora? I l'equilibri?
- Quins factors que poden influir en la presa de decisions? Aquests factors varien si l'adversari es tracta d'una persona coneguda o desconeguda?
- Quin joc creus que és més fàcil analitzar? I el més difícil? La gran complexitat de jocs com el tabli, escacs, monopoli, empreses, ...

6.5 Descripció de les activitats

6.5.1 Ultimàtum

Material: 1 bitllet de 100 € , 2 bitllets de 50 €, 5 bitllets de 20 € i 10 bitllets de 10 €.

Funcionament del joc:
El jugador 1 té 100 € en la seva disposició i té l'opció de repartir-los cedint-li al jugador 2 una quantitat X. El jugador 1 fa una oferta i el jugador 2 ha decidir si l'accepta o la rebutja. En cas de rebutjar-la els dos jugadors se'n van amb les butxaques buides.

Objectius:
Vam plantejar un seguit de qüestions amb el propòsit d'assolir els següents objectius:

- Recollir dades utilitzant taules i diagrames en forma d'arbre.
- Calcular els beneficis de cada jugador en funció de les decisions preses.
- Classificar el joc segons temporalitat, representació i presència de l'atzar.
- Descriure formalment el joc en cada situació i saber trobar la millor decisió de cada jugador, mitjançant inducció enrere, i l'equilibri de Nash.
- Interpretar factors externs (no racionals) que poden influir en la presa de decisions.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors.

Adaptació en el concurs:
"El jugador 1 té 5 bitllets de 100 € en la seva disposició i té l'opció de repartir-los amb el jugador 2 si ho desitja. El jugador 1 fa una oferta i el jugador 2 ha de decidir si l'accepta o la rebutja. En cas de rebutjar-la, el jugador 1 se'n va amb les butxaques buides i el jugador 2 se'n va amb 100 € més la meitat de l'oferta que li ha fet el jugador 1."

Si el jugador 2 obté el mateix benefici tant si accepta com si rebutja, aleshores prioritzarà REBUTJAR.

6.5.2 Cursa de camells

Material: 2 daus i 12 objectes numerats de l'1 al 12 (cartes).

Funcionament del primer joc:
Se celebra una cursa de 6 camells numerats. Es tira el dau i avança el camell corresponent. El primer camell a arribar a la meta és el guanyador.

Funcionament del segon joc:
Se celebra una cursa de 12 camells numerats. Es tiren 2 daus i avança el camell corresponent a la SUMA dels dos daus. El primer camell a arribar és el guanyador.

Objectius:
Per aquesta activitat vam plantejar un seguit de qüestions amb el propòsit d'assolir els següents objectius:

- Classificar el joc segons temporalitat, representació i presència de l'atzar.
- Realitzar un estudi i recompte dels diferents casos per poder fer l'estudi probabilístic d'un joc.
- Saber descartar estratègies impossibles i triar l'estratègia guanyadora, és a dir, aquella que és més probable que guanyi.
- Conèixer les idees i hipòtesis no preconcebudes que tenen els alumnes sobre la probabilitat i com aquestes poden influir en la presa de decisions.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors.

Adaptació en el concurs:
"Se celebra una cursa de 7 camells numerats del 0 al 6. Es tiren 2 daus i avança el camell corresponent a la RESTA dels dos daus. El primer camell a arribar és el guanyador."

6.5.3 Quioscs

Funcionament del joc:
En una platja de 4km de llarg volen obrir 2 quioscs. Cada quiosc ha de triar una localització de la platja: 0km, 1km, 2km, 3km o 4km. Suposem que els banyistes es posicionen uniformement al llarg de la platja i que cada client anirà al quiosc que estigui més a la vora. Si se situen al mateix km, es reparteixen els clients.

Banyistes: marró, gris, groc, blau, vermell, verd, blanc i lila.
Recordeu: els clients van al quiosc més proper. Per exemple, si el quiosc 1 decideix situar-se en el km 1 i l'altre quiosc en el km 2, el banyista groc anirà al quiosc 1 i el banyista blau anirà al quiosc 2.

Objectius:
A continuació enuncio els objectius per aquesta activitat:

- Recollir dades utilitzant taules.
- Calcular els beneficis de cada jugador en funció de les decisions preses.
- Classificar el joc segons temporalitat, representació i presència de l'atzar.
- Descriure formalment el joc i saber trobar la millor decisió de cada jugador i l'equilibri de Nash.
- Conèixer quins factors i idees poden influir en la presa de decisions.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors.

Adaptació en el concurs:
"En una platja de 4km de llarg hi ha situat un quiosc (Jugador 0) al Km 1. A continuació el jugador 1 decideix on situarà el seu quiosc i per últim el jugador 2 haurà de posicionar el seu quiosc després que el jugador 1 s'hagi situat. Suposem que cada client anirà al quiosc que estigui més a la vora."

6.6 Resultats de les activitats

En aquesta secció comentarem els resultats més remarcables obtinguts de cada una de les activitats. Per tal d'analitzar els resultats obtinguts, s'ha seleccionat una mostra de 15 alumnes de cada activitat, corresponent a dos dels quatre grups amb els quals es va dur a terme l'activitat.

Per arribar a aquests resultats, s'ha elaborat una anàlisi de:

- Les respostes dels alumnes i la coherència d'aquestes.
- Els motius i arguments dels alumnes que han conduït a resolucions errònies.
- Conceptes teòrics que els alumnes han comprès correctament i aquells que no s'han entès degudament.

6.6.1 Ultimàtum

Inicialment aquesta activitat va crear força confusió, ja que molts alumnes pensaven que el guanyador del joc era aquell qui obtenia més diners. Un cop aclarit que cada jugador havia d'intentar maximitzar els seus beneficis, els jugadors 1 que cedien els diners van realitzar les seves ofertes segons els següents motius:

Motius jugador 1	Joc 1
Oferir una quantitat igual o menor	6/15
Cap motiu	4/15
Repartir els diners equitativament	3/15
Augmentar l'oferta fins que accepta	1/15
No donar-li res	1/15

Observem doncs que els jugadors 1 realitzaven ofertes on ells s'emportaven beneficis superiors, tot i que hem pogut observar com, a causa de la repetició del joc, les ofertes tendien a ser equitatives a causa del rebuig del jugador 2. Això ens pot fer pensar que, en certa manera, els jugadors 1 eren conscients que es trobaven en una situació avantatjosa i tenien un control major del joc.

Per altra banda els jugadors 2 acceptaven l'oferta o la rebutjaven si l'oferta no era justa(5/15) o el jugador 1 obtenia més diners (10/15).

La principal conclusió que extraiem és que molts alumnes es deixaven endur per les emocions, ja que, donada una oferta on obtenien un petit benefici, el jugador 2 rebutjava tot i saber que, en conseqüència, se n'aniria amb les butxaques buides. Creiem que una altra causa que impulsava als jugadors 2 rebutjar va ser una comprensió errònia dels jocs d'estratègia, ja que hem observat que consideraven com a derrota obtenir menors beneficis que l'altre jugador, tot i que durant les sessions es va remarcar contínuament que l'objectiu no era superar al rival, sinó l'obtenció del benefici més gran possible.

Pel que fa a classificació dels jocs, hem pogut observar que els alumnes que han classificat correctament la temporalitat (12/13)[1] , la representació més adequada (8/15)[1] i la presència d'atzar (14/15)[1].

A l'hora de descriure formalment el joc, notem que els alumnes han sabut determinar correctament:

Conceptes	Joc 1		Joc 2	
Jugadors	-		9/15	(9/10)[1]
Estratègies	-		7/15	(7/10)[1]
Beneficis	-		12/15	(12/14)[1]
Esquema	-		9/15	(9/10)[1]
Millor resposta jugador 2	9/15	(9/14)[1]	11/15	(11/12)[1]
Millor resposta jugador 1	10/15	(10/13)[1]	2/15	(2/11)[1]
Equilibri de Nash	8/15	(8/12)[1]	2/15	(2/11)[1]

*on - simbolitza que ve donat com a exemple en l'exercici

Observem que majoritàriament els alumnes han sabut respondre correctament els conceptes jugadors i estratègies i han pogut obtenir els beneficis i l'esquema. Cal destacar que alguns esquemes es trobaven completats parcialment i amb la informació desplaçada, suposem que això es deu a dificultats digitals a causa del format.
El concepte de millor resposta s'ha entès en el primer joc i, en conseqüència, els alumnes han extret l'equilibri de Nash del joc, tot i que no ho expressaven amb la notació correcta. En el segon joc, clarament han trobat la millor resposta del jugador 2, però no han sabut trobar la millor resposta del jugador 1 i l'equilibri de Nash. Això ens porta a pensar que el procés d'inducció cap enrere no ha quedat del tot clar.

Pel que fa a l'últim cas del joc Ultimàtum, hem pogut observar com 9 dels 15 alumnes han reavaluat les suposicions prèvies i han canviat d'estratègia, aplicant els resultats obtinguts en l'estudi del joc dels apartats anteriors. Els jugadors 2 acceptaven quasi totes les ofertes, exceptuant ofertes molt baixes o nul·les ocasionalment, i els jugadors 1 tendien a cedir quantitats baixes.
Per altra banda, la descripció formal d'aquest últim cas no ha donat tan bons resultats com ens esperàvem, creiem que alguns dels motius són la falta de temps i la falta de comprensió de l'enunciat, ja que moltes qüestions es van deixar en blanc i no tenien en compte quantitats decimals. Tan sols 3 dels 15 (3/11)[1] alumnes ha descrit el conjunt d'estratègies correctament, 4 de cada 15 (4/8)[1] les millors respostes de cada jugador i 3 de cada 15 (3/7)[1] l'equilibri de Nash.

[1]Si excloem les respostes en blanc

6.6.2 Cursa de camells

Abans de comentar qualsevol resultat, m'agradaria remarcar que els professors van avisar prèviament que els alumnes no tenien cap noció de probabilitat. Per aquest motiu es va dissenyar l'activitat tenint en compte que seria el primer contacte dels alumnes amb la probabilitat.

En el primer joc de 6 camells, majoritàriament van indicar que no podien determinar quin camell guanyaria, ja que el resultat de la cursa depèn de l'atzar, tot i que 3 dels 15 alumnes van escollir un camell determinat argumentant que aquell camell tenia més probabilitats.
Pel que fa a classificació dels jocs, hem pogut observar que 13 dels 15 alumnes han classificat correctament la temporalitat i 14 dels 15 la presència d'atzar.
A l'hora de determinar les probabilitats de cada camell, hem obtingut que 13 dels 15 alumnes han calculat correctament la probabilitat del camell 1, i aquests mateixos alumnes han justificat adequadament que la resta dels camells tindrien la mateixa probabilitat.
Tot i haver determinat que cada camell té la mateixa probabilitat de guanyar, hem observat que 10 dels 15 alumnes han contestat correctament a la pregunta *quin camell és més probable que guanyi? I que perdi?*.

En el segon joc de 12 camells, primerament es demanava als alumnes que indiquessin quin camell creien que guanyaria la cursa i el motiu. Majoritàriament, 8 dels 15 alumnes, han indicat que el motiu de l'elecció d'un determinat nombre era: *"Es pot sumar de moltes maneres"* i *"Té més probabilitats"*. Tot i que altres alumnes han comentat altres motius com: nombre preferit, triat a l'atzar, qualsevol nombre excepte l'1, el nombre que es troba al mig,... Observem llavors que, malgrat no haver treballat mai amb les probabilitats, els alumnes tenen un gran raonament intuïtiu, possiblement producte de l'aprenentatge informal al llarg de la seva vida.
Un cop realitzades les curses en els diferents grups, els alumnes van haver de justificar perquè el camell X havia guanyat i quin era el motiu pel qual algun/s camell/s perdien.

Motius guanyador	Alumnes
Surt molt al fer la suma / probabilitat 2 daus	7/15
Atzar	5/15
Ha sortit més vegades	2/15
Número mitjà	1/15
Motius perdedor	**Alumnes**
No pot sortir el 1	12/15
Atzar	2/15
No surt molt la suma	1/15

Pel que fa a l'estudi probabilístic, 13 dels 15 (13/13)[2] alumnes han sabut fer el recompte dels casos totals i 12 alumnes han calculat correctament les probabilitats de cadascun dels camells. Finalment 14 dels 15 (14/14)[2] alumnes han justificat adequadament quin camell és més probable que guanyi i quin camell sempre perdrà.

[2] Si excloem les respostes en blanc

6.6.3 Quioscs

En el joc dels quioscs, inicialment els jugadors van posicionar-se al llarg de la platja de la següent manera:

Posició	Km 0	Km 1	Km 2	Km 3	Km 4
Alumnes	1	4	5	4	1

Els motius més repetits van ser: *"estàs a l'entrada de la platja, al mig tens més clients a l'abast, millor en el Km 3 perquè l'altre ocuparà el Km 2 ".*

Després d'haver disputat unes primeres partides amb els companys, molts alumnes van reavaluar la situació i van considerar que obtindrien més clients en les posicions: Km 2 (12/15), Km 3 (2/15) i Km 1 (1/15). Els arguments principals van ser:

Motius	Alumnes
En el centre més gent ve cap a tu	8/15
Sempre tindré més clients faci el que faci l'altre quiosc	2/15
Depèn de l'altre jugador m'emporto més o menys clients	3/15
Arraconar l'altre quiosc	1/15
Apropar-me a l'altre quiosc	1/15

Per altra banda tots els alumnes[3] van coincidir en posicionar el quiosc en el Km 2 quan se'ls va preguntar *"en quina posició et posaries si no tinguessis competència?"*.

Pel que fa a classificació dels jocs, hem pogut observar que 9 dels 15 alumnes han classificat correctament la temporalitat (9/14)[3], 13 dels 15 la presència d'atzar i 12 dels 15 la millor representació del joc.

A l'hora de descriure formalment el joc, notem que els alumnes han sabut determinar correctament:

Conceptes	Alumnes	
Jugadors	13/15	(13/14)[3]
Estratègies	8/15	(8/9)[3]
Beneficis	11/15	(11/15)[3]
Millor resposta jugador 2	6/15	(6/13)[3]
Millor resposta jugador 1	6/15	(6/13)[3]
Equilibri de Nash	9/15	(9/13)[3]

Els alumnes han sabut respondre correctament els conceptes jugadors i estratègies i han pogut obtenir la taula dels beneficis de cada situació.

[3]Si excloem les respostes en blanc

El concepte de millor resposta sembla que no s'ha entès tan bé com ens hagués agradat, això ens porta a pensar que el procés d'eliminació per dominància no ha quedat del tot clar. Tot i no haver trobat la millor resposta de cada jugador, 9 alumnes han trobat l'equilibri de Nash.

Davant una situació de cooperació, els alumnes van proposar situar els quioscs en: Km 1 i Km 3 (9/15 alumnes), Km 0 i Km 4 (4/15) i Km 2 els dos quioscs (2/15). Observem doncs que totes les propostes concorden amb la idea de cooperació, ja que els quiosquers es reparteixen els clients equitativament.

Finalment, majoritàriament (10/15) els alumnes han estudiat adequadament la situació on un dels quiosquers trenca l'acord de cooperació i se situa en la posició d'equilibri de Nash.

7 Conclusions

En aquest capítol es presentaran les conclusions d'aquest Treball de Final de Grau. En el primer apartat recollirem les conclusions extretes de les activitats del taller de Teoria de Jocs i de l'aplicació didàctica. En el segon apartat farem referència a propostes de millora i perspectives d'investigació a realitzar en un futur. I per finalitzar, comentarem l'assoliment dels objectius generals d'aquest treball.

7.1 Conclusions de les activitats i de l'aplicació didàctica

Després d'haver realitzat una anàlisi de les respostes dels alumnes podem extreure les següents conclusions de cada activitat:

Ultimàtum:
En aquesta primera activitat, els alumnes van recollir les dades utilitzant taules i diagrames d'arbre correctament. En tot moment les preguntes ens van permetre recollir els diferents motius i factors externs que podien influir en la presa de decisions dels jugadors. Els alumnes van demostrar saber calcular els beneficis de cada jugador en funció de les decisions preses durant el transcurs del joc.
Tot i no tenir tan bons resultats com haguéssim volgut, en la descripció formal de l'última fase del joc, majoritàriament els alumnes van saber descriure formalment els dos primers jocs, responent correctament els conceptes de jugador, estratègies i beneficis. Pel que fa a l'anàlisi del joc el primer joc va tenir força èxit, però hem observat que molts alumnes van presentar dificultats, especialment en el segon joc, a l'hora de trobar la millor resposta del jugador 1 i en conseqüència l'equilibri de Nash.

Cursa de camells:
Pràcticament tots els alumnes han realitzat correctament l'estudi probabilístic del joc, trobant així l'estratègia guanyadora i descartant el succés impossible. En conseqüència, els alumnes han trobat la millor resposta i l'equilibri de Nash en el cas dels 12 camells i han pogut corroborar l'equiprobabilitat en el cas dels 6 camells.
Pel que fa a l'aprenentatge dels errors i les suposicions prèvies, realment no hi ha hagut molt a contrastar, ja que hem observat que els alumnes tenen una forta intuïció sobre l'atzar, tot i no haver-ho treballat mai a classe anteriorment.

Quioscs:
En aquesta activitat els alumnes han recollit les dades utilitzant les taules i han calculat, segons les decisions preses per cada jugador, els beneficis correctament. Majoritàriament han sabut descriure formalment el joc, responent correctament els conceptes de jugador, estratègies i beneficis. Tot i que força alumnes han trobat l'equilibri de Nash, alguns han presentat dificultats a l'hora de trobar les millors respostes dels jugadors.
Finalment hem observat com, durant el transcurs de l'activitat, els alumnes han reavaluat les suposicions prèvies i han rectificat la localització dels quioscs tendint a la posició d'equilibri.

Un cop analitzades les respostes dels alumnes i haver observat el transcurs de les activitats en l'aula, creiem que el joc de *l'Ultimàtum* és el que presenta un pauta més amplia de millora. En canvi, l'activitat de la *Cursa de camells* ha tingut molt èxit i ha permès introduir els alumnes en el món de la probabilitat. Per altra banda, l'activitat dels *Quioscs* va obtenir millor acollida del que ens pensàvem, ja que era l'única activitat que no requeria material manipulatiu i es tractava d'una situació conflictiva a diferència de les altres activitats més lúdiques.

Al llarg de les tres sessions, gran part dels alumnes han sabut classificar els jocs segons la temporalitat, la presència de l'atzar i la representació més apropiada.

A partir de contrastar resultats i arguments dels alumnes, hem pogut extreure alguns dels factors que podien influir en la presa de decisions en cadascuna de les situacions i hem observat com els alumnes han reavaluat les suposicions prèvies, aprenent així dels erros.

Hem observat clarament que els alumnes, en general, poden descriure formalment un joc i representar-lo en el format més adequat. Creiem fermament que el mètode d'eliminació per dominància estricte, la inducció enrere i els conceptes de la millor resposta i l'equilibri de Nash es podrien haver entès millor en cursos més avançats, ja que es tracta de conceptes força complexos pels alumnes de primer d'E.S.O.

Finalment ens agradaria destacar la motivació dels alumnes i l'ambient que s'ha generat a l'aula durant tot el transcurs del taller. Un altre aspecte a remarcar és que els jocs d'estratègia permeten desenvolupar la formulació i resolució de problemes i la modelització de processos a partir de l'anàlisi de les estratègies d'un joc.

7.2 Propostes de millora i perspectives d'investigacions futures

Un cop observats els resultats d'aquest treball, podria plantejar-se un estudi sobre de la influència dels jocs d'estratègia proposats en alumnes d'altres cursos de l'ESO i batxillerat, per tal de corroborar com els resultats milloren amb l'edat, ja que, com hem comentat anteriorment, creiem que els conceptes de millor resposta i equilibri de Nash poden ser anticipats per cursos inicials de l'E.S.O.

També ens agradaria remarcar la gran adaptabilitat que representen els jocs i com aquests podrien ser una eina molt útil per introduir i treballar altres continguts del currículum dels diferents cursos alhora que els alumnes desenvolupen estratègies de resolució de problemes.

7.3 Conclusions generals

Un cop repassat el transcurs d'aquest viatge, fermament puc confirmar que s'han complert els objectius marcats a l'inici d'aquest Treball Final de Grau.

En l'àmbit teòric, s'ha fet un estudi i classificació dels diferents jocs i s'han establert les bases teòriques en les quals ens hem centrat en l'aplicació didàctica.
Per una banda, hem demostrat l'existència d'equilibri en jocs estàtics on podem determinar la millor resposta de cada jugador i en jocs dinàmics. També hem estudiat la problemàtica de l'existència en estratègies pures.
Per altra banda, hem anunciat el *teorema del punt fix de Kakutani* i el *teorema de Nash* que ens assegura l'existència de l'equilibri de Nash en l'extensió mixta d'un joc, en aquest aspecte no hem aprofundit tant com ens hauria agradat, ja que les matemàtiques necessàries per desenvolupar la demostració d'aquests dos teoremes podrien ocupar íntegrament un Treball Final de Grau. Finalment, he trobat molt interessant analitzar exhaustivament el joc de *Pedra-Paper-Tisores* i demostrar que l'equilibri de Nash s'assoleix quan els jugadors assignen la mateixa probabilitat a cada estratègia.

En el capítol 5, hem reconegut l'aportació de diferents referents didàctics en el camp de la teoria de jocs i hem destacat algunes de les publicacions i obres més rellevants.

En la part didàctica hem mostrat la relació entre la resolució de problemes i l'anàlisi d'un joc, així com hem comprovat que la teoria de jocs té cabuda dins el currículum de matemàtiques de secundària i batxillerat.
Pel que fa a l'aplicació didàctica, s'ha dissenyat i realitzat un taller de tres sessions de teoria de jocs per alumnes de 1r d'E.S.O. Els resultats de les activitats del taller indiquen que s'ha ajustat adequadament als continguts, ja que, en general, els alumnes han pogut classificar, descriure formalment i analitzar els jocs, tot i que considerem que alguns conceptes com millor resposta i equilibri de Nash resulten força complexos per alumnes de primer d'E.S.O.
Haver de preparar una sèrie d'activitats per un públic desconeixedor de la teoria de jocs i sense nocions prèvies de probabilitats ha suposat tot un repte, i més si s'ha perdut la visió externa perquè, després d'estar molts mesos treballant en una matèria, és molt fàcil caure en l'error d'assumir que alguns conceptes es coneixen.

Pel que fa a conclusions personals, aquest treball ha reafirmat la meva vocació pedagògica. Llegir tesis doctorals i estudis relacionats amb les aplicacions didàctiques en les matemàtiques m'han fet replantejar la direcció del meu futur acadèmic i professional un cop hagi finalitzat el màster oficial en formació de professorat, ja que estic considerant realitzar un doctorat en educació per tal de complementar la meva formació.

En general estic molt satisfeta amb l'experiència que m'ha ofert la realització d'aquest treball. M'agradaria haver tingut l'oportunitat d'implementar el taller en altres cursos, atès que durant la realització d'aquest projecte s'han obert moltes portes que m'agradaria investigar amb cursos més avançats. No descarto seguir impartint el taller en l'escola, ja que les activitats van tenir bona acollida entre els alumnes. De fet el professorat de l'escola m'ha ofert repetir l'experiència el curs vinent.

Referències

[1] Badillo, E.; Edo, M.; Deulofeu, J. (2012). *L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes.* Nou Biaix, 30, 29-43, ISSN 1133-4282.

[2] Bright, G.W, Harvey, J.G, Wheeler, M.M. (1985). *Learning and mathematic Games.* Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 1.

[3] Cockcroft, W. H. *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft.* Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación y Ciencia (1985). ISBN: 84-369-1260-8

[4] Consola y Tablero. *Jordi Deulofeu, Doctor en Didáctica de las Matemáticas [Entrevista]:Festival DAU Barcelona 2019.*

[5] Corbalán, F.*Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos.* SUMA, 23, 21-32.

[6] Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisi de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

[7] Corbalán, F. i Deulofeu, J. (1996). *Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas.* Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 7, 71-80.

[8] Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Editorial Sintesi. ISBN-10 : 847738231X ISBN-13 : 978-8477382317

[9] Currículum Batxillerat. Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. *Currículum batxillerat – Decret 142/2008 - DOGC núm. 5183.*
Disponible a *aquí*.

[10] Currículum E.S.O. Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament. *Currículum educació secundària obligatòria. Decret 187/2015 DOGC núm. 6945 – 28.8.2015.*
Disponible a *aquí*.

[11] Deulofeu, Jordi. *Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: diversidad de opciones y de recucrsos.* Guías para el profesorado: Matemáticas ESO (pp. 115-125). Barcelona 2003.

[12] Deulofeu, Jordi. *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes: teoria de juegos.* RBA, 2011. ISBN: 9788498679168.

[13] Deulofeu, Jordi. *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas.* Barcelona: Planeta, 2001. ISBN: 9788408038429

[14] Echenique Urdiain, Isabel. *Matemáticas resolución de problemas.* 1a edición. Navarra: Fondo de publicaciones del gobierno de Navarra, 2006. ISBN: 84-235-2888-0

[15] Edo, M. (2002). *Joc, interacció i construcció de coneixements matemàtics.* Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat de Ciències de l'Educació.

[16] Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. i Badillo, E. (2008). *Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema.* Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática 14, 61-75.

[17] Edo, M.; Deulofeu, J. Baeza. M. (2009, julio). *Investigación sobre procesos de resolución de problemas en un entorno de juegos de estrategia.* En XIV JAEM Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Girona: FESPM.

[18] Edo, M.; Deulofeu, J.; Badillo, E. (2007). *Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela.* Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Granada: Publicaciones FESPM.

[19] Farré, A. (2013). *La influència de l'ús de jocs d'estratègia en l'aprenentatge de la resolució de problemes de matemàtiques a l'educació secundària.* Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat de Ciències de l'Educació.

[20] Gardner, M. *Circo matemático.* Madrid, 1995. ISBN 9788420619378

[21] Huizinga, J. *Homo ludens.* Madrid, 1938. ISBN 9089640037

[22] Lorenzo, M.E. (2018) *Juegos de estrategia en formato tecnológico y resolución de problemas en la ESO.* Universitat Autònoma de Barcelona, Facultat de Ciències de l'Educació.

[23] Morris, Peter. *Introduction to Game Theory.*New York (N.Y.): Springer, cop. 1994. ISBN 0-387-94284-X.

[24] Myerson, Roger B. *Game theory : analysis of conflict.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1991. ISBN 0674341163.

[25] Oldfield, B.J. (1997). *Games in the Learning of Mathematics.* Mathematics in School, 20(1), 41-43

[26] Pérez, Joaquin.; Jimeno, José. L.; Cerdà, Emilio. *Teoría de juegos.* 2a edició. Madrid: Garceta, 2013. ISBN 9788415452744.

[27] Poundstone, William.*Prisoner's Dilemma.* 1a edició. Nova York: Anchor, 1993. ISBN 0-385-41580-X.

[28] Titching blog de Educación y TIC. *Fernando Corbalán: "Los juegos son la base de las matemáticas".* (2013)
Disponible a *aquí*.

[29] Unicef. *Convención sobre los Derechos del Niño.* 2006.
Disponible a *aquí*.

[30] Vigotski, L. S. (1988). *Liev Semiònovitx Vygotski: Pensament i llenguatge.* Edició d'Ignasi Vila i Rosa Colomina. Vic: EUMO, Barcelona: Diputació de Barcelona.

[31] Von Neumann, John i Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, 1944.

(*) Tots els enllaços han estat consultats amb data: 20 de juny de 2021.

A Annexos part teòrica

A continuació presentaré els càlculs de l'exemple 4.13:

Utilitat del jugador 1:

$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = p_R \cdot q_R \cdot u_1(R,R) + p_R \cdot q_P \cdot u_1(R,P) + p_R \cdot q_T \cdot u_1(R,T) + p_P \cdot q_R \cdot u_1(P,R) + p_P \cdot q_P \cdot u_1(P,P) + p_P \cdot q_T \cdot u_1(P,T) + p_T \cdot q_R \cdot u_1(T,R) + p_T \cdot q_P \cdot u_1(T,P) + p_T \cdot q_T \cdot u_1(T,T) =$

$= p_R \cdot q_R \cdot 0 + p_R \cdot q_P \cdot (-1) + p_R \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot 1 + p_P \cdot q_R \cdot 1 + p_P \cdot q_P \cdot 0 + p_P \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot (-1) + (1 - p_R - p_P) \cdot q_R \cdot (-1) + (1 - p_R - p_P) \cdot q_P \cdot 1 + (1 - p_R - p_P) \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot 0 =$

$= -p_R \cdot q_P + p_R - p_R \cdot q_R - p_R \cdot q_P + p_P \cdot q_R - p_P + p_P \cdot q_R + p_P \cdot q_P - q_R + p_R \cdot q_R + p_P \cdot q_R + q_P - p_R \cdot q_P - p_P \cdot q_P =$

$= p_R - p_P - q_R + q_P - 3 \cdot p_R \cdot q_P + 3 \cdot p_P \cdot q_R$

Aleshores la utilitat de $U_1(\sigma_1, \sigma_2) = p_R - p_P - q_R + q_P - 3 \cdot p_R \cdot q_P + 3 \cdot p_P \cdot q_R$

Utilitat del jugador 2:

$U_2(\sigma_1, \sigma_2) = p_R \cdot q_R \cdot u_2(R,R) + p_R \cdot q_P \cdot u_2(R,P) + p_R \cdot q_T \cdot u_2(R,T) + p_P \cdot q_R \cdot u_2(P,R) + p_P \cdot q_P \cdot u_2(P,P) + p_P \cdot q_T \cdot u_2(P,T) + p_T \cdot q_R \cdot u_2(T,R) + p_T \cdot q_P \cdot u_2(T,P) + p_T \cdot q_T \cdot u_2(T,T) =$

$= p_R \cdot q_R \cdot 0 + p_R \cdot q_P \cdot 1 + p_R \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot (-1) + p_P \cdot q_R \cdot (-1) + p_P \cdot q_P \cdot 0 + p_P \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot 1 + (1 - p_R - p_P) \cdot q_R \cdot 1 + (1 - p_R - p_P) \cdot q_P \cdot (-1) + (1 - p_R - p_P) \cdot (1 - q_R - q_P) \cdot 0 =$

$= p_R \cdot q_P - p_R + p_R \cdot q_R + p_R \cdot q_P - p_P \cdot q_R + p_P - p_P \cdot q_R - p_P \cdot q_P + q_R - p_R \cdot q_R - p_P \cdot q_R - q_P + p_R \cdot q_P + p_P \cdot q_P =$

$= -p_R + p_P + q_R - q_P + 3 \cdot p_R \cdot q_P - 3 \cdot p_P \cdot q_R$

Aleshores la utilitat de $U_2(\sigma_1, \sigma_2) = -p_R + p_P + q_R - q_P + 3 \cdot p_R \cdot q_P - 3 \cdot p_P \cdot q_R$

B Annexos aplicacions didàctica

A continuació presentaré un seguit d'enllaços que vinculen a les presentacions de diapositives i activitats que s'han dissenyat per tal de dur a terme la implementació del taller a secundària i Batxillerat.

- Presentacions de diapositives del la primera sessió: *Presentació Teoria de jocs*.
- Guió de la primera sessió: *Guió*.
- Fitxa tècnica de les activitats de la segona sessió pel professorat: *Fitxa tècnica*.
- Activitat Ultimàtum: *Fitxa de l'activitat*.
- Activitat Cursa de camells: *Fitxa de l'activitat*.
- Activitat Quioscs: *Fitxa de l'activitat*.
- Solucions de les activitats: *Solucionari*.
- Respostes dels alumnes de cada activitat: *Carpeta*.
  Recomanem consultar les respostes següents:
  - Ultimàtum: *grup 3*, *grup 9* i *grup 15*.
  - Cursa de camells: *grup 1*, *grup 8* i *grup 12*.
  - Quioscs: *grup 2* i *grup 7*.
- Anàlisi dels resultats: *Resultats*.
- Presentacions de diapositives del concurs: *Concurs*.
- Solucions del concurs: *Solucionari*.
- Respostes del concurs dels alumnes: *Carpeta*.

(*) Tots els enllaços han estat consultats amb data: 20 de juny de 2021. En cas de pèrdua de l'enllaç, en les següents pàgines presento el material més destacat.

Codi**:**.. Data: ....
Curs:............... Grup:.........

Resum:
Endinsarem als alumnes en el món de la teoria de jocs a través del clàssic dilema del presoner en model estàtic i dinàmic, amb el qual aprendran com prendre decisions a mitjançant la dominància estricta i la inducció enrere. Observarem quin paper juga el factor de l’atzar en els jocs i com tenir en compte la probabilitat en la presa de decisions. Finalment estudiarem diferents models de jocs que podem trobar en situacions quotidianes.

Objectius generals:

- Traduir, organitzar i representar la informació a un llenguatge matemàtic.
- Saber elegir i utilitzar diversos mètodes de raonament.
- Analitzar situacions i els possibles resultats.
- Descriure formalment el joc en cada situació.
- Trobar la millor decisió de cada jugador mitjançant inducció enrere i calcular l’equilibri de Nash.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors d’aquestes.

<u>1a sessió: Introducció</u>

Objectius: Dilema del presoner (estàtic i dinàmic)

- Primer contacte amb la teoria de jocs i els seus elements així com la funció millor resposta i l’equilibri de Nash.
- Aprendre l’eliminació per dominància estricta i inducció enrere.
- Saber classificar els jocs segons la temporalitat: dinàmic vs. estàtic.

Objectius: Joc pedra-paper-tisores

- Introducció a la probabilitat
- Predicció de resultats en experiments aleatoris.
- Simulacions i comprovació de les prediccions.

<u>2a sessió: Activitats</u>

Objectius: Ultimàtum

- Recollir dades utilitzant taules i diagrames en forma d’arbre.
- Calcular els beneficis de cada jugador en funció de les decisions preses.
- Classificar el joc segons temporalitat, representació i presència de l’atzar
- Descriure formalment el joc en cada situació.
- Trobar la millor decisió de cada jugador mitjançant inducció enrere i calcular l’equilibri de Nash.
- Interpretar factors externs (no racionals) que poden influir en la presa de decisions.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors

Codi:... Data: ....
Curs:............... Grup:.........

Objectius: Cursa de camells

- Classificar el joc segons temporalitat, representació i presència de l'atzar.
- Realitzar un estudi i recompte dels diferents casos per poder fer l'estudi probabilístic d'un joc.
- Saber descartar estratègies impossibles i triar l'estratègia guanyadora, és a dir, aquella que és més probable que guanyi.
- Conèixer les idees i hipòtesis no preconcebudes que tenen els alumnes sobre la probabilitat i com aquestes poden influir en la presa de decisions
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors

Objectius: Quioscs

- Recollir dades utilitzant taules.
- Calcular els beneficis de cada jugador en funció de les decisions preses.
- Classificar el joc segons temporalitat, representació i presència de l'atzar.
- Descriure formalment el joc i saber trobar la millor decisió de cada jugador i l'equilibri de Nash.
- Conèixer quins factors i idees poden influir en la presa de decisions.
- Reavaluar les suposicions prèvies i aprendre dels errors.

<u>3a sessió: Concurs</u>

Objectius:

- Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
- Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
- Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i entendre la magnitud de la complexitat d'algunes d'aquestes.

Competències:

- Competència 1: Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
- Competència 2: Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
- Competència 5: Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.
- Competència 6: Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.
- Competència 11: Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.

Codi:.. Data: ....
Curs:............... Grup:.........

Continguts clau:
CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules

CC14. Dades, taules i gràfics estadístics.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat.

Gràcies a la gran adaptabilitat que ens ofereixen els jocs o situacions conflictives, també podem desenvolupar en forma d'introducció pràctica altres continguts del currículum. En els jocs on l'atzar intervé, els alumnes clarament poden experimentar o profunditzar amb els continguts claus de "sentit i mesura de la probabilitat" en la E.S.O. i els continguts de "probabilitat i estadística" de Batxillerat. De la mateixa manera podem enfocar els jocs de manera que es relacionin amb continguts claus de càlcul i geometria com per exemple es pot introduir la idea de coordenades i punts a través de jocs de batalla naval.

Curs:
Aquesta activitat s'adreça a l'alumnat de 1r d'E.S.O.

Connexions:

- Àrea d'economia: l'activitat dels Quioscs mostra una aplicació directa de la presa de decisions en el món empresarial.
- Àrea de biologia: comentem en la 1a sessió l'aplicació de la teoria de jocs en la biologia evolutiva (depredador – presa).

Procediment sessió 1:

- Primerament es demanarà als alumnes que defineixin el concepte de joc i donin alguns exemples.
- En una taula classificarem els exemples proposats segons la temporalitat, la cooperativitat i la presència d'atzar.
- S'exposarà el dilema del presoner (estàtic) i es demanarà als alumnes argumentar la millor estratègia. S'explicarà el concepte millor resposta i l'equilibri de Nash i com trobar-lo mitjançant l'eliminació per dominància estricta.
- Remarcarem en tot moment la importància d'assumir que tot jugador és racional i és tan llest com nosaltres
- Tot seguit es presenta el dilema del presoner en model dinàmic. Analitzem el joc per inducció enrere per tal de trobar les millors estratègies de cada jugador i l'equilibri de Nash.
- A continuació, i si hi ha temps, es demanarà dos o més voluntaris per jugar al pedra-paper-tisores. Observem com no és possible determinar la millor resposta de cada jugador i per tant no podem trobar l'equilibri de Nash. Amb aquest exemple introduirem la probabilitat en els jocs i realitzarem un estudi probabilístic del joc per tal de poder analitzar-lo correctament.

Codi**:**.. Data: ....
Curs:............... Grup:.........

Procediment sessió 2:

- En els primers minuts de la sessió es farà un petit recordatori dels conceptes claus apressos en la primera sessió.
- Dividirem la classe en 3 grup per tal que cadascun estudiï una de les activitats. Cada alumne descarregarà el document de l'activitat assignada i es repartirà el material necessari.
- Es prioritzarà el desenvolupament i autonomia dels alumnes per tal de fomentar la presa de decisions, l'aprenentatge dels errors i l'actitud de recerca. Si és necessari, el professor resoldrà els dubtes que puguin sorgir rellegint les indicacions, marcades en l'enunciat, per tal d'evitar influir en les respostes dels alumnes.
- Un cop pujats els fitxers de les activitats al campus, es comentaran per sobre les solucions de les activitats i un representant de cada grup realitzarà un petit resum de què havien observat durant l'activitat per a la resta de la classe.

Procediment sessió 3:

- Formarem 4 grups en els quals hi haurà com a mínim dos alumnes de cada una de les activitats estudiades en la sessió anterior.
- Cada grup participarà com un únic jugador, de manera que els alumnes hauran de debatre i concordar una solució en el temps estipulat per torn. Hauran d'escriure en el dossier els esquemes i deduccions necessàries per trobar la millor resposta i l'equilibri de Nash. Passat el temps per pensar la solució, cada grup apuntarà a la targeta la decisió que han acordat i tots els grups l'ensenyaran alhora.
- Un cop finalitzat el temps i després que cada equip hagi donat la seva resposta final, el professor, amb l'ajuda de les diapositives, comentarà la resposta correcta i es declararà el/els equip/s guanyadors.
- En els jocs de N jugadors cada grup representarà un jugador diferent i el guanyador serà aquell que obtingui més beneficis. En els jocs de 2 jugadors cada grup jugarà contra el professor i el guanyador serà el que obtingui millors beneficis contra el professor.
- Si hi ha temps, es poden realitzar algunes preguntes per ampliar i convidar als alumnes a reflexionar:
  - Cada jugador té les mateixes probabilitats de guanyar? El jugador que comença té avantatges?
  - És just un joc? Com podem fer-lo just? Com podem fer que guanyi l'opció X?
  - És possible determinar en qualsevol joc l'estratègia guanyadora? I l'equilibri?
  - Quins factors que poden influir en la presa de decisions? Aquests factors varien si l'adversari es tracta d'una persona coneguda o desconeguda?
  - Quin joc creus que és més fàcil analitzar? I el més difícil? La gran complexitat de jocs com el tabli, escacs, monopoli, empreses, ...

QUÈ ÉS UN JOC?

Joc	No jocs

- Atzar (A)
- Temporalitat: simultani (S) o per torns (T)
- Cooperació (C)

DILEMA DEL PRESONER

"La policia arresta dos sospitosos i, després d'haver-los separat, els interroga i els ofereix el mateix tracte. Si un confessa i el seu còmplice no, el còmplice serà condemnat a deu anys de presó, i el primer serà alliberat. Si un calla i el còmplice confessa, el primer rebrà aquesta pena i serà el còmplice qui sortirà lliure. Si els dos sospitosos decideixen callar, com a màxim podran tancar-los durant un any. Si ambdós confessen, ambdós seran condemnats a sis anys."

Nombre de jugadors (N):

Estratègies:

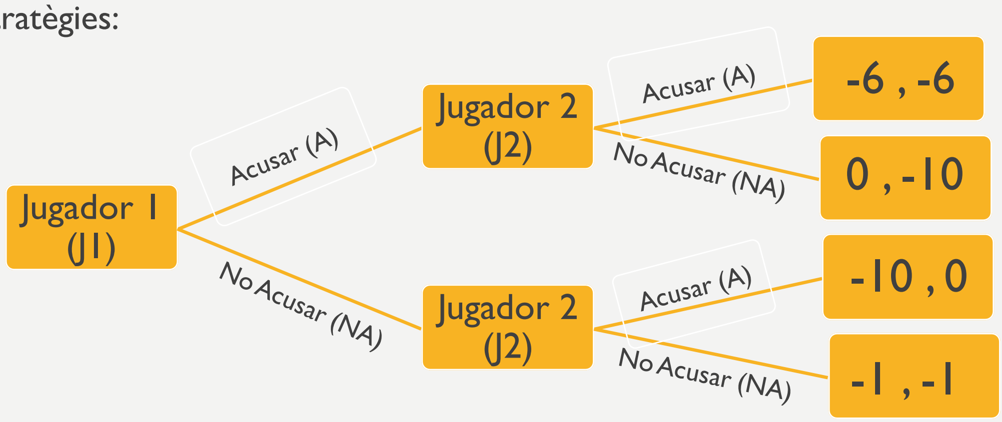
		Jugador 2 (J2)	
		Acusar (A)	No acusar (NA)
Jugador (J1)	Acusar (A)	-6 , -6	0 , -10
	No acusar (NA)	-10 , 0	-1 , -1

DILEMA DEL PRESONER: PER TORNS

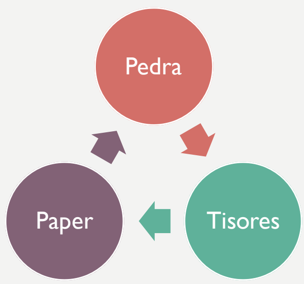
"La policia arresta dos sospitosos i, després d'haver-los separat, els interroga i els ofereix el mateix tracte. El primer sospitós és el primer en decidir si confessa o calla. Un cop ho ha decidit, li comuniquen al segon sospitós la decisió que ha pres el primer sospitós."

Nombre de jugadors (N):

Estratègies:



PEDRA – PAPER – TISORES



Nombre de jugadors (N):

Estratègies:

		Jugador 2 (J2)		
		Pedra (R)	Paper (P)	Tisores (T)
Jugador (J1)	Pedra (R)	0 , 0	-1 , 1	1 , -1
	Paper (P)	1 , -1	0 , 0	-1 , 1
	Tisores (T)	-1 , 1	1 , -1	0 , 0

Grup 1: Ultimàtum

Materials:

- 1 bitllet de 100 €
- 2 bitllets de 50 €
- 5 bitllets de 20 €
- 10 bitllets de 10 €

Funcionament del joc:
El jugador 1 té 100 € en la seva disposició i té l'opció de repartir-los cedint-li al jugador 2 una quantitat X. El jugador 1 fa una oferta i el jugador 2 ha decidir si l'accepta o la rebutja. En cas de rebutjar-la els dos jugadors se'n van amb les butxaques buides.

Qüestions:
Per parelles haureu de jugar a l'ultimàtum.

1. Decidiu qui serà el jugador 1 i el jugador 2, marca amb X quin jugador ets. Completeu la taula:

Jugador 1: Jugador 2:

El jugador 1 té	**Oferta Jugador 1**	**Decisió Jugador 2**	**Beneficis**	
	Quants bitllets cedeixes?	Accepta o Rebutja	Jugador 1	Jugador 2
1 bitllet de 100 €				
1 bitllet de 100 €				
2 bitllets de 50 €				
2 bitllets de 50 €				
5 bitllets de 20 €				
5 bitllets de 20 €				
10 bitllets de 10 €				
10 bitllets de 10 €				

a) Quina estratègia has seguit el Jugador 1 i per què?

b) Per quins motius el Jugador 2 ha acceptat o rebutjat les ofertes?

c) Si juguessis novament, canviaries la teva estratègia? Com i per què?

2. Respon les següents preguntes:
   a) L'ultimàtum es tracta d'un joc estàtic o per torns (dinàmic)? Quina és la millor opció per representar el joc: una taula o un diagrama en forma d'arbre?

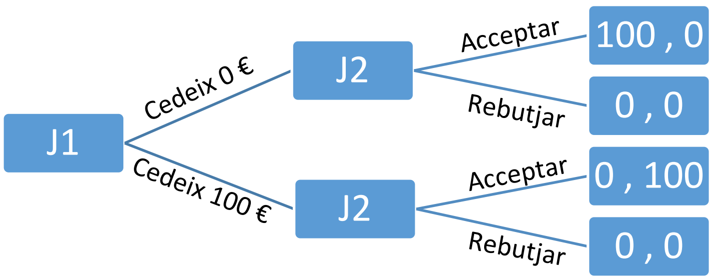
   b) L'atzar hi juga algun paper?

3. Descriu formalment el joc i troba l'equilibri de Nash segon si s'està repartint les quantitats següents. Indicació: Si el jugador 2 obté el mateix benefici tant si accepta com si rebutja, prioritzarà **ACCEPTAR**.

   a) 1 bitllet de 100 €:
   Jugadors: N = {1 , 2}
   Estratègies 1: S_1 = { 0, 100 } Estratègies 2: S_2 = { Acceptar , Rebutjar }
   Beneficis:

J1 \ J2	Acceptar	Rebutjar
Cedeix 0 €	100 , 0	0 , 0
Cedeix 100 €	0 , 100	0 , 0

Dibuix de l'esquema:



Millor resposta del Jugador 2? Per què?

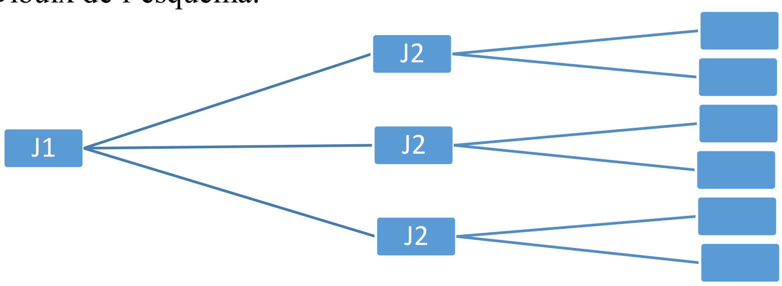
Millor resposta del Jugador 1? Per què?

Equilibri de Nash?

b) 2 bitllets de 50 €:
Jugadors: N = { }
Estratègies: S_1 = { } S_2 = { }
Beneficis:

J1 \ J2	Acceptar	Rebutjar
Cedeix		
Cedeix		
Cedeix		

Dibuix de l'esquema:



Millor resposta Jugador 2? Per què?

Millor resposta Jugador 1? Per què?

Equilibri de Nash?

4. Decidiu qui serà el jugador 1 i el jugador 2, marca amb X quin jugador ets.
Jugador 1: Jugador 2:
El jugador 1 té 100€ en el banc i pot cedir una quantitat X al jugador 2 realitzant una transferència. Indicació: El banc permet fer transferències de cèntims.

Oferta Jugador 1	**Decisió Jugador 2**	**Beneficis**	
Quina quantitat cedeix?	Accepta o Rebutja	Jugador 1	Jugador 2

Canvieu els rols. Jugador 1: Jugador 2:

Oferta Jugador 1	**Decisió Jugador 2**	**Beneficis**	
Quina quantitat cedeix?	Accepta o Rebutja	Jugador 1	Jugador 2

5. Descriu formalment el joc anterior i troba l'equilibri de. Indicació: Si el jugador 2 obté el mateix benefici tant si accepta com si rebutja, prioritzarà ACCEPTAR.

Jugadors: N =
Estratègies: S_1 = S_2 =
Beneficis:

Dibuix de l'esquema:

Trobarem l'equilibri de Nash utilitzant inducció enrere:

Millor resposta Jugador 2? Per què?

Millor resposta Jugador 1? Per què?

Equilibri de Nash?

Grup 2: Cursa de camells

Materials:

- 2 daus
- 12 objectes numerats de l'1 al 12

Funcionament del joc 1:
Se celebra una cursa de 6 camells numerats. Es tira el dau i avança el camell corresponent. El primer camell a arribar a la meta és el guanyador.

Qüestions:

1. Quin és el camell que creus que arribarà primer a la meta? Per què?

2. Feu un registre de la cursa. Marqueu amb una X cada cop que avanci el camell corresponent.

1										
2										
3										
4										
5										
6										

a) Quin camell ha guanyat? Per què creus que ho ha fet?

b) Quin o quins camells han perdut? Quin creus que és el motiu pel qual ha perdut?

3. Respon les següents preguntes:

a) Es tracta d'un joc estàtic o per torns (dinàmic)?

b) L'atzar hi juga algun paper? Per què?

4. Quina és la probabilitat que avanci el camell 1? I la de la resta de camells?

5. Quin camell és més probable que guanyi? I que perdi?

Funcionament del joc 2:
Se celebra una cursa de 12 camells numerats. Es tiren 2 daus i avança el camell corresponent a la **SUMA** dels dos daus. El primer camell a arribar és el guanyador.

Qüestions:

1. Quin és el camell que creus que arribarà primer a la meta? Per què?

2. Feu un registre de la cursa. Marqueu amb una X cada cop que avanci el camell.

1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										

a) Quin camell ha guanyat? Per què creus que ho ha fet?

b) Quin o quins camells han perdut? Quin creus que és el motiu pel qual ha perdut?

3. Per tal d'estudiar la cursa dels 12 camells estudiarem la probabilitat de cada camell. Completeu la taula:

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

a) De quantes maneres diferents podem obtenir els resultats al tirar dos daus? Pista: quantes sumes has fet?
 Casos totals:

b) Sumant els dos daus, de quantes maneres diferents podem obtenir cadascun dels resultats?
Ex: Podem obtenir el 5 de 4 maneres diferents → 1 + 4 , 2 + 3 , 3 + 2 i 4 + 1.

Camell	Quantes maneres?	Quines sumes?
1		
2		
3		
4		
5	4	1+4, 2+3, 3+2, 4+1
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
TOTAL		

*Observa que la suma de totes les opcions ha de coincidir amb els casos totals.

c) Quina és la probabilitat que avanci cada camell?
Recorda calculem la probabilitat: P(5) $= \frac{casos\ favorables\ que\ surti\ 5}{casos\ totals} = \frac{4}{36}$

P(1) = —

P(2) = —

P(3) = —

P(4) = —

P(5) = —

P(6) = —

P(7) = —

P(8) = —

P(9) = —

P(10) = —

P(11) = —

P(12) = —

d) Quin camell és més probable que guanyi? I que perdi?

Grup 3: Quioscs

Funcionament del joc:
En una platja de 4km de llarg volen obrir 2 quioscs. Cada quiosc ha de triar una localització de la platja: 0km, 1km, 2km, 3km o 4km. Suposem que els banyistes es posicionen uniformement al llarg de la platja i que cada client anirà al quiosc que estigui més a la vora. Si se situen al mateix km, es reparteixen els clients.

Banyistes: marró, gris, groc, blau, vermell, verd, blanc i lila.

Recordeu: els clients van al quiosc més proper. Per exemple, si el quiosc 1 decideix situar-se en el km 1 i l'altre quiosc en el km 2, el banyista groc anirà al quiosc 1 i el banyista blau anirà al quiosc 2.

Qüestions:

1. Abans de jugar amb els companys indica en quina posició et posaràs. Per què?

2. Completa la taula competint amb la resta dels teus companys de grup.

Decisió quiosc 1	**Decisió quiosc 2**	**Clients**	
Quina posició se situa?	Quina posició se situa?	Jugador 1	Jugador 2

a) Com creus que podries haver aconseguit més clients?

b) Com creus que afecta la posició on se situa l'altre quiosc?

3. Indica en quina posició et posaries si no tinguessis competència, és a dir, si fossis l'únic quiosc en tota la platja. Per què?

4. Respon les següents preguntes:
   a) Aquesta situació es tracta d'un joc estàtic o per torns (dinàmic)?

   b) Creus que hi intervé l'atzar?

   c) Quina és la millor opció per representar el joc: una taula o un diagrama en forma d'arbre?

5. Estudieu els següents casos:
   a) Si el quiosc 1 se situa al km 0 i el quiosc 2 se situa al km 2.
      Punt mig:

      Banyistes consumiran en el quiosc 1:

      Banyistes consumiran en el quiosc 2:

   b) Si el quiosc 1 se situa al km 1 i el quiosc 2 se situa al km 4.
      Punt mig:

      Banyistes consumiran en el quiosc 1:

      Banyistes consumiran en el quiosc 2:

6. Descriu formalment el joc i troba l'equilibri de Nash segon la posició on se situen els quioscs.

   Jugadors: N =
   Estratègies: S_1 = { } S_2 = { }
   Beneficis:

J1 \ J2	Km 0	Km 1	Km 2	Km 3	Km 4
Km 0					
Km 1					
Km 2					
Km 3					
Km 4					

   Millor resposta Jugador 2?

   Millor resposta Jugador 1?

   Troba l'equilibri de Nash:

7. Respon les següents qüestions:
   a) Com creus que es desenvoluparia el joc si els dos quiosquers cooperessin? On se situaria cada quiosc? Quin és el punt mig?

   b) Quin benefici tindrà cadascú?

8. Respecte a les posicions de l'exercici anterior, suposa que el primer quiosquer trenca el pacte de cooperació i se situa a la posició que indica l'equilibri de Nash.
   a) Quines posicions tindria cada quiosc? Quin és el punt mig?

   b) Quin benefici obtindrà cada quiosquer?

PREGUNTA 1: ULTIMÀTUM

"El jugador 1 té 5 bitllets de 100 € en la seva disposició i té l'opció de repartir-los amb el jugador 2 si ho desitja. El jugador 1 fa una oferta i el jugador 2 ha decidir si l'accepta o la rebutja. En cas de rebutjar-la, el jugador 1 se'n va amb les butxaques buides i el jugador 2 se'n va amb 100 € més la meitat de l'oferta que li ha fet el jugador 1."

Si el jugador 2 obté el mateix benefici tant si accepta com si rebutja, prioritzarà **REBUTJAR.**

TEMPS!

minuts

SOLUCIÓ: ULTIMÀTUM

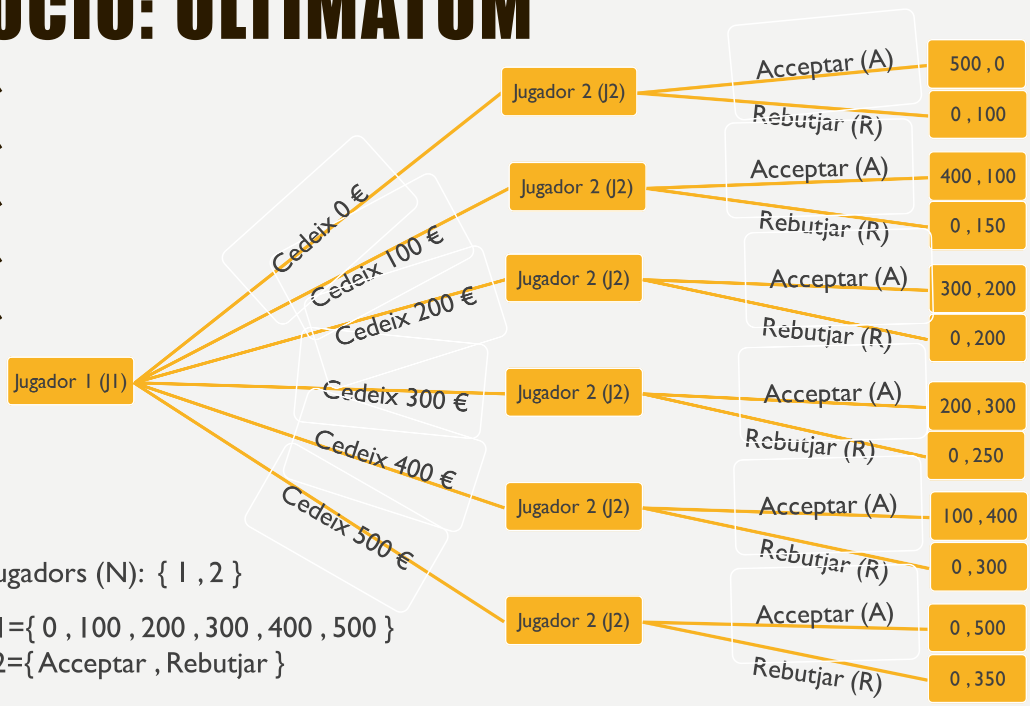
Equip 1 →

Equip 2 →

Equip 3 →

Equip 4 →

Equip 5 →



Nombre de jugadors (N): { 1 , 2 }

Estratègies: S1={ 0 , 100 , 200 , 300 , 400 , 500 }
S2={ Acceptar , Rebutjar }

PREGUNTA 2: CURSA DE CAMELLS

"Se celebra una cursa de 7 camells numerats del 0 al 6. Es tiren 2 daus i avança el camell corresponent a la RESTA dels dos daus. El primer camell a arribar és el guanyador."

RESTA → Valor gran – Valor petit.

TEMPS!

minuts

SOLUCIÓ: CURSA DE CAMELLS

Equip 1 →

Equip 2 →

Equip 3 →

Equip 4 →

Equip 5 →

		Dau 2					
		1	2	3	4	5	6
Dau 1	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

CASOS TOTALS

PROBABILITATS

PREGUNTA 3: QUIOSCS

"En una platja de 4km de llarg hi ha situat un quiosc (Jugador 0) al Km 1. A continuació el jugador 1 decideix on situarà el seu quiosc i per últim el jugador 2 haurà de posicionar el seu quiosc després de que el jugador 1 s'hagi situat. Suposem que cada client anirà al quiosc que estigui més a la vora."

Iniciar

TEMPS!

minuts

SOLUCIÓ: QUIOSCS

Equip 1 →

Equip 2 →

Equip 3 →

Equip 4 →

Equip 5 →