



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES I
ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESSES

**Subhastes de múltiples objectes.
Una aplicació al mercat elèctric
espanyol**

Víctor Fernández Acacio

Directors: **Dr. Xavier Jarque**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Javier Martínez de Albéniz
Dept. de Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial

Barcelona, Juny 2021

Resum

Les subhastes de múltiples objectes han guanyat interès, a causa de la creixent importància que han experimentat a partir dels anys noranta en l'economia. Entenem que una subhasta de múltiples objectes es produeix quan múltiples unitats d'un bé homogeni són venudes mitjançant una subhasta.

Comencem el treball estudiant les subhastes d'un objecte amb valoració privada. Després de classificar els diferents formats de subhasta, estudiem si aquestes són eficients, és a dir, si la persona que més valora l'objecte és la que guanya la subhasta. En el segon tema analitzem les subhastes de múltiples objectes amb valoració privada. El primer pas serà diferenciar els tres formats de subhasta. A continuació, d'igual manera que en el primer capítol, analitzem quins d'aquestes tres formats de subhasta són eficients. Per acabar, estudiem el mercat elèctric. En la primera part del capítol fem una introducció al mercat elèctric espanyol, per acabar el treball estudiant un model d'aquest tipus de subhasta.

Abstract

The multiple-object auctions have risen in interest, that is because of the growing interest since the nineties in economy. We are in the middle of a multiple-object auction when multiple identical units are being sold.

Firstly, we study the auctions of an object with private values. After classifying the different formats of auctions, we analyse if they are efficient, in other words, if the auction winner is the one who values the object the most. Secondly, we analyse the multiple-object auctions with private values. We will classify the three formats of auction. Then, as we did in the first chapter, we analyse which of these formats are efficient. Lastly, we study the electricity market. In the first half we introduce the Spanish electricity market and in the end we study a model of that type of multiple-object auctions.

Agraïments

En primer lloc vull agrair als meus tutors Javier Martínez de Albéniz i Xavier Jarque per la seva ajuda aportada. Sempre que ho he necessitat han tingut temps per mi, i a més d'aprendre d'ells com a matemàtic, he après molt d'ells com a persona, moltes gràcies.

En segon lloc, vull agrair a tota la família i amics que m'han acompanyat durant aquest viatge, moltes gràcies. Per acabar, m'agradaria dedicar aquest treball a tres persones. La primera és la meva mare. Ella sempre ha cregut en mi quan jo he deixat de creure, i m'ha ajudat a aixecar-me quan creia que no podia, moltíssimes gràcies.

Per últim, vull dedicar aquest treball a la meva avia i al meu avi, que malauradament no està entre nosaltres. En general, el meu major orgull és tenir la família que tinc, i en particular, ser el seu net. Os quiero yayos.

*If people do not believe
that mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is.*

John Von Neumann (1903–1957)

Índex

Resum/Abstract	iii
Agraïments	v
Índex	vii
Introducció	1
1 Subhasta d'un objecte amb valors privats	5
1.1 Alguns formats de subhasta comuns	5
1.2 Equilibris simètrics	7
2 Introducció a les subhastes de múltiples objectes	13
2.1 Subhastes per la venda de múltiples objectes idèntics	13
2.2 El model bàsic	21
2.3 Equilibris de les subhastes de múltiples objectes	22
3 Les subhastes al mercat elèctric espanyol	29
3.1 Una introducció al mercat elèctric espanyol	30
3.2 Modelització del mercat diari elèctric espanyol	33
Bibliografia	37

Introducció

Encara que l'origen de les subhastes no és del tot clar, es creu que les subhastes van ser utilitzades per primer cop com a mètode d'assignar objectes per l'imperi babilònic, al voltant de l'any 500 a.C. Altres grans imperis de l'edat antiga, tals com l'antic Egipte, l'Imperi Romà o l'antiga Grècia van utilitzar les subhastes per fins tan variats com per assignar béns, donar concessions de mines o per vendre esclaus.

En l'imaginari col·lectiu, quan escoltem el terme de “subhasta”, la primera cosa que ens ve al cap són les subhastes d'obres d'art, que són decidides a cop de martell. Encara que aquesta visió és influïda pel cinema, aquest exemple ens permet explicar per quin motiu s'utilitzen. Una persona o institució té una pintura, i una sèrie de compradors estan interessats a obtenir-la. El venedor no sap quant està disposat a pagar cada comprador, i per això s'utilitza la subhasta per a vendre la pintura. Per tant, les subhastes són utilitzades quan el venedor no sap la disposició a pagar dels compradors pel bé que està venent.

Encara que si és cert que les subhastes és un mètode molt comú per la venda d'obres d'art, en l'actualitat s'utilitzen per múltiples fins. Per exemple, el peix, l'or, el tabac i les flors són béns que un dels mètodes d'assignar-ho és la subhasta. També les accions o lletres del tresor utilitzen les subhastes per assignar els actius. Amb la irrupció d'internet ha augmentat l'ús de les subhastes, amb la creació de pàgines web tals com Ebay, Amazon o Liquidation. I no oblidem que els anuncis dels gegants d'Internet, com Google, s'adjudiquen per subhasta.

Aquest treball estudia les subhastes, amb l'objectiu d'analitzar la seva aplicació al mercat elèctric, que des de la seva liberalització (en part forçada per la Unió Europea) fa servir mecanismes basats en subhastes per determinar el preu i la producció de les diferents plantes generadores. Com que es tracta d'un mercat estratègic d'un país, la competència que es vol generar ha estat i està molt controlada pels governs, ja que per una banda cal assegurar la suficiència energètica i per altra un preu raonable i competitiu amb uns altres països. Sabem que forma part de l'estructura de costos de les empreses, i en certs sectors intensius en energia, un factor fonamental a l'hora de decidir la competitivitat.

En la primera part del treball ens centrem a estudiar les propietats de les subhastes de múltiples objectes, és a dir, les subhastes en què es venen múltiples unitats mitjançant una subhasta. Per això cal començar amb les subhastes d'un sol objecte i donar alguns resultats sobre aquestes.

L'estudi de les subhastes des d'un punt de vista analític es pot traçar al treball de W. Vickrey (1961) [12]. Ell estableix alguns fets que ara són ben coneguts, com el teorema d'equivalència de guanys, de diferents formats de subhasta, sota certs supòsits bastant generals. Vickrey va rebre el Premi Nobel en Ciències Econòmiques l'any 1996 [9], encara que no tant per les seves contribucions a les subhastes sinó “per les seves contribucions

fonamentals a la teoria econòmica dels incentius sota informació asimètrica”.

Recentment, el 2020, el Premi Nobel en Ciències Econòmiques es va donar a Paul R. Milgrom i Robert B. Wilson *for improvements to auction theory and inventions of new auction formats* [10]. El president del Comitè que el va donar va especificar que va començar trobant resultats teòrics que van donar lloc a aplicacions pràctiques que s’han estès globalment. Els seus descobriments han estat un gran benefici per la societat. Tot això exemplifica la importància econòmica de les subhastes, i com milloren l’assignació dels recursos.

Les subhastes de múltiples objectes són molt importants en l’àmbit econòmic, ja que s’utilitzen per vendre lletres del tresor, permisos d’emissió, l’electricitat i llicències de l’espectre, com per exemple, l’espectre del 5G. A causa de la importància de les subhastes de múltiples objectes en l’economia, han sigut estudiades en profunditat, però en comparació amb les subhastes d’un sol objecte, no hi ha un *corpus* teòric tan important, ja que cal especificar molt més els models i per tant acaben servint a models molt concrets.

En la segona part del treball estudiem com s’apliquen les subhastes de múltiples objectes al mercat elèctric espanyol. En els últims mesos, la pujada del preu de l’electricitat ha estat en el focus mediàtic. En general, hi ha un gran desconeixement de la societat de com es determinen els preus en el mercat elèctric, i esperem que aquesta segona part del treball pugui servir per donar una mica de llum al tema. Observem que, la manera en què es dissenya el mercat elèctric és molt important per un país, ja que és un bé de primera necessitat. A més, un preu alt pot significar un desavantatge competitiu de les indústries nacionals respecte a les empreses foranes.

Veiem a continuació les raons que van portar als governs a elegir les subhastes de múltiples objectes com a mètode d’assignació en el mercat elèctric. Fins als anys noranta, els mercats elèctrics eren gestionats principalment per empreses públiques. Aquest fet és lògic, ja que les infraestructures necessàries per transportar l’energia de les centrals generadores als habitatges són molt cares, produint-se un efecte d’economies d’escala.

A partir dels anys noranta, alguns països van decidir començar a liberalitzar la generació de l’electricitat. L’objectiu era poder aconseguir una baixada del preu amb la introducció de competència. Un dels països pioners en aquest canvi de model en la gestió de generació d’electricitat va ser el Regne Unit. L’any 1990 es va privatitzar la *Central Electricity Generating Board*, l’empresa que era l’encarregada de la gestió del mercat elèctric a Anglaterra i Gal·les. Es va decidir implementar una subhasta marginalista, és a dir, l’últim kWh venut és el que determina quin és el preu de totes les unitats assignades. La subhasta marginalista també és coneguda com a subhasta de preu uniforme.

Aquest procés de liberalització va generar un gran debat entre els economistes sobre quin format de subhasta era l’adequat per assignar l’energia generada en el mercat elèctric. La discussió era entre la subhasta de preu uniforme i la subhasta discriminatòria. En la subhasta discriminatòria cada comprador paga el valor de la seva oferta. Alguns economistes com Wolfram(1999)[15] defensen que la subhasta de preu uniforme produeix millors resultats que la subhasta discriminatòria. En contra, Federico i Rahman (2003)[4] van trobar evidències teòriques que la subhasta discriminatòria és superior a la de preu uniforme, almenys en situacions de monopoli i discriminació perfecta. De fet, l’any 2001 el Regne Unit va decidir passar a assignar l’electricitat generada amb una subhasta discriminatòria.

Pel que fa a Espanya, el procés de liberalització del sector elèctric va començar l’any

1997. Es va decidir implementar la subhasta de preu uniforme per assignar els kWh generats. Encara que hi ha hagut canvis normatius des de llavors en el sector elèctric, en l'actualitat continua vigent la subhasta de preu uniforme. De fet, encara que al principi i va haver-hi discussió entre la subhasta discriminatòria i la de preu uniforme, aquest últim format s'ha imposat. En Europa, una gran majoria dels països utilitzen la subhasta de preu uniforme, dissenyada per la Unió Europea en la Directiva 2019/944.

Actualment, el disseny de mercat a Europa està patint una crisi. En la Conferència sobre el Clima de París celebrada l'any 2015, un total de 189 països, que representaven un 96,98% d'emissions del CO₂ en aquells moments, van acordar intentar mantenir l'escalfament global per sota dels 2° C. Per part de la UE, una de les seves mesures va ser limitar els permisos d'emissió de CO₂, que van ser creats l'any 2005. Aquests permisos han de ser comprats per les empreses emissores de CO₂, en cas de voler emetre.

La mitjana del mes de maig de 2021 se situa en 51,99 €/per tona, sent el preu del mateix mes de l'any passat de 19,96 €/per tona. És a dir, en un any els preus han experimentat una pujada de més del doble del preu. Algunes energies que generen electricitat emeten CO₂, i per tant, han de comprar permisos d'emissió per generar energia. A causa de la falta de competència aquestes empreses estan traslladant aquest increment en el cost a les seves ofertes a la subhasta. El mes de maig de l'any 2021, el preu en mitjana de l'electricitat ha sigut de 67,12 €/MWh, sent el preu al mes de maig dels dos anys anteriors 21,25 €/MWh i 48,39 €/MWh.

La dada del mes de maig de 2020 no és molt significativa, ja que per culpa de la situació sanitària del país estàvem tots confinats, fet que va baixar molt la demanda d'electricitat, i en conseqüència, va abaixar el preu de l'electricitat. Comparant les dades dels mesos de maig de l'any 2021 i 2019, sí que podem veure un increment de gairebé de 20 €/MWh. Aquest és un problema del disseny actual de la subhasta, ja que encara que entri només un kWh a la subhasta d'energies que generen CO₂, el preu de tota l'electricitat venuda es dispara. És un problema que és molt important estudiar, ja que es preveu que els permisos d'emissió continuaran pujant, i com hem argumentat, la llum és un bé de primera necessitat.

Capítol 1

Subhasta d'un objecte amb valors privats

En aquest capítol analitzem les subhastes d'un únic objecte en un entorn de valoració privada. L'objectiu principal és fer un resum dels resultats més importants. En primer lloc es defineixen quatre tipus de subhasta, la subhasta anglesa, la subhasta holandesa, la subhasta de sobre tancat de primer preu i la subhasta de sobre tancat de segon preu. Cadascun dels formats de subhasta defineix un joc no cooperatiu entre els compradors. A continuació, veiem que les estratègies d'equilibri de la subhasta holandesa i la subhasta de sobre tancat de primer preu són estratègicament equivalents. També veiem que en un entorn de valoració privada les estratègies de la subhasta anglesa i de la subhasta de sobre tancat de segon preu són equivalents. Per tant, podem reduir el nostre estudi als equilibris de les subhastes de sobre tancat de primer i segon preu. El nostre objectiu és veure si les subhastes de sobre tancat de primer i segon preu tenen equilibris eficients, és a dir, si existeix una estratègia d'equilibri on el guanyador de la subhasta és el comprador que més valora l'objecte. En aquest capítol introductorí fem servir la notació i el model bàsic del llibre de Krishna (2010)[8].

1.1 Alguns formats de subhasta comuns

Hi ha quatre formats de subhasta més comuns, distingits per primer cop per Vickrey (1961)[12].¹ Aquests, es caracteritzen per distingir si les ofertes es fan de forma pública o no, i si el que s'ofereix per guanyar la subhasta és el que s'acaba pagant. Les dues primeres són subhastes dinàmiques, per tant, entre els compradors s'estableix un joc no cooperatiu seqüencial. En canvi, les dues últimes són subhastes de sobre tancat, per tant, entre els compradors s'estableix un joc no cooperatiu simultani.

- **Subhasta anglesa:** És el tipus de subhasta més antic i el més conegut. La venda de l'objecte és dirigida per un subhastador, que comença demanant un preu baix, que va pujant en petits increments, mentre que hi hagi almenys dos compradors interessats. El preu que paga el guanyador per l'objecte subhastat és la quantitat en què el penúltim comprador ha resignat a obtenir l'objecte.

¹William Vickrey (1914-1996) va ser un economista canadenc. L'any 1996 va guanyar el premi Nobel d'Economia conjuntament amb James A. Mirrless per les seves contribucions a la teoria econòmica dels incentius sota informació asimètrica.[9]

- **Subhasta holandesa:** El subhastador comença demanant un preu alt, amb el que presumiblement cap comprador estarà interessat a obtenir l'objecte subhastat. El preu va baixant gradualment, fins al moment en què un comprador mostra interès a obtenir l'objecte.
- **Subhasta de sobre tancat de primer preu:** En aquest format, els compradors introdueixen la seva oferta en un sobre segellat. El comprador que registra la major oferta és el guanyador, i el preu que paga és el valor de la seva oferta.
- **Subhasta de sobre tancat de segon preu:** Té el mateix funcionament que la subhasta anterior. La diferència radica en el fet que el preu que paga el guanyador és el de la segona oferta més alta.

Cada format de subhasta ha d'especificar com es resolen els possibles empats. Quan s'estudien les subhastes com jocs no cooperatius, la regla de desempat acostuma a ser la de realitzar un sorteig entre les ofertes guanyadores.

El comportament estratègic dels compradors varia depenent de com valoren l'objecte. En la teoria de les subhastes es distingeixen dos casos, les subhastes de valoració privada i les subhastes de valors interdependents.

En les subhastes de valoració privada, tots els compradors coneixen el valor que els aporta guanyar l'objecte subhastat. En aquest entorn, els compradors no coneixen quina valoració tenen de l'objecte els altres compradors, però en cas de saber-ho no canviaria la seva valoració.

Aquesta suposició és plausible quan, per exemple, els compradors volen usar l'objecte per un ús personal, és a dir, no tenen interès a treure un rèdit econòmic. Un exemple és el cas en què se subhasta una pintura, i les persones que participen en la subhasta són col·leccionistes. Els compradors valoren la pintura per quin valor aportaria a la seva col·lecció, no per quina quantitat la podrien revendre.

En les subhastes de valor interdependent, els compradors no coneixen el valor real de l'objecte per ells, sinó que només tenen una estimació d'aquest valor, que fan servir per fer una valoració prèvia a la subhasta. En aquest cas, si un comprador coneix l'estimació que té un altre comprador per l'objecte pot fer variar el seu comportament estratègic. Aquest model és l'adequat quan l'objectiu dels compradors és revendre l'objecte subhastat.

Diem que una subhasta de valor interdependent és de valors comuns quan el valor real per l'objecte és el mateix per tots els compradors. Un exemple típic és en el que és subhasta el permís de perforació d'un terreny que té petroli. Els compradors només tenen estimacions de la quantitat de petroli que hi ha per l'opinió d'experts i per les anàlisis del terreny que han realitzat previs a la subhasta. Per tant, si un comprador conegués l'estimació que han obtingut els altres compradors, podria fer canviar la valoració de l'objecte subhastat.

En aquest capítol, per fer l'anàlisi dels equilibris suposarem que estem en un entorn de valoració privada.

Observem que, encara que la subhasta holandesa és un joc seqüencial, ja que l'única informació que obté un comprador dels altres és quan un comprador fa una oferta, però en aquest moment s'acaba el joc. Per tant, aquesta informació no interfereix en la valoració de l'objecte del comprador durant la subhasta. En conseqüència, la subhasta holandesa i

la subhasta de sobre tancat de primer preu són estratègicament equivalents.²

La subhasta anglesa i la subhasta de sobre tancat de segon preu tenen una equivalència més dèbil. Observem que els dos jocs no són estratègicament equivalents. En una subhasta anglesa, un comprador pot veure en quin moment es van retirant de la subhasta els altres compradors, fet que pot interferir en la seva valoració de l'objecte. Per tant, l'estratègia òptima en les dues subhastes és la mateixa si i només si estem en un entorn de valoració privada.

El model simètric

Ara establim les hipòtesis bàsiques del nostre model. Suposem que hi ha un objecte per subhastar, i denotem per $N = \{1, 2, \dots, n\}$ al conjunt de compradors que estan interessats a obtenir l'objecte. El comprador $i \in N$ assigna un valor a l'objecte subhastat. Cada valor s'obté a partir d'una variable aleatòria X_i independent i idènticament distribuïda en el conjunt $[0, w]$. Anomenem $F(x)$ la funció de distribució associada a X_i . Suposarem que existeix una funció de densitat contínua complint $f(x) \equiv F'(x)$. És possible que $w = \infty$, però en tot cas es compleix que $E[X_i] < \infty$.

Cada comprador i fa una valoració de l'objecte x_i que és una realització de la variable aleatòria X_i , i sap que les valoracions que fan els altres compradors de l'objecte són independentment distribuïdes depenent de la funció de distribució F . Suposarem que els compradors són neutrals al risc, per tant, el seu objectiu serà maximitzar els seus beneficis esperats. A més, els compradors no tenen cap problema de pressupost ni de liquiditat. Com que la funció de distribució que determina la valoració de l'objecte subhastat és la mateixa per tots els compradors, direm que estem en una situació amb compradors simètrics.

1.2 Equilibris simètrics

Hem vist abans que, donades les equivalències, només hem d'estudiar els equilibris de dos tipus de subhasta, la subhasta de sobre tancat de primer preu i la subhasta de sobre tancat de segon preu. A partir d'aquest moment, anomenem a la subhasta de sobre tancat de primer preu com subhasta de primer preu, i a la subhasta de sobre tancat de segon preu com subhasta de segon preu. Cada format de subhasta determina un joc no cooperatiu entre els compradors.

Una estratègia pel comprador $i \in N$ és una funció $\beta_i : [0, w] \rightarrow \mathbb{R}^+$, que determina la seva oferta per a qualsevol valoració de l'objecte. El nostre objectiu és analitzar els equilibris simètrics.³ Anomenem β^I l'equilibri simètric de la subhasta de primer preu, i β^{II} l'equilibri simètric de la subhasta de segon preu.

Comencem primer buscant l'equilibri simètric de la subhasta de segon preu. Si denotem per b_i l'oferta del comprador i , els beneficis per aquest comprador en aquest format de subhasta són:

²Dos jocs són estratègicament equivalents si per cada estratègia que un jugador té per un joc, el jugador té una estratègia en l'altre joc, que dona lloc al mateix resultat.

³Un equilibri del joc on tots els compradors segueixen la mateixa estratègia.

$$\pi_i = \begin{cases} x_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j \in N \mid b_j = b_i\}} (x_i - b_i) & \text{si } b_i = \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Hem suposat que, en cas d'empat en l'oferta guanyadora, l'objecte és sortejat entre els compradors que han fet la major oferta. El resultat següent descriu quin serà l'equilibri simètric del joc:

Proposició 1.1. *En una subhasta de segon preu, és una estratègia dèbilment dominant fer l'oferta $\beta^{II}(x) = x$.*

Demostració. Analitzem les possibles estratègies del comprador $i \in N$. Sigui x_i la seva valoració de l'objecte, i z_i la seva oferta. Volem veure que si $z_i \neq x_i$, hauria obtingut en totes les situacions possibles el mateix o major benefici si hagués ofert la seva valoració. Sigui $p_i = \max_{j \in N \setminus \{i\}} b_j$. Llavors:

Suposem que $z_i < x_i$:

- Si $p_i < z_i < x_i$, el comprador i guanya l'objecte, i el seu benefici és de $x_i - p_i > 0$. En cas d'haver ofert x_i , també hagués guanyat la subhasta, obtenint el mateix benefici.
- Si $p_i = z_i < x_i$, el comprador i ha empatat en l'oferta guanyadora. Per tant, l'objecte és sortejat, i el seu benefici és $x_i - p_i > 0$ si guanya el sorteig, i 0 en cas contrari. En cas d'haver ofert x_i , llavors hauria guanyat l'objecte, obtenint uns beneficis de $x_i - p_i > 0$.
- Si $z_i < p_i < x_i$, el comprador i perd la subhasta. En cas d'haver ofert x_i , llavors el comprador i hauria guanyat l'objecte, obtenint uns beneficis de $x_i - p_i > 0$.
- Si $z_i < x_i \leq p_i$, el comprador i perd la subhasta. Si el comprador i hagués ofert x_i tenim dos casos possibles. Si $x_i < p_i$, el comprador i hagués perdut la subhasta. Si $x_i = p_i$, llavors el comprador i hauria empatat en l'oferta guanyadora, però fos quin fos el resultat del sorteig, el seu benefici seria nul.

Suposem ara que $z_i > x_i$:

- Si $p_i \leq x_i < z_i$, llavors el comprador i guanya la subhasta, i obté uns beneficis de $x_i - p_i \leq 0$. Si hagués ofert x_i , obtindria els mateixos beneficis.
- Si $x_i < p_i < z_i$, el comprador i guanya l'objecte, però obté unes pèrdues per valor de $x_i - p_i < 0$. En cas d'haver ofert x_i , no hauria guanyat l'objecte, i per tant, hauria evitat les pèrdues.
- Si $x_i < p_i = z_i$, llavors el comprador i ha empatat en l'oferta guanyadora. En cas de guanyar el sorteig, tindrà unes pèrdues de $x_i - p_i < 0$, i si perd el sorteig, no tindrà cap benefici. Si hagués ofert x_i , hauria perdut la subhasta.
- Si $x_i < z_i < p_i$, el comprador i perd la subhasta. Si hagués ofert x_i , també l'hauria perdut.

Per tant, hem vist que l'estratègia de fer l'oferta $z_i = x_i$ és dèbilment dominant. \square

En l'argumentació anterior no hem fet servir que els compradors són simètrics, per tant, aquest raonament és igualment vàlid quan els compradors no són simètrics. Tampoc hem fet servir que els compradors tenen valoració privada, per tant, també ens serveix aquest argument quan els compradors tenen valoracions interdependents.

És clar que $\beta^{II}(x) = x$ és una funció creixent respecte de x . És a dir, que el comprador que més valora l'objecte és el que realitza l'oferta més alta, i en conseqüència és el que guanya la subhasta de segon preu. Per tant, hem provat que a la subhasta de segon preu existeix un equilibri simètric eficient.

En el cas de les subhastes de sobre tancat de primer preu, els beneficis del comprador i són:

$$\pi_i = \begin{cases} x_i - b_i & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j \in N | b_j = b_i\}} (x_i - b_i) & \text{si } b_i = \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Igual que en el cas de la subhasta de sobre tancat de primer preu, en cas d'empat hi haurà un sorteig entre els compradors que han realitzat la major oferta. A continuació, enunciem la proposició que descriu quin és l'equilibri simètric de la subhasta de primer preu. Si voleu veure la demostració, la teniu a Krishna (2010)[8].

Proposició 1.2. *L'estratègia que constitueix un equilibri simètric en una subhasta de primer preu és definida per:*

$$\beta^I(x) = E[Y_1 | Y_1 < x], \quad (1.1)$$

on $Y_1 = \max(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$.

Observem que Y_1 és la llei del màxim de $n - 1$ variables aleatòries i.i.d. X_i . Denotem per $G(x)$ la funció de distribució associada a Y_1 , llavors es compleix que:

$$G(x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_{n-1} \leq x) = \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i \leq x) = P(X_1 \leq x)^{n-1} = (F(x))^{n-1},$$

on en la segona igualtat hem utilitzat que les variables aleatòries són independents, i a la tercera igualtat que són idènticament distribuïdes. Sigui $g(x)$ la densitat de Y_1 , llavors,

$$E[Y_1 | Y_1 < x] = \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y) dy.$$

Multipliquem per $G(x)$ els dos costats de la igualtat anterior i obtenim

$$G(x) E[Y_1 | Y_1 < x] = \int_0^x yg(y) dy = xG(x) - \int_0^x G(y) dy,$$

on a la segona igualtat hem integrat per parts. Amb això obtenim,

$$E[Y_1 | Y_1 < x] = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy. \quad (1.2)$$

De (1.2) podem deduir dues propietats importants de l'equilibri simètric de primer preu. Primer, observem que $\frac{G(y)}{G(x)} \geq 0$, i per tant, sempre es compleix que $\beta^I(x) < x$. És a dir, si els compradors segueixen l'estratègia d'equilibri de fer l'oferta $\beta^I(x)$ mai faran una oferta superior a la seva valoració, cosa que ja podíem deduir del fet que els compradors siguin neutrals al risc.

També, observem que (1.2) és una funció creixent respecte de x . Per tant, el comprador que valora més l'objecte és el que fa l'oferta més alta, i en conseqüència, $\beta^I(x)$ és un equilibri simètric eficient de la subhasta de primer preu.

Exemple 1.1. *Suposem que volem trobar l'equilibri simètric d'una subhasta de primer preu, on participen 3 compradors. Les valoracions de l'objecte dels compradors són obtingudes a partir d'una funció de distribució exponencial de paràmetre $\lambda = 1$. Per trobar l'estratègia d'equilibri apliquem (1.2).*

$$\begin{aligned} E[Y_1 | Y_1 < x] &= x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy = x - \int_0^x \frac{(1 - \exp(-y))^2}{(1 - \exp(-x))^2} dy \\ &= x - \frac{1}{(1 - \exp(-x))^2} \left(\int_0^x dy - 2 \int_0^x \exp(-y) dy + \int_0^x \exp(-2y) dy \right) \\ &= x - \frac{\exp(2x)(x - 1,5) + 2\exp(x) - 0,5}{(\exp(x) - 1)^2}. \end{aligned}$$

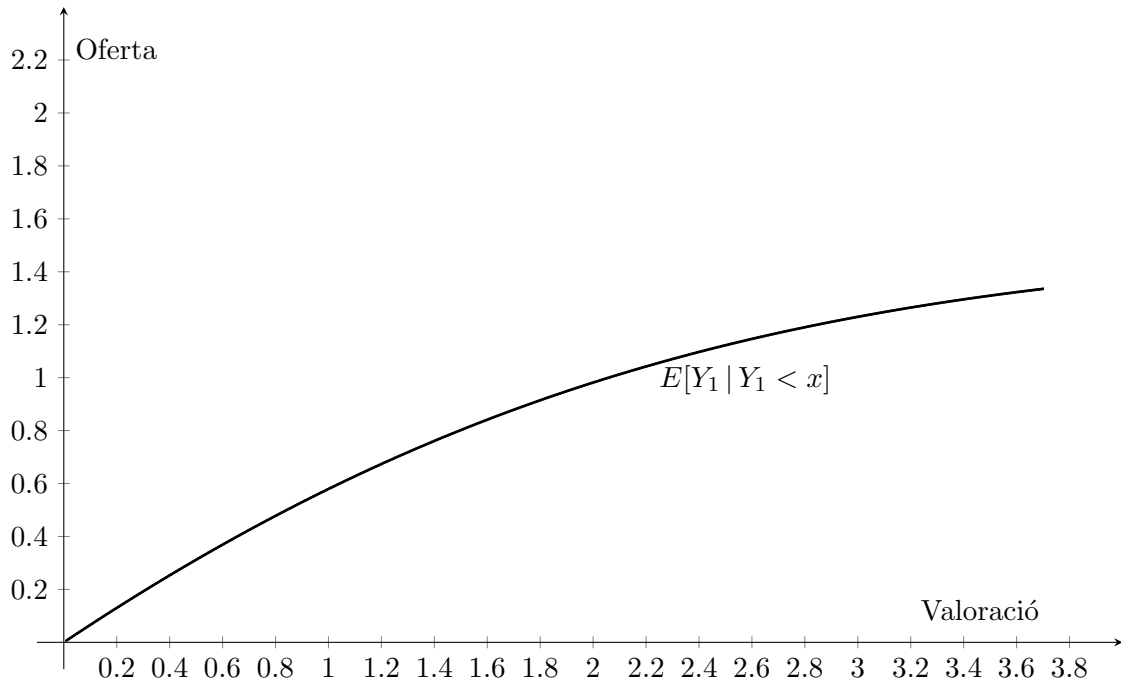


Figura 1.1: L'estratègia dels jugadors com a funció de la seva valoració.

A la Figura 1.1 podem veure com varien les ofertes dels compradors en funció de la seva valoració, quan aquesta està entre 0 i 3,8. Sembla clar que l'estratègia quan x va creixent, tendeix a una asímtota horitzontal. De fet, si fem servir el següent resultat de probabilitats, podem calcular quina és l'asímtota:

$$\beta^I(x) = E[Y_1 | Y_1 < x] \leq E[Y_1].$$

Calculem l'esperança de Y_1 :

$$\begin{aligned} E[Y_1] &= \int_0^{\infty} yg(y) dy = \int_0^{\infty} 2yF(y)f(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} y(2(1 - \exp(-y))(\exp(-y))) dy = 1.5. \end{aligned}$$

És a dir, si un comprador valora l'objecte subhastat en 100, no farà una oferta superior a 1.5. Aquesta decisió sembla totalment il·lògica, però té una explicació. El comprador que valora l'objecte en 100 sap, que com $\beta^I(x)$ és un equilibri simètric eficient, i per tant un comprador farà una oferta superior a la seva si i només si té una valoració de l'objecte superior a 100. Per tant, la probabilitat de què un dels altres dos compradors faci una oferta superior a la seva és:

$$\begin{aligned} P(Y_1 > 100) &= 1 - P(Y_1 \leq 100) = 1 - \int_0^{100} g(y) dy \\ &= 1 - \int_0^{100} 2(1 - \exp(-y))(\exp(-y)) dy \approx 7.44 \cdot 10^{-44}. \end{aligned}$$

Capítol 2

Introducció a les subhastes de múltiples objectes

En aquest capítol estudiem el cas en què K unitats d'un mateix objecte són venudes mitjançant una única subhasta. Farem servir la notació i el model bàsic del llibre de Krishna (2010)[8]. Comencem el capítol definint tres formats de subhasta, la subhasta discriminatòria, la subhasta de preu uniforme i la subhasta Vickrey. Els dos primers formats s'acostumen a utilitzar en la pràctica. Per exemple, molts països utilitzen la subhasta discriminatòria o la de preu uniforme per vendre les lletres del tresor, permisos d'emissions i pel mercat elèctric. La subhasta Vickrey gairebé no s'ha utilitzat mai a la pràctica, però té interès teòric.

En la segona part del capítol analitzem l'existència d'equilibris eficients dels tres formats de subhasta, suposant que estem en un entorn de valoració privada independent. Com va mostrar Vickrey (1961)[12], la subhasta discriminatòria i de preu uniforme són en general ineficients, raó per la qual va introduir la subhasta Vickrey, que si ho és. Procedim primer trobant que per una subhasta Vickrey, oferir la pròpia valoració és una estratègia dèbilment dominant, i com en el cas de la subhasta de segon preu, aquest equilibri és eficient. Per veure que els equilibris de les subhastes de preu uniforme no són eficients, veiem que en el cas de la subhasta de dos objectes es produeix una reducció de la demanda, argument que va ser utilitzat per primer cop per Noussier(1995)[11]. Per acabar el capítol seguim l'argument de Wiggans i Kahn(1998)[14] per veure que la subhasta discriminatòria també és en general ineficient.

2.1 Subhastes per la venda de múltiples objectes idèntics

En aquesta secció introduïm tres formats de subhasta mitjançant els quals es venen un total de K objectes idèntics mitjançant una única subhasta. Notarem el conjunt d'objectes com $\bar{K} = \{1, 2, \dots, K\}$. En la subhasta participen un total de n compradors, i denotem el conjunt de compradors com $N = \{1, 2, \dots, n\}$. En particular, pels compradors el valor marginal d'obtenir una unitat addicional de l'objecte subhastat és decreixent. Els tres formats són:

- La subhasta discriminatòria,
- La subhasta de preu uniforme,

- La subhasta Vickrey.

En cadascun d'aquests formats, un comprador ha de registrar¹ K ofertes b_k^i , complint $b_1^i \geq b_2^i \geq \dots \geq b_K^i$. Per tant, b_1^i és la quantitat que està disposat a pagar el comprador i per una unitat, $b_1^i + b_2^i$ el que està disposat a pagar per dues unitats, i $\sum_{l=1}^k b_l^i$ és la quantitat que està disposat a pagar el comprador i per obtenir $k \leq K$ unitats de l'objecte subhastat.

El vector $b^i = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_K^i)$ és el vector d'oferta del comprador i . El vector d'oferta b^i és una funció inversa de demanda,² i es pot invertir per obtenir la funció de demanda del comprador $i \in N$, que és definida per:

$$\begin{aligned} d^i : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \overline{K} \\ p &\longmapsto \max\{k : p \leq b_k^i\}. \end{aligned}$$

Per tant, si $b_k^i > b_{k+1}^i$, a qualsevol preu p entre b_k^i i b_{k+1}^i , el comprador i està disposat a comprar exactament k unitats. Com que la funció de demanda és inversa al vector d'oferta, mitjançant b^i podem obtenir d^i i viceversa. La funció de demanda és esglaonada, com es pot veure en la Figura 2.2 de l'Exemple 2.2.

En els tres formats de subhasta, els compradors registren un total de $n \times K$ ofertes $\{b_k^i : i \in N; k \in \overline{K}\}$, i les K unitats subhastades són entregades a les K majors ofertes. És a dir, cada comprador guanya un nombre d'unitats igual al nombre de les seves ofertes que es troben entre les K primeres. A les subhastes que compleixen el fet anterior se les anomena *subhastes estàndard*.

La regla d'assignació de les subhastes estàndard pot ser determinada mitjançant les funcions d'oferta i de demanda de la subhasta. La funció de demanda agregada, que notem com $d(p)$, és obtinguda a partir de la suma horitzontal de les n funcions de demanda individual dels compradors. És a dir, per qualsevol preu p es compleix:

$$d(p) = \sum_{i=1}^n d^i(p).$$

La quantitat d'objectes oferits pel subhastador és fix, i per tant, la funció d'oferta és una recta vertical, com podeu veure en la Figura 2.1 situada a l'Exemple 2.1. A l'esquerra de la intersecció entre la corba d'oferta i demanda queden un total de K ofertes, que anomenem ofertes guanyadores. En canvi, a les ofertes que queden a la dreta de la intersecció les anomenem ofertes perdedores.

Hem vist que els tres formats de subhastes que són centre del nostre estudi són subhastes estàndard, i per tant, tenen la mateixa regla d'assignació. La diferència entre els tres radica en la definició del preu, és a dir, quina quantitat ha de pagar cada comprador per les unitats que ha guanyat. Però per explicar la definició de preu de cada format necessitem dos conceptes previs.

El *vector d'ofertes competitives* del comprador i , que notem com c^{-i} s'obté ordenant en ordre descendent les $(n-1)K$ ofertes dels compradors diferents del i , i seleccionant

¹El superíndex, ens indica quin comprador està fent l'oferta, i el subíndex ens indica per quin objecte està fent l'oferta.

²La funció de demanda ens determina quantes unitats està disposat a adquirir el comprador per cada preu.

les K primeres. Per tant, la primera component del vector, c_1^{-i} és la major oferta dels altres compradors diferents de i , c_2^{-i} és la segona major, i així successivament. El vector d'ofertes competitives és necessari per a la definició de preu de la subhasta uniforme i de la subhasta Vickrey.

El segon concepte és el de la *funció d'oferta residual* del comprador i , que notarem com $s^{-i}(p)$. Aquesta funció determina el nombre d'unitats que els compradors diferents del i no estan disposats a obtenir a un preu fixat. Per qualsevol $p \in \mathbb{R}^+$, la funció $s^{-i}(p)$ és definida com:

$$s^{-i}(p) \equiv \max \left\{ K - \sum_{j \neq i} d^j(p), 0 \right\}.$$

De la definició anterior, deduïm que $s^{-i}(p)$ és una funció esglaonada, i que és creixent respecte del preu, com podeu veure a la Figura 2.2 de l'Exemple 2.2. La intersecció entre $s^{-i}(p)$ i $d^i(p)$ ens permet calcular quant ha de pagar cada comprador per les unitats guanyades als diferents formats de subhasta.

Exemple 2.1. *Suposem que un total de $K = 5$ unitats d'un objecte són subhastades mitjançant una subhasta estàndard, on participen $n = 4$ compradors. Els vectors d'oferta dels quatre compradors són:*

$$\begin{aligned} b^1 &= (23, 18, 10, 5, 1), \\ b^2 &= (48, 35, 9, 7, 4), \\ b^3 &= (41, 22, 20, 17, 2), \\ b^4 &= (47, 34, 28, 11, 3). \end{aligned}$$

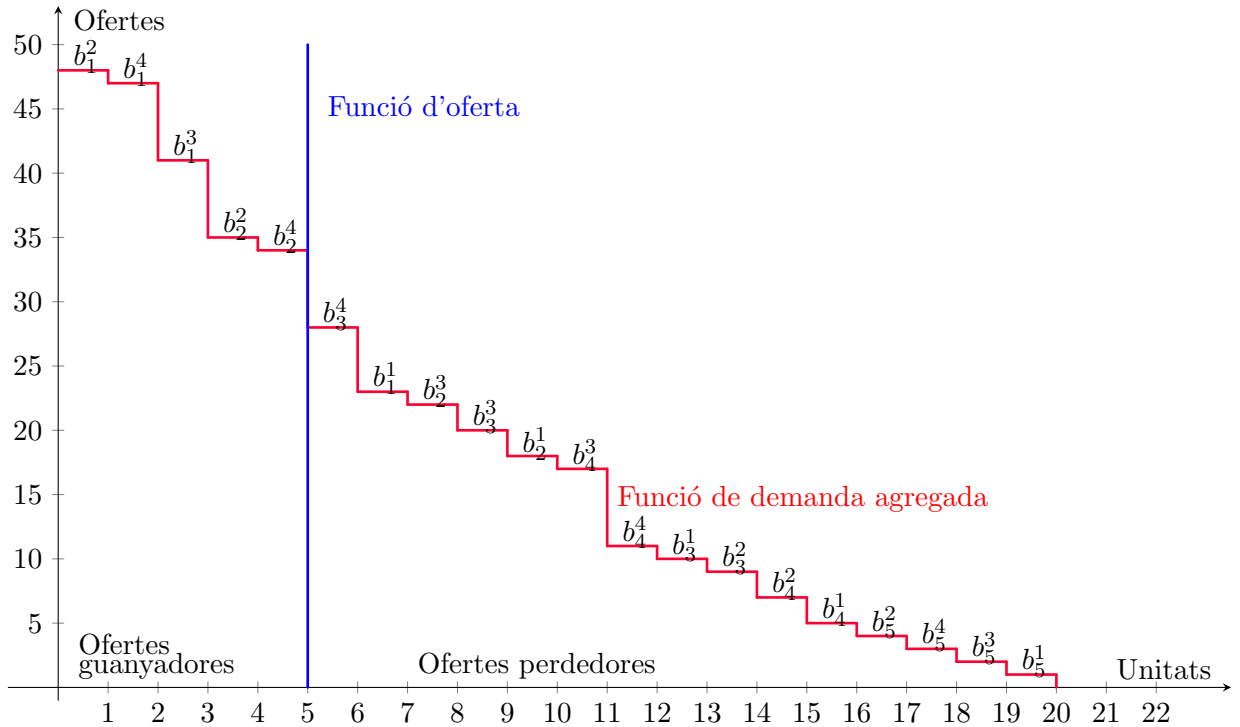


Figura 2.1: Funcions d'oferta i demanda agregada de l'Exemple 2.1

Com podem veure a la Figura 2.1 les cinc ofertes guanyadores són:

$$(b_1^2, b_1^4, b_1^3, b_2^2, b_2^4) = (48, 47, 41, 35, 34).$$

Com s'observa, el comprador 1 no guanya cap unitat, el comprador 2 guanya dues unitats, el comprador 3 guanya una unitat i el comprador 4 guanya dues unitats de l'objecte subhastat. En les següents pàgines fem servir aquest exemple per veure quina quantitat ha de pagar cada comprador amb la subhasta discriminatòria, la subhasta de preu uniforme i la subhasta Vickrey.

A continuació, descrivim la definició de preu dels tres formats que estem estudiant, la subhasta discriminatòria, la subhasta de preu uniforme i la subhasta Vickrey. Com la regla d'assignació de les tres subhastes és la mateixa, és la definició de preu dels diferents formats la que fa variar el comportament estratègic dels compradors.

La subhasta discriminatòria

Aquest format de subhasta funciona com un mercat de discriminació perfecte,³ d'aquí el nom. La subhasta discriminatòria també és coneguda com a *pay your bid*, ja que cada comprador paga la suma de les seves ofertes que han resultat guanyadores, és a dir, la suma de les seves ofertes que es troben entre les K majors. Formalment, si denotem per k^i el nombre d'ofertes guanyadores del comprador $i \in N$, llavors ha de pagar:

$$\sum_{k=1}^{k^i} b_k^i.$$

La definició de preu de la subhasta discriminatòria es pot obtenir també mitjançant les funcions de demanda i oferta residual. Cada comprador ha de pagar una quantitat igual a l'àrea que hi ha sota la seva funció de demanda, fins al punt on es talla amb la funció d'oferta residual. Observem que, si $K = 1$ la subhasta discriminatòria es converteix en una subhasta de primer preu. Per tant, la subhasta discriminatòria és l'extensió multi-objecte natural de la subhasta de sobre tancat de primer preu.

Alguns exemples on la subhasta discriminatòria és utilitzada són les lletres del tresor dels Estats Units i el mercat diari elèctric del Regne Unit.

Exemple 2.2. *Continuem amb els mateixos vectors d'oferta que en l'Exemple 2.1, i suposem que la definició de preu és la d'una subhasta discriminatòria. Anomenem p^i la quantitat que ha de pagar cada comprador pels objectes guanyats. Per tant, p^i és la suma de les ofertes guanyadores del comprador i :*

$$\begin{aligned} p^1 &= 0, \\ p^2 &= b_1^2 + b_2^2 = 48 + 35 = 83, \\ p^3 &= b_1^3 = 41, \\ p^4 &= b_1^4 + b_2^4 = 47 + 34 = 81. \end{aligned}$$

³Un mercat és de discriminació perfecta quan el venedor coneix la disposició a pagar de cada consumidor, i cobra a cada comprador el màxim que està disposat a pagar per cada unitat. En aquest tipus de mercat l'excedent del mercat l'absorbeix el venedor.

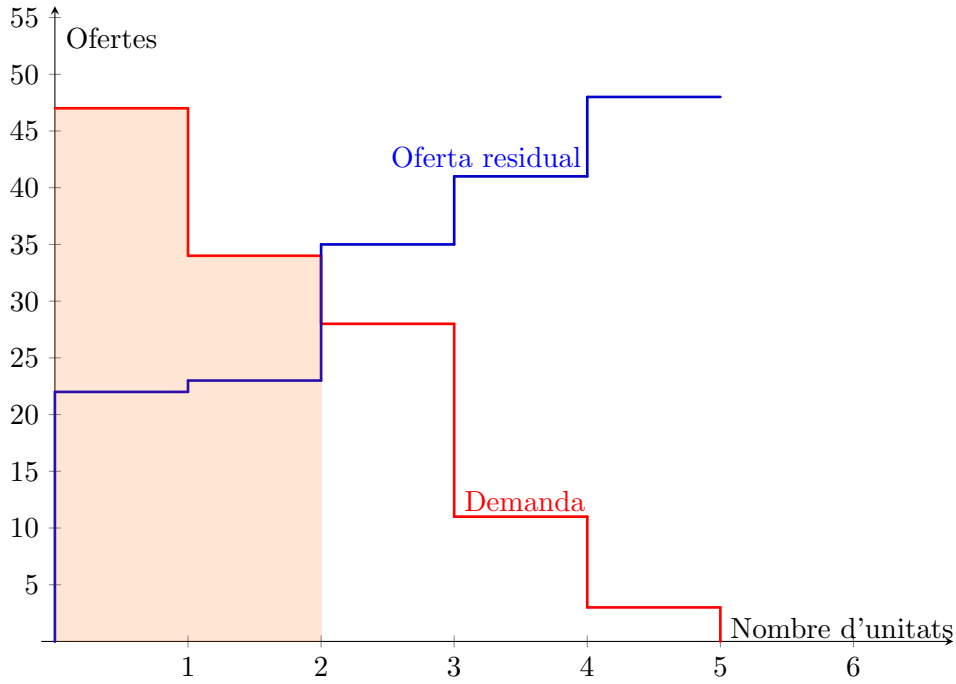


Figura 2.2: Pagament amb una subhasta discriminatòria del jugador 4 a partir de les seves funcions de demanda i oferta residual

A la Figura 2.2 podem veure que l'àrea de la funció de demanda fins al punt on talla amb la funció d'oferta residual coincideix amb p^4 :

$$\text{Àrea} = 47 \cdot (1 - 0) + 34 \cdot (2 - 1) = 81.$$

La subhasta de preu uniforme

Aquest format de subhasta va ser introduït per primer cop per Friedman (1960)[5]. Com el nom del format de la subhasta indica, en la subhasta de preu uniforme totes les unitats són venudes a un mateix preu, que anomenem preu de mercat. Aquest preu de mercat pot anar de l'oferta perdedora més gran a la menor oferta guanyadora. En aquest treball adoptarem el conveni de què el preu de mercat es correspon a l'oferta més gran perdedora.

Des de la perspectiva del comprador i , l'oferta més gran perdedora pot ser seva o de qualsevol dels altres compradors. Per tant, per determinar el preu de mercat hem de fer servir c^{-i} . Observem, que si el comprador i guanya una unitat, s'ha de complir que:

$$b_1^i > c_K^{-i} \text{ i } b_2^i < c_{K-1}^{-i}.$$

És a dir, la seva major oferta supera a l'última component del seu vector d'ofertes competitives, però la seva segona major oferta no supera a la penúltima component de c^{-i} . En cas que el comprador i guanyi dues unitats, es compleix que:

$$b_1^i > c_K^{-i}, \quad b_2^i > c_{K-1}^{-i} \text{ i } b_3^i < c_{K-2}^{-i}.$$

Per tant, si anomenem $k^i \in \bar{K}$ el nombre d'unitats guanyades pel comprador $i \in N$, s'ha de complir que:

$$b_{k^i}^i > c_{K-k^i+1}^{-i} \quad \text{i} \quad b_{k^{i+1}}^i < c_{K-k^i}^{-i}.$$

És a dir, tenim dues possibilitats. Pot ser que $b_{k^i}^i$ sigui la K -èsima major oferta, i per tant el preu de mercat és $c_{K-k^i+1}^{-i}$, en canvi, si la K -èsima major oferta és $c_{K-k^i}^{-i}$, llavors el preu de mercat és $b_{k^{i+1}}^i$. Si anomenem p el preu de mercat de la subhasta de preu uniforme, es compleix que:

$$p = \max\{c_{K-k^i+1}^{-i}, b_{k^{i+1}}^i\}.$$

Per tant, si el comprador $i \in N$ guanya $k^i \in \overline{K}$ unitats, la quantitat que ha de pagar per les unitats guanyades és $k^i \cdot p$. Observem que podem fer servir els vectors d'oferta i ofertes competitives de qualsevol comprador per determinar el preu de mercat, sempre que aquest comprador guanyi almenys una unitat.

Podem calcular també la quantitat que ha de pagar el comprador i en termes de la seva funció de demanda i oferta residual. La quantitat que ha de pagar és l'àrea del rectangle resultant de projectar el punt de tall de la funció de demanda i oferta residual als eixos.

Si $K = 1$ la subhasta de preu uniforme es converteix en una subhasta de segon preu. Encara que es tracti d'una subhasta que redueix a una subhasta de segon preu, algunes de les propietats de la subhasta de segon preu no s'estenen a la subhasta de preu uniforme, com veurem en les properes pàgines.

Alguns exemples on s'utilitza la subhasta de preu uniforme és en el mercat elèctric diari de la majoria dels països europeus i la venda de bons a França.

Exemple 2.3. *Seguim amb els mateixos vectors d'oferta que en l'Exemple 2.1, però en aquest cas la definició de preu és la d'una subhasta de preu uniforme. No podem calcular el preu de mercat a partir dels vectors d'oferta i oferta competitives del comprador 1, ja que no guanya cap unitat a la subhasta. Calculem el preu p a partir de les dades del comprador 2. Tenim que:*

$$c^{-2} = (47, 41, 34, 28, 23) \quad \text{i} \quad b^2 = (48, 35, 9, 7, 4).$$

Com que el comprador 2 guanya dues unitats, llavors:

$$p = \max\{c_4^{-2}, b_3^2\} = \max\{28, 9\} = 28.$$

Si anomenem p^i la quantitat que ha de pagar cada comprador en la subhasta de preu uniforme, llavors:

$$\begin{aligned} p^1 &= 0, \\ p^2 &= 2 \cdot p = 2 \cdot 28 = 56, \\ p^3 &= 1 \cdot p = 1 \cdot 28 = 28, \\ p^4 &= 2 \cdot p = 2 \cdot 28 = 56. \end{aligned}$$

Com podem veure a la Figura 2.3, p^4 coincideix amb l'àrea del rectangle que resulta d'unir el punt de tall entre la demanda i l'oferta residual amb els eixos:

$$\text{Àrea} = 28 \cdot 2 = 56.$$

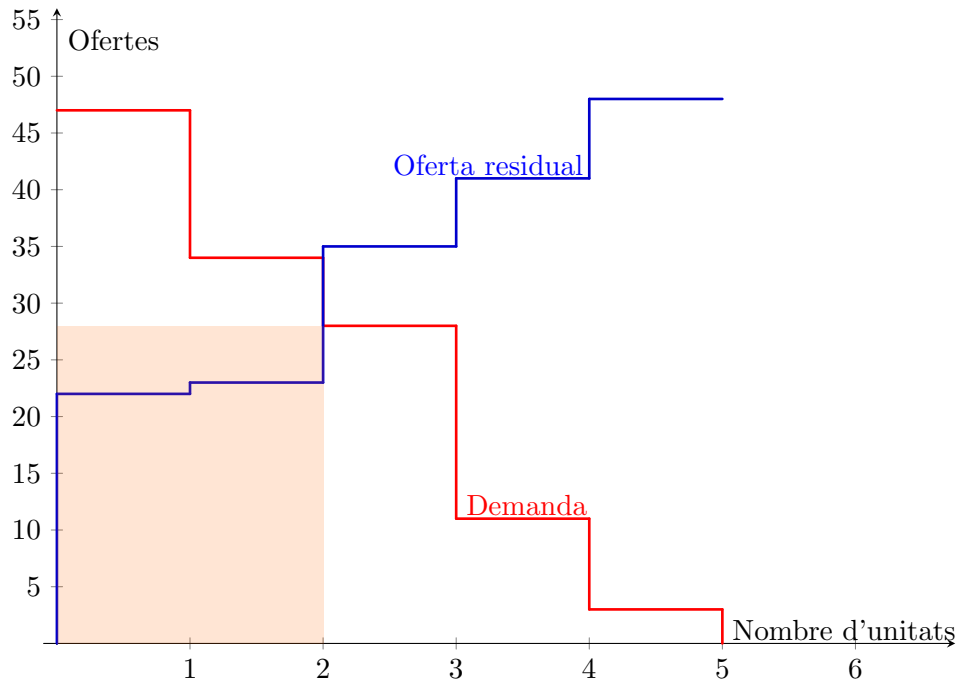


Figura 2.3: Pagament amb una subhasta uniforme del jugador 4 a partir de les seves funcions de demanda i oferta residual

La subhasta Vickrey

A la subhasta Vickrey, la regla de pagament es basa en el fet que cada comprador ha de pagar una quantitat igual a l'externalitat que ha causat als altres compradors. Informalment, per veure quina és l'externalitat que ha generat el comprador i , suposem que n compradors participen en una subhasta Vickrey, i que el comprador i guanya k^i unitats. En cas que el comprador i no hagués participat en aquesta subhasta, els k^i objectes haurien estat guanyats pels altres compradors. Llavors, el comprador i ha de pagar les ofertes dels compradors als quals ha “perjudicat” amb la seva presència.

Formalment, si el comprador $i \in N$ ha guanyat $k^i \in \overline{K}$ unitats, llavors paga les k^i majors ofertes perdedores dels altres compradors. Sigui c^{-i} el vector d'ofertes competitives del comprador i . Si el comprador i guanya una unitat, llavors sabem que $b_1^i > c_K^{-i}$, l'oferta més gran perdedora dels altres compradors és $c_{K-k^i+1}^{-i}$, que és la quantitat que ha de pagar.

Més en general, si k^i és el nombre d'unitats que ha guanyat el comprador i , aquest comprador ha de pagar les k^i majors ofertes perdedores dels altres compradors. És a dir, el comprador i ha de pagar per les k^i unitats guanyades un total de:

$$\sum_{k=1}^{k^i} c_{K-k^i+k}^{-i}.$$

La definició de preu de la subhasta Vickrey també es pot obtenir mitjançant les funcions de demanda i oferta residual. Cada comprador ha de pagar una quantitat igual a l'àrea que hi ha sota la seva funció d'oferta residual, fins al punt on es talla amb la funció de demanda.

Si $K = 1$, la subhasta Vickrey es converteix en una subhasta de segon preu, però

a diferència de la subhasta de preu uniforme, sí que comparteix moltes propietats amb la subhasta de segon preu, entre elles l'eficiència. Per això considerarem que l'extensió natural de la subhasta de segon preu és la subhasta Vickrey.

Exemple 2.4. *Suposem que la subhasta estàndard de l'Exemple 2.1 és una subhasta Vickrey. Per determinar quant ha de pagar cada comprador, necessitem els seus vectors d'ofertes competitives. Com el comprador 1 no ha guanyat cap unitat de l'objecte, només hem de calcular tres vectors:*

$$c^{-2} = (47, 41, 34, 28, 23),$$

$$c^{-3} = (48, 47, 35, 34, 28),$$

$$c^{-4} = (48, 41, 35, 23, 22).$$

Per tant, si anomenem p^i la quantitat que ha de pagar cada comprador, llavors:

$$p^1 = 0,$$

$$p^2 = c_5^{-2} + c_4^{-2} = 28 + 23 = 51,$$

$$p^3 = c_5^{-3} = 28,$$

$$p^4 = c_5^{-3} + c_4^{-3} = 23 + 22 = 45.$$

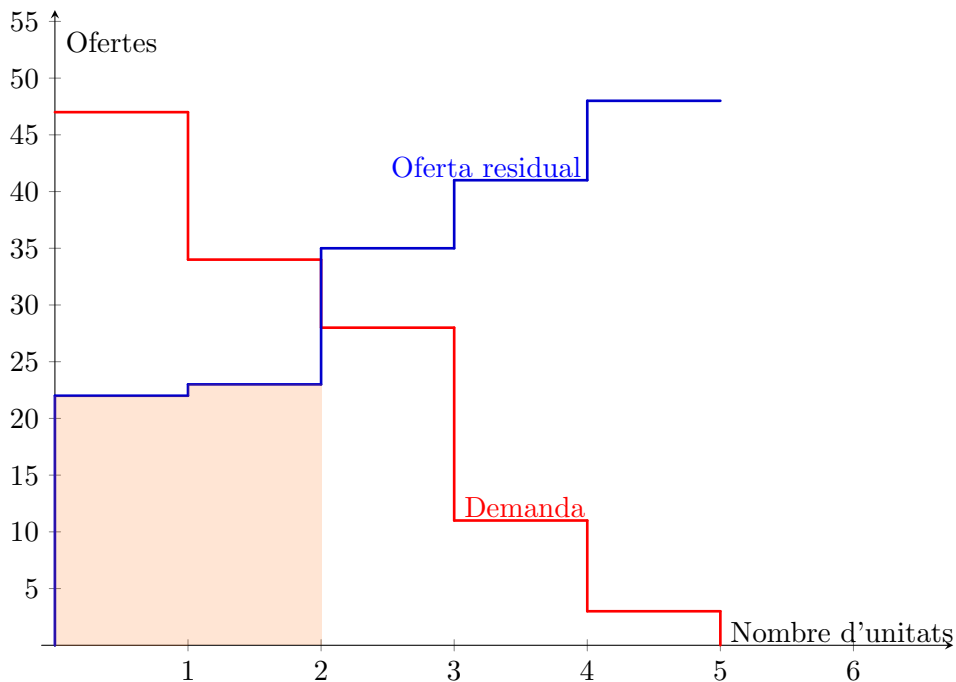


Figura 2.4: Pagament amb una subhasta Vickrey del jugador 4 a partir de les seves funcions de demanda i oferta residual

A la Figura 2.4 podem veure que l'àrea de l'oferta residual fins al punt on talla amb la funció de demanda del jugador 4 coincideix amb p^4 :

$$\text{Àrea} = 22 \cdot (1 - 0) + 23 \cdot (2 - 1) = 45.$$

2.2 El model bàsic

Establím el nostre model bàsic de les subhastes de múltiples objectes. Suposem que hi ha un conjunt de K objectes idèntics, on $\overline{K} = \{1, 2, \dots, K\}$, i un conjunt de n compradors, on $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Els compradors estan interessats en obtenir fins a K unitats de l'objecte.

Les valoracions del comprador $i \in N$ per les diferents unitats són representades mitjançant un *vector de valoració privada*, que és un vector aleatori $X^i = (X_1^i, X_2^i, \dots, X_K^i)$, on X_k^i representa el valor marginal d'obtenir la k -èsima unitat de l'objecte. El valor marginal és decreixent, és a dir, $X_1^i \geq X_2^i \geq \dots \geq X_K^i$.

Per tant, el valor que obté el comprador i si guanya una unitat de l'objecte és X_1^i , si guanya dues unitats $X_1^i + X_2^i$, i en cas de guanyar k unitats, $1 \leq k \leq K$, el valor que aconsegueix el comprador i és:

$$\sum_{l=1}^k X_l^i.$$

Els compradors són neutrals al risc, per tant, l'objectiu de cada comprador és maximitzar el seu benefici esperat. També suposem que els compradors són simètrics, és a dir, cada X^i , amb $i \in N$ és vector aleatori independent i idènticament distribuïda al conjunt

$$\chi = \{x \in [0, w]^K : \forall k \in \overline{K}, x_k \geq x_{k+1}\},$$

d'acord amb una funció de densitat f .

Eficiència en subhastes de múltiples objectes

Com en el cas de les subhastes d'un únic objecte, el nostre objectiu és analitzar l'existència d'equilibris eficients en els formats de subhasta de múltiples objectes que estem estudiant, la subhasta discriminatòria, la subhasta de preu uniforme i la subhasta Vickrey. Recordem que un equilibri d'una subhasta és eficient si les K majors ofertes es corresponen amb els K valors marginals més alts. A més, els tres formats de subhasta són estàndard, i per tant, els K objectes són entregats a les K majors ofertes. Abans de començar amb aquesta anàlisi, hem de definir que és una estratègia en el cas de les subhastes de múltiples objectes.

Suposem que es volen vendre K objectes idèntics, mitjançant una única subhasta i n compradors estan interessats a obtenir els objectes subhastats. Anomenem x^1, x^2, \dots, x^n els vectors de valoració dels compradors, que són realitzacions dels vectors aleatoris X^1, X^2, \dots, X^n , amb les propietats que hem enunciat en el model bàsic. Una *estratègia* del comprador i en una subhasta estàndard, que notarem com β^i , és una funció que depèn del vector de valoració del comprador

$$\beta^i : \chi \longrightarrow \mathbb{R}_+^K,$$

que ha de complir que $\beta_k^i(x^i) \geq \beta_{k+1}^i(x^i)$, $k = 1, 2, \dots, K - 1$.

Sigui $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$ un equilibri d'una subhasta estàndard, i x^1, x^2, \dots, x^n els vectors de valoració dels n compradors. Com estem sota la suposició de què es tracta d'una subhasta estàndard, els K objectes són entregats a les K majors ofertes $\beta_k^i(x^i)$. A més, perquè l'equilibri sigui eficient, els K objectes han de ser entregats als K majors valors marginals x_k^i . Per tant, un equilibri eficient en una subhasta estàndard ha de complir:

$$x_k^i > x_l^j \iff \beta_k^i > \beta_l^j, \quad \forall i, j \in N \quad i \quad \forall k, l \in \overline{K}. \quad (2.1)$$

De (2.1) podem deduir dues propietats que ens ajudaran a estudiar l'eficiència en els tres formats de subhasta. Enunciem i demostrem aquestes propietats en la següent proposició:

Proposició 2.1. *Sigui $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$ un equilibri eficient d'una subhasta de múltiples objectes estàndard. Llavors es compleix:*

a) *Les estratègies són separables, és a dir, l'oferta β_k^i només depèn de la k -èsima valoració marginal del comprador i .*

b) *Les estratègies són simètriques, és a dir:*

$$\beta_k^i(\cdot) = \beta_l^j(\cdot) \quad \forall i, j \in N \quad i \quad \forall k, l \in \overline{K}.$$

Demostració. Per demostrar l'apartat a), suposem que l'oferta d'equilibri del comprador $i \in N$ per l'objecte $k \in \overline{K}$, $\beta_k^i(x^i)$ depèn de x_l^i , on $l \in \overline{K}$ i $k \neq l$. Amb probabilitat positiva pot succeir que $\beta_k^i(x^i)$ sigui la K -èsima major oferta, i la $k + 1$ -èssima major oferta sigui l'oferta d'equilibri del comprador $j \in N$ per l'objecte $m \in \overline{K}$, $\beta_m^j(x^j)$. I també que la diferència entre $\beta_k^i(x^i)$ i $\beta_m^j(x^j)$ sigui prou petita. Com estem en una subhasta eficient, s'ha de complir que x_k^i és el K -èsim major valor marginal, i x_m^j sigui el $K + 1$ -èsim major valor marginal.

Llavors, podem fer una modificació $\varepsilon > 0$ en la valoració marginal del comprador i per l'objecte l , és a dir, $x_l^i - \varepsilon$, tal que $\beta_k^i(x_l^i - \varepsilon) < \beta_m^j(x^j)$, però no es produeix un canvi en l'ordenació de les valoracions marginals. Per tant, tenim que $\beta_k^i(x^i) < \beta_m^j(x^j)$, però $x_k^i > x_m^j$, amb el que hem arribat a una contradicció amb (2.1).

Demostrem ara l'apartat b). Suposem que la valoració marginal del comprador $i \in N$ per l'objecte $k \in \overline{K}$, x_k^i , és la mateixa que la valoració marginal del comprador $j \in N$ per l'objecte $l \in \overline{K}$, però $\beta_k^i(x^i) \neq \beta_l^j(x^j)$.

Sense perdre generalitat podem suposar que $\beta_l^j > \beta_k^i$. De l'apartat a), sabem que β_k^i i β_l^j , només depenen de x_k^i i x_l^j , respectivament. Llavors, existeix una variació $\varepsilon > 0$ tal que $x_l^j - \varepsilon < x_k^i$, però $\beta_k^i(x_k^i) < \beta_l^j(x_l^j - \varepsilon)$, fet que entra en contradicció amb (2.1). \square

De la proposició anterior deduïm que si un equilibri és eficient, els jugadors transformen les valoracions a ofertes mitjançant una funció creixent, que a més, és única. Observen que el recíproc també és cert. Si a un equilibri les ofertes s'obtenen de les valoracions mitjançant una única funció creixent, podem aplicar (2.1), obtenint que l'equilibri és eficient. Podem resumir aquest raonament amb el següent resultat.

Corol·lari 2.1. *Un equilibri d'una subhasta estàndard és eficient si i només si existeix una funció creixent β tal que:*

$$\beta_k^i(x^i) = \beta(x_k^i) \quad \forall i \in N \quad i \quad \forall k \in \overline{K}.$$

2.3 Equilibris de les subhastes de múltiples objectes

Un cop hem introduït els tres formats de subhasta, i hem vist algunes propietats que han de complir els equilibris eficients, una primera pregunta que ens fem és sobre l'existència

d'equilibris en la subhasta discriminatòria, la subhasta de preu uniforme i la subhasta Vickrey sota les suposicions que hem fet al model bàsic. Com es pot veure a Břeský (2008)[1], sota la suposició de què els compradors tenen valoracions privades independents, sabem que existeixen estratègies d'equilibri pures en els tres formats que estem analitzant.

Un segon pas és el d'estudiar si succeeix com en el cas de les subhastes d'un sol objecte, i els tres formats de subhasta tenen equilibris que són eficients. Comencem la nostra anàlisi amb les subhastes Vickrey.

Equilibri de la subhasta Vickrey

En la subhasta Vickrey, el vector d'oferta del comprador i no juga cap paper en la quantitat que ha de pagar. Per tant, si el comprador i registra un vector d'oferta amb $b_k^i < x_k^i$ augmentant l'oferta fins a $b_k^i = x_k^i$ augmenta la probabilitat de guanyar l'objecte k , sense veure's afectat el preu. Per tant, un equilibri simètric de la subhasta Vickrey és fer una oferta igual a la valoració, com veiem en la següent proposició.

Proposició 2.2. *En una subhasta Vickrey és una estratègia dèbilment dominant pel comprador i fer l'oferta $\beta^{iV}(x) = x$.*

Demostració. Veiem la situació des de la perspectiva del comprador $i \in N$. Suposem que estem en una subhasta Vickrey, i fixem els vectors d'oferta de la resta de compradors. Volem comparar els beneficis del comprador i quan fa l'oferta $b^i = x^i$, i quan fa l'oferta $b^i \neq x^i$.

Suposem que si el comprador i oferta el seu vector de valoració, guanya $k^i \in \overline{K}$ unitats. Llavors, si considerem el vector d'ofertes competitives del comprador i , s'ha de complir que:

$$\begin{aligned} b_k^i = x_k^i &\geq c_{K-k^i-k}^{-i} = p_k^i && \forall k \leq k^i \quad i, \\ b_k^i = x_k^i &\leq c_{K-k^i-k}^{-i} = p_k^i && \forall k > k^i. \end{aligned}$$

Llavors, distingim tres casos:

- Suposem que si ofereix $b^i \neq x^i$ guanya k^i unitats. Com en una subhasta Vickrey el vector d'oferta no determina la regla de pagament, obté els mateixos beneficis que si hagués ofert el seu vector de valoració.
- Si quan ofereix $b^i \neq x^i$ guanya $l^i > k^i$ unitats, amb $l^i \in \overline{K}$, el preu que paga per les primeres k^i unitats no varia del cas en què hagués ofert el seu vector de valoració, i per tant el benefici és el mateix per les primeres k^i unitats. En canvi, es compleix que:

$$p_k^i \geq x_k^i \quad , \quad \forall k \in \{k^i + 1, k^i + 2, \dots, l^i\}.$$

En conseqüència el benefici que aconsegueix el comprador i si ofereix $b^i \neq x^i$ és com a molt igual que el que hagués obtingut oferint el seu vector de valoració.

- Finalment, suposem que registra un vector d'oferta $b^i \neq x^i$, i guanya $l^i < k^i$ unitats, amb $l^i \in \overline{K}$. El benefici obtingut per les primeres l^i unitats és el mateix que en cas d'haver ofert el seu propi vector de valoració. En canvi, per totes les unitats que van

de $l^i + 1$ a k^i no obté cap benefici, mentre que si hagués ofert $b^i = x^i$, per aquestes unitats obtindria un benefici positiu.

Per tant, hem provat que oferir la pròpia valoració és una estratègia dèbilment dominant.

□

Observem que, considerant la funció identitat, podem aplicar el Corol·lari 2.1 i obtenim que la subhasta Vickrey té un equilibri eficient. Per tant, hem provat que la subhasta Vickrey hereta de la subhasta de segon preu que oferir la pròpia valoració és un equilibri, i a més, aquest equilibri és eficient.

Equilibri de la subhasta de preu uniforme

En el cas de les subhastes de preu uniforme no podem caracteritzar un equilibri en general, tal com hem fet abans amb les subhastes Vickrey. De fet, els equilibris de les subhastes de preu uniforme són en general difícils de calcular.

Per veure si els equilibris de la subhasta de preu uniforme són o no són eficients, deduïm una sèrie de propietats que han de complir tots els equilibris. Recordem que en una subhasta de preu uniforme, aquest preu ve determinat per l'oferta més gran perdedora. En la següent proposició demostrem les dues primeres propietats.

Proposició 2.3. *En un equilibri d'una subhasta de preu uniforme s'ha de complir que:*

a) *Les ofertes han de ser menors o iguals al seu valor marginal. És a dir:*

$$b_k^i \leq x_k^i, \quad \forall i \in N \quad i \quad \forall k \in \overline{K}.$$

b) *Els compradors ofereixen per la primera unitat el seu valor marginal. És a dir:*

$$b_1^i = x_1^i, \quad \forall i \in N.$$

Demostració. Comencem amb la demostració de l'apartat a). Volem veure que oferir $b_k^i = x_k^i$ domina dèbilment a oferir $b_k^i > x_k^i$. Suposem que el comprador $i \in N$ ofereix per la unitat $k \in \overline{K}$ de l'objecte subhastat $b_k^i > x_k^i$, llavors:

- Si $b_k^i = p$, llavors el comprador i ha guanyat $k - 1$ unitats. A més, com $p = \max\{c_{K-k}^{-i}, b_k^i\}$, s'ha de complir que $b_k^i > c_{K-k}^{-i}$. Si hagués ofert $b_k^i = x_k^i$ llavors també hauria guanyat $k - 1$ unitats. A més, podria ser que $p = x_k^i$ o $p = c_{K-k}^{-i}$. En les dues situacions s'hauria obtingut més benefici que oferint $b_k^i > x_k^i$.
- Si $b_k^i < p$, el comprador i hauria obtingut el mateix benefici oferint $b_k^i = x_k^i$.
- Si $b_k^i > p > x_k^i$, el comprador i guanya k unitats, però $(x_k^i - p) < 0$, obtenint un benefici negatiu per la k -èsima unitat. Si hagués ofert $b_k^i = x_k^i$ no guanyaria la k -èsima unitat, i per tant hauria evitat les pèrdues.
- Si $b_k^i > x_k^i > p$, s'hauria obtingut el mateix benefici oferint $b_k^i = x_k^i$.

Demostrem ara l'apartat b). Volem veure que l'estratègia d'oferir $b_1^i = x_1^i$ domina dèbilment a l'estratègia d'oferir $b_1^i < x_1^i$. Suposem que el comprador $i \in N$ fa una oferta per la primera unitat inferior al valor marginal d'aquesta, és a dir, $b_1^i < x_1^i$, llavors:

- Si $p \geq x_1^i > b_1^i$, el comprador i no guanya cap unitat. Hagués passat el mateix en cas d'haver ofert el valor marginal de la primera unitat.
- Si $x_1^i > p \geq b_1^i$, el comprador i no guanya cap unitat de l'objecte subhastat. En cas d'haver ofert $b_1^i = x_1^i$, hauria guanyat una unitat, obtenint un benefici estrictament positiu per ella.
- Si $x_1^i > b_1^i > p$, s'obtenen els mateixos beneficis que oferint $b_1^i = x_1^i$.

□

En una subhasta de preu uniforme si un jugador ofereix menys que la seva valoració pel primer objecte en la primera oferta, només redueix les seves possibilitats de guanyar el primer objecte, ja que el preu mai quedarà determinat per la seva primera oferta.⁴ A partir de la segona oferta el fet anterior ja no és cert. La variació de l'oferta produeix un *trade-off* entre les probabilitats de guanyar i els beneficis.

Reducció de demanda

Observem que ja sabem més coses sobre els equilibris de la subhasta de preu uniforme. Hem vist, que els compradors per cada unitat no faran ofertes superiors al seu valor marginal. A més, aplicant els dos apartats de la Proposició 2.3 hem provat que tots els compradors oferiran la valoració marginal pel primer objecte subhastat.

Ara, la pregunta natural que se'ns acudeix és com serà el comportament estratègic dels compradors per la resta d'unitats. ¿Un equilibri de la subhasta de preu uniforme és oferir el vector de valoracions com en la subhasta Vickrey, o per alguna de les unitats s'oferirà una quantitat menor a la valoració marginal? Per respondre aquesta pregunta estudiem el cas en què se subhasten dues unitats de l'objecte.

Suposem ara que se subhasten dues unitats d'un objecte, i un conjunt de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ compradors estan interessats a obtenir les dues unitats de l'objecte subhastat. Fixem un equilibri de la subhasta de preu uniforme qualsevol, que anomenem $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, que en particular compleix $\beta(0) = 0$.

Estudiem el problema des del punt de vista del comprador $i \in N$. Suposem que tots els compradors diferents del i segueixen l'estratègia d'equilibri β . Per simplificar la notació, en aquest apartat s'ometen els superíndexs, sent aquests sempre referits al comprador i . Llavors, considerem el vector de valoracions $x = (x_1, x_2)$, el vector d'ofertes $b = (b_1, b_2)$ i el vector d'ofertes competitives $c^{-i} = (c_1^{-i}, c_2^{-i})$.

Observem que c és un vector que ha sigut obtingut a partir d'un vector aleatori $C = (C_1, C_2)$, i per tant, aquest vector aleatori té una funció de densitat ben definida en χ , que anomenem h . Estudiem les condicions perquè el comprador i guanyi alguna unitat:

⁴En cas que la primera oferta d'un jugador defineixi el preu de mercat, això significaria que aquest jugador no ha guanyat cap unitat de l'objecte subhastat, ja que estem seguint el conveni que el preu de mercat és l'oferta més gran perdedora.

- Perquè el comprador i guanyi les dues unitats, s'ha de complir que $b_2 > c_1^{-i}$. Llavors, el preu dels objectes vindrà determinat per la major oferta perdedora, que en aquest cas es correspon amb c_1^{-i} .
- Perquè el comprador i guanyi una unitat, s'ha de complir que $b_1 > c_2^{-i}$ però $b_2 < c_1^{-i}$. En aquest cas $p = \max\{b_2, c_2^{-i}\}$.

Per tant, el benefici esperat del comprador i és donat per:

$$\begin{aligned} \pi(b, x) = & \int_{\{c: c_1^{-i} < b_2\}} (x_1 + x_2 - 2c_1^{-i}) \cdot h(c) \, dc \\ & + \int_{\{c: c_2^{-i} < b_1 \text{ i } c_1^{-i} > b_2\}} (x_1 - \max\{b_2, c_2^{-i}\}) \cdot h(c) \, dc. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Observem que el primer sumand de (2.2) determina els beneficis esperats quan el comprador i guanyi dues unitats, i el segon sumand quan guanyi una unitat. Per simplificar l'expressió anterior hem d'introduir les funcions de distribució marginal.

Anomenem, doncs H_1 la funció de distribució marginal de C_1 , i anomenem h_1 la seva funció de densitat. D'igual manera, anomenem H_2 la funció de distribució marginal de C_2 , i anomenem h_2 la seva funció de densitat. Fent servir les funcions de distribució marginal obtenim:

- $H_1(b_2) = P(C_1 < b_2)$, que és la probabilitat que el comprador i guanyi les dues unitats.
- $H_2(b_1) - H_1(b_2)$, és la probabilitat que $b_1 > c_2^{-i}$ però $b_2 < c_1^{-i}$, és a dir, la probabilitat que el comprador i guanyi una unitat.
- $H_2(b_2) - H_1(b_2) = P(C_2 < b_2 < C_1)$. Aquesta probabilitat la farem servir per determinar quina és la probabilitat que $p = b_2$ en el cas que el comprador i guanyi una unitat.

Amb les distribucions marginals, podem reescriure la igualtat (2.2) com:

$$\begin{aligned} \pi(b, x) = & H_1(b_2) \cdot (x_1 + x_2) - 2 \cdot \int_0^{b_2} c_1^{-i} \cdot h_1(c_1^{-i}) \, dc_1^{-i} + (H_2(b_1) - H_1(b_2)) \cdot x_1 \\ & - (H_2(b_2) - H_1(b_2)) \cdot b_2 - \int_{b_2}^{b_1} c_2^{-i} \cdot h_2(c_2^{-i}) \, dc_2^{-i}. \end{aligned}$$

Volem saber per quin b_2 el comprador i maximitzarà els seus beneficis esperats. Per tant, derivant l'expressió anterior respecte de b_2 obtenim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial b_2} = & h_1(b_2) \cdot x_1 + h_1(b_2) \cdot x_2 - 2 \cdot b_2 \cdot h_1(b_2) - h_1(b_2) \cdot x_1 \\ & - H_2(b_2) + H_1(b_2) - h_2(b_2) \cdot b_2 + h_1(b_2) \cdot b_2 + b_2 \cdot h_2(b_2) \\ = & h_1(b_2) \cdot (x_2 - b_2) - (H_2(b_2) - H_1(b_2)). \end{aligned}$$

Si avaluem aquesta expressió en $x_2 = b_2$, arribem a:

$$\left. \frac{\partial \pi}{\partial b_2} \right|_{x_2=b_2} = -(H_2(b_2) - H_1(b_2)) < 0. \quad (2.3)$$

On a (2.3) hem fet servir que H_1 domina de manera estocàstica a H_2 .⁵ Per tant, hem provat que el comprador i obté més beneficis quan per la segona oferta registra una oferta menor a la valoració del segon objecte. Aplicant el Corol·lari 2.1, la subhasta de preu uniforme no és eficient, ja que no podem trobar una única funció β que permeti expressar les estratègies del comprador i a partir de les seves valoracions.

Equilibri de la subhasta discriminatòria

En la subhasta discriminatòria és clar que es produeix una reducció de demanda, ja que si el comprador i oferta $b_k^i = x_k^i$, per la definició de preu de la subhasta discriminatòria no obté cap guany.

Per estudiar quina és l'estructura dels equilibris simètrics de la subhasta discriminatòria, comencem amb l'anàlisi del cas més simple, quan se subhasten dos objectes mitjançant una subhasta discriminatòria, i dos compradors participen en el procés.

Fixem un equilibri simètric de la subhasta discriminatòria, (β_1, β_2) , i notem per $\bar{b} = \max \beta_2(x)$. Si el comprador 1 fa l'oferta $b_1^1(x^1) > \bar{b}$, sempre guanya la primera unitat, i pot augmentar el seu benefici disminuint l'oferta per la primera unitat. Com aquesta anàlisi també és vàlid pel comprador 2, s'ha de complir en l'equilibri simètric que:

$$\max_x \beta_1(x) = \bar{b} = \max_x \beta_2(x).$$

Ara, considerem el comprador 1, el raonament és igualment vàlid pel comprador 2, ja que els compradors són simètrics. Sigui el vector aleatori $C = (C_1, C_2)$,⁶ el vector d'ofertes competitives del comprador 1. Observem que com a la subhasta només participen dos compradors, el vector d'ofertes competitives és exactament el vector d'oferta del comprador 2. Notem per H_1 i H_2 la distribució marginal de C_1 i C_2 , respectivament, i per h_1 i h_2 les funcions de densitat associades. Si X^2 és el vector de valoracions privades del comprador 2, llavors es compleix que $C_1 = \beta_1(X^2)$ i $C_2 = \beta_2(X^2)$. Per tant, tenim:

$$\begin{aligned} H_1(c) &= P(C_1 \leq c), \\ H_2(c) &= P(C_2 \leq c). \end{aligned}$$

Considerem el vector de valoració del comprador 1, (x_1, x_2) , i el seu vector d'oferta, (b_1, b_2) . El comprador 1 guanya les dues unitats si $C_1 < b_2$, fet que succeeix amb una probabilitat de $H_1(b_2)$. El comprador 1 guanya una unitat si es compleix que $C_2 < b_1$ i $C_1 > b_2$, que passa amb probabilitat $H_2(b_1) - H_1(b_2)$. Per tant, el benefici esperat del comprador 1 és:

$$\begin{aligned} \pi(b, x) &= H_1(b_2)(x_1 + x_2 - b_1 - b_2) + (H_2(b_1) - H_1(b_2))(x_1 - b_1) \\ &= H_2(b_1)(x_1 - b_1) + H_1(b_2)(x_2 - b_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

El comprador 1 ha de triar un vector d'oferta b que maximitzi $\pi(b, x)$, complint que $b_1 \geq b_2$. Quan la restricció $b_1 \geq b_2$ no se satura a l'òptim, és a dir, es compleix que $b_1 > b_2$,

⁵Donades dues funcions de distribució F i G definides a $[0, w]$, diem que F domina de manera estocàstica a G si $F(x) \leq G(x) \quad \forall x \in [0, w]$.

⁶En aquest raonament si ometem els superíndex ens estem referint al comprador 1.

les condicions de primer ordre per maximitzar $\pi(b, x)$ són:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial b_1} = 0 &\implies h_2(b_1)(x_1 - b_1) - H_2(b_1) = 0 \implies h_2(b_1)(x_1 - b_1) = H_2(b_1) \\ \frac{\partial \pi}{\partial b_2} = 0 &\implies h_1(b_2)(x_2 - b_2) - H_1(b_2) = 0 \implies h_1(b_2)(x_2 - b_2) = H_1(b_2).\end{aligned}$$

Per tant, quan $b_1 > b_2$, deduïm que β_1 només depèn de x_1 i β_2 només depèn de x_2 .

Si la restricció $b_1 \geq b_2$ se satura a l'òptim, és a dir, $b_1 = b_2 \equiv b'$, el comprador 1 ofereix per les dues unitats de l'objecte la mateixa quantitat, és a dir, fa una oferta plana. Com es pot veure en Wiggins i Kahn(1998)[14], amb probabilitat positiva hi ha una combinació convexa de valoracions en què el comprador 1 oferta b' pels dos objectes. El fet anterior és una contradicció amb el Corol·lari 2.1, i per tant, la subhasta discriminatòria és en general ineficient.

Capítol 3

Les subhastes al mercat elèctric espanyol

Els mercats d'electricitat tenen una sèrie de característiques que els fan molt especials. L'electricitat, ara com ara, no es pot emmagatzemar de manera eficient a gran escala, i per això l'energia produïda ha de ser consumida a l'instant. A més, l'electricitat pot ser produïda a través de diferents tecnologies, cadascuna amb els seus costos i les seves particularitats. Per exemple, l'energia solar és una forma barata i no contaminant de produir energia, però en el moment en què marxa el sol es deixa de produir. Altres energies, com la nuclear, un cop que es posa en marxa el procés de fisió nuclear aquest triga molt temps a detenir-se. Per tant, les empreses que generen electricitat amb aquesta tecnologia han de vendre l'electricitat a qualsevol preu, per tal de no desaprofitar-la. Per tant, un país ha de tenir capacitat excedentària de producció d'energia, amb una varietat de tecnologies diferents que puguin generar l'electricitat necessària sota diferents escenaris. A més, hi ha etapes del mercat d'electricitat que requereixen unes infraestructures molt grans, i de gran cost. Per tant, la majoria de països permeten que una empresa tingui el monopoli natural en algunes etapes.

A Espanya, fins a l'any 1997, el sector elèctric espanyol estava regulat pel govern. L'executiu fixava el preu de l'electricitat, i remunerava els costos de les empreses del sector. Amb la llei del sector elèctric 54/97, i les posteriors lleis es produeix una desregularització parcial del mercat elèctric espanyol. Una novetat que s'introdueix a partir de l'any 1997 és que el mecanisme de mercat pel qual els generadors venen l'energia generada a les empreses comercialitzadores és mitjançant una subhasta de múltiples objectes. La llei del sector elèctric 54/97 es va basar en els mercats elèctrics del Regne Unit i Califòrnia, encara que aquests dos mercats van ser modificats al cap de poc temps. El Regne Unit, l'any 2001 decideix substituir la subhasta de preu uniforme per una subhasta discriminatòria. En el cas de Califòrnia, l'abús del poder de mercat de les empreses generadores va elevar els preus d'electricitat a nivells molt alts, cosa que va provocar la intervenció del govern, convertint-se en comprador únic de l'electricitat, signant amb els generadors contractes bilaterals, mesura que no va solucionar el problema dels alts preus.

El cas de Califòrnia ens ensenya com és d'important dissenyar un mercat d'electricitat equilibrat, ja que un preu de l'electricitat molt alt no només repercuteix en les persones més vulnerables, sinó que pot ocasionar un desavantatge competitiu de les indústries de la regió. En el cas del mercat elèctric espanyol la subhasta de múltiples objectes fa vint-i-quatre anys que és vigent, i sembla que continuarà molts anys més, ja que aquest

sistema està regulat per la UE en la directiva 2019/944, i és utilitzat en la majoria de països del vell continent.

3.1 Una introducció al mercat elèctric espanyol

Tal com hem començat a deduir a la introducció, des que una central genera l'energia fins que arriba a casa nostra, l'electricitat passa per una sèrie d'etapes, que podem dividir en:

- **Generació:** En aquesta primera etapa les empreses generen electricitat en les seves instal·lacions, a partir de diferents tecnologies, tant renovables com no renovables. La potència instal·lada al territori a Espanya peninsular, és de 105224 MWh,¹ sent el *mix* elèctric espanyol un dels més variats d'Europa. Les cinc majors tecnologies instal·lades per generar electricitat són la tecnologia del cicle combinat, la hidràulica, la solar fotovoltaica, la nuclear i la cogeneració. La generació d'electricitat a Espanya és una activitat liberalitzada, encara que la instal·lació de noves centrals nuclears ha de ser aprovada pel govern.
- **Transport:** En aquesta etapa es transporta l'electricitat des de les centrals de generació fins als punts de consum a nivell teòric. Durant aquest procés es transporta l'electricitat en alta tensió, per tal de minimitzar la pèrdua d'electricitat en aquesta etapa. El transport d'electricitat és una activitat regulada pel govern a la llei 24/2013, de 26 de desembre.[2] L'empresa Red Eléctrica Espanyola, actua com a transportista únic, sent l'encarregada del manteniment, reparació de la xarxa de transport, així com obtenir i gestionar tota la informació de la xarxa de transport. A causa de les seves funcions, Red Eléctrica Espanyola també és coneguda com a operador del sistema.
- **Distribució:** En aquesta etapa l'electricitat passa d'alta a mitjana tensió als centres de transformació, i és transportada fins als punts de consum. Encara que hi ha més de 200 empreses que estan autoritzades a distribuir electricitat, aproximadament un 95% de l'activitat de distribució es reparteix entre cinc empreses. Aquestes empreses són Endesa, Iberdrola, Naturgy, EDP España i Viesgo.
- **Comercialització:** En aquesta última etapa les empreses que denominarem com comercialitzadores es dediquen a comprar l'electricitat al mercat, i la venen al consumidor final. Observem que, per tant, les empreses comercialitzadores no necessiten cap infraestructura per operar. Aquestes entitats han de pagar un peatge a les empreses distribuïdores, conegut com a ATR (Accés de tercers a la xarxa) per utilitzar la seva xarxa de distribució. Les empreses distribuïdores poden tenir filials que es dediquin a la comercialització, però igualment cal que cobrin l'ATR a la seva empresa filial. Dins de les més de 250 empreses comercialitzadores que hi ha al mercat elèctric espanyol, a Espanya peninsular hi ha un total de sis empreses que són reconegudes com a comercialitzadores de referència, ja que estan autoritzades per oferir el PVPC.² Les sis empreses són Endesa, Iberdrola, Naturgy, Grupo Repsol,

¹Les dades donades en aquest paràgraf són a 31 de desembre de 2020, i han estat extretes de l'avanç de l'Informe del sistema elèctric espanyol 2020, elaborat per Red Eléctrica de España, i que podeu trobar a [7].

²El Preu Voluntari al Petit Consumidor és un preu regulat pel govern en el RDL 216/2014, de 28 de març.[3] Al PVPC, es pot acollir tot consumidor final amb una potència contractada menor o igual a 10 kW.

EDP i CHC.

Un cop feta aquesta petita introducció de quines són les etapes del mercat elèctric espanyol, veiem més en detall quins són els agents que participen en el mercat elèctric espanyol:

- **Venedors d'energia:** En aquest grup es situen els generadors. Depenent de la tecnologia que facin servir apliquen una estratègia diferent per poder maximitzar els seus beneficis.
- **Compradors d'energia:** En aquest grup estan les empreses comercialitzadores, però també hi ha grans empreses amb altes necessitats d'energia, que acudeixen directament al mercat, sigui anant elles directament o mitjançant un intermediari.

Per tant, el mercat elèctric ha d'assignar els kW que han generat els venedors d'energia entre tots els compradors d'energia que estan interessats a obtenir electricitat. Aquesta assignació es realitza en el mercat elèctric espanyol mitjançant tres mecanismes:

- **Mercat diari:** És el mecanisme que més electricitat assigna en el mercat elèctric espanyol. El disseny i regulació del mercat diari és comú en la majoria dels països de la UE. El mercat diari espanyol és gestionat per OMIE, també conegut com a operador de mercat. Durant tots els dies a les 12 del matí, els compradors i venedors d'electricitat que es troben a la península ibèrica presenten les seves ofertes de compra i venda a OMIE. Amb les ofertes rebudes, l'operador del sistema genera per cadascuna de les 24 hores del dia una corba d'oferta i demanda, i les assigna mitjançant una subhasta de preu uniforme. El preu en què es creuen aquestes corbes és el preu de mercat de la subhasta.
- **Mercat intradiari:** Mitjançant aquest mecanisme els compradors i venedors poden ajustar els seus volums d'electricitat. Aquest mercat és gestionat per OMIE. El mercat intradiari està format per dos formats. El primer d'ells, és el mercat intradiari de subhastes, que està format per sis sessions amb un funcionament similar al mercat diari. El segon format és el mercat intradiari continu, amb un funcionament similar a un mercat de valors.
- **Mercat a termini:** En mercat a termini un comprador i venedor d'energia acorden la compravenda d'energia, normalment amb un contracte bilateral o PPA (*Power Purchase Agreement*), que acostuma a comprendre un període d'un a cinc anys. Aquest mercat és gestionat per OMIP, l'operador de mercat del mercat elèctric portuguès.

En aquest treball ens centrarem en el funcionament del mercat diari espanyol, ja que funciona mitjançant una subhasta de múltiples objectes. Veiem com funciona aquest mecanisme amb més detall.

Tots els dies de l'any a les 12 del matí, se subhasta l'electricitat per les 24 hores del dia següent. Els agents venedors d'energia poden presentar a l'operador del mercat dos tipus d'oferta. Les primeres són les ofertes simples, en les quals els generadors d'energia presenten les seves ofertes de venda, sense imposar cap restricció. El segon tipus són les ofertes amb condicions, que permet als generadors imposar una sèrie de restriccions per formar part de la corba d'oferta.

Un cop que OMIE rep les ofertes de compra i venda, l'algoritme de cassació anomenat *Euphemia*, busca com optimitzar l'excedent econòmic a partir de les ofertes rebudes. Per a cada hora, l'algoritme *Euphemia* dibuixa una corba d'oferta i una corba de demanda, que són esglaonades, com podem veure a la figura 3.1.

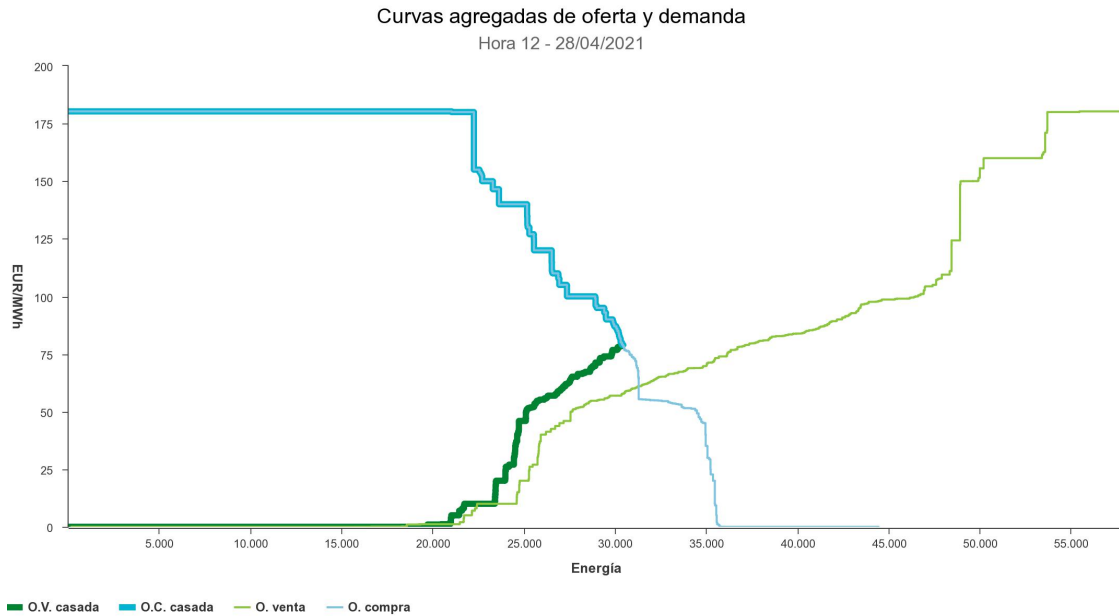


Figura 3.1: Corbes d'oferta i demanda del 28-04-2021 a les 12.00.

A la Figura 3.1, tenim les corbes d'oferta i demanda que es van generar pel dia 28/04/2021 a les 12 del matí. La corba pintada en blau representa totes les ofertes que han fet les empreses comercialitzadores i les empreses autoritzades del mercat. Observem, que la corba de demanda comença amb una asímtota horitzontal al preu de 180€. Aquest fet no és una casualitat, ja que és el preu màxim del mercat, regulat a la llei 24/2013, del sector elèctric. Les empreses compradores d'energia estan disposades a pagar el preu màxim, ja que han de satisfer les necessitats d'energia dels consumidors finals amb els quals tenen una relació contractual en el cas de les empreses comercialitzadores, i les seves necessitats pròpies en el cas de les empreses industrials que acudeixen al mercat. Un cop satisfetes les seves necessitats més essencials, les empreses venedores van abaixant el preu que estan disposades a pagar per cada MW.

Comentem ara la corba d'oferta, pintada en verd a la Figura 3.1. D'igual manera, la corba comença amb una asímtota vertical al preu de 0€. En aquest cas els generadors que ofereixen la seva energia produïda a 0€, són els que utilitzen energies renovables i nuclear. Imaginem el cas d'una empresa que genera electricitat a través del sol. Aquest generador ha d'aprofitar les hores solars per produir energia, i com l'energia no es pot emmagatzemar de manera eficient amb la tecnologia actual, s'ha d'assegurar que vendrà l'energia. De manera semblant passa amb els generadors nuclears. Les ofertes superiors es corresponen amb els generadors d'energia que tenen l'opció de produir o no. Per exemple, una empresa generadora que utilitza el carbó pot decidir generar energia només quan l'electricitat arriba a un determinat preu. És a dir, pot decidir produir només quan el preu sigui superior a 50 MW/h. En aquest cas, els generadors que utilitzen no tenen cap problema de produir una determinada quantitat d'hores i aturar el procés generador d'energia fins que un altre cop l'electricitat arribi a un determinat preu.

Podem observar a la Figura 3.1 que hi ha un punt on les corbes d'oferta i demanda es tallen, també conegut com a *punt de coincidència*. En el cas de l'exemple que estem veient el punt de tall es produeix a una energia de 30401,6 MWh a un preu de 78,95€/MWh. Totes les ofertes que es troben a l'esquerra del punt de coincidència són acceptades, és a dir, tots els generadors que han ofert generar l'energia a un preu inferior al de coincidència i els compradors que estan disposats a comprar l'energia a un preu superior generaran i rebran l'energia per aquella hora, respectivament. El mercat diari és un mercat marginalista, ja que el preu de tota l'energia venuda és la de l'última oferta acceptada.

3.2 Modelització del mercat diari elèctric espanyol

Des de la implementació de les subhastes de múltiples objectes com a mètode per assignar els contractes d'electricitat, moltes persones han modelitzat els diferents mercats elèctrics per poder veure les característiques dels equilibris i buscar punts de millora en el disseny del mercat. En aquesta secció, estudiem el model de García-Díaz i Marín(2003)[6], que és una generalització al mercat espanyol del model introduït per von der Fehr i Harbord(1993)[13].

El model

Denotem per $I = \{1, \dots, f\}$ el conjunt d'empreses venedores que participen al mercat, per $U = \{1, \dots, m\}$ el conjunt d'unitats generadores del mercat i notem com $U_i \subset U$ el subconjunt d'unitats generadores que pertanyen a l'empresa $i, i \in I$. Donat una unitat de generació $u \in U$ qualsevol, anomenem:

- c_u el cost unitari constant de la unitat,
- k_u la capacitat màxima de generació de la unitat,
- q_u és la capacitat a què genera la unitat.

Sense perdre generalitat suposem que es compleix que $c_u \leq c_{u+1}$ per $1 \leq u \leq m - 1$. El cost marginal d'una companyia $i \in I$, que notem com $MC_i(q)$ és definit com:

$$MC_i(q) = \min_{u \in U_i} c_u,$$

subjecte a $\sum_{g \in E_i(u)} k_g \geq q$, on $E_i(u) = \{g : g \in U_i \text{ i } c_g \leq c_u\}$. Veiem la nomenclatura anterior mitjançant un exemple senzill.

Suposem que un agent $i \in I$ té tres unitats de generació, u_{i1}, u_{i2} i $u_{i3} \in U$. Tenim que el cost unitari de les unitats de generació són $c_{i1} = 5$, $c_{i2} = 10$ i $c_{i3} = 15$. La capacitat màxima de generació suposem que és de 10 MWh per les tres unitats, llavors:

$$MC_i(q) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 \leq q \leq 10, \\ 10 & \text{si } 10 \leq q \leq 20, \\ 15 & \text{si } 20 \leq q \leq 30. \end{cases}$$

Per tant, podem definir la funció de cost d'una empresa $i \in I$ com:

$$C_i(q) = \int_0^q MC_i(x) dx.$$

Observem que de la definició anterior podem concloure que en aquest model no hi ha costos fixos, i que el cost marginal és constant por totes les unitats generadores de l'empresa $i \in I$.

Per a cada període en què es produeixi una subhasta, l'estratègia de cada unitat de generació la podem expressar com una funció continua creixent esglaonada, on el nombre d'esglaons suposem que és finit. Ordenant tots els esglaons de les unitats de generació d'una companyia, definim la funció d'oferta de la companyia $i \in I$ com:

$$b_i(q) : [0, K_i] \longrightarrow [0, p^{max}],$$

on $K_i = \sum_{u \in U_i} k_u$, i considerem que p^{max} és el preu màxim regulat al mercat elèctric espanyol, 180€/MWh. Suposem que $b_i(0) = 0$.

A partir de la suma agregada de les f empreses venedores obtenim la funció d'oferta del mercat, que ens determina l'oferta més alta dels venedors d'energia per produir una determinada quantitat d'energia q , que definim com:

$$b(q) : [0, K] \longrightarrow [0, p^{max}],$$

on $K = \sum_{i \in I} K_i$.

Pel que fa al costat de la demanda, distingim entre dos tipus de consumidors. El primer tipus de consumidors són els que tenen un contracte de tarifa fixa amb una entitat comercialitzadora. Suposem que aquestes empreses han d'obtenir l'energia compromesa. Per tant, les comercialitzadores demanen l'energia prevista que consumiran els seus clients en un període determinat de temps al preu màxim del mercat.

El segon tipus introdueixen una funció de demanda decreixent esglaonada. Podem identificar aquests consumidors com grans indústries que acudeixen directament al mercat. A partir de la suma agregada de la demanda de tots els consumidors obtenim una funció de demanda, $D(p)$. Suposem que aquesta funció de demanda té una funció inversa, $P(q)$.

El preu d'equilibri, $p^*(b)$, és determinat per la intersecció de la corba d'oferta amb la funció inversa de demanda:

$$p^*(b) = \max_q \{b(q) : b(q) \leq P(q)\}.$$

El preu al què es venen tots els MWh és p^* , és a dir, el mercat diari espanyol segueix un sistema de preu marginalista. Si denotem per $Q_i(b)$ la quantitat d'energia produïda per l'empresa $i \in I$, la funció de benefici és:

$$\pi_i(b) = Q_i(b) \cdot p^*(b) - C_i(Q_i(b)).$$

Per acabar el procés de modelització, observem que les unitats generadores no faran ofertes per sota del seu preu marginal, ja que és dèbilment dominat per altres estratègies.

Caracterització dels equilibris

En aquest apartat demostrem que el nostre model té un equilibri pur de Nash. Suposem que b és una estratègia d'equilibri que dona com a resultat un preu d'equilibri p^* . Diem que una companyia és *marginal* si ha ofert un tram de la seva energia generada a un preu p^* , i almenys un tram d'aquesta energia ha estat venuda al mercat. En el primer resultat veiem que si una companyia i és marginal, les altres empreses actuen com a preu acceptants. Definim

$$O_i(p) = \max\{q : q \in [0, K_i] \text{ i } MC_i(q) < p\}.$$

Teorema 3.1. *Suposem que b és una estratègia d'equilibri amb un preu d'equilibri p^* . Si l'empresa que la companyia i és marginal, llavors $Q_j \leq O_j(p^*) \quad \forall j \neq i$.*

Demostració. Definim M_i l'energia generada per l'empresa i oferida a un preu p^* , i que ha estat venuda al mercat. Suposem que $Q_j < O_j(p^*)$ per alguna empresa $j \neq i$. Anomenem $k = \min(O_j(p^*) - Q_j, M_i)$, i considerem una nova estratègia per l'empresa j , definida per:

$$\bar{b}_j(q) = \begin{cases} p^* - \varepsilon & \text{si } q \leq Q_j + k, \\ p^{max} & \text{si } q > Q_j + k. \end{cases}$$

Amb aquesta estratègia l'empresa j obtindrà uns beneficis mínims d'almenys $(p^* - \varepsilon)(Q_j + k) - C_j(Q_j + k)$. Si anomenem \bar{b} l'estratègia de totes les empreses, amb la introducció de la nova estratègia de la companyia j , i fent servir que $\pi_i(b) = Q_i(b) \cdot p^*(b) - C_i(Q_i(b))$, els beneficis del jugador j són:

$$\pi_j(\bar{b}) = \pi_j(b) - \varepsilon Q_j + \int_{Q_j}^{Q_j+k} [p^* - \varepsilon - MC_j(q)] dq.$$

Com $p^* > MC_j(q)$ en el domini de definició de l'integral, el resultat de l'integral és una constant estrictament positiva C_ε . Llavors, agafant un ε prou petit, es compleix:

$$\pi_j(b) < \pi_j(\bar{b}).$$

□

Amb l'anterior resultat hem provat que $O_j(p)$ és el nivell mínim de producció d'una empresa preu acceptant quan el preu és p . Del Teorema 3.1 podem deduir una sèrie de propietats del model. Anomenem $v_i(p)$ els beneficis màxims que pot aconseguir una companyia i si el preu d'equilibri és p , i les altres companyies són preu acceptants. Llavors es compleix:

$$v_i(p) = \begin{cases} p \cdot (D(p) - O_{-i}(p)) - C_i(D(p) - O_i(p)) & \text{si } O_i(p) \geq D(p) - O_{-i}(p) > 0, \\ p \cdot O_i(p) - C_i(O_{-i}(p)) & \text{si } D(p) - O_{-i}(p) > O_i(p) > 0, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $O_{-i}(p) = \sum_{j \neq i} O_j(p)$. En aquest cas, la companyia i pot generar energia a un cost marginal inferior a p . En aquest cas, $O_j(p) = Q_j$ per les companyies $j \neq i$, ja que no poden

vendre cap unitat extra obtenint un benefici positiu. En el segon cas, la companyia i no pot generar cap unitat addicional amb un cost marginal inferior al preu. En aquest cas, la demanda residual no es satisfà si les empreses generen $\sum_{j \in I} O_j(p)$. Llavors, perquè p sigui un preu d'equilibri, ha d'haver-hi almenys una companyia $j \neq i$ complint que $Q_j(p) > O_j(p)$. El següent resultat ens permet caracteritzar com podem determinar els beneficis a l'equilibri:

Corol·lari 3.1. *Si b és una estratègia d'equilibri que dona com a resultat un preu d'equilibri p^* . Si la companyia i és marginal, llavors:*

$$\pi_k(b) = \begin{cases} v_i(p^*) & \text{si } k = i, \\ \max_q \{(p^*) \cdot q - C_j(q)\} & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

Per tant, els beneficis de totes les companyies poden ser determinats mitjançant el preu d'equilibri i la identitat de la companyia marginal. Donada la nostra definició d'equilibri, volem trobar quins preus són candidats a ser preu d'equilibri. Si una empresa i és marginal, els seus beneficis són $v_i(p^*)$, on p^* és un dels preus que maximitza $v_i(p)$. Com hi ha un total de f empreses, i el preu que maximitza $v_i(p)$ no ha de ser únic, el nombre de preus candidats a preu d'equilibri és $f \cdot \#$ preus que maximitzen $v_i(p)$. Abans d'enunciar i provar que característiques ha de complir el preu d'equilibri, necessitem una definició prèvia. Denotem per $\bar{\pi}_i(p)$ el vector de beneficis quan l'empresa i és marginal, definit com:

$$\bar{\pi}_i^k(p) = \begin{cases} v_i(p) & \text{si } k = i, \\ \max_q \{(p^*) \cdot q - C_j(q)\} & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

Teorema 3.2. *Hi ha una estratègia d'equilibri en què la companyia i és marginal, el preu d'equilibri és p^* i els beneficis de les empreses són el vector $\bar{\pi}_i(p^*)$ si i només si $\max_{p \in [0, p^{max}]} v_j(p) \leq \bar{\pi}_i^j(p^*) \forall j \in I$ i $D(p^*) - O_{-i}(p^*) > 0$.*

Podeu veure la demostració d'aquest teorema a García-Díaz i Marín(2003)[6]. Amb aquest resultat deduïm que si un possible candidat a ser equilibri és que una companyia i sigui marginal, amb un preu p_i , un altra empresa $j \neq i$ voldrà ser marginal si pot establir un preu p_j superior a p_i . Per tant, el preu d'equilibri és el màxim p candidat a ser preu d'equilibri. Formalment, denotem $\bar{p}^* = \max_i \{p : p \in \arg \max_p \pi(p) \text{ i } D(p) - O_{-i}(p) > 0\}$. Llavors, aplicant el Teorema 3.2 podem enunciar el resultat amb el qual acabem el treball:

Corol·lari 3.2. *Una estratègia d'equilibri sempre existeix per aquest joc, el preu d'equilibri és \bar{p}^* i els beneficis de les empreses són $\bar{\pi}_i(\bar{p}^*)$.*

Bibliografia

- [1] Břeský, M. (2008): *Pure Equilibrium Strategies in Multi-unit Auctions with Private Value Bidders*, Working Paper Series 376. The Center for Economic Research and Graduate Education - Economics Institute, Prague, Directors of CERGE and EI.
- [2] Espanya. Llei 24/2013, de 26 de desembre. *Butlletí oficial de l'Estat*, 27 de desembre 2011, num. 310.
- [3] Espanya. Reial Decret Llei 216/2014, de 28 de març. *Butlletí oficial de l'Estat*, 29 de març, num. 77.
- [4] Federico, G. i Rahman, D(2003). "Bidding in an Electricity Pay As Bid Auction." *Journal of Regulatory Economics*, 24, 175–211.
- [5] Friedman, M. (1960): *A Program for Monetary Stability*, New York, Fordham University Press.
- [6] García-Díaz, A. i Marín, P.L. (2003): "Strategic bidding in electricity pools with short-lived bids: an application to the Spanish market," *International Journal of Industrial Organization*, 21(2), 201-222.
- [7] Grupo Red Eléctrica(n.d.): Avance del Informe del sistema eléctrico español 2020. Disponible en:<https://www.ree.es/es/datos/publicaciones/informe-anual-sistema/avance-del-informe-del-sistema-electrico-espanol-2020> [Consulta: 9 de maig de 2021]
- [8] Krishna, V. (2010): *Auction Theory*, segona edició, Academic Press.
- [9] Nobel Prize Outreach AB (2021): The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1996. Disponible en: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1996/summary/> [Consulta: 1 de maig de 2021]
- [10] Nobel Prize Outreach AB (2021). Press release: The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2020. Disponible en: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2020/press-release/> [Consulta: 1 de maig de 2021]
- [11] Noussair, C. (1995): "Equilibria in a Multi-Object Uniform Price Sealed Bid Auction with Multi-Unit Demands", *Economic Theory*, 5(2), 337–351.
- [12] Vickrey, W. (1961): "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *The Journal of Finance*, 16(1), 8–37.

- [13] von der Fehr, N.H. i Harbord D.(1993): "Spot market competition in the U.K. electricity industry", *Economic Journal*, 103, 531–546.
- [14] Wiggans, R.E. i Kahn, C.M. (1998): "Multi-Unit Pay-Your-Bid Auctions with Variable Awards", *Games and Economic Behavior*, 23(1), 25–42.
- [15] Wolfram, C.(1999): "Electricity Markets: Should the Rest of the World Adopt the UK Reforms?", *Regulation*, 22, 48–53.