



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

APROXIMACIÓ ALS  
CONJUNTS DE JULIA I AL  
CONJUNT DE MANDELBROT

---

Autor: Marta Fernández Porta

Director: Dr. Martín Sombra  
Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

## Abstract

The aim of this project is the study of the density of repelling periodic points in the Julia set, and the theorem stating that, the closure of the  $c$ 's of the Mandelbrot set such that the function  $z^2 + c$ , has a superattracting cycle, is the entire boundary of the Mandelbrot set. In order to achieve so, we focus on the periodic points, critical points and characteristics of the Julia set, starting with the fundamental concepts involved in the comprehension of this results.

## Resum

L'objectiu d'aquest projecte és, l'estudi de la densitat dels punts periòdics repulsors en el conjunt de Julia, i el teorema que constata que la frontera del conjunt de Mandelbrot és l'adherència de les  $c$ 's del conjunt de Mandelbrot complint que la funció  $z^2 + c$ , té un cicle superatractor. Per poder arribar a aquests resultats, ens centrem en els punts periòdics, punts crítics i característiques del conjunt de Julia, començant pels conceptes fonamentals relacionats en la comprensió d'aquests resultats.

## Agraïments

En primer lloc i el més important, és pel Martín Sombra. Gràcies per guiar-me i acompanyar-me al llarg d'aquest treball. Estic molt agraïda d'haver trobat un tutor amb qui he pogut comentar resultats i que m'ha ajudat a entendre tots aquells conceptes complicats, explicar-me'ls de manera clara i entenedora. De tot cor, moltes gràcies per tot.

En segon lloc, hi ha la meva família. Els hi agraeixo haver estat aquests quatre anys de carrera, recolzant-me i aguantant-me en els mals moments, i animant-me perquè seguís endavant. Gràcies per confiar en mi i en què podria treure'm aquesta carrera quan ni tan sols jo ho pensava.

Finalment, a tots els meus amics de la universitat. Amb ells he compartit les preocupacions, els patiments, les frustracions i els mals moments que hem tingut al llarg de la carrera. Entre tots ens ajudàvem a seguir endavant i a fer situacions complicades més fàcils i fins i tot divertides. Però sobretot, per tots els bons moments que hem passat junts, que són els que ens ajuden a seguir endavant.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceptes preliminars</b>	<b>4</b>
2.1	Anàlisi complexa a $\mathbb{C}$ . . . . .	4
2.2	Esfera de Riemann . . . . .	4
2.3	Funcions racionals a $\overline{\mathbb{C}}$ . . . . .	8
2.4	Transformacions de Möbius . . . . .	9
2.5	La recta projectiva i $\overline{\mathbb{C}}$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Punts fixos i conjugacions</b>	<b>12</b>
3.1	Conjugacions . . . . .	12
3.2	Punts fixos i classificació . . . . .	12
3.3	Punts fixos atractors . . . . .	15
3.4	Punts fixos repulsors . . . . .	17
3.5	Punts fixos superatractors . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Iteracions de funcions racionals</b>	<b>19</b>
4.1	Punts crítics i periòdics . . . . .	19
4.2	Els conjunts de Julia i el conjunt de Fatou . . . . .	21
4.3	Conjunts invariants . . . . .	23
4.4	Punts excepcionals . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Propietats del conjunt de Julia</b>	<b>27</b>
5.1	Cicles . . . . .	29
5.2	Densitat dels punts periòdics repulsors . . . . .	34
5.3	El conjunt de Julia d'un polinomi . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Polinomis quadràtics i el conjunt de Mandelbrot</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>41</b>

# 1 Introducció

Al món de les matemàtiques vaig entrar-hi per casualitat, no sabia el que volia estudiar i al final vaig apostar per elles. Des del primer moment vaig sentir que havia trobat el meu lloc, on he pogut aprendre i entendre moltíssimes coses que mai hauria pensat que podria arribar a comprendre. Ha sigut en aquest procés on he conegut els nombres complexos i els sistemes dinàmics, dos camps que trobo fascinants. Per això, en el meu treball de final de grau vaig decidir estudiar la dinàmica complexa, l'estudi de sistemes dinàmics definits per les iteracions de funcions en variable complexa, és a dir, la composició d'una funció amb ella mateixa infinits cops. Aquesta és una branca de les matemàtiques molt recent, el seu estudi comença a principis del segle XX per Pierre Fatou i posteriorment Gaston Julia, i a partir d'ells l'estudi sobre aquest camp ha seguit fins avui en dia.

El meu treball arriba a dos resultats importants. El primer és sobre el conjunt de Julia, i diu que els punts periòdics repulsors són densos en aquest conjunt. El segon és sobre el conjunt de Mandelbrot, i diu que si considerem la família de polinomis  $P_c(z) = z^2 + c$  i definim el conjunt de Mandelbrot  $\mathcal{M}$  com els paràmetres  $c$  tal que  $P_c^n(0)$  està acotat, aleshores els valors  $c \in \mathcal{M}$  que corresponen a cicles superatractors, s'acumulen a la frontera del conjunt de Mandelbrot.

Per poder fer aquest estudi, començarem presentant l'esfera de Riemann com a varietat complexa, a la qual li associem una mètrica. Ens endinsarem en les funcions racionals en aquesta varietat, comentarem les de grau 1, les quals s'anomenen transformacions de Möbius i acabarem la primera secció veient la interessant relació entre la recta projectiva i l'esfera de Riemann, les quals són isomorfes.

A partir d'aquesta base, iniciem l'anàlisi de conceptes més propis de la dinàmica complexa. El primer a tenir en consideració són els punts fixos. Aquests són punts que quan apliquem la funció van a parar a ells mateixos. Els punts fixos són interessants, ja que, mitjançant el seu multiplicador, podem conèixer el comportament de les iteracions al seu voltant. Aquestes iteracions poden ser atretes o repel·lides pel punt fix, o no saber exactament que succeeix. Classifiquem els punts fixos segons aquesta característica com a atractors o superatractors, repulsors i neutres, respectivament. A la figura 1, podem veure unes representacions que simulen els possibles comportaments de les iteracions de la funció, en el cas de tenir un punt fix atractor, en 1a, i un punt fix repulsor, en 1b. Dels punts fixos atractors i superatractors, podem parlar de les conques d'atracció. Aquests són tots aquells punts que quan iterem la funció suficientment cops, s'aproximen molt al punt fix, és a dir, són tots els valors que els punts fixos són capaços d'atraure.

En aquest estudi, hi participen les conjugacions. Una conjugació entre dues funcions  $f$  i  $g$ , és una funció conforme  $\varphi$  que compleix l'equació  $\varphi(f) = g(\varphi)$  (vegeu capítol 3.1). Les conjugacions prenen un paper important al llarg del treball, si tenim dues funcions que estan conjugades, aleshores, l'estudi de les dues funcions és equivalent, perquè la conjugació envia els punts fixos i les conques d'atracció d'una funció, als punts fixos i conques d'atracció de l'altre, i el multiplicador no es modifica. En altres paraules, trasllada i conserva totes les propietats que ens caracteritzen els punts a estudiar d'una funció a l'altre.

Seguim profunditzant en la investigació, ens centrem ara en funcions racionals i el comportament de les seves iteracions. Aquí introduïm uns conceptes, els punts periòdics i crítics, que ens acabaran definint el teorema de densitat del conjunt de Julia i la seva demostració. Els punts periòdics són punts que en iterar la funció un nombre finit de cops,

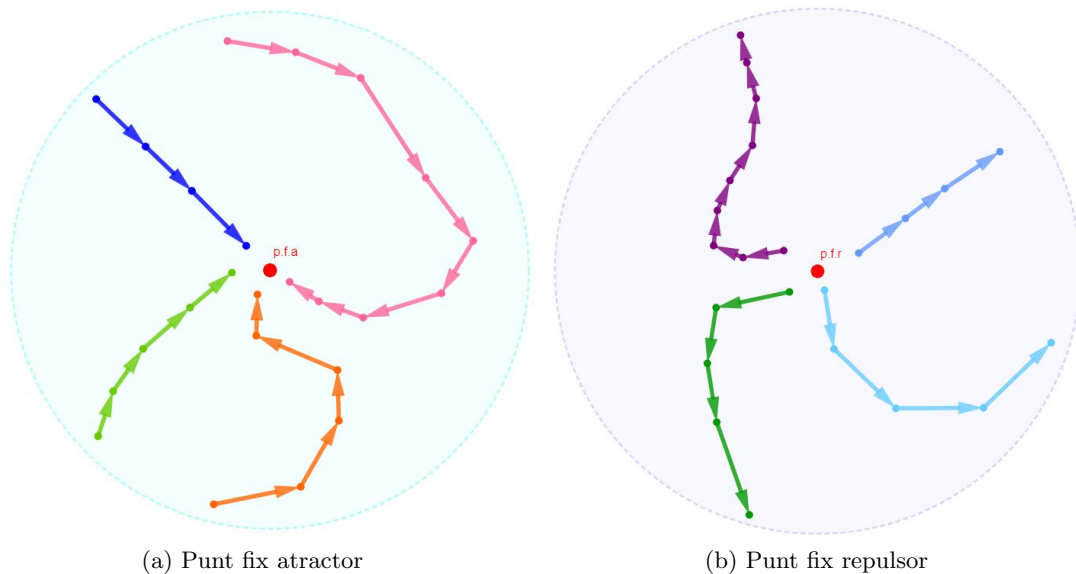


Figura 1: Representació del comportament de les iteracions d'una funció en un entorn d'un punt fix que és: atractor en 1a i repulsor en 1b.

s'arriba al punt inicial. Al conjunt de punts que s'arriba amb aquestes iteracions se'ls hi diu òrbita directa del punt inicial, però aquest concepte el podem aplicar a qualsevol punt inicial, encara que no sigui periòdic. En el cas dels punts periòdics, aquesta és finita, el nombre de cops que iterem la funció és el període de l'òrbita i al conjunt de punt se'ls hi diu cicle. Observem que els punts periòdics són punts fixos de la funció iterada tants cops com el període, per això podem classificar el comportament del cicle en funció dels seus punts i els seus multiplicadors. Per altra banda, hi ha els punts crítics, que són aquells punts on la funció racional deixa de ser localment injectiva. D'aquests punts obtenim la característica de que n'hi ha  $2d - 2$  on  $d$  és el grau de la funció racional.

Un cop introduïts aquests conceptes ens disposem a classificar els punts del pla complex segons el comportament de les seves iteracions. Aquí és on entren el conjunt de Fatou i el conjunt de Julia. Aquests són dos conjunts que ens divideixen el pla complex segons si les iteracions es comporten de manera "bona" o "caòtica". De manera més precisa, el conjunt de Fatou són els punts que tenen la propietat que, els propers a aquest, es comporten de manera similar respecte a les iteracions de la funció. En canvi, el conjunt de Julia és el conjunt de punts que, quan considerem dos punts prou propers i els iterem, el resultat d'aquestes iteracions es comporten de manera molt diferent.

Aquests dos conjunts en molts casos són complexes, per això, el treball continua investigant sobre tot un seguit de característiques del conjunt de Julia, les quals ens permeten arribar al primer resultat sobre la densitat dels punts periòdics repulsors.

**Teorema a.** *El conjunt de Julia és l'adherència dels punts periòdics repulsors.*

En altres paraules, que qualsevol trosset petit del conjunt de Julia, conté un punt periòdic repulsor. Aquest teorema ens porta a un altre teorema, del qual extraiem una característica molt interessant i curiosa: si considerem un tros petit del conjunt de Julia i l'iterem suficientment cops, aconseguim obtenir el conjunt de Julia original.

Tot seguit, refinarem part d'aquests resultats en els polinomis. Veurem per què el conjunt de Julia és la frontera de la conca d'atracció de l'infinit, que és l'única component connexa del conjunt de Fatou que no està acotada respecte de la mètrica euclidiana. També introduïrem el conjunt de Julia ple, que és la unió del conjunt de Julia i les components connexes acotades del conjunt de Fatou, que pel raonament anterior, són totes menys la de l'infinit. Aquest resultat ens proporciona una manera de dibuixar el conjunt de Julia ple que consisteix a prefixar un valor màxim i un nombre màxim d'iteracions, i per cada valor  $z$  dels complexos, calcular les seves iteracions. Si el valor de la iteració és més gran que el valor màxim, vol dir que tendirà a infinit, per tant, no pertany al conjunt de Julia ple i pintem el punt blanc. En canvi, si no supera aquest valor màxim en cap iteració, un com hem realitzat el nombre màxim d'iteracions, el pintem de negre perquè pertany al conjunt de Julia ple. Com a conclusió, el conjunt de Julia consisteix a esborrar l'interior d'aquesta imatge. Observem, que com més iteracions màximes permetem més precís serà el resultat, tot i que el temps computacional per a realitzar el càlcul també serà major.

A l'última secció del treball veurem alguns resultats interessants de la família de polinomis quadràtics o de grau 2. Començarem veient que qualsevol polinomi d'aquesta família es pot escriure mitjançant la conjugació amb una transformació de Möbius a un polinomi de la forma  $z^2 + c$ . Per tant, només s'han d'estudiar aquests polinomis. Observem per això, que aquest ens dona un pla complex pel qual a cada  $c$ , tenim una funció amb el seu respectiu conjunt de Julia i de Fatou. Llavors, intentarem estudiar alguna característica d'aquests conjunts a partir del paràmetre  $c$ . Una característica d'aquesta família de polinomis és que si les iteracions en el zero tendeixen a l'infinit, aleshores el conjunt de Julia per aquella  $c$  és totalment disconnex, en canvi, si les iteracions en el zero estan acotades, el conjunt de Julia pel paràmetre  $c$  és connex. Aquest és, però, un resultat particular de dos teoremes més generals sobre el conjunt de Julia de polinomis.

Amb aquests conceptes s'introdueix el conjunt de Mandelbrot. Aquest conjunt inclou els paràmetres  $c$  tal que les iteracions del polinomi en el zero estan acotades. De fet, demostrarem que el conjunt de Mandelbrot són les  $c$ 's on el mòdul de les iteracions en el zero són menors o iguals a dos. Aquesta característica ens dona una primera manera de representar el conjunt de Mandelbrot que consisteix en: per cada  $c$  considerada, calcular un nombre prefixat de cops les seves iteracions, si en algun moment el mòdul és major que 2 pintar el valor  $c$  de blanc, si no, pintar-lo de negre. Observem que igual que en el procés del conjunt de Julia, com més iteracions es realitzen, més precisa serà la imatge obtinguda.

Finalment, ens endinsem en els paràmetres de  $c$  pels quals la funció  $P_c(z) = z^2 + c$  té un cicle superatractor. Aquests paràmetres són de gran importància perquè obtenim l'últim resultat, que diu el següent:

**Teorema b.** *Els valors de  $c \in \mathcal{M}$  corresponents als cicles superattractors, s'acumulen en tota la frontera  $\partial\mathcal{M}$ .*

D'aquest resultat, obtenim una altra manera de dibuixar el conjunt de Mandelbrot, que és calcular els valors de  $c$  pels quals les iteracions de la funció  $P_c$  té un cicle superatractor, que veurem que es redueix en calcular els zeros dels polinomis que surten de les iteracions de  $P_c(0)$ .

## 2 Conceptes preliminars

En aquesta secció, començarem fent un breu recordatori de conceptes o enunciats necessaris per a la comprensió i realització del treball, i exposarem nous elements que seran d'utilitat. Estudiarem l'esfera de Riemann i la relació d'aquesta amb la recta projectiva, i començarem l'estudi de les funcions racionals i les transformacions de Möbius.

### 2.1 Anàlisi complexa a $\mathbb{C}$

Al llarg d'aquesta secció parlarem de l'espai dels nombres complexos  $\mathbb{C}$ , i considerarem en aquest espai la mètrica euclidiana,  $d(z, w) = |z - w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ .

**Definició 2.1.** *Sigui  $U$  un obert de  $\mathbb{C}$ . Una funció  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  és holomorfa en  $U$ , si  $\forall z_0 \in \mathbb{C}$  existeix la seva derivada  $f'(z_0)$ .*

**Definició 2.2.** *Una funció és analítica si per tot punt existeix un entorn on podem expressar la funció en forma de sèrie de potències.*

**Proposició 2.3.** *Tota funció holomorfa és analítica i viceversa.*

**Definició 2.4.** *Sigui  $U$  un obert de  $\mathbb{C}$  i  $f$  una funció holomorfa a  $U \setminus \{a\}$ , aleshores,  $a$  és una singularitat de la funció  $f$ . La singularitat  $a$  pot ser de tres tipus:*

1. *Evitable: existeix una funció  $g$  holomorfa a  $U$  tal que  $g \equiv f$  en  $U \setminus \{a\}$ .*
2. *Pol: existeix una funció  $g$  holomorfa a  $U$  tal que  $g(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$  per qualsevol  $z \in U \setminus \{a\}$ ,  $k \geq 1$  i  $g(a) \neq 0$*
3. *Essencial: quan no és cap dels dos casos anteriors.*

**Definició 2.5.** *Una representació conforme d'un obert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  és una funció  $\phi$  definida en  $\Omega$  que és holomorfa i injectiva.*

**Proposició 2.6.** *Sigui  $\phi$  una representació conforme d'un obert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Llavors:*

1.  *$\phi'$  no té cap zero. En particular  $\phi$  conserva angles.*
2.  *$\phi^{-1} : \phi(\Omega) \rightarrow \Omega$  és holomorfa i  $(\phi^{-1})'(\phi(z)) = 1/\phi'(z) \quad \forall z \in \Omega$ .*

**Definició 2.7.** *Sigui  $U \subset \mathbb{C}$  un obert.  $f$  és una funció meromorfa en  $U$ , si existeix un conjunt  $S \subset U$  discret tal que  $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  és holomorfa, i  $\forall a \in S$ ,  $a$  és una singularitat evitable o un pol de  $f$ .*

Si el lector vol demostracions d'aquests resultats i més informació la pot trobar al llibre [4], capítols II, III, V i VII.

### 2.2 Esfera de Riemann

Definim l'esfera de Riemann o pla complex ampliat com el pla complex unió un punt, anomenat punt de l'infinit. L'escriuim com  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  i una representació gràfica de l'esfera de Riemann és la figura 2.



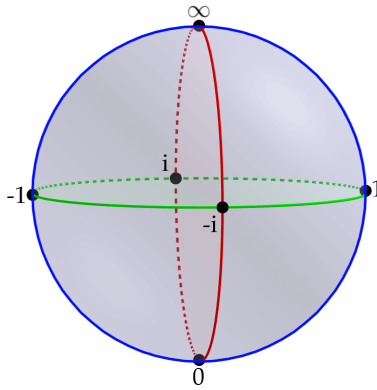


Figura 2: Representació de l'esfera de Riemann

Ara ens disposem a donar una estructura de varietat complexa a l'esfera de Riemann. Definim els dos conjunts següents:  $U_0 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : z \neq \infty\}$  i  $U_1 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : z \neq 0\}$ . Aquests conjunts són un recobriment finit per oberts de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Definim ara les cartes  $(U_0, \varphi_0)$  i  $(U_1, \varphi_1)$  on

$$\begin{array}{ccc} \varphi_0 : U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^{-1} \end{array}$$

Definim  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , aleshores  $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$ , i tenim que

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_1) & \longrightarrow & \varphi_1(U_0 \cap U_1) \\ z & \longmapsto & z^{-1} \end{array}$$

és holomorfa a tot l'obert  $\mathbb{C}^*$ , per tant, les dues cartes formen un atlas de  $\overline{\mathbb{C}}$ , i doncs, l'esfera de Riemann és una varietat complexa.

Amb aquesta estructura, veiem que  $U_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$  és isomorf a  $\mathbb{C}$  a través de  $\varphi_0$ , de manera que d'ara endavant identificaré  $U_0$  amb  $\mathbb{C}$ .

Anem ara a veure algunes definicions en aquesta estructura.

**Definició 2.8.** Sigui  $V, W \subset \overline{\mathbb{C}}$  oberts. La funció  $f : V \rightarrow W$  és holomorfa  $\iff \forall z \in V$ , existeix un entorn  $V' \subset V$  de  $z$  i un entorn  $W' \subset W$  de  $f(z)$  tal que, si  $\varphi_i$  i  $\varphi_j$  són dues cartes de  $\overline{\mathbb{C}}$  definides de  $V', W'$  a  $M, N \subset \mathbb{C}$  respectivament, és a dir, el diagrama següent està ben definit,

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f} & W' \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_j \\ M & & N \end{array}$$

aleshores la composició  $\varphi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$  és holomorfa.

$f$  serà meromorfa  $\iff$  la composició anterior amb les mateixes condicions,  $\varphi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ , és meromorfa.

**Proposició 2.9.** Sigui  $V \subset \overline{\mathbb{C}}$  i  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  una funció meromorfa, aleshores aquesta funció s'estén a  $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  que és holomorfa.

*Demostració.* Sigui  $z_0 \in V$  un pol de  $f$ , considerem un entorn d'aquest punt i li diem  $V'$ . Sabem que  $f : V' \setminus \{z_0\} \rightarrow U_1$  és holomorfa, on  $U_1$  és l'obert considerat en les cartes

inicials, i volem veure que la podem estendre a  $V'$ . Sigui  $\psi$  una carta d'un obert que contingui a  $V'$  a  $\mathbb{C}$ , tal que  $\psi(z_0) = 0$ , tenim el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f} & U_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_1 \circ f \circ \psi^{-1}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Observem que si definim  $F = f \circ \psi^{-1}$ ,  $F$  és una funció meromorfa de  $\mathbb{C}$  i sabem que el seu pol és a  $\psi(z_0) = 0$ , i per tant, podem escriure la funció com

$$F(w) = \frac{g(w)}{w^k} \quad \forall w \in \psi(V')$$

on  $g$  és holomorfa,  $k \geq 1$  i  $g(0) \neq 0$ .

Recordem que  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  està definida per  $\varphi_1(z) = z^{-1}$ . De manera que

$$\varphi_1 \circ f \circ \psi^{-1} = \frac{1}{f(\psi^{-1}(w))} = \frac{1}{F(w)} = \frac{w^k}{g(w)}$$

és una funció holomorfa. Per concloure, hem trobat una extensió de la funció  $f$  en  $\overline{\mathbb{C}}$  que és holomorfa.  $\square$

Anem ara a definir, per acabar, una mètrica a  $\overline{\mathbb{C}}$ . De fet definirem dues que veurem que estan relacionades.

Per definir una mètrica, comencem identificant el pla complex  $\mathbb{C}$  amb el pla horitzontal  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ . Sigui  $S$  l'esfera de radi 1 i centrada a l'origen, denotem el punt  $(0, 0, 1)$  per  $N$ , i definim la projecció estereogràfica de manera que del punt  $z \in \mathbb{C}$ , l'enviem al punt  $z^*$  que és el punt d'intersecció entre  $S$  i la recta que passa per  $z$  i  $N$  (que és diferent de  $N$ ). Clarament quan  $|z|$  es fa gran,  $z^*$  és més proper a  $N$ , de manera que si definim la projecció estereogràfica de  $\infty$  com el punt  $N$ , obtenim una bijecció entre  $\overline{\mathbb{C}}$  i  $S$ , i passem a representar  $S$  com a l'esfera de Riemann.

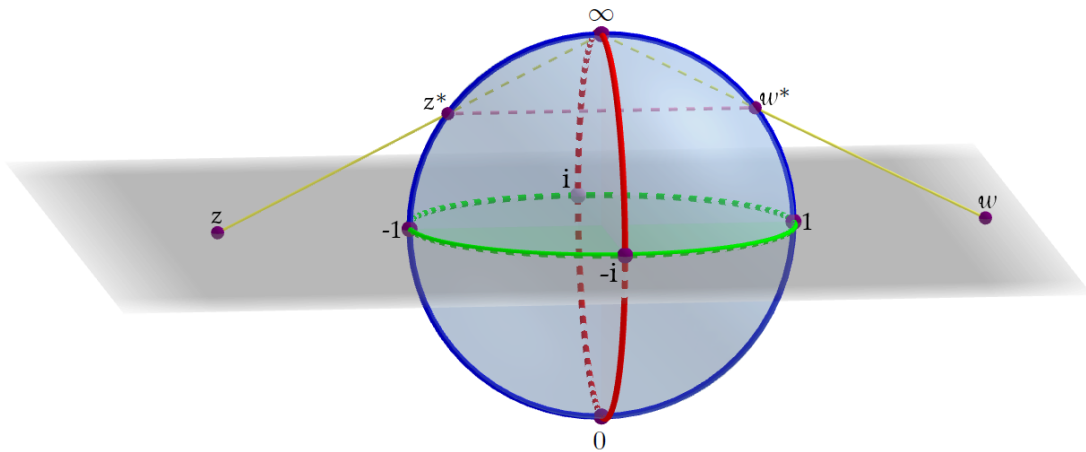


Figura 3: Representació de la projecció estereogràfica

La mètrica cordal, que la denotem per  $\sigma$ , és la mètrica que calcula les distàncies a partir de la corda que uneix els dos punts, és a dir, siguin  $z^*$  i  $w^*$  dos punts de l'esfera  $S$ , aleshores  $\sigma(z, w) = |z^* - w^*|$ .

Aquesta mètrica està ben definida, ja que prové de transferir la mètrica euclidiana a l'esfera de Riemann mitjançant la projecció estereogràfica, que és una bijecció entre aquests espais. I amb aquesta relació obtenim una fórmula per calcular la distància cordal a partir de la distància euclidiana, i té la següent forma

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{1/2} (1 + |w|^2)^{1/2}} \quad \text{si } z, w \in \mathbb{C}$$

$$\sigma(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}$$

Una observació, que surt immediata de l'equació anterior, que ens serà útil més endavant, és que la mètrica cordal i la mètrica euclidiana són equivalents sobre compactes. Sigui  $K$  un compacte de  $\mathbb{C}$ , aleshores tenim que  $\forall z, w \in K$ , existeixen constants  $C_K > 0$  i  $C'_K > 0$  tal que

$$C'_K |z - w| \leq \sigma(z, w) \leq C_K |z - w|.$$

L'altra mètrica a tenir en compte és la mètrica esfèrica. Aquesta mètrica calcula les distàncies a partir de l'arc que separa els dos punts. Si posem l'origen en el centre de l'esfera, és l'angle que separa els dos punts. L'anomenarem  $\sigma_0$ , i és equivalent a la mètrica cordal, la seva relació és

$$\frac{2}{\pi} \sigma_0(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq \sigma_0(z, w)$$

Les demostracions més detallades d'aquestes relacions i resultats, les podeu trobar al llibre [2] capítol 2.

Un cop hem introduït la varietat complexa i una mètrica en aquesta, anem a veure alguns resultats que utilitzarem més endavant.

**Definició 2.10.** *Sigui  $\mathcal{F}$  una família de funcions definides en  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ .  $\mathcal{F}$  és equicontínua a  $\Omega$  si i només si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $\forall z, w \in \Omega$  complint  $\sigma(z, w) < \delta$  aleshores  $\sigma(f(z), f(w)) < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$ .*

**Definició 2.11.**  *$\mathcal{F}$  és una família normal en  $H(\Omega)$  si  $\forall \{f_n\}_n \subset \mathcal{F}$ , té una successió parcial  $\{f_{n_k}\}_k$  que convergeix localment uniformement.*

**Teorema 2.12** (Teorema d'Arzelà-Ascoli). *Sigui  $\Omega$  un obert de  $\overline{\mathbb{C}}$  i  $\mathcal{F}$  una família de funcions holomorfes a  $\Omega$ , són equivalents:*

1.  $\mathcal{F}$  és una família normal.
2.  $\mathcal{F}$  és equicontínua a cada subconjunt compacte de  $\Omega$  respecte a la mètrica cordal.

**Teorema 2.13** (Teorema de Montel). *Sigui  $\mathcal{F}$  una família de funcions meromorfes en  $\Omega$ . Si hi ha tres valors fixats tal que tota funció  $f \in \mathcal{F}$  evita, aleshores  $\mathcal{F}$  és una família normal.*

Les demostracions d'aquests dos últims resultats es poden trobar al capítol 1.3 del llibre [1] i a la pàgina 222 del llibre [7].

## 2.3 Funcions racionals a $\overline{\mathbb{C}}$

**Definició 2.14.** Una funció racional és de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

on  $P$  i  $Q$  són polinomis a coeficients complexos que no són zero simultàniament.

Si  $P$  és el polinomi zero, aleshores  $R$  és el polinomi constant igual a zero, i si  $Q$  és el polinomi zero, aleshores  $R$  és el polinomi constant igual a  $\infty$ .

Observem que en ser el quocient de dos polinomis, les funcions racionals són meromorfees en  $\mathbb{C}$ , i, pels resultats obtinguts anteriorment, s'estenen a funcions holomorfees en  $\overline{\mathbb{C}}$ . De manera que totes aquestes funcions estan ben definides per tot  $\overline{\mathbb{C}}$ . Tanmateix, tota funció racional és analítica en tot  $\overline{\mathbb{C}}$  i són les úniques amb aquesta propietat.

Suposem ara que ni  $P$  ni  $Q$  són els polinomis constants igual a zero. Aleshores,  $R$  no està definit en els zeros comuns de  $P$  i  $Q$ , però per solucionar-ho, podem cancel·lar els factors lineals corresponents i assumir que  $P$  i  $Q$  són coprimers (és a dir, que no tenen zeros comuns). A partir d'ara assumirem que  $P$  i  $Q$  són coprimers, de manera que  $P$  i  $Q$  estan inequívocament determinats llevat d'un múltiple per  $R$ , i el grau  $gr(R)$  es defineix com  $gr(R) = \max\{gr(P), gr(Q)\}$ , on  $gr(S)$  és el grau habitual del polinomi  $S$ .

**Proposició 2.15.** Si  $R$  és una funció racional de grau  $d > 0$ , aleshores per qualsevol  $w \in \overline{\mathbb{C}}$ , l'equació  $f(z) = w$  té exactament  $d$  solucions a  $\overline{\mathbb{C}}$  respecte de  $z$  (contant multiplicitat) ( $R$  és un mapa  $d - a - 1$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  en ell mateix).

*Demostració.* Suposem que  $R$  és una funció racional no constant de la forma  $R(z) = P(z)/Q(z)$ , amb  $P$  i  $Q$  coprimers i de grau  $n$  i  $m$  respectivament.

Primer de tot, anem a veure la següent propietat:  $R$  té  $gr(R)$  zeros i  $gr(R)$  pols a  $\overline{\mathbb{C}}$ . Si  $n = m$ , aleshores tots els zeros i pols de  $R$  pertanyen a  $\mathbb{C}$ , és més, hi ha  $n$  de cadascun (els zeros de  $P$  i els de  $Q$ ), és a dir,  $R$  té el mateix nombre de pols que de zeros i és el grau de  $R$  que val  $d$ .

Si  $n \leq m$ , aleshores  $R$  té  $n$  zeros i  $m$  pols a  $\mathbb{C}$  i  $R(\infty) = \infty$ . El nombre de pols a  $\infty$  és, per definició, el nombre de zeros de la funció  $z \rightarrow 1/R(1/z)$  en el zero i si fem el càlcul veiem que és  $n - m$  (tindrem una fracció on el numerador ( $Q$  de grau  $m$ ) i el denominador ( $P$  de grau  $n$ ) tendiran a infinit quan avaluem en el zero. Apliquem doncs la regla de l'Hôpital recursivament fins que el límit dona zero. Al pas on parem el càlcul, el grau del denominador és  $n - m$ , que és el nombre de zeros). De manera que al final tenim  $n$  zeros i  $m + n - m$  pols, és a dir, és mateix nombre de pols que de zeros, i és igual a  $d = gr(R)$ . Si  $n \geq m$ , aleshores  $R$  té  $n$  zeros i  $m$  pols a  $\mathbb{C}$  i  $R(\infty) = 0$ . El nombre de zeros a  $\infty$  és, per definició el nombre de pols de la funció  $z \rightarrow 1/R(1/z)$  en el zero i si fem el càlcul utilitzant un raonament semblant al de l'apartat anterior, obtenim que és  $m - n$ . El nombre de zeros és, doncs,  $n + m - n$  i el de pols és  $m$ , és a dir,  $R$  té el mateix nombre de pols que de zeros, i és el seu grau.

En qualsevol cas,  $R$  té  $d$  zeros i  $d$  pols a  $\overline{\mathbb{C}}$ , com volíem veure.

Per qualsevol  $w \in \overline{\mathbb{C}}$ , el nombre de zeros de  $P(z) = w$  és el mateix que el nombre de zeros de  $P(z) - w$ , on tenim la següent equació:

$$R(z) - w = \frac{P(z) - Q(z)w}{Q(z)}$$

Com  $P$  i  $Q$  són coprimers,  $P$  i  $P - wQ$  també ho seran, per tant,  $R(z)$  i  $R(z) - w$  tindran el mateix grau. D'aquest fet deduïm que l'equació  $R(z) = w$  té exactament  $d$  solucions respecte de  $z$  independentment del  $w \in \overline{\mathbb{C}}$  i consegüentment hem obtingut el resultat que buscàvem.  $\square$

## 2.4 Transformacions de Möbius

Una *transformació de Möbius* és una funció racional de la forma

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.1)$$

on  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  i compleixen que  $ad - bc \neq 0$ .

Aquestes són les funcions racionals de primer grau i formen un grup de  $\overline{\mathbb{C}}$  en si mateix amb la composició. Tanmateix, són funcions conformes. Considerant que les circumferències de  $\overline{\mathbb{C}}$  són tant les circumferències com les rectes de  $\mathbb{C}$ , tenim que les transformacions de Möbius tenen la característica que transformen circumferències de  $\overline{\mathbb{C}}$  en circumferències de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

## 2.5 La recta projectiva i $\overline{\mathbb{C}}$

Un resultat interessant sobre la varietat  $\overline{\mathbb{C}}$  és que, si  $\mathbb{P}^1$  és la recta projectiva complexa, aleshores,  $\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$  com a varietat complexa de dimensió 1. Anem a veure-ho.

Observem primer que  $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim$  on  $\sim$  és la relació d'equivalència complint que  $(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \exists \lambda \neq 0$  tal que  $\underline{z} = \lambda \underline{w}$  on  $\underline{z} = (z_0, z_1)$ . Als elements de  $\mathbb{P}^1$  el representem com la classe d'equivalència,  $(z_0 : z_1) = \overline{(z_0, z_1)}$ . En definitiva, l'espai  $\mathbb{P}^1$  són rectes a  $\mathbb{C}^2$  que passen per l'origen (Figura 4).

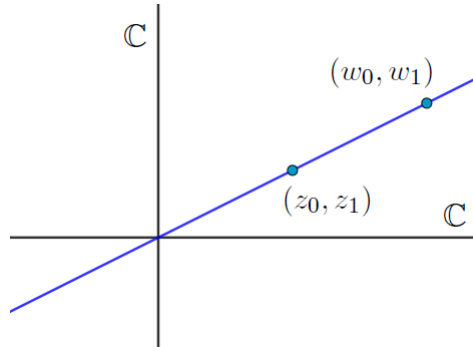


Figura 4: Representació de  $\mathbb{P}^1$  i la classe d'equivalència entre punts.

Considerem ara a  $\mathbb{C}$  dues cartes,  $(\mathbb{C}, \phi)$  i  $(\mathbb{C}, \psi)$  on les funcions estan definides per

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 & \psi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ z &\longmapsto (1 : z) & w &\longmapsto (w : 1) \end{aligned}$$

Com la intersecció dels dos espais on estan definides les funcions és el total, sigui  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , la funció  $\psi \circ \phi^{-1}$  és expressada per

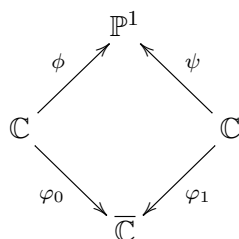
$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathbb{C}^*) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) / \sim &\longrightarrow \psi(\mathbb{C}^*) = (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) / \sim \\ z = (z_0 : z_1) &\longmapsto z^{-1} = (z_1 : z_0) \end{aligned}$$

ja que

$$z = (z_0 : z_1) = \left(1 : \frac{z_1}{z_0}\right) \xrightarrow{\phi^{-1}} \frac{z_1}{z_0} \xrightarrow{\psi} \left(\frac{z_1}{z_0} : 1\right) = (z_1 : z_0) = z^{-1}$$

Tanmateix, aquesta és una funció holomorfa i està ben definida gràcies al fet que  $z_0 = 0$  no pertany al domini. Per tant, aquestes dues cartes formen un atlas de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Agrupant tota la informació que tenim, la varietat complexa  $\overline{\mathbb{C}}$  l'hem definit a partir de dues cartes les quals es relacionaven entre elles amb la funció inversa, i la varietat complexa  $\mathbb{P}^1$  també ha estat definida a partir de dues cartes les quals es relacionen entre elles amb la inversa, tenim el diagrama de funcions



Com les dues varietats complexes estan definides de la mateixa manera, són isomorfes, i la relació entre  $\overline{\mathbb{C}}$  i  $\mathbb{P}^1$  és expressada pel següent isomorfisme:

$$\begin{aligned}
 \varphi : \overline{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\
 z &\longmapsto (1 : z) \\
 \infty &\longmapsto (0 : 1)
 \end{aligned}$$

Observem que certament, veritablement és un isomorfisme doncs, està ben definida, és contínua, exhaustiva, injectiva i té inversa contínua.

En aquesta nova estructura, tenim alguns resultats interessants.

**Definició 2.16.** *Si  $S$  un polinomi complex de grau  $d$ , aleshores definim el polinomi homogeneïtzat de grau  $d$  de  $S$  com  $S_d^h \in \mathbb{C}[z_0, z_1]_d$  tal que  $S_d^h = z_0^d S(z_1/z_0)$ .*

**Exemple 2.17.** Si tenim  $S(z) = 2 + z^2$ , el seu polinomi homogeneïtzat de grau 2 seria  $S_2^h(z) = 2z_0^2 + z_1^2$ .

Donats  $P, Q \in \mathbb{C}[z_0, z_1]_d$  dos polinomis coprimers homogeneïtzats de grau  $d$ , llavors si definim

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2 \\
 (z_0 : z_1) & \longmapsto & (P(z_0, z_1), Q(z_0, z_1)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}^1 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

tenim que, si  $\underline{z} = \lambda \underline{w}$  amb  $\lambda \neq 0$ , aleshores es compleix que

$$\begin{aligned}
 \Phi(\underline{z}) &= (P(\underline{z}), Q(\underline{z})) = (P(\lambda \underline{w}), Q(\lambda \underline{w})) \\
 &= \left(\lambda^d P(\underline{w}), \lambda^d Q(\underline{w})\right) \\
 &= \lambda^d \Phi(\underline{w})
 \end{aligned}$$

**Proposició 2.18.** *Sigui  $R(z) = P(z)/Q(z)$  una funció racional de  $\overline{\mathbb{C}}$ , aleshores aquesta funció racional a  $\mathbb{P}^1$  és  $(Q^h(z_0 : z_1) : P^h(z_0 : z_1))$*

*Demostració.* Considerem ara el següent diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \\
 z & \longmapsto & R(z) \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^1 \\
 (1 : z) & \longmapsto & (Q(1 : z) : P(1 : z)) = \left(1 : \frac{P}{Q}(1 : z)\right)
 \end{array}$$

Definim la funció  $\tilde{R}(z_0 : z_1) = R(z_1/z_0)$ , aquesta és una funció racional homogeneïtzada de grau 0 i si  $\underline{z} = \lambda \underline{w}$  amb  $\lambda \neq 0$  aleshores

$$\tilde{R}(\underline{w}) = R\left(\frac{w_1}{w_0}\right) = R\left(\frac{z_1}{z_0}\right) = \tilde{R}(\underline{z})$$

obtenint així la següent relació entre les varietats:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \overline{\mathbb{C}} \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\tilde{R}} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

Aconseguint el resultat que buscàvem. □

**Corol·lari 2.19.** *Les transformacions de Möbius a  $\overline{\mathbb{C}}$  són equivalents a funcions lineals a  $\mathbb{P}^1$ .*

### 3 Punts fixos i conjugacions

L'objectiu principal d'aquesta secció és fer un primer estudi sobre punts fixos de funcions i introduir la noció de conjugació, la qual ens serà molt útil més endavant.

#### 3.1 Conjugacions

**Definició 3.1.** *Sigui  $f$  una funció, definim les iteracions d'aquesta funció, com la composició iterada amb si mateixa, i la denotem per  $f^0 = I$ ,  $f^1 = f$  i  $f^n = f^{n-1} \circ f$ .*

**Definició 3.2.** *Siguin  $U, V \subset \overline{\mathbb{C}}$  dos oberts. Diem que una funció  $f : U \rightarrow U$  està conjugada a una funció  $g : V \rightarrow V$ , si existeix una funció conforme  $\varphi : U \rightarrow V$  tal que  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , és a dir,*

$$\varphi(f(z)) = g(\varphi(z)) \quad (3.1)$$

Tenim doncs el següent diagrama de funcions:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

D'aquesta definició obtenim que  $f^n$  i  $g^n$  també estan conjugats,  $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$ , i les inverses, en el cas que existeixin, també,  $g^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ . Vegem-ho:

Composició:

$$g^2 = g \circ g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f^2 \circ \varphi^{-1}$$

$$\text{i per inducció } g^n = g^{n-1} \circ g = \varphi \circ f^{n-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$$

Inversa:

$$g^{-1} = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

#### 3.2 Punts fixos i classificació

**Definició 3.3.** *Sigui  $f$  una funció holomorfa a  $\overline{\mathbb{C}}$ , aleshores, diem que  $z_0$  és un punt fix de la funció si  $f(z_0) = z_0$ .*

**Proposició 3.4.** *Si  $\varphi$  és una conjugació de  $f$  i  $g$ , aleshores,  $\varphi$  envia punts fixos de  $f$  a punts fixos de  $g$ . En particular, si  $z_0$  és un punt fix de  $f$ , aleshores  $\varphi(z_0)$  és un punt fix de  $g$ .*

*Demostració.*

$$f(z_0) = z_0 \iff g(\varphi(z_0)) = \varphi(f(z_0)) \iff g(\varphi(z_0)) = \varphi(z_0).$$

□

**Proposició 3.5.** *Considerem  $U, V, W \subset \overline{\mathbb{C}}$  i  $f : U \rightarrow U$ ,  $g : V \rightarrow V$  i  $h : W \rightarrow W$  funcions. Sigui  $z_0 \in U$  un punt fix de  $f$ ,  $\varphi$  una conjugació de  $f$  i  $g$  i  $\psi$  una conjugació de  $f$  i  $h$ , complint  $\varphi(z_0) = y_0 \neq \infty$  i  $\psi(z_0) = t_0 \neq \infty$ , aleshores  $g'(y_0) = h'(t_0)$ .*



*Demostració.* Tenim els següents diagrames de funcions

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{g} & V \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\
 U & \xrightarrow{f} & U \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 W & \xrightarrow{h} & W
 \end{array} \tag{3.2}$$

on  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  i  $h = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$  d'on,  $f = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$  i tenim doncs que

$$\begin{aligned}
 g &= \varphi \circ \psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \varphi^{-1} \implies g'(y) = \varphi'(\psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \varphi^{-1}(y)) \times \\
 &\times \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(h \circ \psi \circ \varphi^{-1}(y)))} \times h'(\psi \circ \varphi^{-1}(y)) \times \psi'(\varphi^{-1}(y)) \times \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}
 \end{aligned}$$

Recordem ara que  $z_0$  és un punt fix de  $f$  i doncs,  $\varphi(z_0) = y_0$  és un punt fix de  $g$  i  $\psi(z_0) = t_0$  és un punt fix de  $h$ , d'on si substituïm  $y$  per  $y_0$  a la derivada, obtenim que

$$\begin{aligned}
 g'(y_0) &= \varphi'(\psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ \varphi^{-1}(y_0)) \times \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(h \circ \psi \circ \varphi^{-1}(y_0)))} \times h'(\psi \circ \varphi^{-1}(y_0)) \times \\
 &\times \psi'(\varphi^{-1}(y_0)) \times \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y_0))} = \\
 &= \varphi'(\psi^{-1} \circ h \circ \psi(z_0)) \times \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(h \circ \psi(z_0)))} \times h'(\psi(z_0)) \times \psi'(z_0) \times \frac{1}{\varphi'(z_0)} \\
 &= \varphi'(\psi^{-1} \circ h(t_0)) \times \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(h(t_0)))} \times h'(t_0) \times \psi'(z_0) \times \frac{1}{\varphi'(z_0)} \\
 &= \varphi'(\psi^{-1}(t_0)) \times \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t_0))} \times h'(t_0) \times \psi'(z_0) \times \frac{1}{\varphi'(z_0)} \\
 &= \varphi'(z_0) \times \frac{1}{\psi'(z_0)} \times h'(t_0) \times \psi'(z_0) \times \frac{1}{\varphi'(z_0)} = h'(t_0)
 \end{aligned}$$

Com volíem provar. □

**Definició 3.6.** Sigui  $f$  una funció holomorfa a  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $z_0$  un punt fix de la funció  $f$  i  $\varphi$  una conjugació de  $f$  a una funció  $g$  tal que  $\varphi(z_0) = y_0 \neq \infty$ . Definim el multiplicador de  $z_0$ , el denotarem per  $\lambda$ , com la derivada de  $g$  avaluada a  $y_0$ , és a dir,  $\lambda = g'(y_0)$ .

Sigui  $f$  una funció holomorfa a  $\overline{\mathbb{C}}$  i  $z_0$  un punt fix, si  $z_0 \neq \infty$  escollirem el valor del multiplicador com  $\lambda = f'(z_0)$  (és a dir, escollim la conjugació identitat), i si  $z_0 = \infty$  el valor del multiplicador serà  $\lambda = g'(0)$  on  $g(y) = 1/f(1/y)$  (escollim la conjugació inversa, i la imatge  $z_0$  és el zero). Classifiquem el punt fix  $z_0$  segons el seu multiplicador com a:

*Atractor* :  $|\lambda| < 1$  (si  $\lambda = 0$  aleshores és un punt fix *superatractor*)

*Repulsor* :  $|\lambda| > 1$

*Racional neutre*:  $|\lambda| = 1$  i  $\lambda^n = 1$  per algun  $n \in \mathbb{N}$

*Irracional neutre*:  $|\lambda| = 1$  i per qualsevol  $n \in \mathbb{N}$   $\lambda^n \neq 1$

**Proposició 3.7.** Sigui  $z_0$  un punt fix atractor de  $f$  i  $\rho$  tal que  $|\lambda| < \rho < 1$ , aleshores existeix un entorn d'aquest punt fix tal que les iteracions  $f^n$  convergeixen uniformement respecte a la mètrica euclidiana a la funció constant igual a  $z_0$ .

*Demostració.* Sigui  $z_0$  un punt fix atractiu de  $f$ , aleshores en un entorn d'aquest punt i un  $|\lambda| < \rho < 1$  tenim la següent aproximació,  $|f(z) - z_0| \leq \rho|z - z_0|$ . A més a més, com  $z_0$  és un punt fix en aquest entorn, per inducció, obtenim que es compleixen les següents desigualtats:

$$\begin{aligned} |f^2(z) - z_0| &= |(f(f(z))) - z_0| \leq \rho|f(z) - z_0| \leq \rho^2|z - z_0| \\ &\vdots \\ |f^n(z) - z_0| &\leq |f(f^{n-1}(z)) - z_0| \leq \rho|f^{n-1}(z) - z_0| \leq \rho^n|z - z_0| \end{aligned}$$

és a dir,  $|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n|z - z_0| \forall n \geq 1$ . Això significa que les iteracions de  $f^n$  convergeixen uniformement a la funció constant a  $z_0$  en un entorn d'aquest punt, com volíem veure.  $\square$

Definim la *conca d'atracció* de  $z_0$ , i la denotem com a  $A(z_0)$ , com tots els punts  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $f^n(z)$  està definida per tot  $n \geq 1$  i  $f^n(z) \rightarrow z_0$ . Per això, si  $\mathbb{D}(a, r)$  denota el disc de centre  $a$  i radi  $r$ , per a un  $\epsilon > 0$  petit,  $A(z_0)$  és la unió de les antiimatges iterades (backward iterates)  $f^{-n}(\mathbb{D}(z_0, \epsilon)) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \in \mathbb{D}(z_0, \epsilon)\}$  i, consegüentment  $A(z_0)$  és un obert. La component connexa de  $A(z_0)$  que conté a  $z_0$  s'anomena la *conca d'atracció immediata* de  $z_0$  i el denotem per  $A^*(z_0)$ .

A més a més, per les definicions anteriors, observem que  $\varphi$  envia les conques d'atracció dels punts fixos de  $f$  a les conques d'atracció dels punts fixos de  $g$ . Això ens permet conèixer característiques, de funcions complexes a analitzar, mitjançant l'estudi de funcions més simples i una conjugació entre aquestes.

Ara el que ens interessa és estudiar quan aquestes conjugacions existeixen i quina forma tenen.

Suposem que ens donen una funció  $f$  de la forma

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + a(z - z_0)^p + \dots \quad (3.3)$$

amb  $p \geq 2$  i  $z_0 \in \mathbb{C}$ . En un entorn de  $z_0$  tenim que la funció és semblant a  $g(\zeta) = \lambda\zeta$  si  $\lambda \neq 0$  i a  $g(\zeta) = a\zeta^p$  si  $\lambda = 0$ , on  $\zeta = z - z_0$ . Aleshores, sempre existeix una conjugació  $\varphi$  de  $f$  en  $g$  única llevat d'un múltiple. Més endavant estudiarem els casos que ens interessin que són en els punts fixos atractius, superatractors i repulsors. Els punts fixos neutres no els estudiarem en profunditat i la unicitat en el cas que  $z_0$  sigui una arrel de la unitat tampoc, però es pot trobar la informació corresponent al llibre [1] capítol 2.

Ara demostrarem la unicitat de la conjugació que fixa el valor 0 en el cas dels punts fixos atractius i els punts fixos repulsors. L'existència d'aquesta conjugació, la veurem una mica més endavant i la unicitat de la conjugació en el cas dels punts fixos superatractors també.

**Proposició 3.8.** *Si tenim que  $\lambda \neq 0$  i  $\lambda$  no és una arrel de la unitat, aleshores la conjugació  $\varphi$  que fixa el valor 0 és única llevat d'un múltiple diferent de zero.*

*Demostració.* Per veure això, només cal veure que si tenim la funció  $f(z) = \lambda z$ , aleshores les úniques conjugacions de  $f$  amb ella mateixa són una constant per  $z$ .

Suposem que  $\varphi(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$  és la conjugació de  $f$  en si mateixa. Aleshores compleix (3.1), és a dir,  $\varphi(\lambda z) = \lambda\varphi(z)$ . On tenim que

$$a_1\lambda z + a_2\lambda^2 z^2 + \dots = a_1\lambda z + a_2\lambda z^2 + \dots$$

Igualant coeficients,  $a_1\lambda = a_1\lambda$ ,  $a_2\lambda^2 = a_2\lambda$ ,  $\dots$ . És a dir,  $a_n\lambda^n = a_n\lambda \quad \forall n \geq 1$  d'on,  $a_n = 0 \quad \forall n \geq 2$  i per tant  $\varphi(z) = a_1z$  com volíem veure.  $\square$

Ara presentarem una característica rellevant i que ens serà útil al llarg del treball sobre els polinomis i els punts fixos.

**Proposició 3.9.** *L'infinit és un punt fix superatractor de tot polinomi no constant de grau major o igual a 2.*

*Demostració.* Sigui  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  amb  $n \geq 2$  i  $a_n \neq 0$ . Aleshores  $l'\infty$  és un punt fix, ja que  $P(\infty) = \infty$ . Calculem el seu multiplicador. Aquest és  $g'(0)$  on, si  $\psi = 1/z$ ,  $g$  està definida per

$$\begin{aligned} g = \psi \circ P \circ \psi^{-1} &\implies g(y) = \frac{1}{a_0 + a_1\frac{1}{y}} + \dots + a_n\frac{1}{y^n} = \frac{y^n}{a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n} \implies \\ g'(y) &= \frac{ny^{n-1}(a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n) - y^n(na_0y^{n-1} + (n-1)a_1y^{n-2} + \dots + a_{n-1})}{(a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n)^2} \\ &\implies g'(0) = 0 \end{aligned}$$

Per tant el multiplicador és 0 i  $l'\infty$  és un punt fix superatractor.  $\square$

**Exemple 3.10.** Analitzarem el polinomi  $P(z) = z^2 - 2$ . Pel resultat anterior tenim que el polinomi té un punt fix superatractor a  $\infty$ .

Considerem ara la funció conforme  $h(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta}$  que va de  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0,1)}$  a  $\mathbb{C} \setminus [-2,2]$ . Aleshores tenim que

$$P(h(\zeta)) = h(\zeta)^2 - 2 = \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} + 2 - 2 = \zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} = h(\zeta^2)$$

Per tant,  $h(\zeta)$  conjuga  $P(z)$  amb  $g(\zeta) = \zeta^2$ . Ara, la dinàmica de  $P(z)$  a  $\mathbb{C} \setminus [-2,2]$  és la mateixa que la de  $g(\zeta)$  a  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0,1)}$ , i per tant, tenim prou en estudiar el comportament de  $g(\zeta)$  que és una funció més senzilla.

Observem que  $\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0,1)}$ ,  $g^n(\zeta) \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ , aleshores,  $P^n(z) \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ .

A més a més, tenim que  $[-2,2]$  és invariant sota  $P$ , és a dir,  $\forall z \in [-2,2]$ ,  $P(z) \in [-2,2]$ , ja que  $\forall z \in [-2,2] \quad |z^2 - 2| \leq 2$ , i en la funció  $g$  observem que el cercle unitat també és invariant. Com a conseqüència, la conca d'atracció de  $l'\infty$  en la funció  $g$  és  $A(\infty) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}(0,1)}$ , aleshores, la conca d'atracció de  $l'\infty$  del polinomi  $P$  és  $A(\infty) = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-2,2]$ .

### 3.3 Punts fixos atractors

En aquesta secció no tractarem els punts fixos superatractors, és a dir que considerarem que  $0 < |\lambda| < 1$ .

**Teorema 3.11.** *Suposem que  $f$  té un punt fix atractor  $z_0$ , amb multiplicador  $\lambda$  complint que  $0 < |\lambda| < 1$ . Aleshores, existeix una funció conforme  $\varphi(z) = \zeta$  que va d'un entorn de  $z_0$  a un entorn de 0, que conjuga  $f(z)$  amb la funció lineal  $g(\zeta) = \lambda\zeta$ . Aquesta conjugació és única llevat d'un múltiple diferent de zero.*

*Demostració.* Per facilitar el càlcul suposem que  $z_0 = 0$  (fent una conjugació amb una transformació de Möbius, obtenim el resultat si  $z_0 \neq 0$ ).

Observem que podem escriure la funció com  $f(z) = \lambda z + az^2 + \dots$ . Definim  $\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z + \lambda^{-n} az^2 + \dots$ . Aleshores  $\varphi_n$  satisfà

$$\varphi_n \circ f = \lambda^{-n} f^n \circ f = \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi_{n+1}$$

D'on, si  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , aleshores  $\varphi \circ f = \lambda \varphi$ , per tant  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = \lambda z$ , i doncs,  $\varphi$  és una conjugació.

Per veure la convergència observem que per  $\delta > 0$  petit tenim que si  $|z| < \delta$  podem escriure  $f$  com

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \lambda z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n = \lambda z + z^2 \left( \sum_{n \geq 2} a_n z^{n-2} \right)$$

Si fitem el sumatori per una constant  $C$ , aleshores tenim que

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$$

D'on  $|f(z)| - |\lambda z| \leq C|z|^2$ . On tenim que  $|f(z)| \leq |\lambda||z| + C|z|^2 \leq (|\lambda| + C|z|)|z| \leq (|\lambda| + C\delta)|z|$  amb  $|z| \leq \delta$ . On, per inducció amb  $|\lambda| + C\delta < 1$  tenim que

$$|f^2(z)| = |(f(f(z)))| \leq (|\lambda| + C\delta)|f(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^2|z|$$

⋮

$$|f^n(z)| \leq |f(f^{n-1}(z))| \leq (|\lambda| + C\delta)|f^{n-1}(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n|z|, \quad |z| \leq \delta$$

Triem ara  $\delta > 0$  tal que  $\rho = \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} < 1$ , llavors,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| &= |\lambda^{-n-1} f^{n+1}(z) - \lambda^{-n} f^n(z)| = \left| \frac{f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| = \\ &= \left| \frac{f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \leq \frac{\rho^n C|z|^2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

per  $|z| \leq \delta$ . Ara tenim que  $\frac{\rho^n C|z|^2}{|\lambda|} \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$ , per tant  $\varphi_n(z)$  convergeix uniformement per  $|z| \leq \delta$  i la conjugació existeix.

La unicitat d'aquesta conjugació ja l'hem vista en la proposició 3.8. De manera que ens queda demostrat el resultat.  $\square$

De l'equació (3.1) i de la conjugació del teorema tenim que

$$\varphi(f(z)) = \lambda \varphi(z) \tag{3.4}$$

i d'aquesta fórmula podem estendre  $\varphi$  de manera analítica a tota la conca d'atracció de  $A(z_0)$  mitjançant la fórmula

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(f^n(z))}{\lambda^n}$$

on  $n$  es tria prou gran per tal que  $f^n(z)$  pertanyi en un entorn del punt  $z_0$ . Observem que l'extensió de  $\varphi$  està ben definida i també satisfà l'equació (3.4). A més,  $\varphi(z) = 0$  si i només si  $f^n(z) = z_0$  per algun  $n \geq 1$ .

### 3.4 Punts fixos repulsors

L'existència d'una conjugació per als punts fixos repulsors surt directament del cas dels punts fixos atractors.

Estàvem suposant que  $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \dots$  amb  $|\lambda| > 1$  i  $z_0 \neq \infty$ . Aleshores

$$f^{-1}(z) = z_0 + \frac{z - z_0}{\lambda} + \dots$$

té un punt fix atractor en  $z_0$ . De manera que qualsevol funció que conjugui  $f^{-1}(z)$  amb  $\zeta/\lambda$ , també conjuguarà  $f(z)$  amb  $\lambda\zeta$ . L'existència d'aquesta conjugació sabem que és certa i és única llevat d'un múltiple diferent de zero.

### 3.5 Punts fixos superatractors

**Teorema 3.12.** *Suposem que  $f$  té un punt fix superatractor. Aleshores, existeix una funció conforme  $\zeta = \varphi(z)$  d'un entorn de  $z_0$  a un entorn de 0 tal que conjugua  $f(z)$  amb  $g(z) = \zeta^p$ . Aquesta conjugació és única llevat d'un múltiple que és arrel  $(p-1)$ -èsima de la unitat.*

*Demostració.* Podem suposar que  $z_0 = 0$  (fent una conjugació amb una transformació de Möbius, obtenim el resultat si  $z_0 \neq 0$ ).

Podem escriure  $f$  de la forma

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \dots, \quad a_p \neq 0, p \geq 2.$$

Aleshores, sigui  $\delta > 0$  petit, tenim que si  $|z| < \delta$  existeix  $C > 1$  tal que  $|f(z)| \leq C|z|^p$  (pel mateix desenvolupament que hem fet en la demostració del teorema 3.11). Per inducció, si escrivim  $f^{n+1} = f^n \circ f$  i utilitzant que  $p \geq 2$  tenim que

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq C|f(z)|^p \leq C \cdot C^p |z|^{p^2} \leq (C|z|)^{p^2}$$

Per inducció tenim que

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}, \quad |z| \leq \delta$$

i per tant tenim que triant  $\delta$  de manera que si  $|z| < 1/C$ ,  $f^n(z) \rightarrow 0$  de manera súper-exponencial.

Si fem un canvi de variable posant  $w = \alpha z$  on  $\alpha^{p-1} = 1/a_p$  aleshores hem conjugat  $f$  a  $g(w) = w^p + \dots$ . Passem a comprovar-ho. Considerem la funció  $\psi(z) = \alpha z$ , observem que  $\psi^{-1}(w) = w/\alpha$  aleshores tenim que

$$\begin{aligned} g(w) &= \psi \circ f \circ \psi^{-1}(w) = \psi \circ f\left(\frac{w}{\alpha}\right) = \psi\left(a_p \frac{w^p}{\alpha^p} + \dots\right) = \alpha\left(a_p \frac{w^p}{\alpha^p} \dots\right) = \\ &= a_p \frac{w^p}{\alpha^{p-1}} + \dots = a_p \frac{w^p}{a_p} + \dots = w^p + \dots \end{aligned}$$

Per tant podem suposar que  $a_p = 1$  i la funció ens queda de la forma  $f(z) = z^p + \dots$ . Volem trobar una conjugació  $\varphi(z) = z + \dots$  tal que  $\varphi(f(z)) = \varphi(z)^p$ , que és equivalent a  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = z^p$ . Definim

$$\varphi_n(z) = f^n(z)^{p^{-n}} = (z^p + \dots)^{p^{-n}} = z(1 + \dots)^{p^{-n}}$$

el qual està ben definit en un entorn del 0. Aleshores els  $\varphi_n$ 's satisfan

$$\varphi_{n-1} \circ f = f^{n-1}(f(z))^{p^{-n+1}} = (f^{n-1} \circ f)^{p^{-n+1}} = (f^n)^{p^{-n+1}} = (f^n)^{p^{-n} \cdot p} = \varphi_n^p$$

D'on, si  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  aleshores  $\varphi$  satisfà  $\varphi \circ f = \varphi^p$  i per tant ja tindriem la conjugació que buscàvem.

Anem a veure doncs, que  $\{\varphi_n\}_n$  convergeix. Observem que

$$\varphi_{n+1}(z) = f^{n+1}(z)^{p^{-n-1}} = \left(f^{n+1}(z)^{p^{-1}}\right)^{p^{-n}} = \left(f(f^n(z))^{p^{-1}}\right)^{p^{-n}} = (\varphi_1 \circ f^n(z))^{p^{-n}}$$

d'on

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \left(\frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n}\right)^{p^{-n}} = (1 + \mathcal{O}(|f^n|))^{p^{-n}} = 1 + \mathcal{O}(p^{-n})\mathcal{O}(|z|^{p^n} C^{p^n}) = 1 + \mathcal{O}(p^{-n})$$

si  $|z| \leq 1/C$ . Aleshores el producte

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

convergeix uniformement per  $|z| < \alpha \leq 1/C$ , i això implica que  $\{\varphi_n\}_n$  convergeix. Per tant,  $\varphi$  existeix.  $\square$

Per veure que aquesta conjugació és única, tenim el següent resultat.

**Proposició 3.13.** *Si  $\lambda = 0$ , el cas dels punts fixos superattractors, aleshores la conjugació  $\varphi$  que fixa el 0 és única llevat d'un múltiple que és una arrel  $(p-1)$ -èsima de la unitat.*

*Demostració.* Igual que abans, tenim prou en veure que les conjugacions de  $f(z) = z^p$  amb ell mateix són una arrel  $(p-1)$ -èsima de la unitat per  $z$

Suposem que  $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  és aquesta conjugació. Complirà (3.1), és a dir,  $\varphi(z^p) = \varphi(z)^p$ . Anem a comparar les sèries de potències. Sigui  $i \geq 2$  el mínim  $i$  complint que  $a_i \neq 0$ , aleshores  $\varphi(z) = a_1 z + a_i z^i + \dots = a_1 z + a_i z^i + \mathcal{O}(z^{i+1})$ .

Per un costat tenim que

$$\varphi(z^p) = a_1 z^p + a_i z^{pi} + \dots = a_1 z^p + \mathcal{O}(z^{pi})$$

Observem que si  $i \leq p \implies p+i \leq 2p \leq p+i$  doncs  $i \geq 2$ , i si  $p \leq i \implies p+i \leq 2i \leq p+i$  doncs  $p \geq 2$ . Per tant, podem reescriure l'equació anterior com

$$\varphi(z^p) = a_1 z^p + \mathcal{O}(z^{p+i})$$

Per altra banda tenim que

$$\begin{aligned} \varphi(z)^p &= (a_1 z + a_i z^i + \mathcal{O}(z^{i+1}))^p = \\ &= a_1^p z^p + p a_1^{p-1} a_i z^{p(i-1)} + \mathcal{O}(z^{p+i}) \end{aligned}$$

Ara que tenim les dues expressions, apliquem la igualtat  $\varphi(z^p) = \varphi(z)^p$

$$a_1 z^p + \mathcal{O}(z^{p+i}) = a_1^p z^p + p a_1^{p-1} a_i z^{p(i-1)} + \mathcal{O}(z^{p+i})$$

d'on  $a_i = 0$  i arribem a contradicció, puix hem suposat que  $a_i \neq 0$ . Com a conseqüència, no existeix  $a_i \neq 0$  amb  $i \geq 2$ . Per tant  $\varphi(z) = a_1 z$  i  $\varphi(z^p) = \varphi(z)^p \implies a_1 z^p = a_1^p z^p \implies a_1 = a_1^p \implies a_1$  és arrel  $(p-1)$ -èsima de la unitat.

Obtenim així que  $\varphi(z) = a_1 z$  amb  $a_1$  una arrel  $(p-1)$ -èsima de la unitat, com volíem veure.  $\square$

## 4 Iteracions de funcions racionals

A partir d'ara, estudiarem el comportament de funcions racionals,  $R(z)$ , de grau major o igual a 2, i de les seves iteracions. Aquestes funcions ens dividiran el pla complex en dues parts, un que té un comportament "bo" (el conjunt de Fatou), i l'altre que té un comportament caòtic (el conjunt de Julia).

Al principi del treball, ja hem comentat les funcions racionals i les transformacions de Möbius i hem vist quines característiques tenen. Anem ara a estudiar algunes propietats que tenen aquestes funcions relacionades amb els punts fixos.

Definim les iteracions de  $R$  com anteriorment,  $R^n = R^{n-1} \circ R$  i observem que  $R^n$  té grau  $d^n$ .

Dues funcions racionals estan conjugades a l'esfera de Riemann si i només si existeix una transformació de Möbius que compleixi l'equació 3.1.

Una funció no constant  $R$  és un polinomi  $\iff R$  té un pol a  $\infty$  i no té pols a  $\mathbb{C} \iff R^{-1}\{\infty\} = \{\infty\}$ . Més en general tenim el següent resultat.

**Teorema 4.1.** *Una funció  $R$  no constant està conjugada a un polinomi  $\iff \exists w \in \overline{\mathbb{C}}$  amb  $R^{-1}\{w\} = \{w\}$ .*

De les transformacions de Möbius tenim que són unes de les poques funcions que les seves iteracions es poden calcular explícitament, i, si aquesta és diferent de la identitat, té com a molt dos punts fixos.

A partir d'ara, quan parlem de funcions racionals, donarem per entès que són de grau major o igual que 2, en cas contrari s'especificarà.

### 4.1 Punts crítics i periòdics

**Definició 4.2.** *Donat un  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ . L'òrbita directa de  $z_0$  (forward orbit), és la seqüència de punts  $\{z_n\}_n$  definida per  $z_n = R(z_{n-1})$ .*

Utilitzant la regla de la cadena i la definició anterior, obtenim una fórmula per a calcular la derivada de la iteració  $n$ -èsima en el punt  $z_0$  i és:

$$\begin{aligned}(R^n(z_0))' &= R'(z_0)R'(z_1) \cdots R'(z_n) \quad \text{atès que} \\ (R^n(z_0))' &= (R(R^{n-1}(z_0)))' = R'(R^{n-1}(z_0))(R^{n-2}(z_0))' = \\ &= R'(z_n)R'(R^{n-2}(z_0))(R^{n-2}(z_0))' = \cdots = R'(z_n)R'(z_{n-1}) \cdots R'(z_1)R'(z_0)\end{aligned}$$

**Definició 4.3.** *Un punt  $z_0$  és periòdic, si existeix una  $n$  tal que  $z_0 = z_n$ .*

Tanmateix,  $z_0 = z_n$  per alguna  $n \iff z_0$  és un punt fix de  $R^n$ . La mínima  $n$  que satisfà aquesta condició és el *període de l'òrbita*. L'òrbita  $\{z_1, z_2, \dots, z_n = z_0\}$  es diu *cicle* i el classifiquem com atractor, repulsor, racional neutre o irracional neutre segons quin sigui el tipus de punt fix de  $R^n$ . Així tenim que el cicle és atractor si i només si  $\prod_{j=1}^n |R'(z_j)| < 1$  i, en aquest cas, no depèn del punt del cicle escollit.

**Definició 4.4.** *Un punt  $z_0$  és preperiòdic, si  $z_k$  és periòdic per algun  $k > 0$ , i és estrictament preperiòdic, si és preperiòdic però no periòdic, és a dir,  $z_k$  és periòdic per algun  $k > 1$ .*

**Definició 4.5.** Els punts crítics de  $R$ , són els punts on la funció deixa de ser injectiva. Les imatges d'aquests punts són els valors crítics de  $R$ .

Els punts crítics de  $R$  els trobem en els punts  $z$  que  $R(z) \neq \infty$  i  $R'(z) = 0$ , i en els pols de  $R$  d'ordre major o igual a 2.

Definim l'ordre d'un punt crític com el mínim  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  tal que  $R$  és  $(m+1)-a-1$  en un entorn de  $z$ . Si  $z$  no és un pol, l'ordre és la multiplicitat de  $z$  com a zero de  $R'(z)$ .

Una de les coses que hem de tenir en compte dels punts i valors crítics és el següent. Si  $R$  és una funció racional de grau  $d$  i  $w$  no és un valor crític de la funció, aleshores  $R^{-1}\{w\}$  són exactament  $d$  punts diferents, que els hi direm  $z_1, \dots, z_d$ , que no són valors crítics. Per aquest motiu, existeixen entorns d'aquests  $d$  punts, que els hi direm  $U_1, \dots, U_d$  i un entorn del punt  $w$  que li direm  $U$ , tal que  $R$  és una bijecció entre aquests entorns, és a dir, per cada  $1 \leq j \leq d$  si definim  $R_j$  com la restricció de  $R$  a cada entorn  $U_j$ ,  $R_j : U_j \rightarrow U$ ,  $R_j$  és una bijecció, per tant existeix la inversa d'aquesta funció que està definida per  $R_j^{-1} : U \rightarrow U_j$ . A aquestes funcions inverses, els hi diem *branques de  $R^{-1}$  al punt  $w$* .

**Proposició 4.6.** En una funció racional  $R$  hi ha  $2d - 2$  punts crítics a  $\overline{\mathbb{C}}$ , contant multiplicitat.

*Demostració.* Aquest problema el podem reduir al cas en què  $\infty$  no és ni un punt crític ni un valor crític, i a més,  $R(\infty) = 0$  (i per tant, el grau del denominador és major que el del numerador). Això ho podem fer mitjançant una conjugació amb una transformació de Möbius. Aleshores

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha z^{d-1} + \dots}{\beta z^d + \dots}$$

on  $\alpha, \beta \neq 0$ , i doncs

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2} = \frac{(d-1)\alpha\beta z^{2d-2} - d\alpha\beta z^{2d-2} + \dots}{Q(z)^2} = \frac{-\alpha\beta z^{2d-2} + \dots}{Q(z)^2}$$

d'on l'equació  $R'(z) = 0$  té  $2d - 2$  solucions, és a dir, hi ha  $2d - 2$  punts crítics.  $\square$

**Proposició 4.7.** Un polinomi de grau positiu  $d$  té exactament  $d - 1$  punts crítics a  $\mathbb{C}$ , contant multiplicitat.

La demostració és semblant a l'anterior però més senzilla, i no la farem. A continuació donarem un resultat que ens diu la relació que hi ha entre els graus d'una successió de funcions que convergeix uniformement a una funció i el grau d'aquesta.

**Teorema 4.8.** Si les funcions racionals  $R_n$  convergeixen uniformement en l'esfera de Riemann a una funció  $R$ , aleshores  $R$  és una funció racional i per a  $n$  suficientment gran  $gr(R_n) = gr(R)$ .

*Demostració.* La convergència uniforme de  $R_n$  cap a  $R$  a tota l'esfera ens garanteix que  $R$  és analítica a tota l'esfera de Riemann i per tant és una funció racional. Ara ens falta veure la segona part. Si  $R$  és una constant, aleshores el resultat és trivial. Per tant, anem a estudiar el cas en què  $gr(R) \geq 1$ .

Primer de tot podem suposar que  $R(\infty) \neq 0$ , si no podem substituir  $R$  i  $R_n$  per  $1/R$  i  $1/R_n$ . Aleshores  $R$  té diferents zeros, els quals anomenarem  $z_1, \dots, z_t$ , que viuen a  $\mathbb{C}$ . Per



cada  $1 \leq i \leq t$  considerem el disc suficientment petit  $D_i$  centrat en  $z_i$  que no conté pols de  $R$  i que tots ells compleixen que  $D_i \cap D_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Per  $n$  prou gran,  $R$  i  $R_n$  estan uniformement prou a prop en els  $D_i$  i per tant,  $R_n$  no té pols en aquests discs. Com  $R_n$  i  $R$  estan prou a prop a la frontera dels  $D_i$ , el teorema de Rouché ens diu que  $R_n$  i  $R$  tenen el mateix nombre de zeros en cada  $D_i$ .

Finalment, si diem  $K$  al complementari de la unió de tots els discos, com  $R$  no està a pop de cap zero en el compacte  $K$ , per una  $n$  prou gran, els  $R_n$  tampoc ho poden estar. Per tant, per  $n$  prou gran,  $R_n$  i  $R$  tenen el mateix nombre de zeros i com a conseqüència,  $R_n$  i  $R$  tenen el mateix grau per una  $n$  suficientment gran.  $\square$

Per acabar aquesta secció anunciarem un teorema del qual podem trobar la demostració al capítol 2.7 del llibre [2].

**Teorema 4.9** (Relació de Riemann-Hurwitz). *Per qualsevol funció racional  $R$  que no sigui constant, es compleix la següent fórmula*

$$\sum [v_R(z) - 1] = 2gr(R) - 2$$

on  $v_R(z)$  és la multiplicitat del punt  $z$  en la funció  $R$ .

## 4.2 Els conjunts de Julia i el conjunt de Fatou

En aquesta secció definirem els conjunts que separaran l'espai complex segons el comportament de les iteracions de les funcions racionals.

**Definició 4.10.** *Sigui  $R$  una funció racional no constant de  $\overline{\mathbb{C}}$ . El conjunt de Fatou  $\mathcal{F}$  és el conjunt de punts  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  tal que  $\{R^n\}$  és una família normal en un entorn de  $z_0$ . El conjunt de Julia  $\mathcal{J}$  és el complementari del conjunt de Fatou,  $\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}$ . Observem que  $\mathcal{F}$  és un obert de  $\overline{\mathbb{C}}$  i, com l'esfera de Riemann és un compacte, el conjunt de Julia és un compacte.*

Tenim que  $z_0 \in \mathcal{F} \iff \{R^n\}$  és equicontínua en un entorn de  $z_0$  respecte a la mètrica esfèrica o cordal de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Aquest resultat és una conseqüència immediata del teorema de Arzelà-Ascoli 2.12.

**Observació 4.11.** Els punts fixos atractors pertanyen al conjunt de Fatou i els punts fixos repulsors pertanyen al conjunt de Julia.

**Proposició 4.12.** *Si  $R$  té un punt fix atractor  $z_0$ , aleshores la seva conca d'atracció  $A(z_0)$ , pertany al conjunt de Fatou.*

*Demostració.* Sigui  $U$  un entorn del punt fix atractor  $z_0$ , aleshores per la proposició 3.7, sabem que per qualsevol  $z \in U$ , les  $R^n(z)$  convergeixen uniformement a la funció constant igual a  $z_0$  i per tant la família  $\{R^n\}_n$  és normal en  $U$ . Ara només ens queda veure que per a tota la conca d'atracció també es compleix.

Sigui  $r > 0$  i  $D(z_0, r)$  complint  $\overline{D(z_0, r)} \subset A(z_0)$ , per definició de la conca d'atracció, existeix un  $n_0 \geq 1$  tal que  $\forall n \geq n_0$  i  $\forall z \in D(z_0, r)$ ,  $R^n(z) \in U$ . Per tant, la família  $\{R^n\}_n$  és normal a  $D(z_0, r)$ .

En conclusió, la família de funcions  $\{R^n\}_n$  és normal a tota la conca d'atracció del punt fix  $z_0$ , i doncs,  $A(z_0)$  pertany al conjunt de Fatou.  $\square$

Com les iteracions de  $R$  convergeixen a  $z_0$  a  $A(z_0)$ , però no en el seu complementari, les iteracions no poden ser normals en cap obert que topi amb  $\partial A(z_0)$ , i doncs,  $\partial A(z_0)$  està inclosa a  $\mathcal{J}$ .

**Corol·lari 4.13.** *Si  $P$  un polinomi de grau major o igual a 2. Aleshores  $\infty$  està en  $\mathcal{F}(P)$ .*

**Proposició 4.14.** *Si  $M$  un monomi de grau major o igual a 2, aleshores el conjunt de Julia és el cercle unitat per una constant.*

*Demostració.* Sigui  $M = \alpha z^d$  on  $d \geq 2$ , observem que el 0 i l' $\infty$  són dos punts fixos del monomi, i que en tots dos casos són punts fixos superatractors, ja que en un cas  $M'(z) = d\alpha z^{d-1} \implies M'(0) = 0$  i si fem la conjugació corresponent amb  $\varphi(z) = 1/z$ , la funció és la mateixa que en el cas del 0 que ja hem vist que el multiplicador és zero. A part d'aquests dos punts fixos hi ha  $z = \alpha^{-1/(d-1)}$  on el multiplicador és  $M'(z) = d\alpha z^{d-1} \implies M'(\alpha^{-1/(d-1)}) = d > 1$  i per tant és un punt fix repulsor. Analitzem ara les iteracions del monomi,  $M^n(z) = \alpha^n z^{nd}$  d'on

$$\begin{aligned} \text{Si } |z| < |\alpha|^{-1/d} &\implies M^n(z) \rightarrow 0 \\ \text{Si } |z| > |\alpha|^{-1/d} &\implies M^n(z) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Aquestes convergències són localment uniformes i per tant en aquests conjunts les iteracions són normals. Obtenim doncs que el conjunt de Julia és el cercle centrat a l'origen i de radi  $|\alpha|^{-1/d}$ , en essència, el cercle unitat per una constant.  $\square$

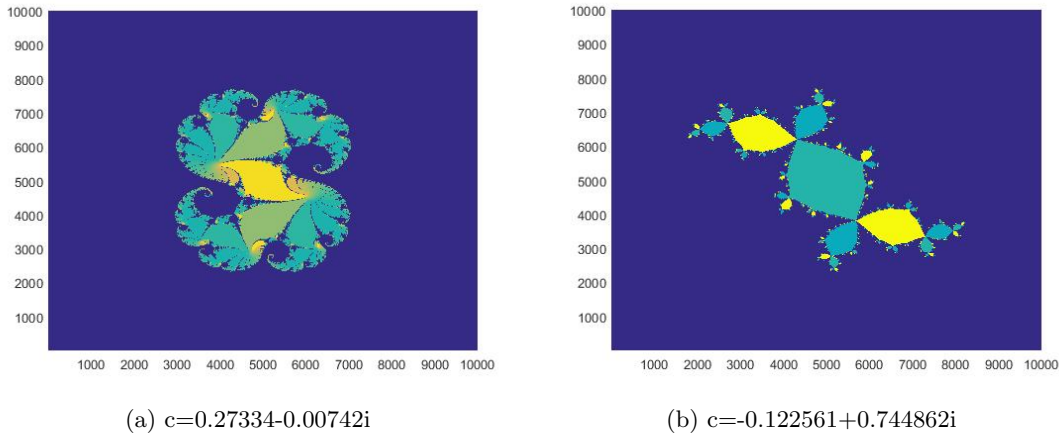


Figura 5: Dos conjunts de Julia plens de la funció  $f(z) = z^2 + c$  per a dos valors diferents de  $c$ . El conjunt de Julia és la frontera de les figures.

**Exemple 4.15.** Considerem la funció racional  $R(z) = z^2$ .  $R^n(z) = z^{2^n}$  que té dos punts fixos, el 0 i l' $\infty$ . Observem que  $R^n$  convergeix a 0 en el conjunt  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  i convergeix a  $\infty$  en el conjunt  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . De manera que el conjunt de Julia  $\mathcal{J}$  és  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Exemple 4.16.** Si recordem l'exemple 3.10, havíem vist que la conca d'atracció de l'infinít era  $A(\infty) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ . Per tant,  $\mathcal{J}$  serà l'interval tancat  $[-2, 2]$ .

Aquests són dos casos en què el conjunt de Julia és clar i simple, però veurem que són excepcions, ja que normalment són fractals complexos, dos exemples són els de la figura 5.

### 4.3 Conjunts invariants

Abans de continuar l'estudi dels conjunts de Julia i Fatou, introduïrem el concepte de conjunt invariant, que ens facilitarà veure propietats d'aquests conjunts.

**Definició 4.17.** *Sigui  $f$  una funció d'un conjunt  $X$  en si mateix, un subconjunt  $E$  de  $X$  és invariant si  $f(E) = E$  i és inversament invariant si  $f^{-1}(E) = E$ , on  $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$ . Si hi ha igualtat en els dos casos anteriors, tenim  $f(E) = E = f^{-1}(E)$  i  $E$  és completament invariant.*

**Observació 4.18.** Un conjunt  $E \subset X$  també és completament invariant si ell  $E$  i el seu complementari  $X \setminus E$  són invariants.

**Observació 4.19.** Si  $f$  és exhaustiva ( $f(X) = X$ ), aleshores  $E \subset X$  és completament invariant  $\iff E$  és inversament invariant. A més, per exhaustivitat tenim que  $f(f^{-1}(E)) = E$ , que per la propietat de ser inversament invariant tenim que  $f(E) = E$ .

El cas que ens interessa a nosaltres són les funcions que racionals de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Sigui  $R$  una funció racional de  $\overline{\mathbb{C}}$  de grau major o igual a 2, la qual és exhaustiva, un subconjunt  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$  és completament invariant  $\iff R^{-1}(E) = E$ .

Ara presentarem uns resultats i una relació d'equivalència, que facilita l'estudi dels conjunts completament invariant i que més endavant seran rellevants per a veure propietats del conjunt de Julia.

**Teorema 4.20.** *Sigui  $R$  una funció racional de grau  $d \geq 2$ . Si existeix un conjunt finit  $E$  completament invariant per  $R$ , aleshores aquest té com a molt dos elements.*

*Demostració.* Suposem que  $E$  és un conjunt completament invariant per  $R$  que té  $k$  elements. Com  $E$  és finit i  $R$  envia  $E$  a  $E$ ,  $R$  ha d'actuar com una permutació dels elements de  $E$ . Així que existeix un  $q \in \mathbb{N}$  tal que  $R^q$  és la identitat en  $E$ . Com  $R$  és de grau  $d$ ,  $R^q$  és de grau  $d^q$ . Per cada  $w \in E$  i a conseqüència del resultat 2.15, l'equació  $R^q(z) = w$  té  $d^q$  solucions i totes són a  $E$ , és a dir,  $w$  té multiplicitat  $d^q$ . Apliquem ara la relació de Riemann-Hurwitz (4.9) a  $R^q$  i obtenim

$$k(d^q - 1) \leq 2d^q - 2$$

com  $d \geq 2$ , obtenim que  $k \leq 2$  com volíem demostrar.  $\square$

Sigui  $X$  un espai mètric i  $f : X \rightarrow X$  una funció exhaustiva, definim la relació  $\sim$  en  $X$  per

$$\forall x, y \in X \quad x \sim y \iff \exists n, m \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n(x) = f^m(y)$$

Observem que aquesta relació és reflexiva ( $\forall x \in X, x \sim x$ ), simètrica ( $\forall x, y \in X, x \sim y \implies y \sim x$ ) i transitiva ( $\forall x, y, z \in X$ , si  $x \sim y$  amb  $f^n(x) = f^m(y)$  i  $y \sim z$  amb  $f^p(y) = f^q(z) \implies f^{n+p}(x) = f^p(f^n(x)) = f^p(f^m(y)) = f^m(f^p(y)) = f^m(f^q(z)) = f^{m+q}(z) \implies x \sim z$ ). Per tant  $\sim$  és una relació d'equivalència a  $X$ . Denotarem la classe d'equivalència que conté a  $x$  per  $[x]$ , i l'anomenarem la *gran òrbita* de  $x$ .

**Observació 4.21.** Observem que, si  $R$  és una funció racional, l'òrbita directa de  $z$  està continguda en  $[z]$  per definició.

Amb aquesta definició tenim el següent resultat.

**Teorema 4.22.** *Sigui  $f : X \rightarrow X$  una funció exhaustiva. Llavors  $[x]$  és el conjunt completament invariant generat per  $\{x\}$ .*

*Demostració.* A la demostració necessitem diferenciar entre el conjunt completament invariant generat per  $\{x\}$  i  $[x]$ , de manera que el denotarem per  $\langle x \rangle$ , un cop vist que són el mateix conjunt utilitzarem la notació de la classe d'equivalència.

Agafem  $y \in [x]$ , aleshores existeixen  $n$  i  $m$  naturals tal que  $f^n(x) = f^m(y)$ , d'on

$$y \in f^{-m}f^n\{x\} \subset f^{-m}f^n\langle x \rangle = \langle x \rangle$$

la igualtat prové de què  $\langle x \rangle$  és completament invariant. D'aquí obtenim que  $[x] \subset \langle x \rangle$ .

Ara només falta veure que  $[x]$  és completament invariant, ja que per la propietat de minimalitat de  $\langle x \rangle$ , obtindríem que  $\langle x \rangle \subset [x]$ , obtenint la igualtat. Com  $y \sim f(y)$ ,  $x \sim y \iff x \sim f(y)$ , equivalentment,

$$f \in [x] \iff f(y) \in [x] \implies y \in [x] \iff y \in f^{-1}([x])$$

Consegüentment,  $[x]$  és completament invariant i pel raonament anterior  $\langle x \rangle = [x]$  com volíem.  $\square$

A conseqüència d'aquest teorema tenim que un conjunt  $E$  és completament invariant si i només si és la unió de classes d'equivalències. En aquest cas, el complementari també és la unió de classes d'equivalències i és completament invariant.

**Teorema 4.23.** *Sigui  $f$  una funció contínua i oberta d'un espai topològic  $X$  en si mateix. Si  $E$  és completament invariant, aleshores també ho són el complementari, l'interior, la frontera i l'adherència de  $E$ .*

*Demostració.* Recordem que si  $E$  és completament invariant, també ho és  $X \setminus E$ . Com  $f$  és contínua,  $f^{-1}(\overset{\circ}{E})$  és un subconjunt obert de  $f^{-1}(E)$  i, per invariància, de  $E$ , per tant  $f^{-1}(\overset{\circ}{E}) \subset \overset{\circ}{E}$ . De forma semblant, com  $f$  és oberta  $f(\overset{\circ}{E})$  és un subconjunt obert de  $E$  i doncs  $f(\overset{\circ}{E}) \subset \overset{\circ}{E}$ . De manera que

$$\overset{\circ}{E} \subset f^{-1}f(\overset{\circ}{E}) \subset g^{-1}(\overset{\circ}{E})$$

I doncs,  $\overset{\circ}{E}$  és completament invariant. Un cop tenim que  $E$ ,  $X \setminus E$  i  $\overset{\circ}{E}$  són completament invariants, amb arguments topològics obtenim que l'interior, la frontera i l'adherència també ho són.  $\square$

**Teorema 4.24.** *Sigui  $R$  una funció racional. El conjunt de Julia  $\mathcal{J}$  i el conjunt de Fatou  $\mathcal{F}$  són completament invariants.*

*Demostració.* Tenim prou en veure que  $\mathcal{F}$  és completament invariant, ja que  $\mathcal{J}$  és el seu complementari. Hem de veure que  $R^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ . Ho farem veient les dues inclusions.

⊆: Volem provar que  $\forall z \in R^{-1}(\mathcal{F})$  la família  $\{R^n\}$  és normal en un entorn del punt  $z$ . Sigui  $z_0 \in R^{-1}(\mathcal{F})$  i  $w_0$  tal que  $R(z_0) = w_0$ , aleshores  $w_0 \in \mathcal{F}$ . Com  $\mathcal{F}$  és normal, també és equicontínua i tenim que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que, si } \sigma(w, w_0) < \delta \implies \sigma(R^n(w), R^n(w_0)) < \epsilon \quad \forall n \geq 0$$

Per continuïtat, existeix un  $\rho > 0$  tal que si  $\sigma(z, z_0) < \rho \implies \sigma(R(z), w_0) < \delta \implies \sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \epsilon$ . Obtenim així que  $\{R^{n+1} : n \geq 1\}$  és equicontínua a  $z_0$ , i clarament, per afegir una funció, que es diu  $R$ , no fa que aquest fet no es compleixi  $\implies \{R^n : n \geq 1\}$  és equicontínua a  $z_0$  i per tant a  $\{R^{-1}(\mathcal{F})\}$ . Com  $\{R^{-1}(\mathcal{F})\}$  és obert, deduïm que  $R^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ .

⊇: Agafem un  $z_0 \in \mathcal{F}$  i considerem  $w_0 = R(z_0)$ . Com  $z_0$  està a  $\mathcal{F}$  que és normal, tenim que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que, si } \sigma(z, z_0) < \delta \implies \sigma(R^n(z), R^n(z_0)) < \epsilon \quad \forall n \geq 0$$

El conjunt de  $z$  que satisfan la condició  $\sigma(z, z_0) < \delta$  és un entorn obert de  $z_0$ , que li direm  $U$ , i  $R(U)$  és un entorn obert de  $w_0$ . Sigui  $w \in R(U)$ , aleshores existeix un  $z \in U$  tal que  $w = R(z)$  i es compleix

$$\sigma(R^n(w), R^n(w_0)) = \sigma(R^{n+1}(z), R^{n+1}(z_0)) < \epsilon$$

Això ens diu que  $w_0$  està a  $\mathcal{F} \implies R(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F} \implies \mathcal{F} \subset R^{-1}(\mathcal{F})$

Hem vist que  $\mathcal{F}$  és completament invariant i per tant  $\mathcal{J}$  també, per ser el complementari, com volíem veure.  $\square$

#### 4.4 Punts excepcionals

Donada una funció racional  $R$ , introduïm la relació d'equivalència anterior, i la classe d'equivalència  $[z]$  és el conjunt més petit completament invariant que conté a  $z$ . Observem que  $[z]$  serà finit en pocs casos, i aquest fet el formalitzem de la següent manera.

**Definició 4.25.** *Sigui  $R$  una funció racional i  $z$  un punt, direm que  $z$  és un punt excepcional de  $R$  quan  $[z]$  sigui finit, i el conjunt d'aquests punts el denotarem per  $E(R)$ .*

**Teorema 4.26.** *Una funció racional  $R$  té com a molt dos punts excepcionals. Si  $E(R) = \{\zeta\}$ , aleshores podem conjuguar  $R$  amb un polinomi que envia  $\zeta$  a  $\infty$ . Si  $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$  amb els dos punts diferents, aleshores podem conjuguar  $R$  amb  $Cz^d$  que envia  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$  a 0 i  $\infty$ . En els dos casos, el conjunt excepcional pertany al conjunt de Fatou.*

*Demostració.* Pels resultats que hem vist a la secció anterior sabem que  $E(R)$  és completament invariant per  $R$ , i pel teorema 4.20,  $R$  té com a molt dos punts excepcionals. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que hi ha les següents quatre possibilitats, ja que amb una conjugació podríem arribar al mateix resultat.

Cas 1:  $E(R) = \emptyset$ . En aquest cas no hi ha res a dir.

Cas 2:  $E(R) = \{\infty\} = [\infty]$ . En aquest cas, pel teorema 4.1,  $R$  és un polinomi.

Cas 3:  $E(R) = \{0, \infty\}$  amb  $[0] = \{0\}$  i  $[\infty] = \{\infty\}$ . En aquest cas,  $R$  és un polinomi amb 0 el seu únic zero, de manera que  $R(z) = Cz^d$  per  $d$  enter positiu.

Cas 4:  $E(R) = \{0, \infty\} = [0] = [\infty]$ . En aquest cas  $R(0) = \infty$  i  $R(\infty) = 0$  de manera que  $R$  té tots els pols i zeros a  $\{0, \infty\}$  i  $R(z) = Cz^{-d}$  amb  $d$  enter positiu.

Hem obtingut doncs el que volíem i observem que en tots els casos, els punts excepcionals pertanyen al conjunt de Fatou.  $\square$

Donarem ara una altra caracterització dels punts excepcionals, però per fer-ho necessitem introduir un nou concepte.

**Definició 4.27.** *Sigui  $R$  una funció racional i  $z$  un punt qualsevol. L'òrbita inversa de  $z$  (backward orbit), és el conjunt de punts definit per*

$$O^-(z) = \{w : \exists n \geq 0, R^n(w) = z\} = \bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(z)$$

*Als punts que pertanyen a aquest conjunt els hi diem predecessors de  $z$*

Observem que  $O^-(z) \subset [z]$ , per tant qualsevol punt excepcional té òrbita inversa finita, i ara veurem que la implicació contrària també és certa.

**Teorema 4.28.** *L'òrbita inversa  $O^-(z)$  de  $z$  és finita si i només si  $z$  és un punt excepcional.*

*Demostració.* Només necessitem provar que si  $O^-(z)$  és finit, aleshores  $z$  és excepcional. Per fer-ho, sigui  $z$  un punt qualsevol, definim els següents conjunts no buits

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} R^{-m}\{z\}$$

Observem que aquests conjunts compleixen que  $R^{-1}(B_n) = B_{n+1}$  i

$$\dots B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1 \subset B_0 = O^- \subset [z]$$

Suposem ara, que  $O^-(z)$  és finit. Aleshores per cada  $n \geq 0$ ,  $B_n$  és finit, això significa que existeix un  $m$  tal que  $B_m = B_{m+1}$  i consegüentment  $R^{-1}(B_m) = B_m$ , per tant  $B_m$  és completament invariant, el que significa que  $B_m$  conté alguna classe d'equivalència  $[w]$ , i com és un subconjunt de  $[z]$ ,  $[z] = [w]$ . Per tant  $[z]$  és finit i doncs  $z$  és un punt excepcional. De fet, hem vist que, en aquests casos,  $O^-(z) = [z]$ .  $\square$

## 5 Propietats del conjunt de Julia

Anem a veure algunes característiques rellevants del conjunt de Julia que ens portarà a veure quins són els punts que formen part d'aquest conjunt.

**Teorema 5.1.** *El conjunt de Julia  $\mathcal{J}$  és no buit. De fet,  $\mathcal{J}$  és infinit.*

*Demostració.* Recordem que estem suposant que el grau de  $R$  és  $d \geq 2$ . Suposem que  $\mathcal{J} = \emptyset$ .

Aleshores  $\{R^n\}$  és una família de funcions normal a  $\overline{\mathbb{C}}$ . De manera que existeix una successió  $\{n_j\}_j$  tal que  $R^{n_j}(z) \rightarrow f(z)$  per alguna funció analítica  $f$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  a  $\overline{\mathbb{C}}$ . Com  $f$  ha de ser analítica a to  $\overline{\mathbb{C}}$ , ha de ser una funció racional.

Si  $f$  és constant, aleshores les imatges de  $R^{n_j}$  estan contingudes en un entorn de la constant. Aquí tenim una contradicció, ja que  $R^n$  cobreix tot  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Si  $f$  és una funció racional no constant, aleshores  $gr(f) < +\infty$ . Ara, com  $gr(R^{n_j}) \rightarrow \infty$  quan  $j \rightarrow \infty$ , el  $gr(f) = \infty$ , ja que, pel teorema 4.8,  $gr(f) = \lim_{j \rightarrow \infty} gr(R^{n_j})$ , d'on obtenim una contradicció.

En resum, la família  $\{R^n\}$  no és normal a  $\overline{\mathbb{C}}$ , el que implica que  $\mathcal{J} \neq \emptyset$ .

Suposem que el conjunt de Julia és finit. Com hem vist que el conjunt no és buit, considerem un punt  $z_0 \in \mathcal{J}$ . Al ser un conjunt completament invariant totes les iteracions de  $z_0$  han d'estar a  $\mathcal{J}$ , però és finit, per tant  $[z_0]$  és finit, d'on tenim que un punt excepcional pertany al conjunt de Julia, que és una contradicció pel teorema 4.26. Consegüentment,  $\mathcal{J}$  és infinit.  $\square$

**Teorema 5.2.** *Sigui  $R$  una funció racional.  $\forall N \geq 1$ ,  $\mathcal{J}$  i  $\mathcal{F}$  de  $R$  coincideix amb el conjunt de Julia i de Fatou de  $R^N$ , i.e.,  $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^N)$  i  $\mathcal{F}(R) = \mathcal{F}(R^N)$ .*

*Demostració.* Observem primer que el conjunt de Fatou de  $R$  i el de  $R^N$  és el mateix per qualsevol  $N \geq 1$ , ja que  $\{R^n\}$  és una família normal en un conjunt obert  $U \iff \{R^{nN}\}$  és una família normal en  $U$ .

Com  $\mathcal{J}$  és el complementari del conjunt de Fatou i aquests coincideixen per a qualsevol  $N \geq 1$ , els conjunts de Julia també coincidiran.  $\square$

**Observació 5.3.** *Sigui  $R$  una funció racional,  $\varphi$  una transformació de Möbius i  $S = \varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ , aleshores  $\mathcal{J}(S) = \varphi(\mathcal{J}(R))$  i  $\mathcal{F}(S) = \varphi(\mathcal{F}(R))$*

Ara veurem un resultat que dóna una relació entre el conjunt de Julia i les òrbites inverses dels punts. Però per fer-ho primer hem de veure un resultat.

**Teorema 5.4.** *Sigui  $R$  una funció racional i  $W$  un conjunt obert no buit que interseca el conjunt de Julia. Aleshores:*

1.  $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W) \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus E(R)$ .
2. Per tot  $n$  enter suficientment gran,  $R^n(W) \supset \mathcal{J}$ .

*Demostració.* Sigui  $W_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(W)$ , definim  $K$  com el complementari de  $W_0$ . Suposem ara que aquest conjunt  $K$  conté tres punts diferents, aleshores pel teorema de Montel (2.13), la família  $\{R^n\}_n$  és normal a  $W$ , per tant  $W \subset \mathcal{F}$ , que és una contradicció, ja que

$W$  interseca amb  $\mathcal{J}$ . Aquest fet mostra que  $W_0$  conté a tot punt de l'esfera de Riemann amb l'excepció de com a molt dos punts. Anem a veure que aquests dos punts són els excepcionals de  $R$ . Suposem que  $z$  no és un punt excepcional, aleshores,  $z$  té una òrbita inversa infinita i doncs, s'intersecarà amb  $W_0$ . Per tant, existeix un punt  $w$  i enters no negatius  $n, m$  tal que  $R^n(w) = z$  i  $w \in R^m(W)$ , el que implica que  $z \in R^{n+m}$ . Per tant, els punts que pertanyen a  $W_0$  són els punts excepcionals, demostrant el primer punt.

Per veure el segon punt, considerem tres conjunts  $W_1, W_2, W_3$  oberts, que la distància cordal entre ells sigui positiva (dos a dos) i que intersequin amb  $\mathcal{J}$ . Primer de tot veurem que, si  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $\forall j \in I$ , la imatge de  $W_j$  per alguna iteració de  $R$  cobreix algun  $W_k$  amb  $k \in I$ , és a dir, per cada  $j \in I$ , existeix un  $k \in I$  i un enter positiu  $n$  tal que  $W_k \subset R^n(W_j)$ . Suposem que no és així, aleshores, per algun  $j \in I$ ,  $R^n(W_j)$  no cobreix a cap  $w_1, W_2$  i  $W_3$  per qualsevol  $n$ , d'on pel teorema 2.13,  $\{R^n\}_n$  és una família normal a  $W_j$ , però aquest fet és una contradicció, ja que  $W_j$  interseca amb  $\mathcal{J}$ . Per tant l'afirmació és certa.

Definim  $\pi(j)$  amb  $j \in I$ , de manera que, si  $W_k \subset R^n(W_j)$  amb  $j, k \in I$ , aleshores  $\pi(j) = k$ . Observem que  $\pi$  envia  $I$  en ell mateix i per tant alguna iteració de  $\pi$  té un punt fix, en altres paraules, per algun  $j \in I$  i  $p$  enter positiu  $W_j \subset R^p(W_j)$ .

Ara, posem  $S = R^p$  amb la  $p$  definida anteriorment, llavors,  $W_j \subset S(W_j)$ , de manera que la seqüència  $S^m(W_j)$  és creixent respecte  $m$ . Aplicant l'apartat 1 a  $S$  i  $W_j$ , trobem que els conjunts  $S^m(W_j)$  formen un recobriment creixent per oberts del conjunt compacte  $\mathcal{J}$ , de manera que la unió finita, de fet una de les iteracions, cobreix  $\mathcal{J}$ . Clarament, podem triar tots els  $W_j$  amb  $j \in I$  que estiguin continguts en  $W$ . D'aquesta manera, per algun  $n$  enter positiu,  $\mathcal{J} \subset R^n(w_j) \subset R^n(W)$ . Trivialment,  $\mathcal{J} = R(\mathcal{J}) \subset R^{n+1}(W)$ . De manera que per inducció demostrem el segon punt.  $\square$

**Teorema 5.5.** *Si  $R$  és una funció racional, aleshores es compleix que*

1. *Si  $z$  no és un punt excepcional, aleshores  $\mathcal{J}$  està contingut a l'adherència de  $O^-(z)$ .*
2. *Si  $z \in \mathcal{J}$ , aleshores  $\mathcal{J}$  és l'adherència de  $O^-(z)$*

*Demostració.* Considerem un punt  $z$  que no sigui excepcional, i un conjunt  $W$  no buit que interseca amb  $\mathcal{J}$ . Com  $W \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ , l'apartat 1 del teorema 5.4 implica que  $z$  viu en  $R^n(w)$  per alguna  $n \geq 0$  i per tant,  $O^-(z)$  interseca amb  $W$ , que per l'apartat 2 del mateix teorema, tenim que  $\mathcal{J}$  està contingut en l'adherència de  $O^-(z)$ , provant el primer apartat.

Veiem ara el segon apartat. Si  $z \in \mathcal{J}$ , com el conjunt de Julia és tancat i completament invariant, conté l'adherència de  $O^-(z)$  i pel primer apartat obtenim la igualtat.  $\square$

**Observació 5.6.** Si  $z$  és un punt de  $\mathcal{F}$ , no excepcional, aleshores l'adherència de l'òrbita inversa conté a  $\mathcal{J}$ , però pot ser estrictament més gran que el conjunt de Julia.

Amb aquest teorema hem trobat una manera de calcular explícitament el conjunt de Julia, tot i que només és eficaç quan el grau de  $R$  és petit de manera que el nombre d'antiimatges no creix molt ràpidament.

**Teorema 5.7.** *Qualsevol subconjunt no buit completament invariant de  $\mathcal{F}$  és dens en  $\mathcal{J}$ . Si  $D$  és una unió de components connexes de  $\mathcal{F}$  que és completament invariant, aleshores  $\mathcal{J} = \partial D$*



*Demostració.* Si  $V$  és un subconjunt completament invariant del conjunt de Julia, aleshores per a qualsevol  $z \in V$ , la seva òrbita directa  $([z])$  pertany a  $V$ , recordem que  $O^-(z) \subset [z]$ . Finalment, pel teorema anterior obtenim que  $V$  és dens en  $\mathcal{J}$ . Demostrem la segona part, pel teorema 4.23, la frontera de  $D$  és un subconjunt completament invariant de  $\mathcal{J}$ , i com  $\partial D$  és tancat i dens en  $\mathcal{J}$ , obtenim la igualtat que buscàvem.  $\square$

**Teorema 5.8.** *El conjunt de Julia no conté punts aïllats, en altres paraules,  $\mathcal{J}$  és un conjunt perfecte.*

*Demostració.* Triem  $z_0 \in \mathcal{J}$  i  $U$  un entorn de  $z_0$ . Dividirem la demostració en dos casos, que  $z_0$  no és periòdic i que  $z_0$  és periòdic.

Cas 1: Suposem que  $z_0$  no és periòdic i triem  $z_1$  tal que  $R(z_1) = z_0$ . Aleshores  $R^n(z_0) \neq z_1$  per qualsevol  $n$  enter positiu. Com  $z_1 \in \mathcal{J}$ , les antiimatges iterades de  $z_1$  són denses en  $\mathcal{J}$ , de manera que existeix un  $\zeta \in U$  tal que  $R^m(\zeta) = z_1$  de manera que  $\zeta \in \mathcal{J} \cap U$  amb  $\zeta \neq z_0$ .

Cas 2: Suposem que  $R^n(z_0) = z_0$  per algun  $n$  mínim. Si  $z_0$  fos l'única solució de  $R^n(z) = z_0$ , aleshores  $z_0$  seria un punt fix superatractor, contradient el fet que  $z_0 \in \mathcal{J}$ . De manera que existeix un  $z_1 \neq z_0$  tal que  $R^n(z_1) = z_0$ . Tanmateix  $R^j(z_0) \neq z_1$  per qualsevol  $j$ , ja que si no, per periodicitat, es compliria per  $0 \leq j < n$  i doncs,  $R^j(z_0) = R^{j+n}(z_0) = R^n(z_1) = z_0$  que contradia el fet que  $n$  és el mínim. Pel mateix raonament que abans,  $z_1$  té una antiimatge iterada a  $\mathcal{J} \cap U$  que no pot ser  $z_0$ .

Demostrem en els dos casos que  $z_0$  és el límit d'una successió de punts que pertanyen a  $\mathcal{J}$ , és a dir, que el conjunt de Julia no conté punts aïllats.  $\square$

**Teorema 5.9.** *L'interior del conjunt de Julia és buit o bé el conjunt de Julia  $\mathcal{J}$  és tot el pla complex ampliat  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demostració.* Suposem que l'interior  $\mathcal{J}$  no és buit. Aleshores existeix un conjunt obert  $U \subset \mathcal{J}$ . Aleshores  $R^n(U) \subset \mathcal{J}$  per ser un conjunt completament invariant. Però pel teorema 5.4 tenim que

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus E(R) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(U) \subset \mathcal{J}$$

Com  $\overline{\mathbb{C}} \setminus E(R)$  és dens en  $\overline{\mathbb{C}}$  i  $\mathcal{J}$  és tancat, obtenim que  $\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}}$  com volíem demostrar.  $\square$

## 5.1 Cicles

En aquesta secció el que farem és veure el nombre de cicles atractors i neutres que pot tenir una funció racional, és a dir, fitar quants cicles no repulsors pot tenir una funció racional. En el procés veurem que la conca d'atracció per un cicle atractor conté un punt crític. D'aquesta manera fitarem la quantitat de cicles d'aquest tipus pel nombre de punts crítics. Finalment, fitarem els cicles no repulsors.

Segui  $\{z_0, \dots, z_{m-1}\}$  un cicle atractor de longitud  $m$ , aleshores cada  $z_j$  és un punt fix de la funció  $R^m$ . Definim la *conca d'atracció* del cicle atractor, o de  $z_0$ , com la unió de les conques d'atracció dels  $z_j$  respecte a la funció  $R^m$  i la denotarem per  $\mathcal{A}(z_0)$ . En altres paraules, si representem per  $A(z_j, R^m)$  la conca d'atracció del punt  $z_j$  respecte a la funció  $R^m$ , aleshores  $\mathcal{A}(z_0) = \bigcup_{i=0}^{m-1} A(z_i, R^m)$ . La *conca d'atracció immediata* del cicle, que la

denotarem per  $\mathcal{A}^*(z_0)$ , és la unió de les  $m$  components connexes de  $\mathcal{A}(z_0)$  que contenen punts del cicle.

**Teorema 5.10.** *Si  $z_0$  és un punt periòdic atractor, aleshores la conca d'atracció de  $\mathcal{A}(z_0)$  és una unió de components connexes del conjunt de Fatou, i la frontera de  $\mathcal{A}(z_0)$  coincideix amb el conjunt de Julia.*

*Demostració.* Sigui  $U$  un entorn del cicle de  $z_0$  contingut en el conjunt de Fatou. Aleshores  $\mathcal{A}(z_0)$  és la unió de les antiimatges iterades de  $U$ , que és un subconjunt obert de  $\mathcal{F}$ . Si  $w_0 \in \partial\mathcal{A}(z_0)$  i  $V$  és un entorn de  $w_0$ , aleshores les iteracions de  $R$  convergeixen cap al cicle de  $z_0$  al conjunt de punts de  $V \cap \mathcal{A}(z_0)$ , mentre que romanen fora de  $\mathcal{A}(z_0)$  al conjunt de punts  $V \setminus \mathcal{A}(z_0)$ . Consegüentment  $\{R^n\}_n$  no és normal a  $V$  i  $w_0 \in \mathcal{J}$ . Com  $\mathcal{A}(z_0)$  és completament invariant, el teorema 5.7 ens diu que  $\mathcal{J} = \partial\mathcal{A}(z_0)$ .  $\square$

**Teorema 5.11.** *Si  $z_0$  és un punt periòdic atractor, aleshores la conca d'atracció immediata de  $\mathcal{A}^*(z_0)$  conté almenys un punt crític.*

*Demostració.* Si  $z_0$  és un punt fix superatractor, el resultat és trivial doncs aquest ja és un punt crític.

Suposem primer que  $z_0$  és un punt fix atractor, aleshores el multiplicador  $\lambda$  satisfà  $0 < |\lambda| < 1$ . Sigui  $U_0 = \mathbb{D}(z_0, \epsilon)$  amb  $\epsilon > 0$  suficientment petit perquè  $R(U_0) \subseteq U_0$ , aleshores existeix una branca  $f$  de  $R^{-1}$  complint que  $f(z_0) = z_0$  està definit. Observem que la funció  $f$  envia  $U_0$  a  $\mathcal{A}^*(z_0)$  i recordem que la funció és injectiva. Definim  $U_1 = f(U_0)$  que és simplement connex i  $U_0 \subset U_1$ . Anem construint successivament els conjunts  $U_{n+1} = f(U_n) \supset U_n$ , de manera que estenem  $f$  analíticament a  $U_{n+1}$ . Si el procés no acaba, aleshores obtenim una família de funcions  $f^n : U_0 \rightarrow U_n$  analítiques a  $U_0$  que no intersequen amb  $\mathcal{J}$ , de manera que, com el conjunt de Julia és infinit, existeixen tres valors els quals la família de funcions evita, per tant, pel teorema de Montel 2.13, la família  $\{f^n\}_n$  és normal en  $U_0$ . Però això és impossible, ja que, per construcció,  $z_0$  és un punt fix repulsor de  $f$ . De manera que s'arriba a un  $U_n$  on no podem estendre  $f$  de manera analítica. És en aquest punt quan trobem un punt crític  $p \in \mathcal{A}(z_0)$  tal que  $R(p) \in U_n$  i no permet estendre  $f$  de forma analítica a  $U_{n+1}$ . Obtenint el resultat per punts fixos atractors. Anem a veure ara que per punts periòdics atractors succeeix el mateix.

Si  $z_0$  és un punt periòdic atractor de període  $n > 1$  i  $|(R^n)'(z_0)| < 1$ , l'argument anterior mostra que cada component connexa de  $\mathcal{A}^*(z_0)$  conté un punt crític de  $R^n$ . Com  $(R^n)'(z) = \prod R'(R^j(z))$ , és a dir, és el producte de les derivades dels punts del cicle,  $\mathcal{A}^*(z_0)$  ha de contenir com a mínim algun punt crític de  $R$ .  $\square$

Si  $R$  és una funció racional de grau  $d$ , vam veure que tenia  $2d - 2$  punts crítics, contant multiplicitat. Per tant, el teorema anterior acaba de demostrar que hi ha com a molt  $2d - 2$  cicles atractors.

Ara ens disposem a veure que el nombre de cicles no repulsors és menor o igual a  $4d - 4$ , però abans de fer-ho introduïrem un concepte que necessitarem per dur a terme la demostració.

Definim la sèrie de Puiseux formal com les sèries amb exponent racional no negatiu i amb denominador acotat, és a dir, les  $f = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s t^{s/q}$  amb  $q \in \mathbb{Z}_{>0}$  i  $\gamma_s \in \mathbb{C}$ . Podem suposar que  $q$  i  $\{s : \gamma_s \neq 0\}$  són coprims. Definim doncs,  $F = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s u^s$  la sèrie de Taylor associada a  $f$ .

**Definició 5.12.** Diem que una sèrie de Puiseux  $f$  és localment convergent en el 0, si la seva sèrie de Taylor associada  $F$ , és localment convergent en el 0.

Definim  $\mathbb{C}\{t\} = \{f = \sum_{s=0}^{+\infty} \gamma_s t^{s/q} : q \in \mathbb{Z}_{>0}, \gamma_s \in \mathbb{C} \text{ i } f \text{ és localment convergent en el } 0\}$ .  $\mathbb{C}\{t\}$  és un anell i els seus elements invertibles són  $\mathbb{C}\{t\}^* = \{f : \gamma_0 \neq 0\}$ .

**Observació 5.13.** Sigui  $f \in \mathbb{C}\{t\}$ , existeix un entorn  $U$  del 0, tal que per  $\tau \in U$  es pot avaluar  $f(\tau)$  està ben definit, triant una determinació de  $\tau^{1/q}$ .

**Teorema 5.14.** Sigui  $F = \alpha_D(t)z^D + \dots + \alpha_0(t) \in \mathbb{C}[t, z]$  tal que  $\alpha_D(0) \neq 0$ ,  $D > 0$  i  $\exists z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $F(0, z_0) = 0$ . Aleshores, existeix  $f \in \mathbb{C}\{t\}$  tal que  $F(t, f(t)) = 0$  i  $f(0) = z_0$ .

La demostració d'aquest teorema es pot trobar en els teoremes 1.5.4 i 1.7.2 del llibre [6].

Finalment, presentem el resultat que ens interessa i la seva corresponent demostració.

**Teorema 5.15.** Tota funció racional de grau  $d \geq 2$ , té com a molt  $4d - 4$  cicles no repulsors.

*Demostració.* Sigui  $R$  una funció racional de grau  $d \geq 2$ , de la forma  $R = P/Q$  amb  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$  coprimers, recordem que  $gr(R) = \max(gr(P), gr(Q)) = d$ .

Sigui  $\alpha = \{z_0, \dots, z_{p-1}\}$  un cicle neutre de  $R$ . Podem suposar que  $z_i \neq \infty \forall i$  perquè amb una transformació de Möbius ho podem aconseguir.

Sigui

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, z) &= \frac{\mathcal{P}(t, z)}{\mathcal{Q}(t, z)} \quad \text{amb} \\ \mathcal{P}(t, z) &= (1-t)P(z) + tz^d \in \mathbb{C}[t, z] \\ \mathcal{Q}(t, z) &= (1-t)Q(z) + t \in \mathbb{C}[t, z] \end{aligned}$$

Afirmació 1:  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{Q}$  són coprimers.

*Demostració afirmació 1.* Sigui  $\mathcal{G}$  el factor comú, com  $gr_t(\mathcal{P}) = gr_t(\mathcal{Q}) = 1$  es té:

$$gr_t(\mathcal{G}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Si  $gr_t(\mathcal{G}) = 1$  aleshores  $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\mathcal{P}(t, z) = \lambda \mathcal{Q}(t, z)$ .

Ho avaluem en  $t = 0$  i tenim que  $P = \lambda Q$  que és una contradicció.

Per tant,  $gr_t(\mathcal{G}) = 0$  o equivalentment,  $\mathcal{G} \in \mathbb{C}[z]$ . Com  $P$  i  $Q$  són coprimers,  $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^*$ , en altres paraules,  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{Q}$  són coprimers.  $\square$

Sigui

$$\mathcal{R}^p(t, z) = \frac{\Phi_1(t, z)}{\Phi_2(t, z)} \quad \text{amb } \Phi_1, \Phi_2 \text{ coprimers}$$

considerem l'equació

$$\Phi_1(t, z) - z \Phi_2(t, z) = 0 \tag{5.1}$$

Tenim que  $gr_z(\mathcal{R}^p) = \max(gr(\Phi_1), gr(\Phi_2)) = d^p$ .  
Per altra banda, també escrivim

$$R^p(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \quad \text{amb } \varphi_1, \varphi_2 \text{ coprimers}$$

i  $gr(R^p) = \max(gr(\varphi_1), gr(\varphi_2)) = d^p$ , mòdul una transformació de Möbius podem suposar que  $gr(\varphi_1) = gr(\varphi_2) = d^p$ .

Tenim que  $\mathcal{R}^p(0, z) = R^p(z)$ . El qual implica que  $\Phi_1(0, z) = \lambda \varphi_1(z)$  i  $\Phi_2(0, z) = \lambda^{-1} \varphi_2(z)$  amb  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Per tant, l'equació (5.1) satisfà les hipòtesis del teorema 5.14 doncs,  $z_0$  és un punt fix de  $R^p$ . Aleshores, existeix  $z(t)$  una sèrie de Puiseux localment convergent, que satisfà l'equació (5.1) i la condició inicial  $z_0$ . És a dir,  $\mathcal{R}^p(t, z(t)) = z(t)$  i  $z(0) = z_0$ .

Segui  $\lambda(t)$  el multiplicador de  $z(t)$  definit per

$$\lambda(t) = \left( \frac{\partial \mathcal{R}^p}{\partial z} \right) (t, z(t))$$

Afirmació 2:  $\lambda(t) \in \mathbb{C}\{t\} \setminus \mathbb{C}$

*Demostració afirmació 2.* Tenim que

$$\frac{\partial \mathcal{R}^p}{\partial z} = \frac{\Psi_1}{\Phi_2^2} \quad \text{amb } \Psi_1 \in \mathbb{C}[t, z]$$

Llavors

$$\lambda(t) = \frac{\Psi_1(t, z(t))}{\Phi_2(t, z(t))^2}$$

i  $\Phi_2(t, z(t))$  és invertible  $\Phi_2(0, z_0) \neq 0$  i estem considerant  $t$  en un entorn del 0. Aleshores  $\lambda(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ .

Per altra banda,  $t \mapsto \lambda(t)$  parametriza un entorn d'una branca d'una "funció" algebraica. Els valors d'aquesta funció algebraica a  $t = 1$  són els multiplicadors dels punts fixos de  $z \mapsto z^{d^p}$ . Els punts fixos de  $z^{d^p}$  són el 0, l' $\infty$  i  $1^{1/(d^p-1)}$  i els seus respectius multiplicadors són 0 en el cas del 0 i  $\infty$  i en el cas de  $z = 1^{1/(d^p-1)}$ , la respectiva derivada és  $d^p z^{d^p-1}$  i per tant el multiplicador val  $d^p$ . Per tant els multiplicadors prenen els valors 0 i  $d^p$ . Llavors,  $\lambda(t)$  no és constant  $\implies \lambda(t) \in \mathbb{C}\{t\} \setminus \mathbb{C}$ .  $\square$

Aquesta afirmació i el fet que per a  $t = 0$ ,  $\lambda(0) = \lambda(z_0)$  tenim que

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \beta t^{s/q} + \mathcal{O}\left(t^{(s+1)/q}\right) \quad \text{amb } \beta \neq 0$$

Triem  $t = \delta \mu$  amb  $|\delta| = 1$  i  $0 < \mu < \epsilon$  per  $\epsilon$  petit. Aleshores tenim que  $|\lambda(t)| \neq 1$  a no ser que  $\frac{\beta}{\lambda(0)} \delta^{s/q} \in i\mathbb{R}$ , ja que

$$\lambda(t) = \lambda(0) \left( 1 + \left( \frac{\beta}{\lambda(0)} \delta^{s/q} \right) \mu^{s/q} \right) + \mathcal{O}\left(\mu^{(s+1)/q}\right)$$

i en aquest cas només hauríem d'evitar la direcció vertical en el disc unitat. És a dir, triem  $\delta$  de manera que  $\frac{\beta}{\lambda(0)} \delta^{s/q} \notin i\mathbb{R}$ . A la figura 6, hi ha una representació del que estem comentant, els valors que ens interessin són aquells que tallen el cercle unitat de manera

secant, d'aquesta manera depenent del paràmetre  $\delta$ , el multiplicador anirà a parar dins del cercle, significat que és atractor, o fora del cercle, significat que és repulsor. Observem, però, que si triem un valor de  $\delta$  tal que  $\frac{\beta}{\lambda(0)}\delta^{s/q} \notin i\mathbb{R}$ , i fa que el multiplicador del cycle sigui major que 1, aleshores canviant  $\delta$  per  $-\delta$  estariem considerant el costat que està a l'interior de la circumferència unitat, fent que el multiplicador tingui mòdul menor que 1, i el cycle sigui atractor.

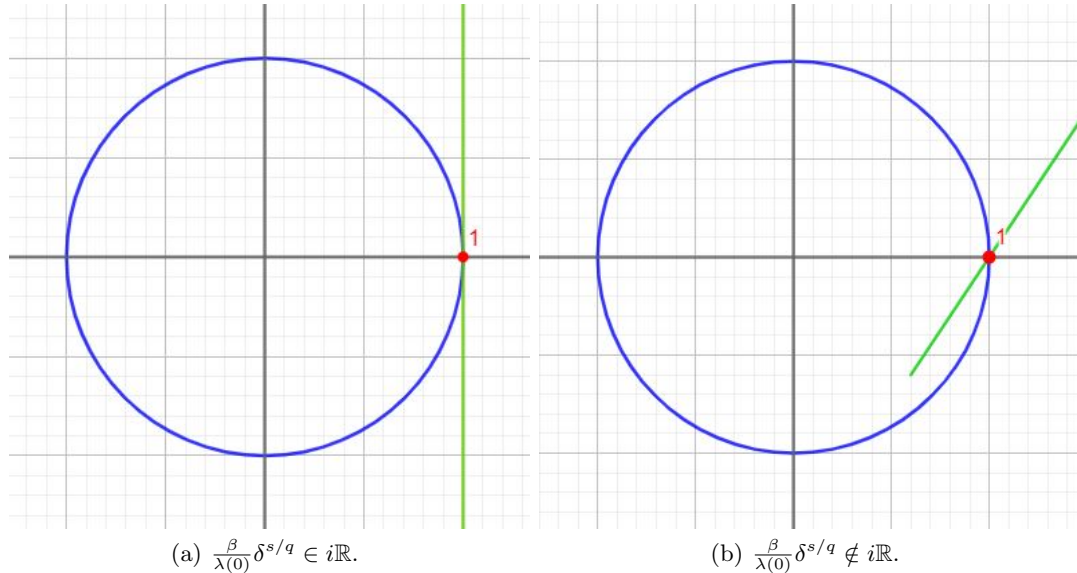


Figura 6: Els dos possibles casos del comportament del multiplicador. La figura 6a, és el valor que volem evitar perquè no sabem quin serà el seu comportament a causa de la possible pertorbació de l'ordre superior a  $(s + 1)/q$ . En canvi, la figura 6b, és un dels possibles valors que busquem perquè talla la circumferència de forma secant i la possible pertorbació de l'ordre superior a  $(s + 1)/q$  no canviarà aquest resultat.

Considerem ara  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  cicles neutres de  $R$ , via Möbius, podem suposar que cap d'ells té el punt de l'infinit, ja que tenim finits punts. Per tots els arguments anteriors, podem trobar un  $\delta$  tal que  $|\delta| = 1$  i que per a qualsevol dels cicles  $\alpha_j$  per  $1 \leq j \leq k$  es compleixi que  $\frac{\beta_j}{\lambda_j(0)}\delta^{s/q} \notin i\mathbb{R}$ , ja que només hi ha un nombre finit de  $\delta$ 's a evitar. Avaluem ara aquest  $\delta$  i poden succeir dues coses. La primera és que com a mínim la meitat d'aquests cicles tinguin multiplicador menor que 1. La segona és que com a mínim la meitat d'aquests cicles tinguin multiplicador major que 1. En el segon cas, considerant  $-\delta$  i tornant a avaluar el multiplicador, obtenim, pels raonaments anteriors, que com a mínim la meitat dels cicles neutres tindrien el multiplicador menor que 1. En tots dos casos, podem trobar una  $\delta$  tal que més de la meitat dels cicles neutres es converteixin en atractors per una petita pertorbació.

Resumint, hem obtingut que com a mínim la meitat dels cicles neutres es converteixen en atractors per una petita pertorbació. Com el teorema 5.11 ens donava una cota del fet que com a molt hi ha  $2d - 2$  cicles atractors, i les pertorbacions no destrueixen els cicles atractors, obtenim que com a molt la suma dels cicles atractors i la meitat dels cicles neutres és  $2d - 2$ , reescriuint la desigualtat, acabem de veure que hi ha com a molt  $4d - 4$  cicles atractors i neures, en altres paraules, en una funció racional  $R$  hi ha com a molt  $4d - 4$  cicles no repulsors. Acabem d'aquesta manera la demostració de l'enunciat.  $\square$

## 5.2 Densitat dels punts periòdics repulsors

En aquesta secció estudiarem dos resultats importants, el primer és la caracterització del conjunt de Julia, i el segon és la idea que el conjunt de Julia és autosemblant.

**Teorema 5.16.** *El conjunt de Julia  $\mathcal{J}$  és l'adherència dels punts periòdics repulsors.*

*Demostració.* La idea d'aquesta demostració és veure que no existeix cap disc obert que intersequi amb  $\mathcal{J}$  que no contingui punts periòdics i amb les propietats del conjunt i la cota dels cicles periòdics acabar la demostració. Comencem.

Suposem que existeix un disc obert  $U$  que interseca amb el conjunt de Julia i que no conté punts fixos de cap  $R^n$ ,  $n \geq 1$ . Com  $\mathcal{J}$  és perfecte, podem assumir que  $U$  no conté pols ni punts crítics. Aleshores, existeixen dues branques de  $R^{-1}$  en  $U$ , que els hi direm  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Definim

$$f_n = \frac{R^n - \phi_1}{R^n - \phi_2} \cdot \frac{z - \phi_2}{z - \phi_1}$$

que és una funció meromorfa a  $U$  que no pren els valors 0, 1,  $\infty$ , ja que

$$\begin{aligned} f_n(z) = 0 &\iff (R^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z)) = 0 \iff \begin{cases} R^n(z) = \phi_1(z) \\ o \\ z = \phi_2(z) \end{cases} \\ f_n(z) = \infty &\iff (R^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z)) = 0 \iff \begin{cases} R^n(z) = \phi_2(z) \\ o \\ z = \phi_1(z) \end{cases} \end{aligned}$$

cap de les dues condicions poden succeir en cap dels dos casos doncs, en la primera condició dels dos casos no hi ha punts periòdics en  $U$  i en la segona condició, no hi ha punts fixos en  $U$ . I

$$\begin{aligned} f_n(z) = 1 &\iff \frac{(R^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z))}{(R^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z))} = 1 \iff \\ &\iff (R^n(z) - \phi_1(z))(z - \phi_2(z)) = (R^n(z) - \phi_2(z))(z - \phi_1(z)) \iff \\ &\iff \phi_2(z)(z - R^n(z)) = \phi_1(z)(z - R^n(z)) \iff \begin{cases} R^n(z) = z \\ o \\ \phi_2(z) = \phi_1(z) \end{cases} \end{aligned}$$

cap de les dues condicions poden passar, perquè en la primera no hi ha punts fixos en  $U$  i en la segona, les dues branques són diferents.

Pel teorema de Montel 2.13  $\{f^n\}_n$  és una família normal en  $U$  i per tant  $\{R^n\}_n$  també és normal en  $U$ , una contradicció, ja que  $\mathcal{J} \cap U \neq \emptyset$ . Aquest fet comporta que els punts periòdics són densos en  $\mathcal{J}$ . Com el conjunt de Julia és infinit i perfecte, i hi ha un nombre finit de cicles atractors i neutres (5.15), els cicles repulsors són densos en  $\mathcal{J}$ .  $\square$

**Teorema 5.17.** *Sigui  $U$  un obert que interseca amb el conjunt de Julia. Aleshores per un  $N$  enter suficientment gran, tenim que  $R^N(U \cap \mathcal{J}) = \mathcal{J}$ .*

*Demostració.* Aquesta demostració es basa en el resultat anterior, però en aquest cas sabem que en  $U$  hi ha un punt periòdic repulsor. Agafem  $z_0 \in U \cap \mathcal{J}$  un punt periòdic repulsor de període  $p$ , és a dir,  $R^p(z_0) = z_0$ . Escollim  $V \subset U$  com un obert complint que  $z_0 \in V$  i que  $V \subset R^p(V)$ . Aleshores  $R^{p(i-1)}(V) \subset R^{pi}(V)$  per  $i \geq 1$ . Com els punts

excepcionals pertanyen al conjunt de Fatou tenim que  $\mathcal{J} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E(R)$ , i pel teorema 5.4 obtenim que

$$\mathcal{J} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E(R) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} R^{pi}(V)$$

Com el conjunt de Julia és un compacte, i la successió dels conjunts  $R^{pi}(V)$  és creixent, pel teorema de Heine-Borel, tenim que  $\mathcal{J} \subset R^{pi}(V)$  per alguna  $i$ . Per tant si definim  $N = pi$ , obtenim que  $\mathcal{J} = R^N(U \cap \mathcal{J})$ . Aquesta igualtat és certa per a  $j \geq N$  ja que si  $j = N + k$ ,  $\mathcal{J} = R^k(\mathcal{J}) = R^{N+k}(U \cap \mathcal{J}) = R^j(U \cap \mathcal{J})$ .  $\square$

Aquest teorema ens dóna que el conjunt de Julia és autosemblant de manera conforme a tot arreu, és a dir, és la idea que si considerem un subconjunt tan petit com vulguem del conjunt de Julia, si iterem suficientment cops aquest conjunt, obtenim el conjunt de Julia original de la funció.

### 5.3 El conjunt de Julia d'un polinomi

En aquesta secció considerarem polinomis, és a dir que la funció  $R = P$  amb  $P$  un polinomi de grau  $d \geq 2$ . Aquestes funcions tenen un punt fix superatractor a  $l'_{\infty}$  com vam veure a la proposició 3.9. Pel principi del mòdul màxim tenim que a totes les components connexes de  $\mathcal{F}$  que siguin acotades, les iteracions de  $P$  estan acotades. Per tant, si la conca d'atracció de  $l'_{\infty}$  tingués més d'una component connexa, la que no contingüés a  $l'_{\infty}$ , seria acotada i per tant les iteracions també ho estarien, que és una contradicció amb el fet de pertànyer a  $A(\infty)$ . Consegüentment,  $A(\infty) = A^*(\infty)$  és connexa i pel teorema 5.7 el conjunt de Julia coincideix amb  $\partial A(\infty)$ .

Ara introduïrem una variació del conjunt de Julia que s'utilitza en l'estudi de les iteracions dels polinomis.

**Definició 5.18.** *El conjunt de Julia ple, que es denota per  $\mathcal{K}$ , és la unió del conjunt de Julia i les components connexes acotades del conjunt de Fatou. De manera que  $z \in \mathcal{K}$  si i només si les iteracions  $P^n(z)$  estan acotades.*

Aquesta propietat dóna una manera de programar gràfics del conjunt de Julia i de  $\mathcal{K}$ . Per  $\mathcal{K}$ , pintar de color vermell el valor  $z$  si  $|P^n(z)| < C$  per  $1 \leq n \leq N$ , si no, pintar  $z$  de blanc. Per  $\mathcal{J}$ , es repinta de manera que  $z$  es converteix en blanc si tot el seu entorn és vermell.

## 6 Polinomis quadràtics i el conjunt de Mandelbrot

En aquesta darrera secció, estudiarem de manera breu la família de polinomis quadràtics. Veurem com a partir de tot l'estudiat anteriorment obtenim propietats i característiques d'aquesta família i introduïrem alguna propietat interessant.

Per començar veurem que l'estudi dels polinomis quadràtics es redueix a l'estudi dels polinomis de la forma  $z^2 + c$  gràcies a diverses conjugacions.

**Proposició 6.1.** *Sigui  $P$  un polinomi quadràtic de la forma  $P(z) = az^2 + bz + d$  amb  $a \neq 0$ . Aleshores:*

1. *Existeix una transformació de Möbius  $\mu$  tal que  $\mu \circ P \circ \mu^{-1} = v^2 + c$ .*
2. *Sigui  $\eta$  una altra transformació de Möbius tal que  $\eta \circ P \circ \eta^{-1} = v^2 + c'$ , aleshores  $c = c'$ .*

Abans de la demostració farem una observació que ens serà útil en la demostració.

**Observació 6.2.** Si conjuguem un polinomi amb  $\psi(w) = w - x$ , aconseguim moure qualsevol valor  $x$  al 0.

*Demostració.* Comencem demostrant el primer apartat:

Considerem un polinomi quadràtic de la forma  $P(z) = az^2 + bz + d$ . A aquest polinomi li apliquem una primera conjugació amb la funció  $\varphi(z) = az$ , aleshores tenim que  $\varphi^{-1}(w) = w/a$  i

$$Q(w) = \varphi \circ P \circ \varphi^{-1}(w) = w^2 + bw + d/a$$

Reanomenant les constants obtenim que  $P$  està conjugat a un polinomi mònic de la forma  $Q(w) = w^2 + \alpha w + \beta$ . Conjuguem ara el polinomi  $Q$  per moure un dels punts fixos al 0. Sigui  $x$  un punt fix de  $Q$

$$Q(x) = x \implies x^2 + \alpha x + \beta - x = 0$$

A més,

$$Q'(w) = 2w + \alpha \implies Q'(x) = 2x + \alpha = \lambda$$

Conjuguem  $Q$  amb la funció  $\psi(w) = w - x$ , aleshores  $Q$  està conjugat a  $R$  amb

$$\begin{aligned} R(u) &= \psi \circ Q \circ \psi^{-1}(u) = (u + x)^2 + \alpha(u + x) + \beta - x = \\ &= u^2 + u^2 + 2xu + \alpha u + \alpha x + \beta - x = u^2 + 2xu + \alpha u = u^2 + u(2x + \alpha) = \\ &= u^2 + u\lambda \end{aligned}$$

On  $\lambda$  és el multiplicador del punt fix. De manera que ara obtenim que  $P$  està conjugat a  $R$ . Observem, però que aquesta conjugació no és única perquè tenim dos punts fixos diferents de l'infinit. Finalment, movem el punt crític de  $R$ , que no és l'infinit, al zero. Per fer-ho mirem quin és el punt crític de  $R$

$$R'(u) = 2u + \lambda \implies u = \frac{-\lambda}{2}$$



Conjuguem  $R$  amb la funció  $\phi(u) = u + \lambda/2$  i obtenim que  $R$  està conjugada a

$$\begin{aligned} S(v) &= \phi \circ R \circ \phi^{-1}(v) = \left(v - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda \left(v - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\lambda}{2} = v^2 + \frac{\lambda^2}{4} - \lambda v + \lambda v - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{2} = \\ &= v^2 + \frac{\lambda^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda}{4} = v^2 + \frac{2\lambda - \lambda}{4} \end{aligned}$$

Anomenant  $c = (2\lambda - \lambda)/4$ , arribem al fet que  $P(z) = az^2 + bz + d$  està conjugada a  $S(v) = v^2 + c$ . Si considerem  $\mu = \phi \circ \psi \circ \varphi$ , aquesta és una transformació de Möbius i compleix que  $\mu \circ P \circ \mu^{-1} = v^2 + c$ . Com volíem veure.

Demostrem ara el segon apartat:

Per veure aquest apartat tenim prou en veure el cas en què  $P(z) = z^2 + c$ , és a dir, volem veure que si existeix una transformació de Möbius  $\eta$  tal que  $\eta \circ P \circ \eta^{-1} = v^2 + c'$ , aleshores  $c = c'$ .

Recordem que en una conjugació els punts fixos d'una funció, van a parar a punts fixos de l'altre i el punt fix de la segona funció, és la imatge per la conjugació del primer punt fix. Els punts crítics d'una funció també són enviats per la conjugació a punts crítics.

Suposem primer que  $c \neq 0$  i  $c' \neq 0$ , aleshores les dues funcions  $P(z) = z^2 + c$  i  $Q(v) = v^2 + c'$  tenen un punt fix a l'infinit, i un punt crític que no és fix al zero. Perquè l'infinit pugui ser un punt fix de  $Q$  i que les dues funcions estiguin conjugades, la transformació de Möbius ha de ser de la forma  $\eta(v) = \alpha v + \beta$ . I perquè el 0 vagi al 0, obtenim una altra reducció i obtenim que la transformació de Möbius ha de ser de la forma  $\eta(v) = \alpha v$ . Ara, perquè la conjugació envii  $P$  a  $Q$  tenim que

$$Q(v) = \eta \circ P \circ \eta^{-1}(v) = \frac{v^2}{\alpha} + \alpha c \implies v^2 + c' = \frac{v^2}{\alpha} + \alpha c$$

Aquesta igualtat només es compleix si  $\alpha = 1$  i en aquest cas  $c = c'$ .

Suposem ara que  $c = 0$ , aleshores  $P(z) = z^2$  i té dos punts fixos que també són punts crítics, l'infinit i el zero. Per la proposició 4.6 sabem que tant  $P$  com  $Q$  tenen 2 punts crítics. En el cas de  $Q$  els punts crítics són l'infinit i el zero, i per la conservació de les propietats dels punts fixos i crítics de les conjugacions, obtenim que el zero també ha de ser un punt fix de  $Q$ , de manera que  $c' = 0$  i per tant,  $c = c'$ . El cas que  $c' = 0$  és igual que aquest.

D'aquesta manera hem demostrat que en tots els casos  $c = c'$ . □

A conseqüència del resultat anterior, sabem que estudiar la família dels polinomis quadràtics, es redueix a estudiar la família de funcions  $P_c(z)$ , amb  $c$  un paràmetre complex i definida per

$$P_c(z) = z^2 + c$$

Per tant, el que ens interessa estudiar a partir d'ara, és el comportament dinàmic del  $P_c$  en funció del paràmetre  $c$ . Recordem que en els polinomis, l'infinit és un punt fix superatractor i que el punt crític de les funcions  $P_c$  és el 0.

**Observació 6.3.** En aquesta secció i per reduir notació, al conjunt de Julia del polinomi  $P_c$  el denotarem per  $\mathcal{J}_c$

Una característica d'aquests polinomis és que si  $P_c^n(0) \rightarrow \infty$ , aleshores el conjunt de Julia  $\mathcal{J}_c$  és totalment disconnex. Altrament,  $P_c^n(0)$  està acotat, i  $\mathcal{J}_c$  és connex. De fet, aquest és un cas particular de dos resultats més generals sobre polinomis dels quals podem trobar les demostracions al capítol 3.4 del llibre [1]. El primer diu que el conjunt de Julia d'un polinomi és connex si i només si no hi ha punts crítics finits del polinomi a la conca d'atracció de l'infinit, és a dir, si i només si l'òrbita de cada punt crític finit del polinomi està acotada. El segon resultat diu que si les iteracions dels punts crítics del polinomi tendeixen a infinit, aleshores el conjunt de Julia és totalment disconnex.

**Definició 6.4.** *El conjunt de paràmetres on  $P_c^n(0)$  està acotat s'anomena Conjunt de Mandelbrot, el denotem per  $\mathcal{M}$ .*

Aquest conjunt és de gran interès i  $z \in \mathcal{M}$  si i només si 0 no pertany a la conca d'atracció del punt fix superatractor  $\infty$ , és a dir, si el seu conjunt de Julia és connex. A la figura 7 podem veure una representació acurada d'aquest conjunt.

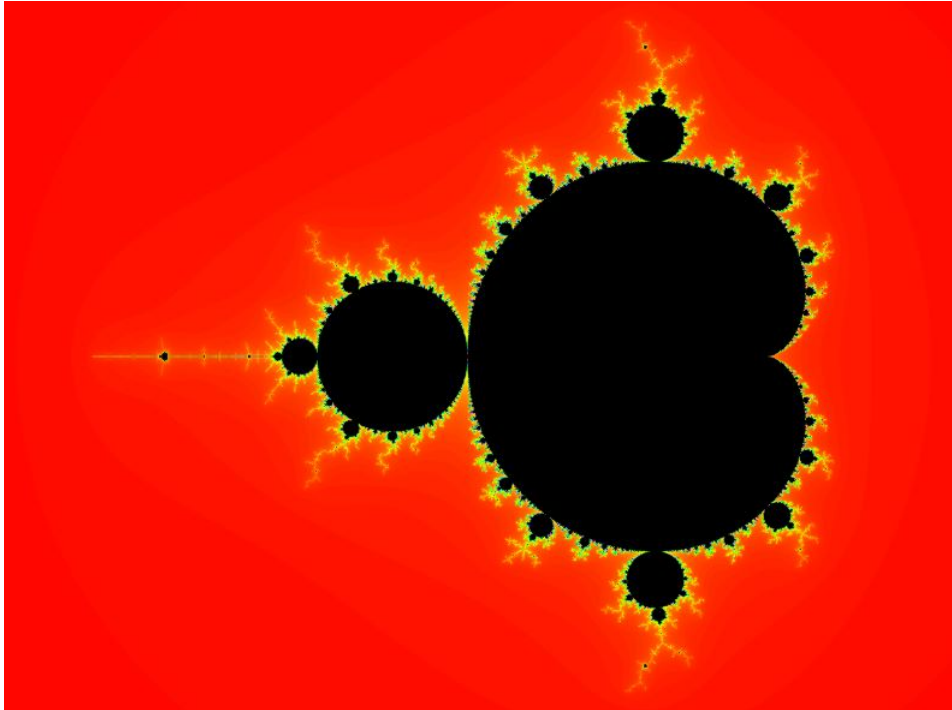


Figura 7: El conjunt de Mandelbrot

**Teorema 6.5.** *El conjunt de Mandelbrot  $\mathcal{M}$  és un subconjunt del disc centrat en el 0 i radi 2, és a dir, del conjunt  $\{|c| \leq 2\}$ . És més,  $\mathcal{M}$  consisteix precisament en les  $c$  tal que  $\forall n \geq 1, |P_c^n(0)| \leq 2$ .*

*Demostració.* Primer de tot veurem una desigualtat. Si  $|c| > 2$  aleshores es compleix que  $\forall n \geq 1, |P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}}$ . Anem a veure què és cert per inducció en  $n$ .

n=1:  $|P_c(0)| = |c|$  i l'enunciat es compleix.

H.I: Suposem-ho cert per a  $n$  i anem a veure que per a  $n + 1$  també es compleix.

$$\begin{aligned} |P_c^{n+1}(0)| &= |P_c(P_c^n(0))| = |P_c^n(0)^2 + c| \geq |P_c^n(0)^2| - |c| \geq \\ &\geq \left(|c|(|c| - 1)^{2^{n-1}}\right)^2 - |c| = |c|^2(|c| - 1)^{2^n} - |c| \end{aligned}$$

Com  $|c| \geq 2$ ,  $|c|^2 \geq 2|c|$  i observem que  $|c| - 1 \geq 1$ , aleshores, seguint el càlcul tenim que

$$|P_c^{n+1}(0)| \geq 2|c|(|c| - 1)^{2^n} - |c|(|c| - 1)^{2^n} = |c|(|c| - 1)^{2^n}$$

Per tant, si  $|c| \geq 2$ ,  $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$  i  $c \notin \mathcal{M}$ . Com a conseqüència  $\mathcal{M} \subseteq \{|c| \leq 2\}$ .

Ara anem a veure que  $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \forall n \geq 1, |P_c^n(0)| \leq 2\}$ . Pel resultat anterior, considerem  $|c| \leq 2$ . Suposem que  $|P_c^n(0)| = 2 + \delta$  amb  $\delta > 0$  per alguna  $n \geq 1$ . Aleshores

$$\begin{aligned} |P_c^{n+1}(0)| &= |(P_c^n(0))^2 - c| \geq |(P_c^n(0))^2| - |c| \geq (2 + \delta)^2 - |c| \\ &\geq 4 + 4\delta + \delta^2 - 2 \geq 2 + 4\delta \end{aligned}$$

Per inducció en la composició obtenim que

$$\begin{aligned} |P_c^{n+k}(0)| &= |P_c(P_c^{n+k-1}(0))| \geq |(P_c^{n+k-1}(0))^2| - |c| \geq (2 + 4^{k-1}\delta)^2 - |c| \geq \\ &\geq 4 + 4^{2k-2}\delta^2 + 4 \cdot 4^{k-1}\delta - |c| \geq 4 + 4^k\delta - 2 = 2 + 4^k\delta \end{aligned}$$

Per tant,  $|P_c^{n+k}(0)| \geq 2 + 4^k\delta \rightarrow \infty$  quan  $k \rightarrow \infty$  i per tant  $c \notin \mathcal{M}$ . Demostrant així que el conjunt de Mandelbrot són les  $c$  complint que  $\forall n \geq 1, |P_c^n(0)| \leq 2$   $\square$

Aquest resultat que hem obtingut ens dona un algorisme simple que ens permet representar el conjunt de Mandelbrot  $\mathcal{M}$ . Si  $|P_c^n(0)| \leq 2$  per  $1 \leq n \leq 1000$ , pintar el punt  $c$  de negre, si no, pintar-lo de blanc.

El conjunt de Mandelbrot té diverses característiques que no demostrarem, però que són interessants a comentar.  $\mathcal{M}$  és un conjunt tancat simplement connex que interseca amb l'eix real a l'interval  $[-2, 1/4]$  i que conté la cardioide principal definida per  $\{w : |1 - \sqrt{1 - 4w}| \leq 1\}$ . Les demostracions d'aquestes propietats les podem trobar al capítol 6.2 del llibre [3] i al capítol 9.10 del llibre [2].

Uns valors que són d'especial interès, són els paràmetres de  $c$  pels quals la funció  $P_c$  té un cicle superatractor. El punt crític ha de pertànyer al cicle, per tant, els paràmetres que estem buscant són exactament els  $c$ 's pels quals el punt 0 és periòdic. Aquestes  $c$ 's són les solucions de  $P_c^n(0) = 0$  i per cada  $n \geq 1$  trobem les  $c$ 's per al qual la funció  $P_c$  té un cicle superatractor de període  $n$ . Mostrem ara algunes de les iteracions a les quals hem de trobar els 0's

$$\begin{aligned} P_c(0) &= c \\ P_c^2(0) &= c^2 + c \\ P_c^3(0) &= (c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c \\ P_c^4(0) &= c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c \end{aligned}$$

Per  $n = 1$ ,  $P_c(0) = 0 \iff c = 0$ . De manera que tenim un punt fix superatractor en el 0 per la funció  $P_0(z) = z^2$ .

Per  $n = 2$ ,  $P_c^2(0) = 0$  equival a  $c^2 + c = 0$ , que ens dona el paràmetre  $c = -1$ , obtenint que la funció  $P_{-1}(z) = z^2 - 1$  té un cicle superatractor de període 2 i el cicle és  $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$ .

Per  $n = 3$ , hem de trobar les solucions de  $c^3 + 2c^2 + c + 1$ , ja que  $c = 0$  queda exclosa. Hi ha tres solucions d'aquesta equació, unes aproximacions són  $-1.755$  i  $-0.123 \pm 0.745i$ . La solució real està situada en l'antena del conjunt de Mandelbrot, aquesta és la recta

final que es veu en la figura 7, i el punt està en la zona pintada de negre final. De fet, està situada quasi al final de l'eix real del conjunt de Mandelbrot, ja que acaba en el  $-2$ . Les altres dues solucions són adherents al cardioide principal, un a la part superior i l'altre a la part inferior, de fet són simètrics i els respectius conjunts de Julia també. El conjunt de Julia del paràmetre complex positiu es coneix com "Douady's rabbit" i una representació del seu conjunt de Julia ple és la figura 5b.

**Teorema 6.6.** *Els valors de  $c \in \mathcal{M}$  corresponents als cicles superattractors, s'acumulen en tota la frontera  $\partial\mathcal{M}$ . En particular, l'interior del conjunt de Mandelbrot és dens en  $\mathcal{M}$ .*

*Demostració.* Sigui  $U$  un disc tal que  $U \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$  i tal que  $0 \notin U$ . Suposem que  $U$  no conté cap  $c$  pel qual el 0 és periòdic a  $P_c$ . Considerem una branca de  $\sqrt{-c}$  definida a  $U$  de manera que sigui analítica. Aquesta consideració la podem fer perquè  $U$  és simplement connexa i no conté al punt crític. Tenim que  $P_c^n(0) \neq \sqrt{-c}$  per qualsevol  $n \geq 1$ , ja que en cas contrari,  $P_c^{n+1}(0) = 0$  i 0 seria periòdic.

Definim  $f_n(c) = P_c^n(0)/\sqrt{-c}$  que és holomorfa a  $U$  i observem que la família  $\{f_n\}_n$  omet els valors  $0, 1, \infty$  donat que el 0 no és periòdic,  $P_c^n(0) \neq \sqrt{-c}$  i  $0 \notin U$ . Pel teorema de Montel 2.13, la família  $\{f_n\}_n$  és normal en  $U$ . Com  $U$  talla la frontera del conjunt de Mandelbrot, conté punts  $c$  on  $P_c^n(0)$  està acotada i per tant les  $f_n(c)$  estan acotades, i conté punts  $c$  on  $P_c^n(0) \rightarrow \infty$  i llavors  $f_n(c) \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ . Però aquest fet ens porta a contradicció, la família  $\{f_n\}_n$  no pot ser normal en  $U$ . La contradicció es deu a suposar que  $U$  no conté  $c$ 's tal que el 0 no és periòdic, és a dir, que  $U$  conté cicles superattractors i queda doncs demostrat el resultat que volíem.  $\square$

## 7 Conclusions

Per poder dur a terme la feina presentada anteriorment, he profunditzat en la branca dels nombres complexos, sobretot en l'esfera de Riemann. Tot i no ser gaire complexa, era un món desconegut per mi, encara que molt anomenat durant la carrera. Gràcies a aquest treball, l'he pogut descobrir i comprendre de manera més profunda.

Un cop ben assolida la base, he entrat a la branca de les matemàtiques anomenada dinàmica complexa. Tot i saber la importància de les conjugacions, fins que no he començat l'estudi dels punts crítics i les conjugacions, no he comprès la veritable rellevància que té la seva aplicació.

Pel que fa al conjunt de Julia i al conjunt de Fatou, la meva sorpresa ha estat veure que d'una idea molt bàsica, com és el comportament dels punts en iterar-los en una funció, es converteix en un estudi complex, amb molts matisos a tenir en compte. Referent al conjunt de Julia i al primer resultat important obtingut, que és la densitat dels punts periòdics repulsors en aquest conjunt, dir, que la demostració d'aquest resultat no és extremadament complexa, en canvi, requereix molts enunciats previs, amb una gran dificultat per demostrar-los.

Sobre el conjunt de Mandelbrot, podem comentar, que és un conjunt amb unes propietats molt curioses. Sobre el teorema d'aquest conjunt i la seva densitat, la meva sorpresa ha estat veure, que la demostració no és gaire complexa, sinó que utilitza les eines adequades i ben ordenades per tal d'obtenir el resultat.

En darrer lloc, comentar que queda una finestra oberta cap a l'estudi de tres sectors: el comportament de l'entorn dels punts fixos neutres; l'estudi del potencial en els punts fixos superatractors, per demostrar la relació entre la connexió del conjunt de Julia i els punts crítics d'un polinomi; i l'estudi dels punts de Misiurewicz.

## Referències

- [1] Carleson, L.; Gamelin, T.W.: *Complex Dynamics*, Editors: Axler, S; Gehring, F.G; Halmos, P.R.; Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1993.
- [2] Beardon, A. F.: *Iteration of Rational Functions*, Editors: Ewing, J.H.; Gehring, F.W.; Halmos, P.R.; Graduate Texts in Mathematics 132, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] Steinmetz, N.: *Rational Iteration*, Editors: Bauer, H.; Kazdan, J.L; Zehnder, E.; Studies in Mathematics 16, Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1993.
- [4] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable I*, Editors: Axler, S.; Gehring, F.W.; Ribet, K.A.; Graduate Texts in Mathematics 11, 2a edició, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 1973, 1978.
- [5] Silverman, J.H.: *The Arithmetic of Dynamical Systems*, Editors: Axler, S.; Ribet, K.A.; pàg 9-12, Graduate Texts in Mathematics 241, Springer Science + Business Media, LLC, 2010.
- [6] Casas, E.A.: *Singularities of Plane Curves*, pàg, 15-38, Newton-Puiseux algorithm, London Mathematical Society Lecture Note Series 276, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [7] Ahlfors, L.V.; *Complex Analysis*, 3a edició, McGraw-Hill, 1979.
- [8] Eck, D.J.: *Explore the Mandelbrot Set*, Geneva, New York, <http://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html> (Generador del Conjunt de Mandelbrot).