Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El mètode de la parametrització per a varietats invariants d'aplicacions

Autor: Meritxell Garriga i Xirgu

Director: Dr. Ernest Fontich Julià
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

In this project we will study the parameterization method for invariant manifolds of discrete dynamical systems, a method introduced by X. Cabré, E. Fontich and R. de la Llave in [1, 2]. From a theoretical point of view, we will study and demonstrate the parameterization method for 1-dimensional invariant manifolds, presenting first of all the necessary results to develop this method. Then, from a more practical point of view, we will use the programming language C to create a program that uses the parameterization method to find different 1-dimensional invariant manifolds, applying it on two discrete dynamical systems.

Resum

En aquest treball estudiarem el mètode de la parametrització per a varietats invariants d'aplicacions, introduit per X. Cabré, E. Fontich i R. de la Llave a [1, 2]. Des d'una primera basant teòrica, estudiarem i demostrarem el mètode de la parametrització per trobar varietats invariants 1-dimensionals, exposant en primer lloc tots els resultats necessaris per desenvolupar aquest mètode. Posteriorment, des d'una basant més pràctica, farem ús del llenguatge de programació C per desenvolupar un programa que utilitzi el mètode de la parametrització per trobar diferents varietats invariants 1-dimensionals, aplicant-lo en dos sistemes dinàmics discrets diferents.

2010 Mathematics Subject Classification. 46B07, 46E15, 37M21, 37C25, 46-00, 47B01

Agraïments

Vull agrair primer de tot al meu tutor Ernest Fontich per guiar-me al llarg de tot el treball i ajudar-me sempre que ho he necessitat. Agrair també a la meva família, amics i parella, per recolzar-me sempre, escoltar-me i motivar-me en tot moment. Per últim, vull agrair a tots els companys i professors que he pogut conèixer i que m'han acompanyat aquests anys. Sense ells, estudiar el grau de Matemàtiques no hauria sigut el mateix.

Índex

Introducció

El projecte

Imaginem que portem a terme un estudi per estudiar el creixement al llarg dels mesos de la població de bacteris en una regió concreta, i aquest revela que cada dia es triplica aquesta població. Matemàticament, això es pot representar amb l'equació $x_{n+1} = 3x_n$, on n és el dia corresponent i x_k és la població de bacteris en el dia k. Aquest és un exemple de sistema dinàmic, que descriu l'increment de població de bacteris al llarg dels dies.

Els sistemes dinàmics estudien l'evolució d'una magnitud al llarg del temps. Aquesta evolució ha de seguir una llei en forma d'equació, i l'objectiu inicial és trobar el valor d'aquesta magnitud per a qualsevol valor de temps dins un domini temporal determinat. Si aquest domini és discret, és a dir, si definim el temps en l'espai $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ estarem treballant amb un sistema dinàmic discret; en canvi, si el domini és continu, és a dir, considerem el temps en $\mathbb{R}$, direm que el sistema dinàmic és continu.

Una llei definida per temps discret rep l'estat actual i actualitza la situació produïnt un nou estat. En canvi, una llei definida per temps continu, de manera heurística és el límit d'una llei definida per temps discret considerant cada vegada increments de temps més petits. Desenvoluparem aquest treball en sistemes dinàmics discrets.

Si F és una llei que defineix un sistema dinàmic discret i x és un punt del domini de F, l'òrbita de x sota F és el conjunt de punts $\{x, F(x), F^2(x), \cdots\}$, on $F^k(x)$ és la k-èsima iteració de F en el punt x. Un punt p és un punt fix de F si $F(p) = p$. Finalment, un punt p és un punt periòdic de F de periode $k \geq 1$ si $F^k(p) = p$ però $F^j(p) \neq p$ per tot $1 \leq j < k$.

Els sistemes dinàmics poden ser estudiats des de dos àmbits: per una banda, es poden estudiar quantitativament trobant solucions explícites del sistema, tot i que aquestes poden ser trobades en pocs casos. Per altra banda, poden ser estudiats de manera qualitativa, descrivint les diferents òrbites i estudiant les propietats que descriuen aquestes. Dins l'estudi de les òrbites, hi trobem en particular l'estudi de la dinàmica del sistema prop dels punts fixos i punts periòdics del sistema, si aquests existeixen.

Una part essencial de l'estudi qualitatiu d'un sistema dinàmic són els objectes invariants que aquest té. De manera heurística, un objecte invariant d'un sistema dinàmic és un subespai de l'espai de fases del sistema tal que les òrbites de cada punt que es trobi dins aquest subespai continguin punts dins el mateix subespai. Tal com desenvoluparem en aquest treball, aquesta condició d'invariància resulta en una equació funcional a través de la qual podem trobar una parametrització d'aquest objecte. A més, usant la teoria d'anàlisi funcional podem demostrar propietats de la parametrització trobada, com la diferenciabilitat o l'analiticitat.

De manera intuïtiva, la dinàmica d'un sistema dinàmic discret F en un entorn del punt fix p és similar a la seva part lineal $A := DF(p)$, on $DF(p)$ representa l'aplicació diferencial de F avaluada a p. Partint d'aquesta aplicació podem trobar subespais invariants respecte A, estables o inestables, on subespai estable fa referència a un espai format per punts amb òrbites que tendeixen a p, i anàlogament subespai inestable fa referència a un espai format per punts amb òrbites que tendeixen a p iterant per l'aplicació inversa. Aleshores, a partir d'aquests subespais volem trobar varietats invariants respecte F tangents a aquests subespais, les quals ens donaran molta informació del comportament global d'aquest sistema. Per fer-ho, és necessari justificar la seva existència i trobar una parametrització d'aquests objectes. En aquest treball estudiarem el *Mètode de la parametrització de varietats invariants*, introduït per X. Cabré, E. Fontich i R. de la Llave a [1, 2]. Aquest mètode, ens permet justificar l'existència de les varietats invariants mencionades sota certes condicions de no ressonància. Nosaltres tractarem en concret el mètode de la parametrització per sistemes dinàmics discrets en un cas de varietats 1-dimensionals.

En aquest treball desenvoluparem el mètode de la parametrització dins l'espai de funcions analítiques. L'estudi de la teoria de varietats invariants es remunta a *Poincaré* i *Lyapunov*, en particular pel cas analític, és a dir, quan el sistema dinàmic és analític. Tot i així, el seu estudi es va fer utilitzant mètodes diferents als resultats que presentem en aquest treball, ja que en aquell moment la teoria en espais de Banach i el teorema de la Funció Implícita en espais de Banach no s'havia desenvolupat.

Estructura de la Memòria

Aquest treball comprèn tres blocs.

En primer lloc, dedicarem el primer capítol del treball a introduir els espais de Banach i desenvolupar el càlcul diferencial en espais de Banach, exposant conceptes i resultats que utilitzarem per desenvolupar el mètode de la parametrització. En particular, exposarem resultats tan importants com el Teorema de Taylor, el Teorema recíproc de Taylor i el Teorema de la Funció Implícita. A més, exposarem i demostrarem un teorema que parteix del Teorema recíproc de Taylor i que forma part de l'anàlisi global: l'Omega Lema.

El segon bloc comprèn el segon i el tercer capítol, i està dedicat a l'exposició del mètode de la parametrització, juntament amb l'exposició i demostració del mètode de la parametrització per varietats invariants 1-dimensionals. Per desenvolupar la demostració d'aquest últim resultat, s'utilitza la teoria d'anàlisi funcional en espais de Banach presentada al primer capítol.

Per últim, l'últim bloc comprèn el quart i el cinquè capítol, i està dedicat a la part pràctica del treball. En ella, seguint les indicacions de [5] utilitzo el llenguatge de programació C per desenvolupar un manipulador algebraic que usa el mètode de la parametrització per parametritzar la varietat invariant d'un sistema dinàmic discret com una sèrie truncada a un cert ordre, i per tant trobar els coeficients que defineixen la sèrie truncada resultant. Seguidament, aplicarem aquest mètode en un sistema dinàmic discret particular: l'aplicació d'Henón, calculant la globalització de les varietats locals estable i inestable i obtenint les figures amb les corbes obtingudes. Aquesta és una de les aplicacions 2-dimensionals més simples que mostren comportament caòtic, i ha sigut molt estudiada per la seva baixa dimensió i el comportament caòtic que descriu.
Per últim, farem un estudi anàleg al de l'aplicació d'Henón però per una aplicació que apareix en l'estudi del mètode de la secant com a sistema dinàmic a l'entorn d'una òrbita periòdica de periode tres, d'on es poden treure diferents resultats.

1 Càlcul diferencial en espais de Banach

En aquest capítol, farem un breu resum de diversos resultats sobre espais de Banach, entre ells el càlcul diferencial en espais de Banach, que usarem en les seccions posteriors. Abans d'endinsar-nos en el càlcul diferencial, recordem alguns conceptes importants dels espais de Banach.
Quan la norma $\|\cdot\|$ no especifiqui l'espai on és definida considerarem la norma en l'espai al que fa referència.

1.1 Continuïtat.

Definició 1.1. *Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai vectorial normat. Si E és complet, és a dir, tota succesió de Cauchy és convergent en norma, diem que $(E, \|\cdot\|)$ és un* ***espai de Banach****.*

Els resultats seran descrits en espais de Banach, ja que serà l'espai en el que treballarem al llarg de tot el treball.
Donem ara una condició de continuïtat d'una aplicació lineal entre espais de Banach.

Proposició 1.2. *Siguin E, F espais de Banach, i $A : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores*

$$A \text{ és contínua sii } \quad \exists M > 0 \quad t.q. \quad \|Ae\|_F \leq M\|e\|_E \quad \forall e \in E.$$

Aquesta proposició ens diu que una aplicació lineal contínua entre espais de Banach és també una aplicació acotada. Definim la següent norma:

Definició 1.3. *Siguin E i F dos espais de Banach i $A : E \to F$ una aplicació lineal contínua. Definim la* ***norma operador*** *de A com*

$$\|A\| = \sup\left\{ \frac{\|Ae\|_F}{\|e\|_E} \;\middle|\; e \in E, e \neq 0 \right\}.$$

Aleshores, denotem per $L(E, F)$ l'espai de totes les aplicacions lineals contínues de E a F. Aquest espai, amb la norma operador que acabem de definir és un espai normat, i en particular, com que F és un espai de Banach, $L(E, F)$ és també un espai de Banach.

Observació 1.4. La norma operador de A es pot definir de manera equivalent com:

$$\|A\| = \sup\{\|Ae\|_F \mid \|e\|_E \leq 1\} = \sup\{\|Ae\|_F \mid \|e\|_E = 1\}.$$

1.2 Productes d'espais de Banach i aplicacions multilineals.

Siguin $E_1, \cdots, E_n$ espais de Banach. L'aplicació

$$\|\cdot\| : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}$$

definida per

$$\|(e_1, \cdots, e_n)\| = \|e_1\| + \cdots + \|e_n\|$$

és una norma en l'espai vectorial $E_1 \times \cdots \times E_n$ induint la topologia producte.

L'espai vectorial normat $E_1 \times \cdots \times E_n$ és un espai de Banach, es denota per $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ i s'anomena **suma directa** de $E_1, \cdots, E_n$.

Ara, si $E_1, \cdots, E_n$ i F són espais de Banach, una aplicació $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ és **n-multilineal** si $A(e_1, \cdots, e_n)$ és lineal en cada argument per separat, és a dir, si es compleix

$$A(e_1, \cdots, e_{i-1}, \lambda e_i + \mu f_i, e_{i+1}, \cdots, e_n) = \lambda A(e_1, \cdots, e_n) + \mu A(e_1, \cdots, e_{i-1}, f_i, e_{i+1}, \cdots, e_n).$$

Notació 1. *L'espai de totes les aplicacions n-multilineals contínues de $E_1 \times \cdots \times E_n$ a F es denota $L(E_1, \cdots, E_n; F)$. Si $E_i = E$, $1 \leq i \leq n$, l'espai es denota per $L^n(E; F)$.*

Anàlogament a la proposició 1.2, si A és una aplicació n-multilineal, A és contínua si i només si

$$\exists M > 0 \quad \text{t.q.} \quad \|A(e_1, \cdots, e_n)\|_F \leq M \|e_1\|_E \cdots \|e_n\|_E \quad \forall e_i \in E,\ i = 1, \cdots, n.$$

Si $A \in L(E_1, \cdots, E_n; F)$, associem a l'espai $L(E_1, \cdots, E_n; F)$ la norma

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|A(e_1, \cdots, e_n)\|_F}{\|e_1\|_{E_1} \cdots \|e_n\|_{E_n}} \;\middle|\; e_1, \cdots, e_n \neq 0 \right\},$$

de manera que $L(E_1, \cdots, E_n; F)$ és un espai normat, i com que F és un espai de Banach, $L(E_1, \cdots, E_n; F)$ és també complet i per tant de Banach.

Ara, notem que podem identificar els següents espais de Banach:

$$\begin{aligned} L(E_1, \cdots, E_n; F) &\cong L(E_1, L(E_2, \cdots, E_n; F)) \\ &\cong L(E_1, \cdots, E_{n-1}; L(E_n, F)) \\ &\cong L(E_{i_1}, \cdots, E_{i_n}; F), \end{aligned} \tag{1.1}$$

on $\{i_1, \cdots, i_n\}$ és una permutació de $\{1, \cdots, n\}$.

Definició 1.5. *Siguin E, F espais de Banach. Diem que una aplicació $A \in L^n(E; F)$ és **simètrica** si $A(e_1, \cdots, e_n) = A(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})$, on $\{i_1, \cdots, i_n\}$ és qualsevol permutació de $\{1, \cdots, n\}$.*

Notació 2. *Denotem $L^k_s(E; F)$ el subespai d'elements simètrics de $L^k(E; F)$.*

Observació 1.6. Veiem que $L^k_s(E; F)$ és tancat en $L^k(E; F)$. Aleshores, com que F és un espai de Banach, $L^k_s(E; F)$ també ho és.

1.3 Integració d'aplicacions que prenen valors en espais de Banach.

Un dels resultats més importants en el càlcul diferencial és el Teorema Fonamental del Càlcul. Per enunciar-lo, necessitem presentar la construcció de les integrals d'aplicacions que prenen valors en espais de Banach. Mostrem en primer lloc un resultat que necessitarem per a aquesta construcció.

Teorema 1.7 (Teorema d'Extensió Lineal). *Siguin E, F i G espais de Banach tal que*

(i) $F \subset E$ *i*

(ii) $T \in L(F, G)$.

Llavors, la clausura de F, denotada $\mathrm{cl}(F)$ *és un subespai vectorial normat de E i podem extendre T de manera única a una aplicació $\overline{T} \in L(\mathrm{cl}(F), G)$. A més, es compleix $\|\overline{T}\| = \|T\|$.*

A continuació, descrivim l'espai vectorial de les funcions escalonades.

Definició 1.8 (Funció escalonada). *Considerem l'interval tancat $[a, b] \subset \mathbb{R}$, i l'espai de Banach E. Diem que $f : [a, b] \to E$ és una* ***funció escalonada*** *si existeix una partició $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de manera que f és constant a cada interval $[t_i, t_{i+1}[$.*

Veiem a continuació que el conjunt de funcions escalonades de $[a, b]$ a E, denotat $\mathcal{S}([a, b], E)$, és un subespai vectorial de

$$B([a, b], E) = \left\{ f : [a, b] \to E \;\middle|\; \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\| < \infty \right\},$$

on $\|\cdot\|$ és la norma associada a E.

Siguin f, g dues funcions escalonades definides a l'interval $[a, b]$, i considerem en f la partició $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ i en g la partició $a = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_m = b$. Aleshores, podem construir la funció $f + g : [a, b] \to E$ de manera que $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ i per tant $f + g$ és una nova funció escalonada on la seva partició està formada per a cada t_i, $i = 1, \cdots, n$ i cada t'_j, $j = 1, \cdots, m$.
Anàlogament, podem construir la funció $\lambda f : [a, b] \to E$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ de manera que λf també és una funció escalonada. Això acaba la demostració.

En aquest subespai vectorial podem associar-li la norma $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$, de manera que passa a ser un subespai vectorial normat. A més, com que E és un espai de Banach, $B([a, b], E)$ també ho és. La integral d'una funció escalonada f es defineix per

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) f(t_i).$$

Observem que

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\| \leq (b - a) \|f\|,$$

i per tant, l'operador $\int_a^b : \mathcal{S}([a, b], E) \to E$ és continu.

Aleshores, pel Teorema d'Extensió Lineal podem extendre $\int_a^b$ de manera única a una aplicació $\int_a^b \in L(\mathrm{cl}(\mathcal{S}([a, b], E)), E)$, que s'anomena **Integral de Cauchy-Bochner**.

Aquesta nova aplicació defineix la integral de qualsevol $f \in C^0([a, b], E)$, ja que $C^0([a, b], E) \subset \mathrm{cl}(S([a, b], E))$. Veiem-ho.

Intuïtivament, volem veure que tota $f \in C^0([a,b],E)$ es pot aproximar per una successió d'aplicacions $(g_n)_n$ on $g_n \in S([a,b],E)$ per a tot n, és a dir, si $f \in C^0([a,b],E)$, volem veure que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una aplicació $g \in S([a,b],E)$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$.
Com que $[a,b]$ és compacte, tota aplicació $f \in C^0([a,b],E)$ és uniformement contínua. Sigui $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ el valor corresponent de manera que si $t, t' \in [a,b]$ tal que $|t' - t| < \delta$, aleshores $\|f(t') - f(t)\| < \varepsilon$. Ara, considerem una partició $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ per a tot $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ i construïm la funció escalonada g definida per $g_{|[t_i,t_{i+1}[} = f(t_i)$. Atès que cl $(S([a,b],E)) \subset B([a,b],E)$ i usant la norma associada a $B([a,b],E)$ tenim

$$\|f - g\| = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t) - g(t)\| < \varepsilon,$$

ja que per a tot $t \in [a,b]$ existeix un i tal que $t \in [t_i, t_{i+1}[$ i

$$\|f(t) - g(t)\| = \|f(t) - f(t_i)\| < \varepsilon.$$

Conseqüentment, hem demostrat que $g \in \mathbb{D}_\varepsilon(f)$ i per tant $C^0([a,b],E) \subset S([a,b],E)$.

1.4 Càlcul diferencial en espais de Banach

A continuació, ens endinsem ja en el càlcul diferencial en espais de Banach. Començarem recordant algunes definicions i resultats convenients, els quals usarem seguidament, exposant i demostrant el Teorema de Taylor i el Teorema recíproc de Taylor en espais de Banach, i enunciant el Teorema de la Funció Implícita.

En primer lloc, recordem la definició d'aplicació diferenciable en espais de Banach.

Definició 1.9. *Siguin E, F espais de Banach, U un obert de E i $f : U \subset E \to F$ una aplicació. Sigui $u_0 \in U$. Diem que f és* ***diferenciable al punt*** *u_0 (també es diu que f* ***és Fréchet diferenciable*** *)si existeix una aplicació lineal acotada $Df(u_0) : E \to F$ tal que per a tot $\varepsilon > 0$, existeix una $\delta > 0$ tal que per a tot $0 < \|u - u_0\| < \delta$, tenim*

$$\frac{\|f(u) - f(u_0) - Df(u_0) \cdot (u - u_0)\|}{\|u - u_0\|} < \varepsilon,$$

on $\|\cdot\|$ representa la norma a l'espai corresponent i l'aplicació $Df(u_0)$ avaluada en $e \in E$ es denota per $Df(u_0) \cdot e$.

Aquesta definició també es pot escriure com

$$\lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0) - Df(u_0) \cdot (u - u_0)}{\|u - u_0\|} = 0.$$

La definició d'aplicació diferenciable també pot ser expressada usant la noció de tangència, definida a continuació.

Definició 1.10. *Siguin E i F espais de Banach, amb aplicacions $f, g : U \subset E \to F$ on U és un obert de E. Diem que f i g són* ***tangents al punt*** *$u_0 \in U$si $f(u_0) = g(u_0)$ i*

$$\lim_{u \to u_0} \frac{\|f(u) - g(u)\|}{\|u - u_0\|} = 0.$$

Proposició 1.11. *Siguin E i F espais de Banach i $U \subset E$ un obert de E. Llavors, per una aplicació $f : U \subset E \to F$ i un $u_0 \in U$ existeix com a molt una aplicació $L \in L(E, F)$ tal que l'aplicació $g_L : U \subset E \to F$ definida per $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$ és tangent a f a u_0.*

Aleshores, podem definir les aplicacions diferenciables en termes d'aquesta noció de tangència.

Definició 1.12. *Siguin E i F espais de Banach, i sigui $f : U \subset E \to F$ on U és un obert de E. Diem que f és* ***diferenciable al punt*** *$u_0 \in U$ si existeix un element $L \in L(E, F)$ tal que l'aplicació $g_L : U \subset E \to F$ donada per $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$ és tangent a f a u_0.*
Finalment, si f és diferenciable a u_0, la derivada de f a u_0 és $Df(u_0) = L$. Per la proposició 1.11 tenim que si la derivada existeix, aquesta és única.

De manera més general, tenim

Definició 1.13. *Si f és diferenciable a tot $u_0 \in U$, l'aplicació*

$$Df : U \to L(E, F); \quad u \mapsto Df(u)$$

s'anomena ***derivada de*** *f. A més, si Df és una aplicació contínua (amb la norma operador definida a 1.3) diem que f és de classe C^1 (o és* ***contínuament diferenciable****).*
Inductivament definim:

$$D^r f := D\left(D^{r-1} f\right) : U \subset E \to L^r(E; F)$$

si existeix, on identifiquem $L\left(E, L^{r-1}(E; F)\right)$ amb $L^r(E; F)$. Si $D^r f$ existeix i és contínua, diem que f és de classe C^r.
Conseqüentment, direm que f és de classe C^∞ si és de classe C^r per a tot $r \in \mathbb{N}$.
Per últim, direm que f és de classe C^ω (o que és ***analítica****) si és de classe C^∞ i la sèrie de Taylor[2] de f al voltant de qualsevol punt del domini convergeix a la funció en un entorn del punt.*

Proposició 1.14 (Linealitat de la derivada)**.** *Siguin E, F espais de Banach, $U \subset E$ un obert, $f, g : U \subset E \to F$ aplicacions de classe C^r i a una constant real o complexa. Llavors, af i $f + g : U \subset E \to F$ són aplicacions de classe C^r que compleixen*

$$D^r(f + g) = D^r f + D^r g \quad i \quad D^r(af) = aD^r f.$$

Exposem ara el concepte de diferenciabilitat per una aplicació que pren valors en un espai de Banach $F = F_1 \times \cdots \times F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposició 1.15 (Derivada d'un producte cartesià d'aplicacions)**.** *Siguin $E, F_1, \cdots, F_n$ espais de Banach, i siguin $f_i : U \subset E \to F_i$, $1 \leq i \leq n$, aplicacions de classe C^r. Llavors, l'aplicació $f = f_1 \times \cdots \times f_n : U \subset E \to F_1 \times \cdots \times F_n$ definida per $f(u) = (f_1(u), \cdots, f_n(u))$ és de classe C^r i*

$$D^r f = D^r f_1 \times \cdots \times D^r f_n.$$

[2]Si f és una funció de classe C^∞ i a és un punt del seu domini, la sèrie de Taylor de f al voltant de a és la sèrie de potències següent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Més endavant la tractarem amb més detall.

Per últim, introduirem la notació de Landau, que s'usa per la comparació asimptòtica d'aplicacions i en el nostre cas ens permetrà reformular la definició d'aplicació diferenciable.

Definició 1.16. *L'expressió $o(e)$ denotarà una funció contínua de e definida en un entorn de l'origen d'un espai de Banach E, de manera que $\lim_{e\to 0}\left(\frac{o(e)}{\|e\|}\right) = 0$. El conjunt d'aquestes funcions formen un espai vectorial. Aleshores, $f : U \subset E \to F$ és diferenciable a $u_0 \in U$ si i només si existeix una aplicació contínua $Df(u_0) \in L(E,F)$ tal que*

$$f(u_0 + e) = f(u_0) + Df(u_0) \cdot e + o(e).$$

Enunciem a continuació alguns resultats importants en el càlcul diferencial en espais de Banach.

Teorema 1.17 (Teorema Fonamental del Càlcul)**.** *Sigui F un espai de Banach real.*

(i) Si $g : [a,b] \to F$ és contínua, aleshores l'aplicació

$$f : \,]a,b[\to F \quad \text{definida per} \quad f(t) = \int_a^t g(s)ds$$

és diferenciable i $f' = g$.

(ii) Si $f : [a,b] \to F$ és contínua, diferenciable a l'interval $]a,b[$ i si f' s'extén a una aplicació contínua a $[a,b]$, llavors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds.$$

Enunciem ara la Regla de la cadena.

Teorema 1.18 (Regla de la cadena)**.** *Siguin E, F i G espais de Banach, U un obert de E, V un obert de F i siguin $f : U \to V$ i $g : V \to G$ diferenciables (resp. C^r). Aleshores $g \circ f$ és diferenciable (resp. C^r) i*

$$D(g \circ f)(u) = Dg(f(u)) \circ Df(u).$$

Un cas particular de la Regla de la cadena ens porta a enunciar la Regla del producte.

Teorema 1.19 (Regla del producte o Regla de Leibniz)**.** *Siguin E, F_1, F_2 i G espais de Banach, $f_i : U \subset E \to F_i$, $i = 1,2$, aplicacions diferenciables (resp. C^r) i $B \in L(F_1, F_2; G)$. Llavors l'aplicació $B(f_1, f_2) = B \circ (f_1 \times f_2) : U \subset E \to G$ és diferenciable (resp. C^r) i*

$$D(B(f_1, f_2))(u) \cdot e = B(Df_1(u) \cdot e, f_2(u)) + B(f_1(u), Df_2(u) \cdot e).$$

Una conseqüència de la regla de la cadena involucra el concepte de derivada direccional.

Definició 1.20. *Sigui $f : U \subset E \to F$ i sigui $u \in U$. Diem, que f* ***té derivada en la direcció*** *$e \in E$ a u si*

$$\left.\frac{d}{dt}f(u+te)\right|_{t=0}$$

existeix. Anomenem aquest element de F ***derivada direccional de f en la direcció*** *e a u.*

Aleshores, la següent proposició ens permetrà computar $Df(u) \cdot e$.

Proposició 1.21. *Si f és diferenciable a u, llavors les derivades direccionals de f existeixen a u i venen donades per*

$$\left.\frac{d}{dt}f(u+te)\right|_{t=0} = Df(u) \cdot e.$$

A continuació, enunciem la Desigualtat del valor mig, però abans necessitem un resultat previ.

Proposició 1.22. *Siguin E i F espais de Banach reals i $U \subset E$ un obert de E. Considerem una aplicació $f : U \subset E \to F$ de classe C^1, $x, y \in U$ i un arc c de classe C^1 connectant x amb y; és a dir, c és una aplicació contínua $c : [0,1] \to U$, de classe C^1 a $]0,1[$, $c(0) = x$, i $c(1) = y$. Llavors*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(c(t)) \cdot c'(t)dt.$$

Si U és convex i $c(t) = (1-t)x + ty$, llavors

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df((1-t)x+ty) \cdot (y-x)dt = \left(\int_0^1 Df((1-t)x+ty)dt\right) \cdot (y-x).$$

Proposició 1.23 (Desigualtat del valor mig)**.** *Siguin E i F espais de Banach, $U \subset E$ convex i $f : U \subset E \to F$ una aplicació C^1. Aleshores, per a tot $x, y \in U$*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df((1-t)x+ty)\|\right] \|y-x\|.$$

Conseqüentment, si $\|Df(u)\|$ és uniformement acotat a U per una constant $M > 0$, llavors per a tot $x, y \in U$

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y-x\|.$$

Si $F = \mathbb{R}$, llavors $f(y) - f(x) = Df(c) \cdot (y-x)$ per alguna c en la línia que uneix x amb y.

Una altra propietat important fa referència a la simetria de les derivades parcials mixtes. Abans d'enunciar-la, exposem la definició de derivada parcial en espais de Banach. Tractarem funcions de dues variables, la definició general és anàloga.

Definició 1.24. *Siguin E_1, E_2 i F espais de Banach, $f : U \to F$ una aplicació definida al conjunt obert $U \subset E_1 \oplus E_2$ i $u_0 = (u_{01}, u_{02}) \in U$. Les derivades de les aplicacions $v_1 \mapsto f(v_1, u_{02}), v_2 \mapsto f(u_{01}, v_2)$, on $v_1 \in E_1$ i $v_2 \in E_2$, si existeixen, s'anomenen* ***derivades parcials*** *de f a $u_0 \in U$ i es denoten per $D_1 f(u_0) \in L(E_1, F)$, $D_2 f(u_0) \in L(E_2, F)$.*

Proposició 1.25. *Siguin E_1, E_2, i F espais de Banach, $U \subset E_1 \oplus E_2$ un obert i $f : U \to F$ una aplicació.*

(i) Si f és diferenciable, llavors les derivades parcials existeixen i estan definides per

$$D_1 f(u) \cdot e_1 = Df(u) \cdot (e_1, 0) \quad i \quad D_2 f(u) \cdot e_2 = Df(u) \cdot (0, e_2).$$

(ii) Si f és diferenciable, llavors

$$Df(u) \cdot (e_1, e_2) = D_1 f(u) \cdot e_1 + D_2 f(u) \cdot e_2.$$

(iii) f és de classe C^r sii $D_i f : U \to L(E_i, F)$, $i = 1, 2$, existeixen i són de classe C^{r-1}.

D'aquesta manera, en els espais de Banach tenim:

Proposició 1.26. *Siguin E, F espais de Banach, i $U \subset E$ un obert de E. Si $f : U \subset E \to F$ és de classe C^r, llavors $D^r f(u) \in L_s^r(E; F)$; és a dir, $D^r f(u)$ és simètric.*

Per enunciar el Teorema de Taylor, necessitem definir primer el concepte d'engrossiment.

Proposició 1.27. *Sigui E un espai de Banach, i $U \subset E$ un conjunt obert i convex. Com que l'aplicació suma $+ : E \times E \to E$ és contínua, existeix un obert $\tilde{U} \subset E \times E$ tal que:*

(i) $U \times \{0\} \subset \tilde{U}$,

(ii) $u + \xi h \in U$ per a tot $(u, h) \in \tilde{U}$ i $0 \leq \xi \leq 1$, i

(iii) $(u, h) \in \tilde{U}$ implica que $u \in U$.

Anomenarem aquest conjunt $\tilde{U}$ un **engrossiment** de U.

Teorema 1.28 (Teorema de Taylor)**.** *Siguin E, F espais de Banach, i $U \subset E$ un subconjunt obert de E. Si una aplicació $f : U \subset E \to F$ és de classe C^r, les derivades*

$$D^k f : U \subset E \to L_s^k(E; F), \quad k = 1, \cdots, r,$$

existeixen i són contínues, i existeixen un engrossiment $\tilde{U}$ de U i una aplicació

$$R : \tilde{U} \to L_s^r(E; F),$$

tal que per a tot $(u, h) \in \tilde{U}$,

$$f(u+h) = f(u) + \frac{Df(u)}{1!} \cdot h + \frac{D^2 f(u)}{2!} \cdot h^2 + \cdots + \frac{D^r f(u)}{r!} \cdot h^r + R(u, h) \cdot h^r, \tag{1.2}$$

on $h^k = (h, \cdots, h)$ (k vegades) i $R(u, 0) = 0$. A més,

$$R(u, h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} \left(D^r f(u + th) - D^r f(u)\right) dt.$$

Observació 1.29. La condició de que U sigui obert justifica l'existència d'un engrossiment, ja que tota bola dins de U serà convexa, però si generalitzem aquesta hipòtesi considerant U com un subconjunt obert i convex, podem trobar un engrossiment major.

Demostració. Demostrarem el Teorema de Taylor per inducció.
Comencem pel cas C^1, és a dir, suposant que f és de classe C^1. En aquest cas, per la proposició 1.22 i considerant $x = u$, $y = u + h$ i $c(t) = u + th$ tenim, per a tot $(u, h) \in \tilde{U}$

$$f(u+h) = f(u)+\left(\int_0^1 (Df(u+th))dt\right)\cdot h = f(u)+Df(u)\cdot h+\left(\int_0^1 (Df(u+th) - Df(u))\, dt\right) h.$$

Amb això hem demostrat la fórmula que volíem.

Suposem ara que el Teorema és cert fins a $r-1$, i demostrem-ho per r. Sigui doncs f de classe C^r, i veiem que la fórmula (1.2) es compleix.
Per hipòtesi, f és de classe C^{r-1}, i per tant pel Teorema de Taylor podem expressar f com

$$f(u+h) = f(u) + \frac{Df(u)}{1!}\cdot h + \cdots + \frac{D^{r-1}f(u)}{(r-1)!}\cdot h^{r-1} + R_1(u,h)\cdot h^{r-1}, \tag{1.3}$$

on

$$\begin{aligned} R_1 : \tilde{U} &\to L_s^r(E;F) \\ (u,h) &\mapsto \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-2}}{(r-2)!}\left(D^{r-1}f(u+th) - D^{r-1}f(u)\right)dt \end{aligned}$$

i $D^k f \in L_s^k(E;F)$ per a tot $k \in \{1, \cdots, r-1\}$.

Abans de procedir, observem que pel teorema 1.19, si $[a,b] \subset U \subset \mathbb{R}$ i $\psi_i : U \subset \mathbb{R} \to E_i$, $i = 1, 2$ són aplicacions C^1 i $B \in L(E_1, E_2; F)$ és una aplicació bilineal de $E_1 \times E_2$ a F, llavors

$$B\left(\psi_1'(t), \psi_2(t)\right) = D\left(B\left(\psi_1(t), \psi_2(t)\right)\right) - B\left(\psi_1(t), \psi_2'(t)\right).$$

Conseqüentment, aplicant la integral a la igualtat obtenim

$$\int_a^b B(\psi_1'(t), \psi_2(t))dt = B(\psi_1(b), \psi_2(b)) - B(\psi_1(a), \psi_2(a)) - \int_a^b B(\psi_1(t), \psi_2'(t))dt. \tag{1.4}$$

Considerem ara $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = E$, $B(s,e) = se$, $a = 0$, $b = 1$, $\psi_2(t) = D^{r-1}f(u+th)\cdot h^{r-1}$ i $\psi_1(t) = -\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}$, i observem que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}dt = \frac{1}{(k+1)!} \qquad \text{per a qualsevol } k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Denotant $R_2(u,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}(D^r f(u+th) - D^r f(u))dt$ l'aplicació que volem obtenir i usant (1.4), tenim $\psi_2'(t) = D^r f(u+th)\cdot h^r$, $\psi_1'(t) = \frac{(1-t)^{r-2}}{(r-2)!}$ i

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-2}}{(r-2)!}\cdot D^{r-1}f(u+th)\cdot h^{r-1}dt =& \frac{D^{r-1}f(u)}{(r-1)!}\cdot h^{r-1} \\ &- \int_0^1 -\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot D^r f(u+th)\cdot h^r dt. \end{aligned}$$

Ara, considerant les definicions de R_1 i R_2 i usant (1.5) obtenim

$$R_1(u,h)\cdot h^{r-1} + \frac{D^{r-1}f(u)}{(r-1)!}\cdot h^{r-1} = \frac{D^{r-1}f(u)}{(r-1)!}\cdot h^{r-1} + R_2(u,h)\cdot h^r + \frac{D^r f(u)}{r!}\cdot h^r,$$

i finalment

$$R_1(u,h)\cdot h^{r-1} = R_2(u,h)\cdot h^r + \frac{D^r f(u)}{r!}\cdot h^r.$$

Aleshores, substituint aquesta igualtat a (1.3) obtenim la fórmula que buscàvem. A més, per la proposició 1.26 tenim que $D^r f : E \to L^r_s(E,F)$. □

A continuació, enunciarem i demostrarem el Teorema recíproc de Taylor. Per fer-ho, abans necessitem exposar el concepte de polarització.

Definició 1.30. *Siguin E i F espais de Banach. Un polinomi p definit a E que pren valors a F és una funció de E a F de la forma $p = \sum_{i=1}^n p_i$, on p_i és la restricció a la diagonal d'una aplicació multilineal definida a $E\times\cdots\times E$ (i vegades) i que pren valors a F. Diem llavors que p és un **polinomi de grau** n.*

Definició 1.31. *Siguin E i F espais de Banach. Diem que un polinomi p de grau n és **homogeni** si existeix una aplicació n-multilineal $M \in L^n(E;F)$ tal que $p(e) = M(e,\cdots,e)$.*

Definició 1.32. *Siguin E i F espais de Banach. Escrivim $S^0(E,F) = F$ i*

$$S^k(E,F) = \left\{ p : E \to F \;\middle|\; p(e) = A(e,\cdots,e) \quad \textit{per a algun} \quad A \in L^k(E;F) \right\}.$$

*Denotem $S^k(E,F)$ **l'espai de polinomis homogenis de grau** k de E a F.*

Proposició 1.33. *(i) $S^k(E,F)$ és un espai normat respecte la següent norma:*

$$\|f\| = \inf\left\{ M > 0 \;\middle|\; \|f(e)\| \le M\|e\|^k \right\} = \sup\left\{\|f(e)\| \mid \|e\|\le 1\right\} = \sup\left\{\|f(e)\| \mid \|e\| = 1\right\}.$$

És complet si F ho és.

(ii) Si $f \in S^k(E,F)$ i $g \in S^n(F,G)$, llavors $g\circ f \in S^{kn}(E,G)$ i $\|g\circ f\| \le \|g\|\|f\|$.

(iii) (Polarització) L'aplicació $' : L^k(E;F) \to S^k(E,F)$ definida per $A'(e) = A(e,\cdots,e)$ restringida a $L^k_s(E;F)$ té inversa $\grave{}\, : S^k(E;F) \to L^k_s(E;F)$ definida per

$$\grave{f}(e_1,\cdots,e_k) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}_{|t_1=\cdots=t_k=0} f(t_1e_1+\cdots+t_ke_k).$$

(iv) Si $A \in L^k(E;F)$, $\|A'\| \le \|A\| \le \left(\frac{k^k}{k!}\right)\|A'\|$, que implica que les aplicacions $'$ i $\grave{}$ són contínues.

Teorema 1.34 (Teorema recíproc de Taylor)**.** *Siguin E, F espais de Banach, i $U \subset E$ un subconjunt obert de E. Si per una aplicació $f : U\subset E \to F$ existeixen un engrossiment $\tilde{U}$ de U i aplicacions contínues*

$$\varphi_k : U\subset E \to L^k_s(E;F), \quad k = 1,\cdots,r, \quad i \quad R : \tilde{U} \to L^r_s(E;F),$$

tal que per a tot $(u,h)\in\tilde{U}$,

$$f(u+h) = f(u) + \frac{\varphi_1(u)}{1!}\cdot h + \frac{\varphi_2(u)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{\varphi_r(u)}{r!}\cdot h^r + R(u,h)\cdot h^r, \tag{1.6}$$

amb $h^k = (h,\cdots,h)$ (k vegades) i $R(u,0) = 0$, aleshores f és de classe C^r. A més, $\varphi_k = D^k f$ per a tot $k = 1,\cdots,r$, i finalment

$$R(u,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}\left(D^r f(u+th) - D^r f(u)\right)dt.$$

Observació 1.35. Anàlogemnt al Teorema de Taylor, si considerem U com un subconjunt obert i convex de E, podem construir un engrossiment de U major.

Demostració. Igual que en la demostració anterior, procedirem per inducció. Veiem-ho primer per $r = 1$. Per hipòtesi, existeixen aplicacions contínues $\varphi : U \subset E \to L_s(E;F)$ i $R : \tilde{U} \to L_s(E;F)$ tal que per a tot $(u,h) \in \tilde{U}$ es compleix

$$f(u+h) = f(u) + \varphi(u) \cdot h + R(u,h) \cdot h.$$

Atès que $R(u,h) \cdot h = o(h) \, (R(u,h) \to 0 \text{ si } h \to 0)$, com que l'aplicació φ existeix, per la proposició 1.11 $\varphi = Df$. Aleshores, f és diferenciable, i com que per hipòtesi φ era una aplicació contínua, Df és contínua i conseqüentment f és de classe C^1. Finalment, anàlogament al procediment de la demostració anterior, la proposició 1.22 ens dona l'expressió corresponent de $R(u,h)$.

Demostrem ara el cas general.
Suposem que la implicació és certa per $r-1$, i volem veure que és certa per r. Per hipòtesi sabem que $\varphi_j = D^j f$ per a tot $j = 0, 1, \cdots, r-1$. Fixem ara el valor de u. Siguin $h, k \in E$ suficientment petits en norma tal que $u + h + k \in U$. Escrivim la fórmula (1.6) de dues maneres:

$$\begin{aligned} f(u+h+k) =& f(u+h) + Df(u+h) \cdot k + \cdots + \frac{1}{(r-1)!} D^{r-1} f(u+h) \cdot k^{r-1} \\ &+ \frac{1}{r!} \varphi_r(u+h) \cdot k^r + R_1(u+h,k) \cdot k^r, \\ f(u+h+k) =& f(u) + Df(u) \cdot (h+k) + \cdots + \frac{1}{(r-1)!} D^{r-1} f(u) \cdot (h+k)^{r-1} \\ &+ \frac{1}{r!} \varphi_r(u) \cdot (h+k)^r + R_2(u,h+k) \cdot (h+k)^r. \end{aligned}$$

Restant les dues equacions i agrupant termes, ens queda

$$g_0(h) + g_1(h) \cdot k + \cdots + g_{r-1} \cdot k^{r-1} + g_r(h) \cdot k^r = R_1(u+h,k) \cdot k^r - R_2(u,h+k) \cdot (h+k)^r,$$

on $g_j \in L^j(E;F)$ per a tot $j = 0, \cdots, r$ i

$$\begin{aligned} g_j(h) =& \frac{1}{j!} \left[D^j f(u+h) - D^j f(u) - \sum_{i=1}^{r-1-j} \frac{1}{i!} D^{j+i} f(u) \cdot h^i - \frac{1}{(r-j)!} \varphi_r(u) \cdot h^{r-j} \right], \\ & 0 \leq j \leq r-2, \\ g_{r-1}(h) =& \frac{1}{(r-1)!} \left[D^{r-1} f(u+h) - D^{r-1} f(u) - \varphi_r(u) \cdot h \right], \quad \text{i} \\ g_r(h) =& \frac{1}{r!} \left[\varphi_r(u+h) - \varphi_r(u) \right]. \end{aligned}$$

Les expressions de g_j surten del desenvolupament dels binomis $(h+k)^n, n = 1, \cdots, r$. Les aplicacions $f,\ D^j f,\ j = 1, \cdots, r-1,\ R_1,\ R_2$ i φ_r són contínues, de manera que les aplicacions $g_j,\ j = 1, \cdots, r,$ també ho són. Observem que $g_j(0) = 0,\ j = 1, \cdots, r$. Restringim ara el valor de k de manera que $\frac{1}{4}\|h\| \leq \|k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$. Atès que

$$\begin{aligned} &\|R_1(u+h,k) \cdot k^r - R_2(u,h+k) \cdot (h+k)^r - g_r(h) \cdot k^r\| \\ &\leq (\|R_1(u+h,k)\| + \|g_r(h)\|) \|k\|^r + \|R_2(u,h+k)\| (\|h\| + \|k\|)^r \\ &\leq \{\|R_1(u+h,k)\| + \|g_p(h)\| + \|R_2(u,h+k)\|\} (1 + 3^r) \frac{\|h\|^r}{2^r} \end{aligned}$$

i observant que l'expressió entre {} tendeix a 0 quan h tendeix a 0, tenim que

$$R_1(u+h,k)\cdot k^r - R_2(u,h+k)\cdot (h+k)^r - g_r(h)\cdot k^r = o(h^r).$$

Conseqüentment,

$$g_0(h) + g_1(h)\cdot k + \cdots + g_{r-1}\cdot k^{r-1} = o(h^r)$$

Ara, veiem que cada terme de la suma és $o(h^r)$.
Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ números diferents, i substituïm k per $\lambda_j k$, $j = 1, \cdots, r$. Fent això, obtenim r equacions que escrivim matricialment de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(h) \\ g_1(h)k \\ \vdots \\ g_{r-1}(h)k^{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(h^r) \\ o(h^r) \\ \vdots \\ o(h^r) \end{pmatrix}$$

Observem que la matriu del sistema correspon a una matriu de Vandermonde, de la qual sabem que el determinant és $\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)$, i això és diferent de 0 ja que $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$. Aleshores, resolent el sistema trobem que $g_j(h)k^j$ és $o(h^r)$ per a tot $j = 1, \cdots, r-1$. En particular,

$$\big(D^{r-1}f(u+h) - D^{r-1}f(u) - \varphi_r(u)\cdot h\big)\cdot k^{r-1} = g_{r-1}(h)\cdot k^{r-1} = o(h^r).$$

Utilitzant polarització (proposició 1.33) observem que

$$\begin{aligned}
&\|D^{r-1}f(u+h) - D^{r-1}f(u) - \varphi_r(u)\cdot h\| \\
&\leq \frac{(r-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left\|\big(D^{r-1}f(u+h) - D^{r-1}f(u) - \varphi_r(u)\cdot h\big)'\right\| \\
&= \frac{(r-1)^{r-1}}{(r-1)!}\sup_{\|e\|\leq 1}\left\|\big(D^{r-1}f(u+h) - D^{r-1}f(u) - \varphi_r(u)\cdot h\big)\cdot e^{r-1}\right\| \\
&= \frac{(r-1)^{r-1}}{(r-1)!}\sup_{\|k\|\leq \|h\|/2}\left\|\big(D^{r-1}f(u+h) - D^{r-1}f(u) - \varphi_r(u)\cdot h\big)\cdot\left(\frac{2k}{\|h\|}\right)^{r-1}\right\| \\
&= \frac{(2(r-1))^{r-1}}{(r-1)!\|h\|^{r-1}}\sup_{\|k\|\leq \|h\|/2}\left\|\big(D^{r-1}f(u+h) - D^{r-1}f(u) - \varphi_r(u)\cdot h\big)\cdot k^{r-1}\right\|
\end{aligned}$$

Ara, tenim per definició que $\frac{o(h^r)}{\|h\|^r} \to 0$, de manera que dividint per $\|h\|$ la desigualtat obtenim la inequació que ens determina la diferenciabilitat de $D^{r-1}f$, i a més $D^r f(u) = \varphi_r(u)$.
Finalment, com que el teorema es compleix per $r-1$, podem escriure f de manera que R tingui la forma desitjada, i llavors restant-li a la fórmula de l'enunciat

$$f(u+h) = (u) + \frac{Df(u=)}{1!}\cdot h + \frac{D^2f(u)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{D^{r-1}f(u)}{(r-1)!}\cdot h^{r-1} + R_1(u,h)\cdot h^{r-1}$$

l'expressió

$$f(u+h) = f(u) + \frac{Df(u)}{1!}\cdot h + \frac{D^2f(u)}{2!}\cdot h^2 + \cdots + \frac{D^rf(u)}{r!}\cdot h^r + R(u,h)\cdot h^r,$$

obtenim $R_1(u,h)\cdot h^{r-1} = R(u,h)\cdot h^r + \frac{D^rf(u)}{r!}\cdot h^r$, i d'aquí traiem la fórmula de R que volíem.

Això acaba la demostració del teorema. $\square$

Observem que el Teorema recíproc de Taylor ens proporciona una eina fonamental per l'anàlisi de la diferenciabilitat de diverses aplicacions. A continuació, mostrem dues aplicacions que ens serviran per exemplificar l'ús del Teorema de Taylor i el Teorema recíproc de Taylor: l'aplicació avaluació i l'Omega Lema, un teorema molt important que usarem en les seccions posteriors.

L'aplicació avaluació. Siguin $I = [0,1]$ i E un espai de Banach. L'espai vectorial $C^r(I;E)$ format per aplicacions de classe C^r $(r > 0)$ de I a E és també un espai de Banach respecte la norma

$$\|f\|_r = \max_{1\leq i\leq r} \sup_{t\in I} \|D^i f(t)\|.$$

Si U és un obert de E, llavors el conjunt

$$C^r(I,U) = \{f \in C^r(I,E) \mid f(I) \subset U\}$$

és un obert de $C^r(I,E)$. Veiem-ho.
Està clar que $C^r(I,U) \subset C^r(I,E)$. Volem veure per tant que $C^r(I,U)$ és obert, és a dir, que per a tot $f \in C^r(I,U)$ existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f) \subset C^r(I;U)$.
Sigui $f \in C^r(I,U)$. Tenim que I és compacte, de manera que $f(I) \subset U$ és compacte també. Denotem ara $\mathrm{fr}\,(S)$ la frontera d'un subconjunt S, definida per $\mathrm{fr}\,(S) = \mathrm{cl}\,(S) \setminus \mathring{S}$. Aleshores, com que U és un obert i $f(I)$ és compacte,

$$\varepsilon := d(f(I), \mathrm{fr}\,(U)) > 0.$$

Ara, si $g \in C^r(I,E)$ tal que $\|f-g\|_r < \varepsilon$, per definició $\|f-g\|_0 = \sup_{t\in I} \|f(t)-g(t)\| < \varepsilon$, i en concret $\|f(t) - g(t)\| < \varepsilon$ per a tot $t \in I$. Això implica que $g(t)$ no podrà arribar a la frontera de U en cap punt, de manera que $g(I) \subset U$, que és el que volíem.

A continuació estudiarem les derivades k-èsimes de **l'aplicació avaluació**, definida per

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}\ : C^r(I,U)\times]0,1[&\to U \\ (f,t) &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

Proposició 1.36. *L'aplicació avaluació descrita és C^r i la seva derivada k-èsima està definida per*

$$\begin{aligned} D^k\mathrm{ev}\,(f,t) \cdot ((g_1,s_1), \cdots, (g_k,s_k)) &= D^k f(t) \cdot (s_1, \cdots, s_k) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} D^{k-1} g_i(t) \cdot (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_k), \end{aligned} \tag{1.7}$$

on

$$(g_i, s_i) \in C^r(I,E) \times \mathbb{R}, \quad i = 1, \cdots, k.$$

Demostració. Sigui $(g,s) \in C^r(I,E) \times \mathbb{R}$, i definim la norma $\|(g,s)\| = \max(\|g\|_r, |s|)$. Veiem primer que la part dreta de l'equació (1.7) és simètrica respecte els arguments (g_i, s_i), $i = 1, \cdots, k$. Denotem aquesta part dreta com

$$\varphi_k : C^r(I,U)\times]0,1[\to L^k_s(C^r(I,E) \times \mathbb{R}; E), \quad k = 1, \cdots, r,$$

i definim $\varphi_0(f,t) = f(t)$. Procedirem per inducció, i per tant demostrem en primer lloc que la proposició és certa per $r=0$. Hem de veure que l'aplicació avaluació és contínua. Veiem que ho és per a un $(f,t) \in C^r(I,U)\times]0,1[$ qualsevol. Observem que f és uniformement contínua, ja que per hipòtesi és contínua i està definida en un compacte. Fixem un $\varepsilon > 0$ i considerem el valor δ tal que per a tot t' tal que $|t-t'| < \delta$ es compleix $\|f(t) - f(t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Aleshores, usant això tenim que si $g \in C^r(I,U)$ i $s \in]0,1[$ tal que $|t-s| < \delta$ i $\|f-g\|_0 < \frac{\varepsilon}{2}$, i.e en particular $\|(f-g, t-s)\| < \max\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$ llavors

$$\begin{aligned}\|\mathrm{ev}\,(f,t) - \mathrm{ev}\,(g,s)\| &= \|f(t) - g(s)\| \leq \|f(t) - f(s)\| + \|f(s) - g(s)\| \\ &\leq \|f(t) - f(s)\| + \|f-g\|_0 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

cosa que implica que l'aplicació avaluació és contínua.

Suposem ara que la proposició és certa per $r-1$, i veiem que es compleix per r. Suposem per tant que $(f,t) \in C^r(I,U)\times]0,1[$ i $(g,s) \in C^r(I,E)\times\mathbb{R}$.
Com que $\lim_{(g,s)\to(0,0)} \frac{D^r g(t)\cdot s^r}{\|(g,s)\|^r} = 0$ per a tot $t \in]0,1[$, pel Teorema de Taylor, per f i g tenim

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}\,(f+g, t+s) &= f(t+s) + g(t+s) \\ &= \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!}\left(D^i f(t)\cdot s^i + D^i g(t)\cdot s^i\right) + R(t,s)\cdot s^r \\ &= \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!}\varphi_i(f,t)\cdot(g,s)^i + R((f,t),(g,s))\cdot(g,s)^r,\end{aligned}$$

on

$$R((f,t),(g,s))\cdot((g_1,s_1),\cdots,(g_r,s_r)) = R(t,s)\cdot(s_1,\cdots,s_r) + \frac{1}{rr!}\sum_{i=1}^{r} D^r g_i(t)\cdot(s_1,\cdots,s_r). \tag{1.8}$$

Veiem la segona igualtat. Per una banda, tenim que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!}(D^i f(t)\cdot s^i + D^i g(t)\cdot s^i) + R(t,s)\cdot s^r \\ &= f(t) + g(t) + Df(t)\cdot s + Dg(t)\cdot s + \cdots + \frac{1}{r!}\left[D^r f(t)\cdot s^r + D^r g(t)\cdot s^r\right] + R(t,s)\cdot s^r.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Per altra banda

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!}\varphi_i(f,t)\cdot(g,s)^i + R\left((f,t),(g,s)\right)\cdot(g,s)^r \\ =&f(t) + [Df(t)\cdot s + g(t)] + \frac{1}{2}\left[D^2 f(t)\cdot s^2 + 2\cdot Dg(t)\cdot s\right] \\ &+\cdots+\frac{1}{r!}\left[D^r f(t)\cdot s^r + r\cdot D^{r-1}g(t)s^{r-1}\right] + R((f,t),(g,s))\cdot(g,s)^r.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Observem que perquè les expressions (1.9) i (1.10) siguin iguals és necessari que $R((f,t),(g,s))\cdot(g,s)^r = R(t,s)\cdot s^r + \frac{1}{r!}D^r g(t)\cdot s^r$. D'aquí surt la definició (1.8), que és una expressió simètrica en els seus arguments (g_i,s_i), $i = 1,\cdots,r$ i compleix $R((f,t),(0,0)) = 0$.

Volem veure que l'aplicació avaluació és de classe C^r, i per fer-ho usem el Teorema recíproc de Taylor. L'única hipòtesi que ens falta demostrar és la continuïtat de φ_i, $1 \leq i \leq r$.
Per la proposició 1.23,

$$\left\| D^{k-1} g_i(t) - D^{k-1} g_i(s) \right\| \leq |t-s| \sup_{u \in I} \left\| D^k g_i(u) \right\| \leq |t-s| \|g_i\|_r.$$

Volem estudiar la continuïtat de φ_i per a tot i, és a dir, si $(f,t) \in C^r(I,U) \times]0,1[$, volem veure que fixat un $\varepsilon > 0$, existeix un δ tal que per a tot $(g,s) \in C^r(I,U)$ tal que $\|(f-g, t-s)\| < \delta$ llavors $\|\varphi_i(f,t) - \varphi_i(g,s)\| < \varepsilon$. Fixem per tant un $\varepsilon > 0$, i suposem que $\|(f-g,t-s)\| < \delta$ per a un valor δ (a determinar), de manera que en particular $|t-s| < \delta$.
Observem que

$$\|(\varphi_k(f,t) - \varphi_k(g,s)) \cdot ((g_1,s_1), \cdots, (g_k,s_k))\| \leq \left\| D^k f(t) - D^k g(s) \right\| |s_1| \cdots |s_k|$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \left\| D^{k-1} g_i(t) - D^{k-1} g_i(s) \right\| |s_1| \cdots |s_{i-1}| |s_{i+1}| \cdots |s_k|.$$

Per definició,

$$\|\varphi_k(f,t) - \varphi_k(g,s)\| = \sup_{\|(g_i,s_i)\|=1,\ i=1,\cdots,k} \|(\varphi_k(f,t) - \varphi_k(g,s))\, ((g_1,s_1), \cdots, (g_k,s_k))\|,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(f,t) - \varphi_k(g,s)\| &\leq \|D^k f(t) - D^k g(s)\| + k|t-s| \\ &\leq \|D^k f(t) - D^k f(s)\| + \|D^k f(s) - D^k g(s)\| + k|t-s|. \end{aligned}$$

Volem que cada terme de la suma sigui inferior a $\frac{\varepsilon}{3}$.

En primer lloc, $k|t-s| < k\delta$, de manera que és suficient imposar que $\delta < \frac{\varepsilon}{3k}$.

Ara, pel segon terme tenim $\|D^k f(s) - D^k g(s)\| \leq \|f-g\|_k \leq \|f-g\|_r < \delta$, i per tant l'únic que necessitem és que $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pel primer terme, com que $D^k f$ és uniformement contínua, existeix un δ_0 tal que si $|t-s| < \delta_0$, llavors $\|D^k f(t) - D^k f(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Conseqüentment, considerant $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3k}, \frac{\varepsilon}{3}, \delta_0\}$ tindrem que

$$\|\varphi_k(f,t) - \varphi_k(g,s)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

és a dir, φ_k és contínua per a tot $k = 1, \cdots, r$. Finalment, aplicant el Teorema de Taylor recíproc, obtenim que l'aplicació avaluació és de classe C^r. □

Omega Lema. L'Omega Lema és un lema conegut dins l'anàlisi global. S'utilitza especialment en la teoria de les varietats invariants, i en aquest treball l'usarem en les seccions posteriors.
Per construir aquest lema, considerem un espai topològic compacte M i els espais de Banach E i F. Respecte la norma

$$\|f\| = \sup_{m \in M} \|f(m)\|,$$

l'espai vectorial $C^0(M,E)$ és un espai de Banach. Si U és un obert de E,

$$C^0(M,U) = \{f \in C^0(M,E) \mid f(M) \subset U\}$$

és obert.

Proposició 1.37 (Omega Lema)**.** *Sigui M un espai topològic compacte, i E i F espais de Banach. Sigui $g : U \to F$ una aplicació C^r, $r \geq 0$. L'aplicació*

$$\Omega_g : C^0(M,U) \to C^0(M,F) \quad \textit{definida per} \quad \Omega_g(f) = g \circ f$$

és també de classe C^r. La derivada de Ω_g és

$$D\Omega_g(f) \cdot h = [(Dg) \circ f] \cdot h,$$

és a dir,

$$[D\Omega_g(f) \cdot h](x) = Dg(f(x)) \cdot h(x). \tag{1.11}$$

Aquesta fórmula té sentit, ja que per definició de derivada tenim

$$[D\Omega_g(f) \cdot h](x) = \frac{d}{d\varepsilon}\Omega_g(f + \varepsilon h)(x)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}g(f(x) + \varepsilon h(x))\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Ara, pel teorema 1.18 veiem que

$$\frac{d}{d\varepsilon}g(f(x) + \varepsilon h(x))\bigg|_{\varepsilon=0} = Dg(f(x)) \cdot \frac{d}{d\varepsilon}(f(x) + \varepsilon h(x))\bigg|_{\varepsilon=0} = Dg(f(x)) \cdot h(x).$$

Per tant, si Ω_g és diferenciable, $D\Omega_g$ ha de ser definida com en (1.11).

Demostració. Realitzarem la demostració per inducció. Comencem pel cas $r = 0$. Suposem $f \in C^0(M,U)$. Volem veure que l'aplicació Ω_g és contínua en f. Sigui $\varepsilon > 0$. Com que f és contínua i M és compacte, $f(M)$ és també compacte, i usant que g és contínua, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\forall y \in f(M) \quad \text{i } z \in U \text{ t.q.} \quad \|y - z\| < \delta \Rightarrow \|g(y) - g(z)\| < \varepsilon.$$

Aleshores, si $f' \in C^0(M,U)$ tal que $\|f - f'\| < \delta$,

$$\big\|g(f(m)) - g(f'(m))\big\| < \varepsilon \quad \forall m \in M,$$

que implica que

$$\|\Omega_g(f) - \Omega_g(f')\| = \sup_{m \in M} \|g(f(m)) - g(f'(m))\| < \varepsilon.$$

Això prova que Ω_g és contínua per a f arbitrari de $C^0(M,U)$.

Suposem ara cert el cas $r-1$ i demostrem el cas r. Suposem per tant que $g : U \to F$ és de classe C^r. Denotem

$$A_i : C^0(M, L_s^i(E;F)) \to L_s^i(C^0(M,E); C^0(M,F))$$

definida per

$$A_i(H)(h_1, \cdots, h_i)(m) = H(m)(h_1(m), \cdots, h_i(m)),$$

on $H \in C^0(M, L^i(E; F))$, $h_1, \cdots, h_i \in C^0(M, E)$ i $m \in M$. Aquestes aplicacions A_i són lineals i contínues amb $\|A_i\| \leq 1$. Veiem-ho:
En primer lloc, tenim

$$\|A_i\| = \sup_{\|H\| \leq 1} \|A_i(H)\|_{L_s^i}.$$

Ara,

$$\begin{aligned}
\|A_i(H)\|_{L_s^i} &= \sup_{\|h_j\| \leq 1,\ 1 \leq j \leq i} \|A_i(H)(h_1, \cdots, h_i)\|_{C^0(M,F)} \\
&= \sup_{\|h_j\| \leq 1,\ 1 \leq j \leq i} \sup_{m \in M} \|H(m)\,(h_1(m), \cdots, h_i(m))\,\|_F
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\|A_i(H)(h_1, \cdots, h_i)(m)\| \leq \|H(m)\| \|h_1(m)\| \cdots \|h_i(m))\| \leq \|H\| \|h_1\| \cdots \|h_i\| \leq 1,$$

i per tant $\|A_i\| \leq 1$.

Com que $D^i g : U \to L_s^i(E; F)$ és contínua, anàlogament al raonament anterior tenim que les aplicacions

$$\Omega_{D^i g} : C^0(M, U) \to L_s^i(C^0(M, E); C^0(M, F))$$

són contínues i conseqüentment

$$A_i \circ \Omega_{D^i g} : C^0(M, U) \to L_s^i(C^0(M, E); C^0(M, F))$$

és contínua.
El Teorema de Taylor aplicat a g ens dona

$$g(f(m) + h(m)) = g(f(m)) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} D^i g(f(m)) \cdot h(m)^i + R(f(m), h(m)) \cdot h(m)^r,$$

de manera que definint

$$\left[(D^i g \circ f) \cdot h^i\right](m) = D^i g(f(m)) \cdot h(m)^i,$$

i

$$[R(f, h) \cdot (h_1, \cdots, h_r)]\,(m) = R(f(m), h(m)) \cdot (h_1(m), \cdots, h_r(m))$$

veiem que R és contínua, $R(f, 0) = 0$ i

$$\begin{aligned}
\Omega_g(f + h) = g \circ (f + h) &= g \circ f + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} (D^i g \circ f) \cdot h^i + R(f, h) \cdot h^r \\
&= \Omega_g(f) + \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i!} (A_i \circ \Omega_{D^i g})(f) \cdot h^i + R(f, h) \cdot h^r.
\end{aligned}$$

Finalment, com que $A_i \circ \Omega_{D^i g}$ són contínues per a tot i, pel Teorema recíproc de Taylor $D^i \Omega_g = A_i \circ \Omega_{D^i g}$ i Ω_g és de classe C^r. $\square$

1.5 Teorema de la funció implícita.

El teorema de la funció implícita és un resultat molt important i molt utilitzat en moltes branques de les matemàtiques.
Abans d'enunciar-lo, recordem la definició d'isomorfisme en espais de Banach.

Definició 1.38. *Siguin E, F espais de Banach. Una aplicació $f : E \to F$ és un **isomorfisme** si és contínua, bijectiva i lineal tal que $f^{-1} : F \to E$ és també contínua.*

Teorema 1.39. *Siguin E i F espais de Banach, i $f : E \to F$ una aplicació lineal, contínua i bijectiva. Aleshores, T és un isomorfisme, és a dir, T^{-1} és una aplicació contínua.*

El Teorema de la Funció Implícita ens planteja el següent problema:
Sigui $f(x, y)$ una aplicació tal que

$$f(x_0, y_0) = w.$$

Podem trobar una aplicació $x \mapsto y = g(x)$ tal que com a mínim de manera local es satisfaci

$$f(x, g(x)) = w? \tag{1.12}$$

Si f és diferenciable, volem que g també ho sigui. Més en general, també podem fer dependre g de w. Enunciem per tant el teorema que ens permet justificar això.

Teorema 1.40 (Teorema de la Funció Implícita)**.** *Siguin E, F, G espais de Banach, $U \subset E, V \subset F$ oberts i $f : U \times V \to G$ de classe C^r, $r \geq 1$. Per a algun $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ suposem que la derivada parcial respecte el segon argument $D_2 f(x_0, y_0) : F \to G$ és un isomorfisme. Aleshores existeixen entorns U_0 de x_0 i W_0 de $f(x_0, y_0)$ i una aplicació única $g : U_0 \times W_0 \to V$ de classe C^r tal que per a tot $(x, w) \in U_0 \times W_0$,*

$$f(x, g(x, w)) = w.$$

2 El mètode de la parametrització

Tal com hem enunciat a la introducció, en aquesta secció introduirem i justificarem el mètode de la parametrització per varietats invariants de sistemes dinàmics reals i discrets. Sigui $F : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una aplicació de classe C^r definida en un obert U de $\mathbb{R}^d$ que conté l'origen i tal que $F(0) = 0$. Volem estudiar les característiques de la dinàmica de F en un entorn de l'origen, que per hipòtesi és un punt fix. De manera intuïtiva, la dinàmica de F en un entorn de l'origen és similar a la seva part lineal $A := DF(0)$. Aleshores, si E és un subespai invariant associat a l'origen respecte A, el nostre objectiu és demostrar l'existència d'una varietat invariant respecte F tangent a E a l'origen, i trobar-ne una parametrització.

Recordem en primer lloc la definició de varietat invariant associada al punt fix 0 en un sistema dinàmic discret real.

Definició 2.1. *Sigui U un obert de $\mathbb{R}^d$ que conté l'origen, $F : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una aplicació tal que $F(0) = 0$ i E un subespai de $\mathbb{R}^d$ invariant respecte la part lineal de F a l'origen. Una varietat inclosa en $\mathbb{R}^d$ i parametritzada per $K : U_1 \subset E \to \mathbb{R}^d$ és invariant respecte F si existeix una aplicació $R : U_1 \subset E \to U_1$ tal que*

$$F \circ K = K \circ R. \tag{2.1}$$

Recalquem que E és un subespai de $\mathbb{R}^d$ invariant respecte $DF(0)$, de manera que $K(U_1)$ és una varietat invariant respecte F.
Ara, perquè la varietat $K(U_1)$ passi per l'origen, suposarem que

$$K(0) = 0.$$

Per últim, necessitem que la varietat sigui tangent a E a l'origen, que es resol requerint

$$DK(0)E = E.$$

Per trobar per tant una parametrització K, hem de trobar també una parametrització R, definida com la dinàmica interna de F restringida a la varietat invariant. El nombre d'equacions és n i el nombre d'incògnites és $n + d$, cosa que implica que l'equació d'invariància és indeterminada.
Per resoldre aquesta equació podem seguir principalment dos mètodes:

1. **Graph transform method**
   Aquest mètode suggereix que considerem una parametrització simple K de la varietat invariant, per exemple com a graf respecte a certes coordenades. Això ens determina la dinàmica R.

2. **El mètode de la parametrització**
   Aquest és el mètode que utilitzarem. Suggereix que adaptem la parametrització K a la forma de la varietat invariant, de tal manera que les equacions de R no són complicades.

En aquest treball ens centrarem en la presentació del mètode de la parametrització per varietats invariants 1-dimensionals, resultat que enunciarem i demostrarem. Però en primer lloc, per fer-nos una idea enunciarem un teorema que justifica l'existència de varietats invariants que compleixen unes certes condicions de no ressonància. A partir d'aquí, denotarem $\operatorname{Spec}(A)$ com l'espectre d'A, que és el conjunt de valors propis d'A.

Teorema 2.2. *Sigui $F : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una aplicació de classe C^r definida en un entorn U de l'origen, i complint $F(0) = 0$, i $r \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Denotem $A = DF(0)$. Sigui $L \in \mathbb{N}, L \geq 1$. Suposem que:*

(1) Existeix un subespai lineal E de $\mathbb{R}^d$ tal que $A(E) \subset E$. Llavors, existeix una descomposició $\mathbb{R}^d = E \oplus C$ i, respecte aquesta descomposició, A és de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_E & B \\ 0 & A_C \end{pmatrix}.$$

(2) $\|A_E\| < 1$.

(3) $\mathrm{Spec}\,(A_E)^j \cap \mathrm{Spec}\,(A_C) = \varnothing$ per a $j = 2, \cdots, L$.

(4) A és invertible.

(5) $\mathrm{Spec}\,(A_E))^{L+1}\mathrm{Spec}\,(A^{-1}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$.

(6) $L + 1 \leq r$.

Llavors, existeix una aplicació $K : U_1 \subset E \to \mathbb{R}^d$ de classe C^r, on U_1 és un entorn obert de l'origen en E, i un polinomi $R : E \to E$ de grau com a molt L tal que

$$\begin{aligned} &F \circ K = K \circ R \quad a \quad U_1, \\ &K(0) = 0, \quad DK(0)E = E, \\ &R(0) = 0, \quad DR(0) = A_E. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aquest teorema és una versió simplificada del resultat general enunciat a [1]. Notem que la varietat invariant que es troba en el teorema anterior perd un grau de regularitat respecte la diferenciabilitat de F. En l'article [1] s'enuncia la generalització d'aquest teorema i es demostra que la diferenciabilitat de l'aplicació F és la mateixa que la de la varietat invariant. Per veure-ho, es tracta l'equació (2.1) com un problema de punt fix, a diferència del que realitzarem en aquest treball, on usarem el Teorema de la Funció Implícita.

3 El mètode de la parametrització per varietats analítiques 1-dimensionals

En aquest capítol presentarem un resultat que facilita la comprensió del Teorema presentat en la secció anterior, i que presenta les idees principals del mètode de la parametrització. Aquest parteix d'una aplicació analítica, i permet justificar l'existència de varietats invariants analítiques 1-dimensionals.

Teorema 3.1. *Sigui $F : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una aplicació analítica en un entorn U de 0, complint $F(0) = 0$, és a dir, de manera que 0 és un punt fix de F. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propi de $A := DF(0)$, i sigui $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. Suposem:*

(1) A és invertible.

(2) $0 < |\lambda| < 1$.

(3) $\lambda^n \notin \operatorname{Spec}(A)$ per a tot enter $n \geq 2$ (condició de no ressonància).

Llavors, existeix una aplicació analítica $K : U_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, on U_1 és un entorn de 0 a $\mathbb{R}$, que satisfà

$$F(K(x)) = K(\lambda x) \quad \text{per a tot } x \in U_1, \tag{3.1}$$

$K(0) = 0$, i $K'(0) = v$. Conseqüentment, la imatge de K és una varietat analítica 1-dimensional, invariant respecte F i tangent a v a l'origen. A més, la dinàmica de la varietat invariant és conjugada a l'aplicació lineal $x \mapsto \lambda x$ a l'espai dels paràmetres.

Per últim, si $\hat{K}$ és una altra solució analítica de $F \circ K = K \circ \lambda$ en un entorn de l'origen tal que $\hat{K}(0) = 0$ i $\hat{K}'(0) = \beta K'(0)$ per a alguna $\beta \in \mathbb{R}$, llavors $\hat{K}(t) = K(\beta t)$ per t suficientment petit.

A continuació realitzem la demostració d'aquest teorema en l'espai complex $\mathbb{C}^d$.

Demostració. Per portar a terme aquesta demostració, ho farem amb dues parts. En la primera, suposant que K és una aplicació analítica a un entorn de 0 i expressant la parametrització K com una sèrie de potències, usarem la igualtat (3.1) per trobar una expressió per a cada terme de la sèrie. En la segona part, utilitzant resultats d'anàlisi funcional demostrarem que la sèrie de potències trobada defineix una funció analítica.

Veiem la primera part de la demostració.
En primer lloc, tenim que F és una aplicació analítica en un entorn U de 0 a $\mathbb{C}^d$. Sent $\mathbb{D}$ el disc unitat de $\mathbb{C}$, l'objectiu final és trobar una parametrització $K : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^d$ tal que

$$F \circ K(z) - K(\lambda z) = 0, \tag{3.2}$$

per a $z \in \mathbb{D}$.
Escrivim $F(\zeta) = A\zeta + N(\zeta)$, on $A := DF(0)$ i N, que és la part no lineal de F, només té termes quadràtics i d'ordre superior, i compleix $N(0) = 0$ (ja que $F(0) = 0$) i $DN(0) = 0$.

Expressem K com la sèrie de potències $K = \sum_{n \geq 1} K_n z^n$. Volem determinar les expressions K_n, $n \geq 1$. Substituint aquestes expressions a l'equació (3.2) obtenim

$$F\left(\sum_{n\geq 1} K_n z^n\right) - \sum_{n \geq 1} K_n (\lambda z)^n = 0,$$

i per tant

$$A\left(\sum_{n\geq 1} K_n z^n\right) + N\left(\sum_{n\geq 1} K_n z^n\right) = \sum_{n\geq 1} K_n \lambda^n z^n. \tag{3.3}$$

Recordem que F és una aplicació analítica a U, de manera que N també ho és. Per tant, podem expressar N com una sèrie de Taylor, i atès que $N(0) = 0$ i $DN(0) = 0$, ens quedarà una sèrie de la forma $N(w) = \sum_{k=2}^{\infty} N_k w^k$, on cada terme $N_k w^k$ representa un polinomi homogeni de grau k en la variable $w \in \mathbb{C}^d$. Trobarem els valors de K_n, $n \geq 1$ recursivament.
En primer lloc, observem que igualant els coeficients d'ordre 1 de les dues bandes a (3.3) obtenim:

$$AK_1 = \lambda K_1. \tag{3.4}$$

Aquesta equació no determina K_1, però ens diu que K_1 és un vector propi de A amb valor propi λ. Prenem K_1 com un vector múltiple de v amb valor absolut $|K_1| = \delta$, per a un δ petit que determinarem més endavant.
Ara, de manera recursiva, si sabem els valors de $K_1, \cdots, K_{m-1}$ busquem el valor de K_m.

Per trobar aquest valor, només ens interessen els termes de K d'ordre fins a m, de manera que considerem $K \sim \sum_{n=1}^{m-1} K_n z^n + K_m z^m$. L'equació (3.3) ens quedarà:

$$A\sum_{n=1}^{m-1} K_n z^n + AK_m z^m + N\left(\sum_{n=1}^{m-1} K_n z^n + K_m z^m\right) = \sum_{n=1}^{m-1} K_n \lambda^n z^n + K_m \lambda^m z^m.$$

Considerant N com la sèrie de Taylor mencionada i agafant de l'expressió resultant els termes d'ordre fins a m, igualant els coeficients ens queda una equació de la forma

$$AK_m + R_m(K_1, \cdots, K_{m-1}) = \lambda^m K_m, \quad m \geq 2, \tag{3.5}$$

on R_m és una expressió polinomial que depèn de $K_1, \cdots, K_{m-1}$.

Aleshores, podem determinar el valor de K_m:

$$K_m = -(A - \lambda^m I)^{-1} R_m(K_1, \cdots, K_{m-1}), \quad m \geq 2, \tag{3.6}$$

on l'expressió K_m està ben definida ja que per la hipòtesi (3) λ^m no és un valor propi de A, i per tant la inversa de $A - \lambda^m I$ existeix.

Amb això hem trobat expressions que podrien definir l'aplicació K, però falta veure que aquestes expressions defineixen una aplicació analítica, tal com ens enuncia el teorema. Ho veurem usant la teoria d'anàlisi funcional.
Per aquesta part, en primer lloc volem reescriure l'equació (3.2) de manera que passem a estudiar l'existència de zeros d'un operador dins un espai de Banach.
Escriurem $K(z) = K_1 z + K^{>}(z)$, on K_1 ja ha sigut escollit anteriorment. Substituint l'expressió de K a (3.2) ens queda:

$$F \circ (K_1 z + K^{>}(z)) - K_1 \lambda z - K^{>}(\lambda z) = 0$$

i substituint F obtenim:

$$AK^{>}(z) + N(K_1 z + K^{>}(z)) - K^{>}(\lambda z) = 0.$$

Considerem $K^>$ pertanyent a l'espai de Banach de funcions analítiques f en el disc unitat que compleixen $f(0)=0$ i $Df(0)=0$, associant-li la norma:

$$H := \Big\{ K^> : \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^d \;\Big|\; K^> \in C^0(\overline{\mathbb{D}}),\;\; K^> \in C^\omega(\mathbb{D}),\;\; K^>(0) = DK^>(0) = 0,$$
$$\|K^>\|_\infty := \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \big\|K^>(z)\big\| < \infty \Big\}.$$

Observem que per ser continu en un tancat de $\mathbb{C}$, tot element de H està acotat i per tant la seva norma és finita. Veiem que $(H, \|\cdot\|_\infty)$ és realment un espai de Banach, és a dir, hem de veure que és un espai complet. Considerem l'espai

$$H_1 = \left\{ K^> : \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^d \;\middle|\; K^> \in C^0(\overline{\mathbb{D}}),\;\; \|K^>\|_\infty := \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \big\|K^>(z)\big\| < \infty \right\}.$$

Aquest és un espai de Banach. Ara, l'espai

$$H_2 = \left\{ K^> : \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^d \;\middle|\; K^> \in C^0(\overline{\mathbb{D}}),\;\; K^> \in C^\omega(\mathbb{D}),\;\; \|K^>\|_\infty := \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \big\|K^>(z)\big\| < \infty \right\}$$

és un subespai tancat de H_1, i com que H_1 és un espai de Banach, H_2 també ho és.

Per últim, tornant a l'espai H, observem que H és un subespai tancat de H_2, de manera que H és també un espai de Banach.

A continuació, definim l'operador $\mathcal{T} : V \subset \mathbb{C}^d \times H \to H$ com

$$\mathcal{T}(K_1, K^>)(z) := (SK^>)(z) + N(K_1 z + K^>(z)),$$

on $(S\Delta)(z) = A\Delta(z) - \Delta(\lambda z)$ (lineal respecte Δ) i V és un entorn de $(0,0)$ a $\mathbb{C}^d \times H$ que més endavant determinarem.

Usant aquest operador, podem reescriure l'equació (3.2) com:

$$\mathcal{T}(K_1, K^>) = 0. \tag{3.7}$$

Veiem ara alguns resultat sobre l'operador $\mathcal{T}$:

Proposició 3.2. *Sigui V contingut en una bola de $\mathbb{C}^d \times H$ centrada en $(0,0)$ i de radi suficientment petit. Llavors:*

(1) L'operador $\mathcal{T} : V \subset \mathbb{C}^d \times H \to H$ està ben definit i és de classe C^1.

(2) $D_2\mathcal{T}(0,0) = S$.

Demostració.
Demostrem en primer lloc l'enunciat (1).
Veiem primer que S està ben definit. Hem de veure per tant que $(SK^>)$ és un element de H.

Observem que $S : H \to H$, és a dir, S pren valors a H, ja que $\Delta \in H$ i per tant $\Delta \circ \lambda \in H$, i $A\Delta \in H$. Conseqüentment, S està ben definit.

Veiem ara que S és de classe C^1. En primer lloc, observem que l'aplicació S és lineal respecte Δ, ja que per a tot $K_1^>, K_2^> \in H$, $(S(K_1^> + K_2^>))(z) = A(K_1^> + K_2^>)(z) - (K_1^> + K_2^>)(\lambda z)$ i com que A és una aplicació lineal, $A(K_1^> + K_2^>)(z) = AK_1^>(z) + AK_2^>(z)$, i per tant S és lineal respecte Δ. Volem veure que S és contínua. Observem que

$$\begin{aligned}\|S\| &= \sup_{\|\Delta\|\le 1} \|S\Delta\| = \sup_{\|\Delta\|\le 1} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|A\Delta(z) - \Delta(\lambda z)\| \\ &\le \sup_{\|\Delta\|\le 1} \sup_{z\in\mathbb{D}} (\|A\|\|\Delta(z)\| + \|\Delta(\lambda z)\|) \le \|A\| + 1,\end{aligned}$$

on les dues igualtats provenen de la definició de norma per un operador.

Hem vist per tant que S està acotat, conidició equivalent a dir que S és un operador continu. Per tant, S és lineal continu, i com a conseqüència, S és diferenciable i compleix $DS(\Delta) = S$.

Falta veure per tant que $N(K_1 z + K^>(z))$ està ben definida i és de classe C^1. Per veure-ho, usarem l'Omega Lema. Recordem que l'aplicació N és analítica amb un radi d'analicitat ρ. Observem que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |K_1 z + K^>(z)| \le |K_1| + \|K^>\|$. Si anomenem $f(K_1, K^>)(z) := K_1 z + K^>(z)$, podem reescriure la definició de $\mathcal{T}$ com $\mathcal{T}(K_1, K^>)(z) := (SK^>)(z) + \Omega_N(f)(z)$. Definim f en un domini on $|K_1| + \|K^>\|$ és més petit que ρ. Per ser espai de Banach, $\mathbb{C}^d \times H$ és un espai topològic. Aleshores, considerant $\mathbb{C}^d \times H$ com l'espai topològic de la proposició 1.37 i $\mathbb{C}^d$ com els espais de Banach E, F podem demostrar l'Omega Lema de manera totalment anàloga en aquest cas i determinar que $\mathcal{T}$ és de classe C^1.

Demostrem ara (2). Per linealitat de les derivades, tenim $D_2\mathcal{T}(K_1, K^>)\Delta = S\Delta + D\Omega_N(f(K_1, K^>))\Delta$. Ara, per la proposició 1.37 tenim que

$$D\Omega_N(f)\Delta = [(DN) \circ f] \cdot \Delta,$$

de manera que

$$D\Omega_N(f(0,0))\Delta = DN(0)\Delta = 0.$$

Conseqüentment, $D_2\mathcal{T}(0,0) = S$. $\square$

L'objectiu final és poder usar el Teorema de la Funció Implícita en espais de Banach per justificar l'existència de $K^>$ a l'equació (3.7). Per fer-ho, necessitem el següent lema:

Lema 3.3. *L'operador $S : H \to H$ definit per*

$$(S\Delta)(z) = A\Delta(z) - \Delta(\lambda z),$$

és acotat i invertible en H.

Demostració. Per demostrar que S és invertible, hem de veure que per a tota $\eta \in H$ definida per $\eta(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \eta_n z^n$ existeix una única $\Delta \in H$ definida per $\Delta(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n z^n$ tal que

$$S\Delta = \eta. \tag{3.8}$$

Substituint a l'equació (3.8) les sèries η i Δ obtenim l'expressió següent:

$$A\sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n \lambda^n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \eta_n z^n, \tag{3.9}$$

i igualant coeficients a (3.9) obtenim

$$A\Delta_n - \Delta_n \lambda^n = \eta_n, \quad n \geq 2.$$

D'aquí podem treure que $\Delta_n = (A - \lambda^n I)^{-1}\eta_n$. Veiem que aquesta expressió està ben definida i determina unívocament els coeficients Δ_n, ja que per la hipòtesi (3) del teorema $(A - \lambda^n)^{-1}$ existeix. Això prova la unicitat de la solució Δ, si existeix.
Pel Teorema 1.39, com que A és una aplicació lineal i contínua i per la hipòtesi (1) és també invertible, A^{-1} és una aplicació contínua. Aleshores, com que $|\lambda| < 1$ i $A - \lambda^n I = A(I - \lambda^n A^{-1})$, existeix un valor C independent de n tal que

$$\|(A - \lambda^n I)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \| \left(I - \lambda^n A^{-1}\right)^{-1} \| \leq C \quad \text{per a tot } n \geq 2,$$

i per tant $(A - \lambda^n I)^{-1}$ és contínua.
Justifiquem a continuació la segona desigualtat. Per la continuïtat de A^{-1}, directament està acotada. Ara, respecte l'aplicació $I - \lambda^n A^{-1}$, si n és un valor finit petit, $I - \lambda^n A^{-1}$ és invertible per hipòtesi. Finalment, a mesura que n creixi, quan es compleixi $|\lambda^n| \|A^{-1}\| \leq 1$, $I - \lambda^n A^{-1}$ es considera una pertorbació de la identitat, i per tant és invertible.

Llavors, la sèrie $\Delta = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta_n z^n$ té, com a mínim, el mateix radi de convergència que la sèrie $\eta = \sum_{n=2}^{\infty} \eta_n z^n$.
Volem que $\Delta \in H$. Ara, com que $\Delta(z)$ verifica l'equació $A\Delta(z) - \Delta(\lambda z) = \eta(z)$, llavors

$$\Delta(z) = A^{-1}(\Delta(\lambda z) + \eta(z)).$$

La part de la dreta de l'equació està definida en $\mathbb{D}$ i està acotada en $\overline{\mathbb{D}}$, i per tant Δ també és definida en $\mathbb{D}$ i acotada en $\overline{\mathbb{D}}$. Aleshores, $\Delta \in H$, que implica que S és exhaustiva. Com hem comentat, per la unicitat dels coeficients Δ_n, S és injectiva. Conseqüentment, pel teorema de l'aplicació oberta S^{-1} és continu. $\square$

Aquest és l'últim resultat que necessitem per poder usar el Teorema de la Funció Implícita en espais de Banach. Tornant a l'equació (3.7), hem vist que $\mathcal{T}$ és de classe C^1, i està definida en un obert $V \in \mathbb{C}^d \times H$. Hem demostrat també que $D_2\mathcal{T}(0,0) = S$, i S és un isomorfisme. Aleshores, pel Teorema de la Funció Implícita existeix un entorn U_0 de 0 i una aplicació única $K^> : U_0 \to H$ de classe C^1 tal que per a tot $K_1 \in U_0$ es compleix

$$\mathcal{T}(K_1, K^>(K_1)) = 0. \tag{3.10}$$

Aleshores, demostrada la existència i la unicitat de $K^>$ dins l'espai de Banach H per a un K_1 suficientment petit, la imatge de $K = K_1 + K^>$ ens dona la varietat invariant exposada a l'enunciat del Teorema 3.1.

Finalment, si considerem una parametrització K que satisfaci (3.2) i un $\sigma \in \mathbb{C}^d$, llavors $\hat{K}(z) := K(\sigma z)$ també satisfa (3.2). Observem que llavors $\hat{K_1} = \sigma K_1$. Per tant, en agafar un múltiple de K_1, el que estem fent és trobar una altra parametrització de la mateixa varietat invariant trobada. Això acaba la demostració del teorema 3.1. $\square$

4 L'aplicació d'Hénon

4.1 Introducció

Un sistema dinàmic és caòtic en el sentit de Devaney si és sensible a les condicions inicials, és a dir, si un petit canvi a les condicions inicials pot provocar un gran canvi en la solució del sistema, i si té un conjunt dens de punts periòdics. El comportament caòtic d'aplicacions de dimensions baixes ha sigut molt estudiat i caracteritzat. Un element de la teoria del caos és l'atractor extrany, que va ser definit en primer lloc dins l'estudi de sistemes dinàmics dos dimensionals. El concepte d'atractor extrany s'utilitza en la teoria del caos per descriure el comportament de sistemes caòtics.

De manera heurística, un atractor fa referència a un subconjunt de l'espai de fase del sistema tal que per a algunes condicions inicials el sistema tendeix a aquest subconjunt. Un atractor pot ser un punt fix, una òrbita periòdica, etc. L'aplicació d'Henón defineix una aplicació dos-dimensional no lineal que descriu solucions caòtiques que produeixen un **atractor extrany**, on un atractor s'anomena extrany si té una estructura fractal.

Un sistema dinàmic amb un atractor caòtic és localment inestable però globalment estable: una vegada algunes iteracions entren dins l'atractor, els punts propers divergeixen els uns dels altres, però no surten de l'atractor.

L'aplicació d'Hénon és un sistema dinàmic discret induït per una aplicació $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida per

$$H_{a,b}(x, y) = (1 + y - ax^2, bx),$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i aquests valors són valors fixats abans de començar les iteracions i determinen diferents dinàmiques de l'aplicació de Hénon.
Observem que $H_{a,b}$ és una aplicació que només té un terme no lineal el terme ax^2. Tot i la seva simplicitat, aquesta aplicació mostra una gran varietat de fenòmens complexos. El cas clàssic de l'aplicació d'Hénon, que és el cas que desenvoluparem, considera $a = 1.4$ i $b = 0.3$, però abans d'estudiar-lo veiem perquè és important i què passa per altres valors de a, b.
Les següents gràfiques mostren el comportament de l'aplicació d'Hénon per diferents valors de a i b considerant com a punt inicial l'origen i realitzant 10.000 iteracions en tots tres casos. Les dues primeres s'han realitzat a partir de punts més gruixuts que l'última per la dispersió dels punts de la gràfica.

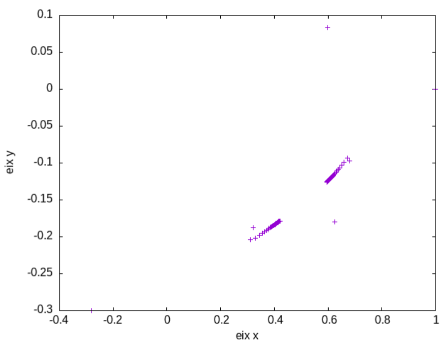


Figura 1: a=1.28, b=-0.3

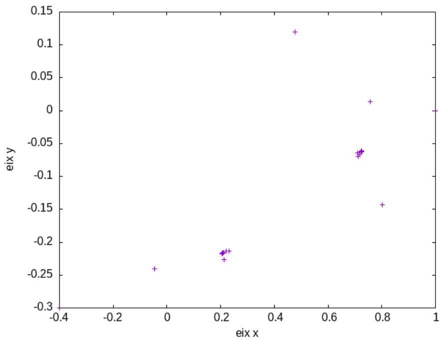


Figura 2: a=1.4, b=-0.3

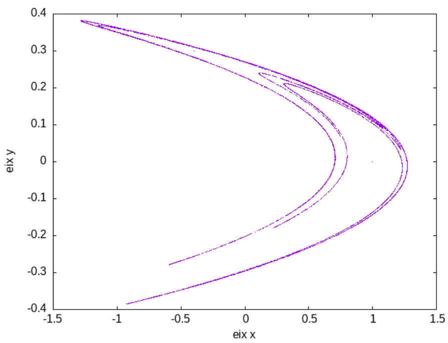


Figura 3: a=1.4, b=0.3

En l'última figura, s'observa com l'aplicació de Hénon convergeix a un atractor extrany.

4.2 Punts fixos i estabilitat

L'aplicació d'Hénon té dos punts fixos:

$$P_1 = \frac{-(1-b)+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}(1,b), \quad P_2 = \frac{-(1-b)-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}(1,b). \tag{4.1}$$

Aquests, existeixen si $(1-b)^2+4a \geq 0$, és a dir, si $a \geq -\frac{(1-b)^2}{4}$.

La matriu Jacobiana del sistema és

$$JH_{a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Observem que el determinant d'aquesta matriu és constant, $\det JH_{a,b} = -b$.
Trobem ara els valors propis d'aquesta matriu. L'equació que ens permet trobar-los és

$$\det(JH_{a,b} - \lambda I) = \lambda^2 + 2ax\lambda - b = 0,$$

que implica

$$\lambda = \frac{-2ax \pm \sqrt{4a^2x^2+4b}}{2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2+b}.$$

Aleshores, els valors propis són reals si i només si $a^2x^2+b \geq 0$.

En el cas que estudiarem, per $a = 1.4$ i $b = 0.3$ el sistema té dos punts fixos, un punt de sella i un punt atractor. Comprovem-ho:
Els dos punts fixos són

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{-0.7 + \sqrt{0.7^2 + 4 \times 1.4}}{2 \times 1.4}(1, 0.3) = \frac{-0.7 + \sqrt{6.09}}{2.8}(1, 0.3), \\
P_2 &= \frac{-0.7 - \sqrt{0.7^2 + 4 \times 1.4}}{2 \times 1.4}(1, 0.3) = \frac{-0.7 - \sqrt{6.09}}{2.8}(1, 0.3).
\end{aligned}
$$

Ara, per veure la seva estabilitat, trobem els valors propis associats a aquests punts fixos. Els valors propis associats a P_1 són:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{11} &= (-0.5) \times \left(\sqrt{6.09} - 0.7\right) + \sqrt{0.25 \times \left(\sqrt{6.09} - 0.7\right)^2 + 0.3}, \\
\lambda_{12} &= (-0.5) \times \left(\sqrt{6.09} - 0.7\right) - \sqrt{0.25 \times \left(\sqrt{6.09} - 0.7\right)^2 + 0.3}
\end{aligned}
$$

d'on veiem que $|\lambda_{11}|, |\lambda_{12}| < 1$, de manera que P_1 és un atractor local.
Els valors propis associats a P_2 són:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{21} &= (0.5) \times \left(\sqrt{6.09} + 0.7\right) + \sqrt{0.25 \times \left(\sqrt{6.09} + 0.7\right)^2 + 0.3}, \\
\lambda_{22} &= (0.5) \times \left(\sqrt{6.09} + 0.7\right) - \sqrt{0.25 \times \left(\sqrt{6.09} + 0.7\right)^2 + 0.3}.
\end{aligned}
$$

Ara, com que $|\lambda_{21}| > 1$ i $|\lambda_{22}| < 1$, P_2 és un punt de sella. A partir d'ara, fixem els valors $a = 1.4$, $b = 0.3$ i denotem l'aplicació $H_{a,b}$ com H, el punt fix P_2 com p i els valors propis associats a P_2 com $\lambda := \lambda_{22}$, $\mu := \lambda_{21}$.

4.3 Implementació del programa

Usant el llenguatge de programació C, he creat dos programes que representen les varietats invariants estable i inestable associades al punt fix p. A continuació, exposarem els programes realitzats i l'explicació sobre com s'han implementat. A través de la programació, volem trobar una parametrització global d'aquestes dues varietats, partint d'una aproximació d'aquestes al voltant de p. Com a aproximació de les varietats invariants, realitzarem un programa que consideri una aproximació afí local de la varietat i un altre programa que parteixi d'una parametrització local d'aquesta, on s'usarà el mètode de la parametrització.

Exposem a continuació el càlcul d'aquestes dues aproximacions, per posteriorment obtenir una parametritzció global de la varietat. Per l'explicació, considerarem F com el sistema dinàmic, p el punt de sella, λ i μ els valors propis associats a p tal que $0 < |\lambda| < 1$, $|\mu| > 1$ i v_1 i v_2 dos vectors propis associats a λ i μ respectivament. Per implementar els dos programes, comencem escollint la separació dels punts que anirem trobant, que serà $d \in \left[5 \cdot 10^{-3}, 10^{-1}\right]$. Escollim també un valor t_1 que serà el valor màxim que prendrà la variable t en les aproximacions, i definim el valor mínim com $t_0 = \frac{t_1}{\lambda}$.

Per trobar la varietat inestable, considerarem aquesta aplicació F. Tanmateix, denotant W^s com la varietat estable i W^ucom la inestable, observem que si U és el domini de

F,

$$W^s(F) := \left\{ x \in U \ \mid \ F^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p \right\} = W^u(F^{-1}) := \left\{ x \in U \ \mid \ F^{-n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p \right\},$$

és a dir, la varietat estable associada al punt fix p en l'aplicació F és la varietat inestable associada a p en l'aplicació F^{-1}.
El programa que implementarem s'usa per trobar varietats inestables, de manera que trobarem la varietat estable invariant en F trobant la varietat inestable invariant en F^{-1}. La varietat inestable invariant en F^{-1} està associada al valor propi λ^{-1}, amb vector propi el mateix v_1. Veiem-ho:

Partim de l'equació $DF(p)v_1 = \lambda v_1$, i aplicant $DF(p)^{-1}$ a cada banda de la igualtat, obtenim

$$v_1 = \lambda DF(p)^{-1} v_1.$$

Finalment, passant el valor λ a l'altre costat de l'igualtat obtenim $DF(p)^{-1}v_1 = \lambda^{-1}v_1$, que implica que v_1 és un vector propi associat al valor propi λ^{-1} en l'aplicació F^{-1}.

Aproximació afí.
Considerem com a aproximació de la varietat a prop de p la imatge de l'aplicació $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ definida per $\alpha(t) = p + tv$, on v és v_1 o v_2, depenent de si volem trobar la varietat estable o inestable associada a p.

Parametrització local.
La idea d'aquest mètode és trobar polinomis $x(t) = \sum_{j=0}^{N} v_j t^j$ i $y(t) = \sum_{j=0}^{N} w_j t^j$ que parametritzin la varietat invariant de manera local, l'existència dels quals està justificada pel teorema 3.1. Trobem en primer lloc la varietat inestable.
Per simplificar els càlculs, apliquem primer una translació a F de manera que el punt fix p passi a ser el punt 0. Per fer-ho, usem l'aplicació $T(z) = z + p$. Si considerem la composició

$$z \xrightarrow{T} z + p \xrightarrow{F} F(z+p) \xrightarrow{T^{-1}} F(z+p) - p\ ,$$

l'aplicació $\tilde{F} = T^{-1}FT$ té un punt fix al $(0,0)$.

A continuació, trobem una aproximació local de $\tilde{F}$ usant Taylor al voltant del punt fix $(0,0)$ calculant les derivades parcials corresponents fins a un ordre M i avaluant-les a l'origen.

Amb aquestes, obtenim les dues sèries de Taylor que definiran $\tilde{F}$, de manera que

$$\tilde{F}(x,y) \sim \left(\sum_{i+j=1}^{M} a_{ij} x^i y^j, \sum_{i+j=1}^{M} b_{ij} x^i y^j \right),$$

on

$$(a_{ij}, b_{ij}) = \frac{1}{(i+j)!} \frac{\partial^{i+j} \tilde{F}}{\partial x^i \partial y^j} (0,0)\,.$$

Per ser T una translació, el valor propi associat a la varietat invariant inestable és el mateix μ.

Al programa, la funció *funct* ens dona els coeficients de les dues sèries de Taylor que defineixen $\tilde{F}$, i els guarda als vectors f_1 i f_2 començant pels coeficients d'ordre 0, és a dir els coeficients que acompanyen els termes $x^i y^j$ tal que $i + j = 0$, i avançant de manera progressiva. Amb aquests vectors creem també un altre vector anomenat ind, tal que $ind[k]$ és la posició dels vectors f_1 i f_2 on es troba el primer coeficient d'ordre k.

Aquest vector segueix la recurrència

$$ind[i] = ind[i-1] + i.$$

Perquè el mètode sigui més visual, a partir d'ara farem referència als coeficients de les sèries de Taylor de F com a_{ij}, b_{ij} enlloc de pels vectors on són guardats, f_1 i f_2.

Escollim un valor N, que serà la quantitat de coeficients de les sèries que volem trobar. L'objectiu per tant és trobar v_j, w_j per a tot $j \in \{1, \cdots, N\}$, que guardem als vectors v i w respectivament.

Imposem la condició d'invariància

$$\tilde{F}(x(t), y(t)) = (x(\lambda t), y(\lambda t)).$$

Substituint les sèries a trobar $x(t)$ i $y(t)$ i $\tilde{F}$ per la sèrie de Taylor corresponent i considerant els termes d'ordre 1, ens queda un sistema d'equacions de la forma:

$$\begin{aligned} a_{10}v_1 t + a_{01}w_1 t &= v_1 \lambda t, \\ b_{10}v_1 t + b_{01}w_1 t &= w_1 \lambda t, \end{aligned}$$

que té solució

$$(v_1, w_1) = (a_{01}, \lambda - a_{10}).$$

A partir d'aquí trobem la resta de (v_k, w_k) de manera iterativa. Per trobar cada parella, partim de l'equació següent, que surt de la condició d'invariància (4.3) i en la qual només considerem termes fins ordre k:

$$\begin{aligned} a_{10}\sum_{n=1}^{k} v_n t^n + a_{01}\sum_{n=1}^{k} w_n t^n + \left[\sum_{i+j=2}^{k} a_{ij}\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^i \left(\sum_{n=1}^{k} w_n t^n\right)^j\right]_{\leq k} &= \sum_{n=1}^{k} v_n \lambda^n t^n, \\ b_{10}\sum_{n=1}^{k} v_n t^n + b_{01}\sum_{n=1}^{k} w_n t^n + \left[\sum_{i+j=2}^{k} b_{ij}\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^i \left(\sum_{n=1}^{k} w_n t^n\right)^j\right]_{\leq k} &= \sum_{n=1}^{k} w_n \lambda^n t^n, \end{aligned} \tag{4.3}$$

on $[\cdot]_{\leq k}$ significa que de la sèrie resultant en considerem només els termes fins ordre k. Per usar aquesta equació, necessitem tenir, per una banda els valors de les parelles (v_j, w_j) per a tot $j \in \{1, \cdots, k-1\}$, i per l'altra els valors de les sèries

$$\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^i \quad i \quad \left(\sum_{n=1}^{k} w_n t^n\right)^j$$

per a $2 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq k$. Observem que aquestes sèries tenen elements d'ordre a partir de i i j respectivament. Les truncarem a ordre k.

Per $k \geq 2$ hem de trobar els k termes de les $k-1$ sèries corresponents per v i per w. Guardem aquests termes en dues matrius $wm1$ i $wm2$ respectivament de dimensió $(k-1)\times(k-1)$, on cada fila correspon a cadascuna de les $k-1$ sèries i cada columna recull els termes de cada sèrie pel seu ordre, començant per ordre 2 i fins ordre k. Per realitzar l'explicació del càlcul, considerarem la sèrie on apareixen els termes v_n, $n \in \{1, \cdots, k\}$; els termes de l'altra sèrie es troben de manera anàloga.

Per $k = 2$, només tindrem la potència $i = 2$ per calcular, formada per un únic terme d'ordre 2, i per tant $wm1$ serà una matriu 1×1. El valor que busquem serà v_1^2.
Ara, calculem els valors de les matrius per $k > 2$. Per trobar els coeficients de la potència i, utilitzarem la igualtat

$$\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^i = \left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^{i-1} \left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right),$$

és a dir, per trobar els elements de la fila i de $wm1$ necessitem el vector de coeficients v (on tindrem $k-1$ elements trobats) i la fila $i-1$ de $wm1$. Abans, per tant, necessitem tenir els coeficients de la potència 2 de la sèrie, que correspon a la primera fila de $wm1$. Aquests, es trobaran a partir del producte

$$\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right) \left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right),$$

és a dir sumant els productes $v_p \times v_q$ tal que la suma d'ordres d'aquests dos coeficients és j, per a $2 \leq j \leq k$.
Ara, per trobar els elements de la fila $i > 2$, usarem el vector v i la fila $i-1$ de $wm1$. Seguirem un procediment anàlog al càlcul de la potència 2, partint de la següent fórmula:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^2 = \left(\sum_{n=2}^{k} wm1[i-1] t^n\right) \left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right),$$

on $wm1[i-1]$ és la fila $i-1$ de la matriu $wm1$.
De manera senzilla, un cop calculats tots els coeficients fins ordre $k-1$, podem trobar els coeficients d'ordre k de les diferents potències. Si $wm1_i^j$ representa el coeficient d'ordre i de la potència j, aquests valors es troben a partir de les fórmules següents:

$$\begin{aligned}
wm1_k^2 &= v_1 v_{k-1} + \cdots + v_{k-1} v_1 \\
wm1_k^j &= v_1 wm1_{k-1}^{j-1} + \cdots + v_{k-(j-1)} wm1_{j-1}^{j-1}, \quad j \in \{3, \cdots, k-1\} \\
wm1_k^k &= v_1 wm1_{k-1}^{k-1}.
\end{aligned}$$

Amb això hem aconseguit tots els elements de $wm1$. Repetim aquest mateix procediment anàlogament per trobar la matriu $wm2$. Observant la fórmula (4.3) veiem que ens falta trobar els coeficients d'ordre k de les sèries

$$\left(\sum_{n=1}^{k} v_n t^n\right)^i \left(\sum_{n=1}^{k} w_n t^n\right)^j, \tag{4.4}$$

per a i, j tal que $i + j = m$, per a $m \in \{2, \cdots, k\}$. Per trobar aquests coeficients, he creat la funció *poten*. Aquesta funció rep dos vectors v, w amb els coeficients de les dues sèries que volem multiplicar, les potències i i j i el valor k i troba el coeficient de (4.4) d'ordre k calculant:

$$v_{k-l}w_l + v_{k-l+1}w_{l-1} + \cdots$$

Seguint la fórmula (4.3), un cop trobem tots els coeficients que necessitem, creem dos variables auxiliars $tc1$ i $tc2$ (anomenats així per ser una abreviatura de "termes coneguts"), les quals s'obtenen multiplicant cada coeficient trobat pel corresponent a_{ij} i b_{ij} corresponent, i sumant els resultats. Amb aquests dos valors, (4.3) ens queda

$$\begin{aligned} a_{10}v_k + a_{01}w_k + tc1 &= v_k\lambda^k \\ b_{10}v_k + b_{01}w_k + tc2 &= w_k\lambda^k. \end{aligned}$$

De forma matricial podem escriure (4.3) com

$$\begin{pmatrix} a_{10} - \lambda^k & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} - \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} tc1 \\ tc2 \end{pmatrix}.$$

Ara, si A_k és la matriu que defineix el sistema lineal anterior, els coeficients (v_k, w_k) seran

$$\begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \frac{-1}{\det A_k} \begin{pmatrix} b_{01} - \lambda^k & -a_{01} \\ -b_{10} & a_{10} - \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tc1 \\ tc2 \end{pmatrix}.$$

Fins aquí hem trobat els coeficients que defineixen una parametrització local de la varietat invariant associada al punt fix $(0,0)$, ja que hem utilitzat una translació. Per obtenir, a partir d'aquesta, una parametrització local de la varietat invariant associada al punt p, haurem de sumar p als polinomis $x(t)$, $y(t)$ trobats. Veiem-ho:
Recordem que l'aplicació de la que partim és $\tilde{F} = T^{-1}FT$. Aleshores, per definició de varietat invariant, es compleix:

$$(T^{-1}FT) \circ K = K \circ R,$$

i això és equivalent a

$$F \circ (T \circ K) = (T \circ K) \circ R.$$

Observem que, com que $T(x) = x + p$, aquesta equació ens diu que obtindrem la varietat invariant que busquem sumant p a la parametrització trobada de la varietat invariant associada a $(0,0)$.

Finalment, per trobar la varietat estable invariant associada a p, repetim el mateix procediment però usant F^{-1} enlloc de F, i λ^{-1} enlloc de μ.

Globalització de la parametrització.

La idea és partir d'una aproximació de la varietat α, on α és o bé l'aproximació afí o bé el polinomi trobat pel mètode de la parametrització, i anar trobant nous punts en diferents segments, sempre recorrent l'aproximació des del t_0 fins al valor t_1, trobats en l'inici del programa.

Trobem primer la varietat inestable.
Prop del punt fix, la dinàmica de F aplicada a la varietat invariant consisteix en multiplicar per μ.
Conseqüentment, $F(\alpha(t_0)) \sim \alpha(t_1)$. Les imatges $F^k(\alpha(t_0))$ són punts de la varietat invariant per ser α una aproximació local d'aquesta. Els segments en els quals trobarem punts

que parametritzaran la varietat són $\left[F^{n+k_0}(\alpha(t_0), F^{n+k_0+1}(\alpha(t_0))\right]$ per a tot $n \geq 0$, on k_0 marca el segment en el que començarem a trobar punts. Volem que el valor $F^{k_0}(\alpha(t_0))$ sigui de l'ordre de separació dels punts. Per tant, podem agafar un valor de k_0 usant $\mu^{k_0} t_0 \sim d$, considerant per tant $k_0 = \left[\frac{(\ln(d)-\ln(t_0))}{\ln(\mu)}\right]$, on $[x]$ representa la part entera de x.

Per dur a terme el programa que parteix d'una aproximació afí, he utilitzat tres funcions. La primera, f_1, troba punts de l'aproximació afí, i les dues últimes F i F_n, troben punts de l'aplicació F i F^n respectivament. Pel programa que parteix del polinomi, he utilitzat les mateixes F i F_n, l'aplicació *horner* que avalua els polinomis en un valor t, i l'aplicació *funct* mencionada anteriorment.

En cada segment utilitzarem una variable $s \in [t_0, t_1]$ que recorri l'interval a través de diferents increments. L'increment de s queda recollit a la variable *ds*. En el primer segment trobarem com a molt un punt dins l'interval, utilitzant un increment $ds = \frac{d}{\mu^{k_0}}$.

De manera general, pel segment n seguirem el següent procediment. Començant per $s = t_0$, es troba el valor del primer punt de la varietat, $F^{n+k_0}(\alpha(t_0))$. Aquest es guarda a *pf*, i es calcula el primer increment de s, que és $ds = \frac{d}{\mu^{n+k0}}$.

A continuació, el programa entra en un bucle en el que abans de trobar el següent punt, comprova que no s'hagi arribat a t_1, és a dir, mira que $s + ds < t_1$. Si això es compleix, troba el valor de $F^{n+k_0}(\alpha(s + ds))$ a través de la funció F_n, i es guarda a *pf2*. Aquest serà el nou punt de la varietat trobat. A partir d'aquí, el valor *s+ds* es posa dins la variable s i es calcula el nou *ds*. Aquest es troba amb l'expressió

$$ds = ds \frac{d}{\|F^{n+k_0}(\alpha(s + ds)) - F^{n+k_0}(\alpha(s))\|}.$$

En acabar un segment, canviem n per $n + 1$, tornem a $s = t_0$ i calculem el nou *ds* inicial, $ds = \frac{d}{\mu^{n+1+k_0}}$. Conseqüentment, cada segment començarà amb un valor *ds* més petit, de manera que podrem trobar punts en un nombre finit de segments.

Per trobar la varietat estable, es segueix el mateix procediment però usant F^{-1} en comptes de F i λ^{-1} enlloc de μ.

4.4 Varietats invariants associades al punt de sella

A continuació usarem el mètode de la parametrització per justificar l'existència de les varietats invariants estable i inestable del punt de sella p trobat anteriorment. Sigui v_1 i v_2 els vectors propis escollits associats a λ i μ respectivament.
Observem que es compleixen les hipòtesis del Teorema 3.1.

En primer lloc, $A := JH(p)$ és invertible, ja que hem vist que $\det JH = -b \neq 0$. Ara, per justificar l'existència de la varietat estable, tenim que $0 < |\lambda| < 1$, i $\lambda^n \neq \mu$ per a tot $n \geq 2$, ja que $|\mu| > 1$. Aleshores, pel Teorema 3.1 existeix una varietat invariant estable i tangent a v_1 a p.

Ara, observem que H és invertible, amb $H^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{b}, x + a(\frac{y}{b})^2 - 1\right)$. Llavors, considerant H^{-1} i μ^{-1} en comptes de H i λ, podem canviar la hipòtesis (2) del Teorema 3.1 per $|\mu| > 1$, cosa que és certa, i pel mateix raonament que hem fet al paràgraf anterior tenim que $\mu^n \neq \lambda$ per a tot $n \geq 2$. Conseqüentment, existeix una varietat invariant inestable i tangent a v_2 a p.

A continuació, volem trobar una parametrització global d'aquestes dues varietats, partint d'una aproximació d'aquestes al voltant del punt fix. Trobarem aquestes varietats partint primer d'una aproximació afí local de la varietat i posteriorment partint d'una parametrització local d'aquesta.

Calculem primer vectors propis associats als valors propis λ i μ. Aquests són $v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{0.09}{\lambda^2}}}(1, \frac{0.3}{\lambda})$ i $v_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{0.09}{\mu^2}}}(1, \frac{0.3}{\mu})$, vectors propis de mòdul 1.

Aproximació afí.
Atès que $\lambda < 0$, per trobar una millor varietat considerarem l'aplicació $\tilde{H} := H^2$ i $\tilde{H}^{-1} = H^{-2}$ en comptes de H i H^{-1}. Trobem primer la varietat inestable.
L'aplicació $\tilde{H}$ està definida per

$$\tilde{H}(x, y) = H^2(x, y) = \left(1 - a(1 - ax^2 + y)^2 + bx, b(1 - ax^2 + y)\right).$$

Usant aquesta aplicació, el valor propi associat a la varietat inestable del punt fix serà $\tilde{\mu} := \mu^2$, i el vector propi associat a $\tilde{\mu}$ serà el mateix v_2. Veiem-ho:

Per ser v_2 vector propi associat al valor propi μ, tenim

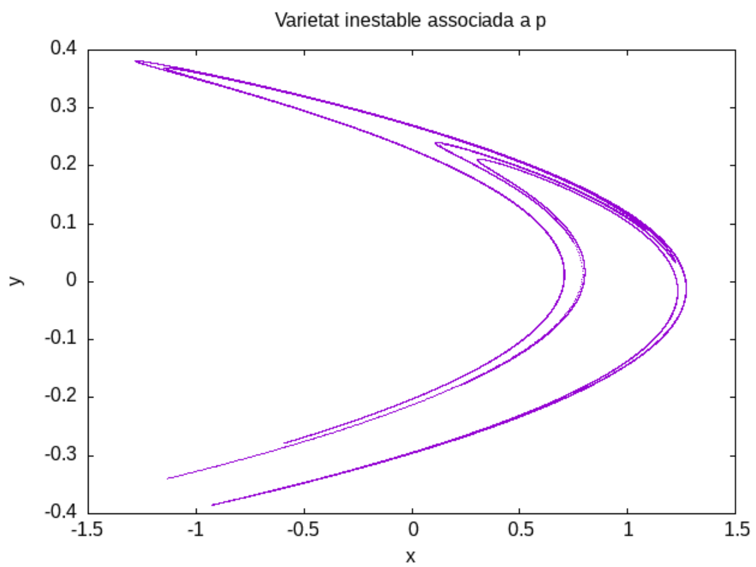
$$Av_2 = \mu v_2.$$

Usant això i considerant ara $\tilde{H}$, per la regla de la cadena tenim $J\tilde{H} = JH(H) \times JH$. Finalment, com que $H(p) = p$, $J\tilde{H}(p) = A^2$, i

$$A^2 v_2 = A\mu v_2 = \mu A v_2 = \mu^2 v_2,$$

que implica que v_2 és vector propi associat al valor propi μ^2.

Amb el valor $d = 5 \cdot 10^{-3}$ i $t_1 = 10^{-3}$ i trobant valors de la varietat en 15 segments corresponents a la branca de la varietat on t pren valors positius, el dibuix resultant de la varietat invariant inestable es mostra a la figura.

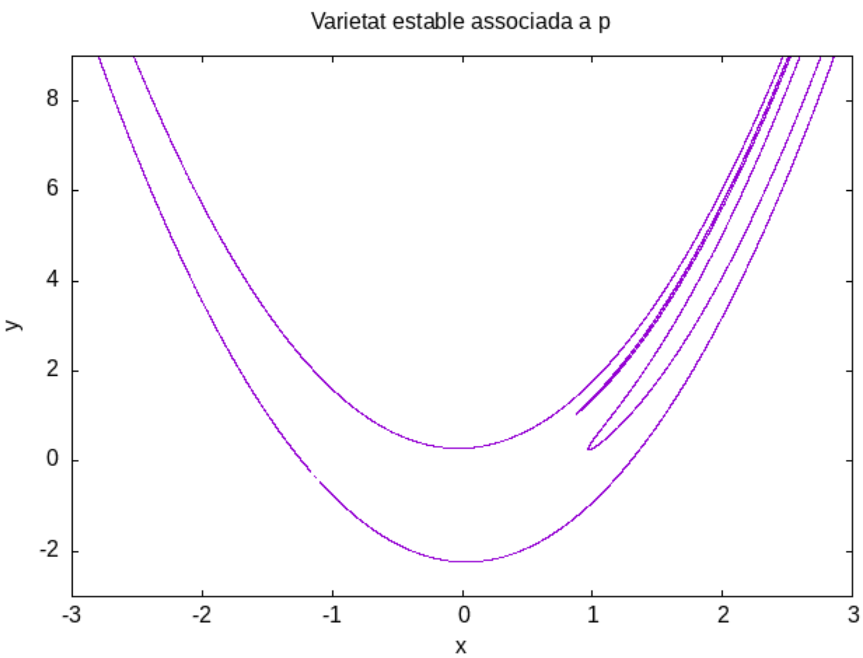


Com hem comentat anteriorment, el programa que utilitzarem per implementar les dues varietats troba varietats inestables, de manera que per trobar la varietat estable que busquem haurem d'usar

$$\tilde{H}^{-1}(x,y) = H^{-2}(x,y) = \left(\frac{1}{b}\left(x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2\right), \frac{y}{b} - 1 + \frac{a}{b^2}(x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2)^2\right).$$

Aleshores, seguint el mateix procediment anterior però usant $\tilde{H}^{-1}$ en comptes de $\tilde{H}$ i $\tilde{\lambda} := \lambda^{-2}$ com a valor propi (en l'apartat anterior hem demostrat que λ^{-1} és valor propi associat a la varietat inestable invariant en $\tilde{H}^{-1}$, i de manera anàloga a l'ús de H^2 es pot veure que λ^{-2} és valor propi associat a la varietat inestable invariant en H^{-2}) trobem la varietat estable invariant en H al voltant de p.

Per graficar aquesta varietat, hem usat una separació entre punts trobats de $d = 5 \cdot 10^{-3}$ i un valor $t_1 = 10^{-3}$. Els punts trobats d'aquesta varietat s'allunyen del punt fix ràpidament, de manera que no podem utilitzar més de 5 segments per graficar-la. Per poder graficar el dibuix de la varietat en la seva completitud, necessitem trobar punts tan en la branca de la varietat on t pren valors positius, com en la branca de la varietat on t pren valors negatius. Conseqüentment, trobem punts en 5 segments de la branca positiva, i en 5 segments de la branca negativa, on per mantenir $t > 0$, per trobar aquesta branca l'únic que es modifica és el vector propi v_1, que passa a ser $-v_1$. Els resultats es mostren a la figura.



Aproximació usant una parametrització local.

Trobem primer la varietat inestable.
En primer lloc apliquem la translació T a H esmentada en l'apartat anterior de manera que 0 passi a ser un punt fix. La nova aplicació serà $\tilde{H} = T^{-1}HT$.
Si denotem $p = (p_1, p_2)$, aquesta aplicació de manera explícita serà:

$$\tilde{H}(x,y) = H(x + p_1, y + p_2) - (p_1, p_2) = \left(1 - a(x + p_1)^2 + y + p_2 - p_1, b(x + p_1) - p_2\right).$$

Anàlogament al cas anterior, com que el valor propi λ és negatiu, per la varietat inestable considerem $\tilde{H}^2$, definida per:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^2(x,y) = \Big(&1 - a\left[1 - a(x+p_1)^2 + y + p_2 - p_1\right]^2 + b(x+p_1) - p_2, \\ &b\left[1 - a(x+p_1)^2 + y + p_2 - p_1\right]\Big)\,.\end{aligned}$$

A continuació, trobem una aproximació local de $\tilde{H}^2$ usant Taylor al voltant del punt fix $(0,0)$.
Les derivades parcials de $\tilde{H}^2$ són:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}^2}{\partial x}(x,y) &= \big(-2a\left[1 - a(x+p_1)^2 + y + p_2 - p_1\right]\left[-2a(x+p_1)\right] + b, -2ab(x+p_1)\big) \\
\frac{\partial \tilde{H}^2}{\partial y}(x,y) &= \big(-2a\left[1 - a(x+p_1)^2 + y + p_2 - p_1\right], b\big) \\
\frac{\partial^2 \tilde{H}^2}{\partial x \partial y}(x,y) &= \left(-2a\left[-2a(x+p_1)\right], 0\right) \\
\frac{\partial^2 \tilde{H}^2}{\partial x^2}(x,y) &= \big(4a^2\left[1 - a(x+p_1)^2 + y + p_2 - p_1 - 2a(x+p_1)(x+p_1)\right], -2ab\big) \\
\frac{\partial^2 \tilde{H}^2}{\partial y^2}(x,y) &= (-2a, 0) \\
\frac{\partial^3 \tilde{H}^2}{\partial x^3}(x,y) &= \big((8a^2(x+p_1) - 2a(-2a(x+p_1)))(-2a), 0\big) \\
\frac{\partial^3 \tilde{H}^2}{\partial x^2 \partial y}(x,y) &= (4a^2, 0) \\
\frac{\partial^3 \tilde{H}^2}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^3 \tilde{H}^2}{\partial y^3}(x,y) = (0,0)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Observem que a partir d'aquí les derivades parcials són totes 0.

Així, hem trobat l'expressió de $\tilde{H}^2$ següent:

$$\tilde{H}^2(x,y) \sim \left(\sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j, \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j \right),$$

on

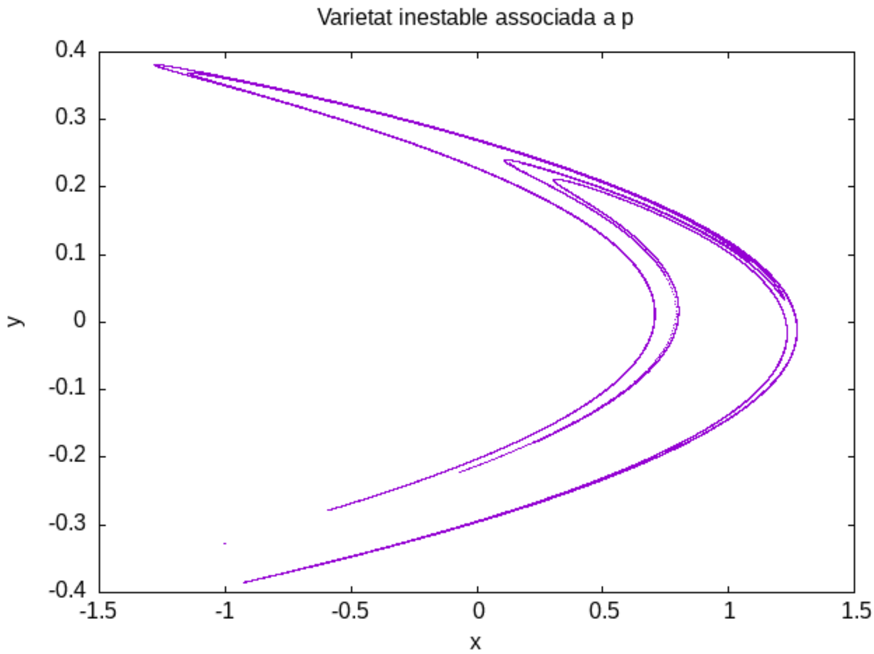
$$(a_{ij}, b_{ij}) = \frac{1}{(i+j)!} \frac{\partial^{i+j} \tilde{H}^2}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)\,.$$

Per ser T una translació, els valor propi associat a la varietat inestable invariant en $\tilde{H}$ al voltant de p és el mateix $\tilde{\mu}$.

Utilitzant el programa explicat en l'apartat anterior, els coeficients que defineixen la varietat inestable invariant sota H associada a p es mostren a la següent taula.

Ordre	Coeficient	Ordre	Coeficient
1	$(0, 1.03264 \cdot 10^{1})$	11	$(3.63917 \cdot 10^{-20}, 5.02916 \cdot 10^{-23})$
2	$(-1.32559, -1.11858 \cdot 10^{-2})$	12	$(5.94084 \cdot 10^{-23}, -7.20954 \cdot 10^{-25})$
3	$(2.696 \cdot 10^{-4}, 2.13572 \cdot 10^{-7})$	13	$(3.55615 \cdot 10^{-26}, 3.8574 \cdot 10^{-29})$
4	$(-1.550467 \cdot 10^{-2}, -5.90012 \cdot 10^{-5})$	14	$(-1.44559 \cdot 10^{-28}, -1.33276 \cdot 10^{-31})$
5	$(3.01045 \cdot 10^{-6}, 2.23661 \cdot 10^{-9})$	15	$(1.67902 \cdot 10^{-32}, 1.13137 \cdot 10^{-35})$
6	$(-1.70727 \cdot 10^{-6}, -1.16371 \cdot 10^{-8})$	16	$(-2.49636 \cdot 10^{-34}, -9.68515 \cdot 10^{-39})$
7	$(4.3314 \cdot 10^{-10}, 4.41811 \cdot 10^{-13})$	17	$(8.5071 \cdot 10^{-39}, 1.1225 \cdot 10^{-42})$
8	$(-2.13126 \cdot 10^{-11}, -5.96525 \cdot 10^{-13})$	18	$(-2.3491 \cdot 10^{-40}, -3.08872 \cdot 10^{-46})$
9	$(1.38238 \cdot 10^{-14}, 2.25252 \cdot 10^{-17})$	19	$(7.33749 \cdot 10^{-45}, 3.80049 \cdot 10^{-50})$
10	$(-4.141537 \cdot 10^{-17}, -4.41811 \cdot 10^{-13})$	20	$(-1.1987 \cdot 10^{-46}, -7.20857 \cdot 10^{-54})$

Notem que els coeficients cada cop són més petits, a causa de la convergència de H. El mètode de la parametrització ens permet trobar punts de la varietat corresponent amb usant valors de t més grans.
Amb això, la varietat invariant trobada usant una separació entre punts de $d = 5 \cdot 10^{-3}$, $t_1 = 10^{-1}$ i trobant valors de la varietat en 15 segments corresponents a la branca de la varietat on t pren valors positius és la següent:



Anàlogament a l'explicat a l'apartat de l'aproximació afí, per trobar la varietat estable haurem de calcular $\tilde{H}^{-2}$ i trobar-ne la sèrie de Taylor. En primer lloc,

$$\tilde{H}^{-1} = \left(\frac{y + p_2}{b} - p_1, x - 1 + \frac{a}{b^2}(y + p_2)^2 - p_2 + p_1 \right),$$

i conseqüentment

$$\tilde{H}^{-2} = \left(\frac{x-1}{b} + \frac{a}{b^3}(y + p_2)^2 + \frac{p_1}{b} - p_1, \frac{y + p_2}{b} - 1 + \frac{a}{b^2}\left(x - 1 + \frac{a}{b^2}(y + p_2)^2 + p_1 \right)^2 - p_2 \right).$$

Les derivades parcials de $\tilde{H}^{-2}$ es mostren a continuació:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}^{-2}}{\partial x}(x,y) &= \left(\frac{1}{b}, \frac{2a}{b^2}\left(x-1+\frac{a}{b^2}(y+p_2)^2+p_1\right)\right)\\
\frac{\partial \tilde{H}^{-2}}{\partial y}(x,y) &= \left(\frac{2a}{b^3}(y+p_2), \frac{1}{b}+\frac{4a^2}{b^4}\left(x-1+\frac{a}{b^2}(y+p_2)^2+p_1\right)(y+p_2)\right)\\
\frac{\partial^2 \tilde{H}^{2}}{\partial x \partial y}(x,y) &= \left(0, \frac{4a^2}{b^4}(y+p_2)\right)\\
\frac{\partial^2 \tilde{H}^{-2}}{\partial x^2}(x,y) &= \left(0, \frac{2a}{b^2}\right)\\
\frac{\partial^2 \tilde{H}^{-2}}{\partial y^2}(x,y) &= \left(\frac{2a}{b^3}, \frac{4a^2}{b^4}\left(x-1+\frac{3a}{b^2}(y+p_2)^2\right)\right)\\
\frac{\partial^3 \tilde{H}^{-2}}{\partial x^3}(x,y) &= \frac{\partial^3 \tilde{H}^{-2}}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = (0,0)\\
\frac{\partial^3 \tilde{H}^{-2}}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= \left(0, \frac{4a^2}{b^4}\right)\\
\frac{\partial^3 \tilde{H}^{-2}}{\partial y^3}(x,y) &= \left(0, \frac{24a^3}{b^6}(y+p_2)\right)\\
\frac{\partial^4 \tilde{H}^{-2}}{\partial x^4}(x,y) &= \frac{\partial^4 \tilde{H}^{-2}}{\partial x^3 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^4 \tilde{H}^{-2}}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^4 \tilde{H}^{-2}}{\partial x \partial y^3}(x,y) = (0,0)\\
\frac{\partial^4 \tilde{H}^{-2}}{\partial y^4}(x,y) &= \left(0, \frac{24a^3}{b^6}\right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Així, hem trobat l'expressió de $\tilde{H}^{-2}$ següent:

$$\tilde{H}^{-2}(x,y) \sim \left(\sum_{i+j=1}^{4} a_{ij} x^i y^j, \sum_{i+j=1}^{4} b_{ij} x^i y^j\right),$$

on

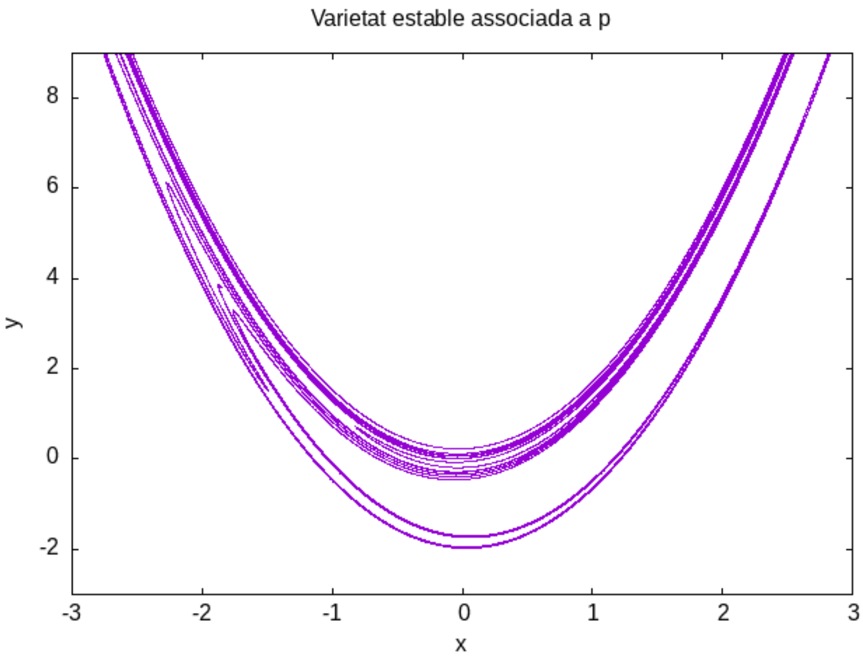
$$(a_{ij}, b_{ij}) = \frac{1}{(i+j)!} \frac{\partial^{i+j} \tilde{H}^{-2}}{\partial x^i \partial y^j}(0,0).$$

Per ser T una translació, els valor propi associat a la varietat inestable invariant en $\tilde{H}^{-1}$ al voltant de p és el mateix $\tilde{\lambda}$.

Fent ús del programa explicat en l'apartat anterior, els coeficients que defineixen la varietat estable invariant sota H associada a p es mostren a la següent taula.

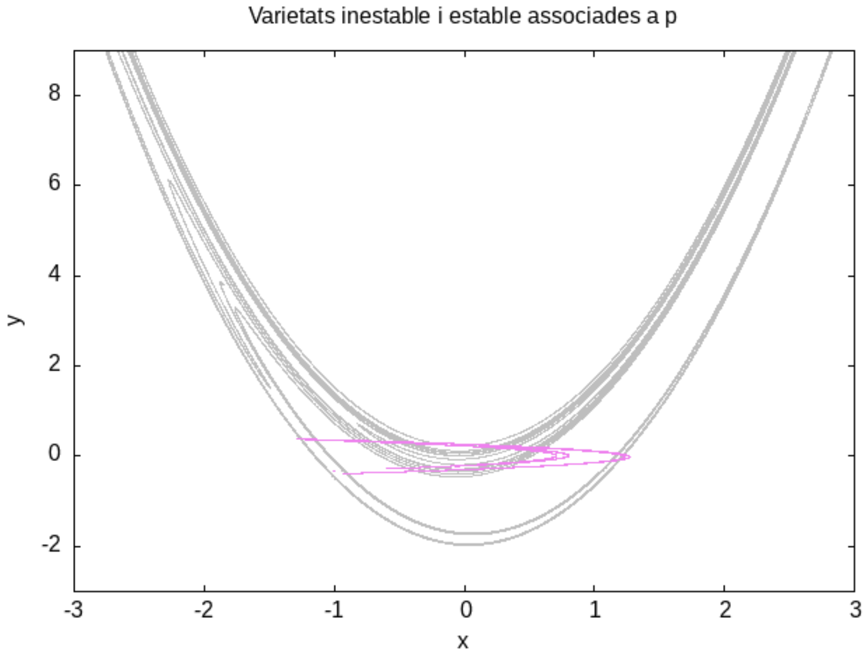
Ordre	Coeficient	Ordre	Coeficient
1	$(-3.51977 \cdot 10^{1}, 1.14738 \cdot 10^{2})$	11	$(1.85125 \cdot 10^{-25}, 7.56077 \cdot 10^{-24})$
2	$(4.38815 \cdot 10^{1}, 2.01778 \cdot 10^{3})$	12	$(2.50167 \cdot 10^{-30}, 1.02172 \cdot 10^{-28})$
3	$(1.45734 \cdot 10^{1}, 5.95728 \cdot 10^{2})$	13	$(2.2161 \cdot 10^{-35}, 9.05084 \cdot 10^{-34})$
4	$(1.12272, 4.58535 \cdot 10^{1})$	14	$(1.27559 \cdot 10^{-40}, 5.20967 \cdot 10^{-39})$
5	$(5.45614 \cdot 10^{-3}, 2.22836 \cdot 10^{-1})$	15	$(4.55893 \cdot 10^{-46}, 1.86193 \cdot 10^{-44})$
6	$(1.03342 \cdot 10^{-5}, 4.22062 \cdot 10^{-4})$	16	$(9.18358 \cdot 10^{-52}, 3.75070 \cdot 10^{-50})$
7	$(9.00096 \cdot 10^{-9}, 3.67612 \cdot 10^{-7})$	17	$(8.96126 \cdot 10^{-58}, 3.6599 \cdot 10^{-56})$
8	$(3.25315 \cdot 10^{-12}, 1.32863 \cdot 10^{-10})$	18	$(5.19886 \cdot 10^{-64}, 2.12329 \cdot 10^{-62})$
9	$(2.43463 \cdot 10^{-16}, 9.94338 \cdot 10^{-15})$	19	$(2.02855 \cdot 10^{-70}, 8.28488 \cdot 10^{-69})$
10	$(8.74435 \cdot 10^{-21}, 3.57131 \cdot 10^{-19})$	20	$(5.71722 \cdot 10^{-77}, 2.33499 \cdot 10^{-75})$

Per graficar aquesta varietat no podem usar el valor $t_1 = 10^{-1}$ ja que els punts de la varietat es fan grans per valors de t petits, però hem pogut usar el valor $t_1 = 10^{-2}$,usant novament $d = 5 \cdot 10^{-3}$ i hem graficant 4 segments de la branca positiva. Per segments posteriors, els punts trobats són d'un ordre molt gran. Per graficar la varietat, per cada segment he limitat inferiorment l'increment ds a $ds = 10^{-8}$ pels punts fora del quadrat $[-10, 10] \times [-10, 10]$, de manera que la quantitat de punts trobats per segment sigui acceptable i assegurant densitat de punts prop del punt fix.
El resultat és el següent:



Observem que el dibuix és molt dens. Això és així a causa de que els punts de la varietat s'allunyen i tornen, dibuixant corbes molt similars. Aquesta densitat es podria moderar controlant la quantitat de punts que el programa troba en cada segment.

Finalment, comparant les dues varietats invariants associades a p obtenim el gràfic següent:



5 Una altra aplicació

A continuació, estudiarem un altra aplicació F_d definida per

$$F_d(x,y) = \left(y - (x+y)^d, y - 2(x+y)^d\right),$$

on d és un nombre senar.

5.1 Punts fixos i estabilitat

Aquesta aplicació té dos punts periòdics de periode 2, $P_1 = (0,-1)$ i $P_2 = (0,1)$ (es pot comprovar fàcilment que $F_d(0,-1) = (0,1)$ i $F_d(0,1) = (0,-1)$). Per ser punts periòdics de periode 2, aquests dos punts són punts fixos de l'aplicació

$$F_d^2(x,y) = \left(y - 2(x+y)^d - \left(2y - 3(x+y)^d\right)^d, y - 2(x+y)^d - 2\left(2y - 3(x+y)^d\right)^d\right).$$

La matriu jacobiana de F_d és

$$JF_d(x,y) = \begin{pmatrix} -d(x+y)^{d-1} & 1 - d(x+y)^{d-1} \\ -2d(x+y)^{d-1} & 1 - 2d(x+y)^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Ara, la matriu jacobiana de F_d avaluada al punt periòdic $(0,-1)$ és

$$JF_d(0,-1) = \begin{pmatrix} -d & 1-d \\ -2d & 1-2d \end{pmatrix},$$

d'on traiem que els valors propis associats a $(0,-1)$ són

$$\lambda = \frac{1 - 3d + \sqrt{9d^2 - 10d + 1}}{2}, \quad \mu = \frac{1 - 3d - \sqrt{9d^2 - 10d + 1}}{2}.$$

A partir d'aquí farem l'anàlisi amb $d = 3$, anomenarem $F := F_3$ i considerarem el punt fix $p = (0,-1)$. En aquest cas, la matriu jacobiana de F avaluada a p és

$$JF(0,-1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix},$$

i els valors propis associats a $(0,-1)$ són

$$\lambda = -4 + \sqrt{13}, \quad \mu = -4 - \sqrt{13}.$$

Considerem els vectors propis

$$v_1 = \left(\frac{-\sqrt{13} - 1}{6}, 1\right) \text{ i } v_2 = \left(\frac{\sqrt{13} - 1}{6}, 1\right)$$

associats a λ i μ respectivament.

Seguint el mateix raonament fet per l'aplicació d'Hénon, els valors propis associats a $(0,-1)$ en l'aplicació F^2 són

$$\tilde{\lambda} = \lambda^2 = 29 - 8\sqrt{13}, \quad \tilde{\mu} = 29 + 8\sqrt{13},$$

i els vectors propis seran els mateixos v_1, v_2. Observem que $0 < |\tilde{\lambda}| < 1$ i $|\tilde{\mu}| > 1$, de manera que $(0,-1)$ és un punt de sella.

5.2 Varietats invariants associades al punt de sella

Usem novament el mètode de la parametrització per justificar l'existència de les varietats invariants estable i inestable del punt de sella p. Veiem que es compleixen les hipòtesis del Teorema 3.1.

Justifiquem primer l'existència de la varietat estable. Tenim que $A := JF(p)$ és invertible, ja que $\det JF(0,-1) = 3 \neq 0$. Aleshores, com que $0 < |\lambda| < 1$ i $\lambda^n \neq \mu$ per a tot $n \geq 2$, pel Teorema 3.1 existeix una varietat estable invariant sota F i tangent a v_1 a p.

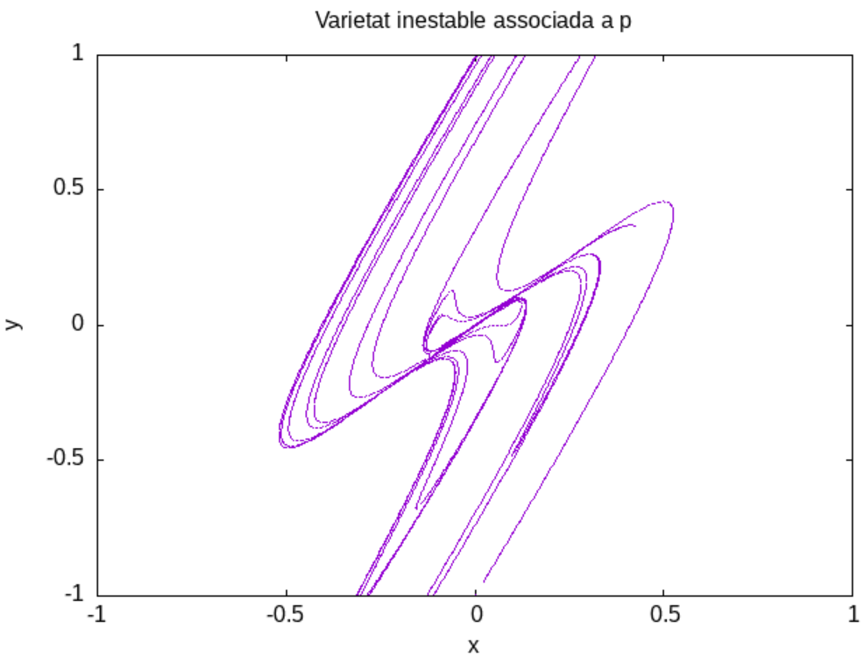
Ara, observem que atès que 3 és un nombre senar, F és invertible, amb $F^{-1}(x,y) = \left((x-y)^{\frac{1}{3}} - 2x + y, 2x - y\right)$. Aleshores, considerant F^{-1} i μ^{-1} enlloc de F i λ, i notant que $\mu^n \neq \lambda$ per a tot $n \geq 2$, pel Teorema 3.1 existeix una varietat invariant inestable i tangent a v_2 a p.

Notem que F^{-1} no és diferenciable si $x = y$, però sí que ho és en un entorn dels punts periòdics.

Com a l'aplicació d'Hénon, trobarem aquestes varietats partint primer d'una aproximació afí local de la varietat i després partint d'una parametrització local d'aquesta. Tal com hem mencionat al principi del capítol, el punt $p = (0,-1)$ és un punt fix de l'aplicació F^2, i per tant per implementar el programa utilitzarem F^2 i F^{-2} per trobar respectivament les varietats inestable i estable.

Aproximació afí.

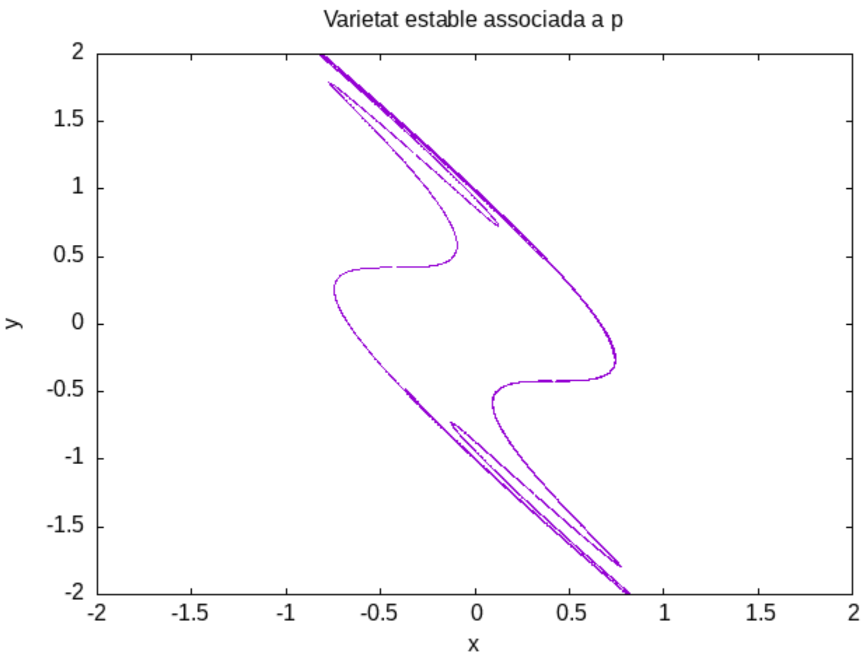
Per trobar la varietat inestable, usarem l'aplicació F^2, el valor propi μ^2 i el vector propi v_2. Usant $d = 5\cdot 10^{-3}$, $t_1 = 10^{-3}$ i trobant punts en 7 segments de la branca positiva de la varietat, obtenim el gràfic que es mostra a la figura.



Per trobar la varietat estable usarem

$$F^{-2}(x,y) = \left(\left((x-y)^{\frac{1}{3}} - 4x + 2y \right)^{\frac{1}{3}} - 2\left((x-y)^{\frac{1}{3}} - 2x + y \right) + 2x - y, \right.$$
$$\left. 2\left((x-y)^{\frac{1}{3}} - 2x + y \right) - 2x + y \right).$$

Finalment, usant $d = 5 \cdot 10^{-3}$, $t_1 = 10^{-3}$ i trobant punts en 10 segments de la branca positiva de la varietat i en 10 segments de la branca negativa, obtenim el gràfic que es mostra a continuació.



Parametrització local.

De manera anàloga a l'aplicació d'Hénon, utilitzarem l'aplicació T per transportar el punt fix p a $(0,0)$. De manera explícita, aquesta nova aplicació transportada serà

$$\tilde{F}(x,y) = F(x, y-1) - (0,-1) = \left(y - 1 - (x+y-1)^3, y - 2(x+y-1)^3 \right).$$

Considerant $\tilde{F}^2$ ens quedarà:

$$\tilde{F}^2(x,y) = \left(y - 2(x+y-1)^3 - 1 - \left(2y - 2 - 3(x+y-1)^3 \right)^3, \right.$$
$$\left. y - 2(x+y-1)^3 - 2\left(2y - 2 - 3(x+y-1)^3 \right)^3 \right).$$

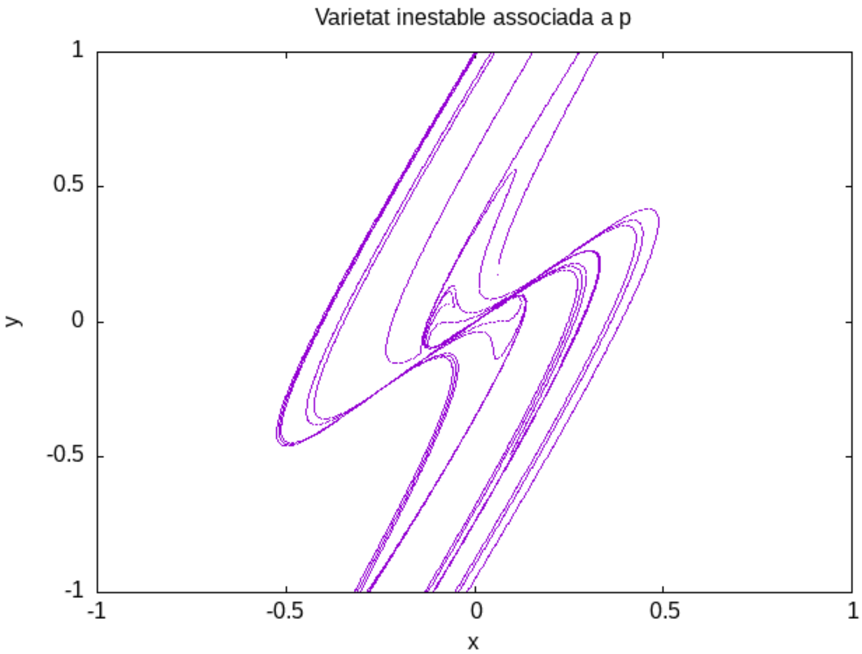
Per la longitud de les expressions de les derivades parcials de $\tilde{F}^2$, expressem a continuació aquestes derivades avaluades a $(0,0)$:

$$\frac{\partial \tilde{F}^2}{\partial x}(0,0) = (21,48)\ ,\ \frac{\partial \tilde{F}^2}{\partial y}(0,0) = (16,37)\,,$$
$$\frac{\partial^2 \tilde{F}^2}{\partial x^2}(0,0) = (-528,-1068)\ ,\ \frac{\partial^2 \tilde{F}^2}{\partial x \partial y}(0,0) = (420,852)\ ,\ \frac{\partial^2 \tilde{F}^2}{\partial y^2}(0,0) = (-336,-684)\,.$$

Fent ús del programa explicat en la secció de l'aplicació d'Hénon, els coeficients que defineixen la varietat inestable invariant sota F associada a p es mostren a la següent taula.

Ordre	Coeficient	Ordre	Coeficient
1	$(1.6 \cdot 10^{1}, 3.68444 \cdot 10^{1})$	11	$(9.46327 \cdot 10^{-27}, 1.95315 \cdot 10^{-26})$
2	$(-5.20138 \cdot 10^{1}, -1.07174 \cdot 10^{2})$	12	$(-1.74688 \cdot 10^{-31}, -3.60543 \cdot 10^{-31})$
3	$(4.9474, 1.01916 \cdot 10^{1})$	13	$(2.15993 \cdot 10^{-36}, 4.45794 \cdot 10^{-36})$
4	$(-1.26848 \cdot 10^{-1}, -2.61788 \cdot 10^{-1})$	14	$(-1.7917 \cdot 10^{-41}, -3.69794 \cdot 10^{-41})$
5	$(3.93902 \cdot 10^{-4}, 8.13028 \cdot 10^{-4})$	15	$(9.77391 \cdot 10^{-47}, 2.01726 \cdot 10^{-46})$
6	$(-4.94426 \cdot 10^{-7}, -1.02052 \cdot 10^{-6})$	16	$(-3.3817 \cdot 10^{-52}, -6.979589 \cdot 10^{-52})$
7	$(2.94444 \cdot 10^{-10}, 6.07735 \cdot 10^{-10})$	17	$(7.23593 \cdot 10^{-58}, 1.49344 \cdot 10^{-57})$
8	$(-7.8871 \cdot 10^{-14}, -1.62786 \cdot 10^{-13})$	18	$(-1.02687 \cdot 10^{-63}, -2.11939 \cdot 10^{-63})$
9	$(7.1382 \cdot 10^{-18}, 1.47328 \cdot 10^{-17})$	19	$(1.03292 \cdot 10^{-69}, 2.13187 \cdot 10^{-69})$
10	$(-3.33734 \cdot 10^{-22}, -6.88804 \cdot 10^{-22})$	20	$(-7.72744 \cdot 10^{-76}, -1.59489 \cdot 10^{-75})$

Ara, considerant $d = 5 \cdot 10^{-3}$, $t_1 = 10^{-1}$, i trobant punts en 10 segments de la branca negativa de la varietat, podem treure els resultats següents:



Per trobar la varietat estable, necessitarem considerar $\tilde{F}^{-2}$. Trobem primer $\tilde{F}^{-1}$:

$$\tilde{F}^{-1}(x,y) = \left(1 - 2 + (x+y) + (1-2x-y)^{\frac{1}{3}}, 2-(x+y)\right),$$

i per tant

$$\tilde{F}^{-2}(x,y) = \left((1-2x-y)^{\frac{1}{3}} + \left(1-(x+y)-2(1-2x-y)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}, 1-(1-2x-y)^{\frac{1}{3}}\right).$$

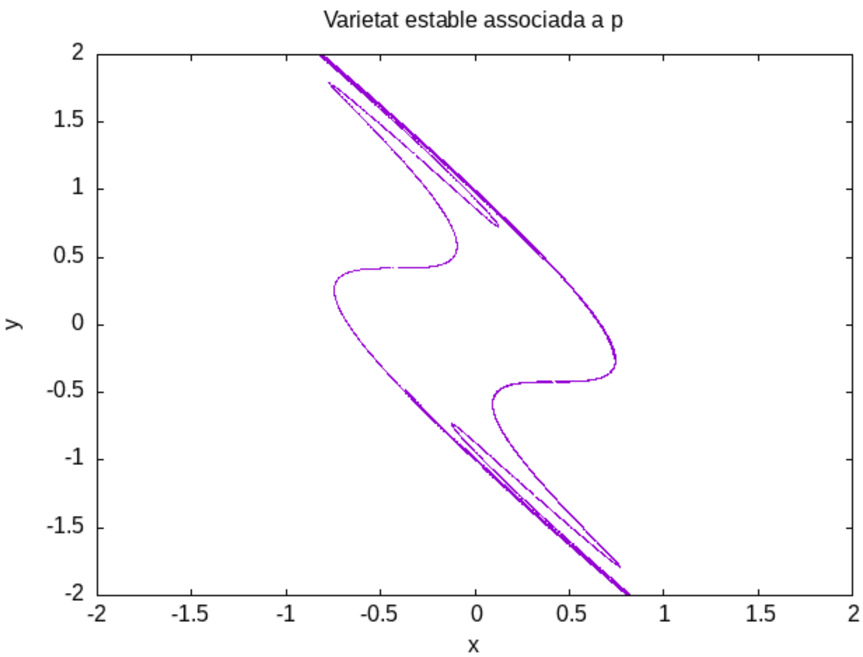
Per la longitud de les expressions de les derivades parcials de $\tilde{F}^{-2}$, expressem a continuació aquestes derivades avaluades a $(0,0)$:

$$\frac{\partial \tilde{F}^{-2}}{\partial x}(0,0) = \left(-\frac{5}{9}, \frac{2}{3}\right), \quad \frac{\partial \tilde{F}^{-2}}{\partial y}(0,0) = \left(-\frac{6}{9}, \frac{1}{3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \tilde{F}^{-2}}{\partial x^2}(0,0) = \left(-\frac{22}{81}, \frac{8}{9}\right), \quad \frac{\partial^2 \tilde{F}^{-2}}{\partial y^2}(0,0) = \left(-\frac{4}{81}, \frac{2}{9}\right), \quad \frac{\partial^2 \tilde{F}^{-2}}{\partial x \partial y}(0,0) = \left(-\frac{14}{81}, \frac{4}{9}\right).$$

Utilitzant novament el programa explicat en la secció de l'aplicació d'Hénon, els coeficients que defineixen la varietat estable invariant sota F associada a p es mostren a la següent taula.

Ordre	Coeficient	Ordre	Coeficient
1	$(-6.66667 \cdot 10^{-1}, 6.98271)$	11	$(-1.09831 \cdot 10^{-30}, 4.62562 \cdot 10^{-30})$
2	$(-3.23733 \cdot 10^{-2}, 1.36511 \cdot 10^{-1})$	12	$(-1.32912 \cdot 10^{-34}, 5.59689 \cdot 10^{-34})$
3	$(-2.01145 \cdot 10^{-4}, 8.70698 \cdot 10^{-4})$	13	$(-1.29049 \cdot 10^{-38}, 5.43373 \cdot 10^{-38})$
4	$(-5.51093 \cdot 10^{-7}, 2.34828 \cdot 10^{-6})$	14	$(-1.02209 \cdot 10^{-42}, 4.30334 \cdot 10^{-42})$
5	$(-7.79557 \cdot 10^{-10}, 3.29825 \cdot 10^{-9})$	15	$(-6.69799 \cdot 10^{-47}, 2.81994 \cdot 10^{-46})$
6	$(-6.54998 \cdot 10^{-13}, 2.76491 \cdot 10^{-12})$	16	$(-3.67707 \cdot 10^{-51}, 1.54805 \cdot 10^{-50})$
7	$(-3.55908 \cdot 10^{-16}, 1.50113 \cdot 10^{-15})$	17	$(-1.70967 \cdot 10^{-55}, 7.1975 \cdot 10^{-55})$
8	$(-1.328378 \cdot 10^{-19}, 5.5998 \cdot 10^{-19})$	18	$(-6.79809 \cdot 10^{-60}, 2.86186 \cdot 10^{-59})$
9	$(-3.56574 \cdot 10^{-23}, 1.50253 \cdot 10^{-22})$	19	$(-2.33182 \cdot 10^{-64}, 9.81632 \cdot 10^{-64})$
10	$(-7.14003 \cdot 10^{-27}, 3.00773 \cdot 10^{-26})$	20	$(-6.95367 \cdot 10^{-69}, 2.92725 \cdot 10^{-68})$

Ara, considerant $d = 5 \cdot 10^{-3}$, $t_1 = 10^{-1}$, i trobant punts en 7 segments de la branca positiva de la varietat i en 7 segments de la branca negativa, obtenim el resultat següent:



Conclusions

L'objectiu principal d'aquest treball és desenvolupar el mètode de la parametrització per varietats invariants analítiques 1-dimensionals. En primer lloc, l'he desenvolupat a nivell teòric, enunciant el teorema principal i demostrant-lo.

Per fer-ho, abans he necessitat exposar diferents definicions i resultats dins la teoria dels espais de Banach, i sobretot dins el càlcul diferencial en espais de Banach.

Finalment, a nivell pràctic, he creat un programa que a partir d'aquest mètode trobi una parametrització local de la varietat invariant 1-dimensional que busquem, per posteriorment globalitzar-la. A continuació, he usat aquest programa per trobar les varietats inestable i estable associades a dos punts de sella de dues aplicacions diferents, en primer lloc l'aplicació d'Hénon, i per altra banda una aplicació que apareix en el mètode de la secant com a sistema dinàmic a l'entorn d'una òrbita periòdica de periode 3.

Aquest treball m'ha aportat un ampli coneixement, en primer lloc, dels espais de Banach i el càlcul diferencial dins aquests espais. En l'assignatura d'Anàlisi Funcional vaig començar a treballar amb ells, però aquest treball m'ha permès aprofundir en aquest àmbit. He vist la importància que aquests tenen dins l'anàlisi funcional, ja que permeten treballar amb una gran quantitat d'espais i demostrar-ne propietats específiques. Un dels teoremes que no coneixia és el Teorema recíproc de Taylor, i gràcies al treball realitzat n'he pogut veure la importància i la utilitat que té.

He conegut i après a desenvolupar el mètode de la parametrització per varietats invariants analítiques 1-dimensionals, i he vist com de potent és aquest mètode. He après també a desenvolupar demostracions rigoroses usant espais de Banach. Computacionalment, he desenvolupat un programa que amb pocs segons em troba els coeficients d'un polinomi que defineix una varietat invariant al voltant d'un punt hiperbòlic amb tants termes com vulguem, tot i que a partir d'un cert terme, aquests coeficients deixen de ser significatius per ser d'un ordre molt petit.

Ja per acabar, puc dir que aquest ha sigut un treball que he disfrutat i que m'ha permès aprofundir en àrees que no havia treballat en les assignatures del grau.

A Codi en C desenvolupat

A continuació es mostra el programa que he creat per trobar les parametritzacions locals de les varietats invariants corresponents i la seva posterior globalització. En particular, aquest programa fa referència a la varietat invariant inestable associada al punt fix p de l'aplicació d'Hénon. Els programes creats per trobar la resta de varietats invariants són adaptacions d'aquest.

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#define a 1.4
#define b 0.3

double poten (double *,double *,int , int, int);
double horner(double *, double, int, double );
void F(double *, double *);
void Fn(double *, double *, int );
void funct(double *, double *, double *);

int main (void){
  double d, lambda, t1, *v1, *v2, indaux,*v, *w, **wm1, **wm2, lambdak, tc1, tc2, det, vaux1, vaux2, *p, sum1,  sum2, t0;
  int i, j, N, num, k, m, r, n1, *ind;
  FILE  *sortida;

/*Calculem el punt de sella*/
  p=(double *)malloc(2*sizeof(double));
  if (p==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }
  p[0]=(-0.7-sqrt(6.09))/2.8;
  p[1]=(-0.7-sqrt(6.09))*0.3/2.8;


  sortida=fopen("hinest_param.txt", "w");

  printf("Fins quin ordre els termes de F?\n");
  scanf("%d", &n1);

  /*A ind hi guardarem l'index de f1 i f2 on comencen els termes de cada grau dels polinomis*/
  ind=(int *)malloc((n1+2)*sizeof(int));
  if (ind==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }

  /*Emplenem ind*/
  indaux=0;
  ind[0]=0;
  for(i=1; i<(n1+2); i++){
    ind[i]=indaux+i;
    indaux=ind[i];
  }

/*A f1 hi guardarem els coeficients del polinomi que forma la primera component de l'aplicacio corresponent*/
```

```c
/*A f2 hi guardarem els coeficients del polinomi que forma la segona component de l'aplicacio corresponent*/
  f1=(double *)malloc(ind[n1+1]*sizeof(double));
  f2=(double *)malloc(ind[n1+1]*sizeof(double));
  if (f1==NULL || f2==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }

/*Emplenem f1 i f2*/
  funct(f1, f2, p);

/*Escollim la separacio entre punts que trobarem de la varietat invariant*/
  printf("separacio (entre 0.005 i 0.01)\n");
  scanf("%le", &d);

/*Escollim temps suficientment petit per obtenir un error acceptable a l'hora de trobar la varietat invariant global*/
  printf("t1\n");
  scanf("%le", &t1);

/*Calculem el valor propi de modul >1 i l'elevem al quadrat*/
  lambda=0.5*(sqrt(6.09)+0.7)+ sqrt(0.25*(sqrt(6.09)+0.7)*(sqrt(6.09)+0.7)+0.3);
  lambda=lambda*lambda;

/*N sera el grau del polinomi que parametritza la varietat invariant*/
  printf("Grau de la parametritzacio?\n");
  scanf("%d", &N);

/*Inicialitzem els vectors que guardaran els coeficients de la parametritzacio de la varietat invariant*/
  v=(double *)malloc(N*sizeof(double));
  w=(double *)malloc(N*sizeof(double));
  if (v==NULL || w==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }

/*Trobem els coeficients per k=1*/
  v[0]=f1[2];
  w[0]=lambda-f1[1];

/*Per k=2 no tenim matriu. Nomes necessitem v[0], w[0] i el coeficient d'ordre 2 de la potencia ()^2. Trobem els dos coeficients*/
    vaux1=v[0]*v[0];
    vaux2=w[0]*w[0];

    /*Sumem ()^2()^0 , ()^0()^2 i ()^1()^1*/
    tc1=f1[3]*vaux1+ f1[5]*vaux2+ f1[4]*poten(v, w, 2 , 1, 1);
    tc2=f2[3]*vaux1+ f2[5]*vaux2+ f2[4]*poten(v, w, 2 , 1, 1);

    lambdak=lambda*lambda;
    det=(f1[1]-lambdak)*(f2[2]-lambdak)-f2[1]*f1[2];
    v[1]=(-1./det)*((f2[2]-lambdak)*tc1-f1[2]*tc2);
    w[1]=(-1./det)*(-f2[1]*tc1+(f1[1]-lambdak)*tc2);


/*A partir d'ara, trobarem la resta de coeficients de manera iterativa*/
/*Per trobar els coeficients d'ordre k, considerem els polinomis fins a ordre k*/
```

```c

  for(k=3; k<=N; k++){

    wm1=(double **)malloc((k-1)*sizeof(double*));
    wm2=(double **)malloc((k-1)*sizeof(double*));
    if(wm1==NULL || wm2==NULL){
        printf("Error memoria\n");
        exit(1);
    }
    for(i=0; i<k-1; i++){
      wm1[i]=(double*)malloc((k-1)*sizeof(double));
      wm2[i]=(double*)malloc((k-1)*sizeof(double));
      if(wm1[i]==NULL || wm2[i]==NULL){
        printf("Error memoria\n");
        exit(1);
      }
    }
  /*Inicialitzem a 0*/
    for(j=0; j<k-1; j++){
      for(i=0; i<k-1; i++){
        wm1[j][i]=0;
        wm2[j][i]=0;
      }
    }


  /*Calculem coeficients de la potencia 2 excepte el coeficient d'ordre k*/
    for(i=0; i<k-2; i++){
      sum1=0;
      sum2=0;
      for(m=0; m<k-1; m++){
        for(r=0; r<k-1; r++){ /*m i r controlen els coeficients finals de la serie trobats*/
          if(m+r==i){
            sum1+=v[m]*v[r];
            sum2+=w[m]*w[r];
          }
        }
      }
      wm1[0][i]=sum1;
      wm1[0][i]=sum2;
    }
/*Resta de potencies fins a k, excepte els coeficients d'ordre k de cada potencia*/
    for(j=1; j<k-1; j++){
      for(i=j; i<k-2; i++){
        sum1=0;
        sum2=0;
        for(m=0; m<k-2; m++){ /*m controla els elements de les matrius wm1 i wm2 d'una fila superior sense contar els d'ordre k que no els sabem.*/
          for(r=0; r<k-1; r++){ /*s controla els coeficients trobats.*/
            if(m+r==i-1) {
              sum1+=wm1[j-1][m]*v[r];
              sum2+=wm2[j-1][m]*w[r];
            }
          }
          wm1[j][i]=sum1;
          wm2[j][i]=sum2;
        }
      }
    }
```

```
/*Calculem els coeficients k per cada potencia*/
/*Potencia 2*/
 m=k-2;
  for(i=0; i<k-1; i++){
    wm1[0][k-2]+=v[i]*v[m];
    wm2[0][k-2]+=w[i]*w[m];
    m--;
  }

/*Potencies de 3 a k-1*/
  for(j=1; j<k-2; j++){
    m=k-3;
    for(i=0; i<k-1; i++){
      wm1[j][k-2]+=v[i]*wm1[j-1][m];
      wm2[j][k-2]+=w[i]*wm2[j-1][m];
      m--;
    }
  }
/*Potencia d'ordre k*/
  wm1[k-2][k-2]=v[0]*wm1[k-3][k-3];
  wm2[k-2][k-2]=w[0]*wm2[k-3][k-3];


/*Fins aqui hem calculat per una k els coeficients de les potencies corresponents, guardats en dues matrius wm1 i wm2.*/
/*Ara hem de calcular els coeficients dels productes ()^l()^m */

  tc1=0;
  tc2=0;
  for(m=2; m<=n1; m++){
    tc1+=f1[ind[m]]*wm1[m-2][k-2]+f1[ind[m+1]-1]*wm2[m-2][k-2];
    tc2+=f2[ind[m]]*wm1[m-2][k-2]+f2[ind[m+1]-1]*wm2[m-2][k-2];
  }

  /*Calculem les potencies intermitges.*/
  for(m=2; m<=n1; m++){
    j=m-1;
    for(i=1; i<m; i++){
      if(i==1 && j==1){
        tc1+=f1[ind[m+i]]*poten(v, w, k, j, i);
        tc2+=f2[ind[m+i]]*poten(v, w, k, j, i);
      }
      else if(i==1 && j!=1){
        tc1+=f1[ind[m+i]]*poten(wm1[j-2], w, k, j, i);
        tc2+=f2[ind[m+i]]*poten(wm1[j-2], w, k, j, i);
      }
      else if(i!=1 && j==1){
        tc1+=f1[ind[m+i]]*poten(v, wm2[i-2], k, j, i);
        tc2+=f2[ind[m+i]]*poten(v, wm2[i-2], k, j, i);
      }
      else {
        tc1+=f1[ind[m+i]]*poten(wm1[j-2], wm2[i-2], k, j, i);
        tc2+=f2[ind[m+i]]*poten(wm1[j-2], wm2[i-2], k, j, i);
      }
      j--;

    }
  }

  lambdak=1;
```

```
    for(i=1; i<=k; i++) lambdak*=lambda;
    det=(f1[1]-lambdak)*(f2[2]-lambdak)-f2[1]*f1[2];

    v[k-1]=(-1./det)*((f2[2]-lambdak)*tc1-f1[2]*tc2);
    w[k-1]=(-1./det)*(-f2[1]*tc1+(f1[1]-lambdak)*tc2);
  }

  for(i=0; i<N; i++){
    printf("coefs1[%d]=%le\t coefs2[%d]=%le \n", i, v[i], i, w[i]);
  }
  /*Un cop tenim els coeficients que defineixen la parametritzacio local, globalitzem aquesta parametritzacio*/
  double s, ds, lambda0, *pi, *pf, *pf2,*dif, norm;
  int k0, n;

  /*Comencem amb t0*/
  t0=-t1/lambda;

  /*Trobem k0*/
  k0=(log(d)-log(t1))/(log(lambda))+1;
  if(k0<=0) k0=1;

  pi=(double *)malloc(2*sizeof(double)); /*pi guardara els diferents valors de la parametritzacio*/
  pf=(double *)malloc(2*sizeof(double));  /*pf i pf2 guardaran els diferents valors de F^(k+k0)*/
  pf2=(double *)malloc(2*sizeof(double));
  dif=(double *)malloc(2*sizeof(double)); /*dif es un vector auxiliar*/
  if (pi==NULL || pf==NULL || pf2==NULL || dif==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }
  /*Primer punt de l'interval*/
  pi[0]=horner(v, t0, N, p[0]);
  pi[1]=horner(w, t0, N, p[1]);

  Fn(pi, pf, k0);
  fprintf(sortida, "%le %le\n", pf[0], pf[1]);

  /*Segment 1*/
  /*En aquesta primera part considerem nomes la possibilitat de trobar un unic punt dins l'interval*/
  printf("segment 1\n");
  lambda0=lambda;
  for(i=2; i<=k0; i++) lambda0*=lambda;
  ds=d/lambda0;
  s=t0;
  /*Si encara no s'ha arribat a t1, es calcula el nou punt trobat*/
  if(s-ds>-t1) {
    pi[0]=horner(v, s-ds, N, p[0]);
    pi[1]=horner(w, s-ds, N, p[1]);
    Fn(pi, pf2, k0);
      fprintf(sortida, "%le %le \n", pf2[0], pf2[1]);
  }

  /*Fi de segment, posem tots els vectors a zero*/
  for(i=0; i<2; i++){
    pi[i]=0;
    pf[i]=0;
    pf2[i]=0;
  }
```

```
  /*Resta de segments*/
  for(n=1; n<15; n++){
    printf("segment %d\n", n+1);
    num=0;
    s=t0;
    lambda0*=lambda;
    ds=d/lambda0;

    pi[0]=horner(v, s, N, p[0]);
    pi[1]=horner(w, s, N, p[1]);

    Fn(pi, pf, k0+n);
    fprintf(sortida, "%le %le\n", pf[0], pf[1]);
    while(s-ds>-t1){
      num++;
      pi[0]=horner(v, s-ds, N, p[0]);
      pi[1]=horner(w, s-ds, N, p[1]);
      Fn(pi, pf2, k0+n);
      fprintf(sortida, "%le %le\n", pf2[0], pf2[1]);
      s-=ds;
      for(i=0; i<2; i++) dif[i]=pf2[i]-pf[i];
      norm=sqrt(dif[0]*dif[0]+dif[1]*dif[1]);
      ds*=d/norm;

      for(i=0; i<2; i++)  pf[i]=pf2[i];
      for(i=0; i<2; i++) {
        pf2[i]=0;
        pi[i]=0;
        dif[i]=0;
      }
    }
    printf("num vegades while: %d\n", num);

    for(i=0; i<2; i++){
      pi[i]=0;
      pf[i]=0;
      pf2[i]=0;
    }
  }
  return 0;
}

double poten (double *v, double *w, int k, int l,int m){
  /*l es l'ordre de la potencia de la serie v, i m es l'ordre de la potencia
     de la serie w*/
  int i, j;
  double sum;
  if(m==1 && l==1){
    j=l;
    sum=0;
    for(i=k-l; i>=m; i--) {
      sum+=v[j]*w[i];
      j++;
    }
  }
  if(m==1 && l>1){
    j=l-2;
    sum=0;
    for(i=k-l-1; i>=m; i--){
      sum+=v[j]*w[i];
      j++;
```

```
    }
  }
  if(l==1 && m>1){
    j=l;
    sum=0;
    for(i=k-l-2; i>=m-2; i--){
      sum+=v[j]*w[i];
      j++;
    }
  }
  if(m>1 && l>1){
    j=l-2;
    sum=0;
    for(i=k-l-2; i>=m-2; i--) {
      sum+=v[j]*w[i];
      j++;
    }
  }
  return sum;
}

double horner(double *coefs, double t, int N, double p){
  double *aux;
  int k;
  aux=(double*)malloc(N*sizeof(double));
  if(aux==NULL){
    printf("problemes de memoria\n");
    exit(1);
  }
  aux[N-1]=coefs[N-1];
  for(k=N-2; k>=1; k--) aux[k]=coefs[k]+ aux[k+1]*t;
  aux[0]=p+aux[1]*t;
  return aux[0];
}

void F(double *p, double *v){
  double *aux;
  aux=(double *)malloc(2*sizeof(double));
  if (aux==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }

  aux[0]=1+p[1]-a*p[0]*p[0];
  aux[1]=b*p[0];
  v[0]=1+aux[1]-a*aux[0]*aux[0];
  v[1]=b*aux[0];
  free(aux);
  return;
}

void Fn(double *p, double *v, int n){
  double *aux;
  int i;
  aux=(double *)malloc(2*sizeof(double));
  if (aux==NULL){
    printf("error de memoria\n");
    exit(1);
  }
  F(p, v);
  for(i=2; i<=n; i++){
```

```
        F(v, aux);
        v[0]=aux[0];
        v[1]=aux[1];
        aux[0]=0;
        aux[1]=0;
  }
  free(aux);
  return;
}

void funct(double *f1, double *f2, double *p){
  int i;
  /*Coeficients de la serie de Taylor per l'aplicacio d'Henon F al quadrat. Abans, fem una translacio de manera que F'(0)=0 (0 sigui el punt fix i no p) de manera que F'(x)=F(x+p)-p*/
  /*Emplenem f1*/
  f1[0]=0; /*a00*/
  f1[1]=4*a*a*p[0]*(1-a*p[0]*p[0]+p[1]-p[0])+b; /*a10*/
  f1[2]=-2*a*(1-(a*p[0]*p[0])+p[1]-p[0]); /*a01*/
  f1[3]=0.5*(-2*a*(4*a*a*p[0]*p[0]-2*a*(1-a*p[0]*p[0]+p[1]-p[0]))); /*a20*/
  f1[4]=(0.5)*4*a*a*p[0]; /*a11*/
  f1[5]=(0.5)*(-2*a); /*a02*/
  f1[6]=(1./6)*8*a*a*p[0]*(1-a);  /*a30*/
  f1[7]=(1./6)*4*a*a; /*a21*/
  f1[8]=0;  /*a12*/
  f1[9]=0;  /*a03*/

  /*Emplenem f2*/
  f2[0]=0; /*b00*/
  f2[1]=-2*a*b*p[0];  /*b10*/
  f2[2]=b;  /*b01*/
  f2[3]=(1./2)*(-2*a*b);  /*b20*/
  for(i=4; i<10; i++) f2[i]=0; /*b11, b02, b30, b21, b12, b03*/

  return;
}
```

Referències

[1] Cabré, X.; Fontich, E.; Llave, R. de la: *The parameterization method for invariant manifolds. I. Manifolds associated to non-resonant subspaces.* Indiana Univ. Math. J., 52(2):283-328, 2003.

[2] Cabré, X.; Fontich, E.; Llave, R. de la: *The parameterization method for invariant manifolds. III. Overview and applications.* J. Differential Equations, 218(2):444-515, 2005.

[3] Nelson, E.: *Topics in Dynamics I: Flows* Princeton University Press, Princeton, NJ, Mathematical Notes, 1969.

[4] Abraham, R.; Marsden, J.E.; Ratiu, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* Springer-Verlag Publishing Company, 2002.

[5] Fontich, E: Transparències del curs Dynamical Systems, del Màster de Matemàtica Avançada (UB).

[6] Luque, A.: *El mètode de la parametrització en sistemes dinàmics* Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, Vol. 27, núm. 1, 2012, Pàg. 5-38.