Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

GEOMETRIA NO EUCLIDIANA A L'AULA DE L'INSTITUT

Autor: Caterina Gilli

Director: Dr. Sergi Muria Maldonado
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

The present project aims to pose the study of two non-euclidean geometries: hyperbolic geometry and taxicab geometry, whose metric is defined by the l_p norm when $p = 1$. This study will follow a metric approach, examining the sets of lines, points, angles and distance functions that define the geometries. The purpose of this project is to create solid knowledge to then create a didactic proposal, bringing some of the found results to a classroom of catalan Baccalaureate students. The activities presented will aim to oppose the student's geometric intuition with formal definitions of geometric objects.

Resum

El present treball busca plantejar l'estudi de dues geometries no euclidianes: la geometria hiperbòlica i la geometria del taxi, la mètrica de la qual ve definida per la norma de l_p, quan $p = 1$. Aquest estudi tindrà un caràcter mètric, basant-se en l'examinació del conjunt de rectes, el de punts, els angles i les funcions de distància que defineixen les geometries. L'objectiu d'aquest treball és de crear un coneixement sòlid per, a partir d'aquest, generar una proposta didàctica per apropar alguns dels resultats estudiats a l'aula de batxillerat. Les activitats plantejades tindran com a objectiu la contraposició entre la intuïció geomètrica i les definicions formals d'objectes geomètrics.

2010 Mathematics Subject Classification. 51P05 70G99 97G40

Agraïments

Vull agraïr al tutor del meu treball, el Dr. Sergi Muria, l'haver entomat aquest camí amb mi, i haver-me ajudat a seguir-lo fins al final.

En segon lloc agraïr a les estudiants de l'Institut Jaume Balmes per haver realitzat les activitats en el treball proposades, dedicant una part del seu temps lliure a allò que jo els hi havia preparat. De la mateixa manera, agraïr als amics que m'han fet d'alumnes per un dia, permetent així acumular més resultats sobre el funcionament de les dues sessions.

Moltes gràcies al Jordi Ferran i al Joan Lisandra, per servir-me de connexió amb l'alumnat de l'institut, per donar-me les seves opinions, i per intentar engrescar la seva classe a apuntar-se a realitzar la proposta didàctica.

Finalment no puc no agraïr als meus pares el suport incondicional durant aquests anys, especialment l'últim, i d'igual manera el dels meus amics i amigues.

Índex

Introducció

El coneixement rau en el qüestionament; en la formulació de preguntes i recerca de respostes. És per això que aquest treball es proposa com un recordatori de posar en dubte allò que es considera sabut. Concretament, s'ha observat que el salt més gran que hi ha entre les matemàtiques a l'institut i les de l'universitat es troba en l'objectiu que en té l'estudi. A nivells anteriors a l'universitàri, les matemàtiques semblen ser l'assignatura-eina, que tenen interés només en tant que permeten resoldre problemes concrets. Fins i tot dins d'aquesta visió, sembla haver-hi un rebuig generalitzat cap a tot allò que conté un component abstracte, sobretot per la seva falta de contextualització: es dóna més importància a saber la fòrmula de resolució d'una equació de segon grau que a entendre què representa, i l'alumnat acaba resolent exercicis automàticament, i tenint una mala relació amb l'àlgebra. L'automatització dels processos a les matemàtiques és probablement una de les raons per les quals arribats a quart d'ESO molts alumnes estan contents de deixar d'estudiar matemàtiques, o accepten les definicions donades pel professorat sense qüestionar.
En aquest treball, es vol forçar la posada en dubte del que s'ha acceptat, o s'ha automatitzat, posant especial incidència en com difereixen les definicions pures d'objectes matemàtics, de totes les assumpcions que se li associen.
És per això que s'ha escollit com a tema a tractar els llocs geomètrics a diferents geometries, i la propietat de paral·lelisme. Efectivament, la geometria és una de les branques de les matemàtiques més donada a la creació d'intuïció matemàtica, però també on assumpcions (no necessàriament certes) es generen més fàcilment.
Per a assolir aquest objectiu, s'ha decidit utilitzar la geometria hiperbòlica com a espai trencador de les concepcions geomètriques de l'alumnat, acostumat a la geometria euclidiana. Aquesta geometria presenta models on és possible treballar sense necessitar d'una formalització massa avançada. La geometria del taxi s'introdueix com a *geometria pont* per fer el camí dels alumnes cap a les noves concepcions més esglaonat.

Es proposa, doncs, un treball que vol reforçar la idea que la docència de les matemàtiques, feta per matemàtics, és important i necessària. En efecte, la temàtica que s'apropará a l'alumnat no és una explícitament curricular, i doncs requereix d'uns coneixements matemàtics per part de la persona docent. Aquests coneixements són els que pretèn proveir el treball, recopilant una sèrie de resultats per tal de formar una idea clara de les eines que s'utilitzaran a l'aula. De l'estudi que se'n farà, s'escolliran només algunes parts per a proposar a l'alumnat, però es creu que una comprensió més extensa és important per part del professorat.

Objectius

Es proposen una sèrie d'objectius, a nivell matemàtic, didàctic i personal.

· Millorar el meu coneixement sobre la geometria no euclidiana, aconseguint-ne una visió més global

· Idear i portar a l'aula de primer de batxillerat una proposta didàctica centrada en les geometries no euclidianes, apropant conceptes de grau a cursos inferiors

· Proposar contingut d'activitats matemàtiques complementari del currículum de batxillerat, i en català

· Generar interès a l'alumnat a través del dubte, i del reforç positiu

· A nivell personal, apropar-me al món de la docència de les matemàtiques, per confirmar que és el recorregut que vull seguir

Estructura de la Memòria

El Capítol 1, està íntegrament dedicat a l'estudi matemàtic de la geometria no-euclidiana, en específic de les geometries hiperbòlica i del taxi. Es considera que el professorat ha de tenir un coneixement extens del tema que vol tractar a l'aula, i és per aquesta raó que en aquest capítol es dóna una formalització dels models que s'usaran, i s'estudien casos més generals que els finalment escollits per a l'aplicació didàctica.
L'estructura que se segueix en aquest capítol té un caràcter fortament històric. És per això que aquest comença amb una contextualització de la geometria no euclidiana. Els apartats 1.4 i 1.3, dedicats a la geometria hiperbòlica i del taxi respectivament, també s'inicien amb una contextualització històrica del model treballat, i de la raó de la seva creació.
En aquest capítol s'aborden les geometries estudiades seguint sobretot els processos presentats a [7] i [9]. Els raonaments tindran un caràcter més axiomàtic quan referits a la geometria euclidiana i del taxi, i es plantejaran alguns raonaments més analítics i diferencials, sobretot per al cas de l'estudi del funcionament del semipla de Poincaré.

El Capítol 2, es dedica a la vessant didàctica del treball. S'hi fa una recerca de mètodes didàctics, i a continuació es presenten les sessions que s'han ideat per a l'alumnat. Finalment es contrasten els resultats obtinguts respecte els esperats.

Per finalitzar, s'analitza l'assoliment dels objectius anteriorment esmenats i se n'extreuen conclusions.

non-Euclidean geometry signified a new freedom from the tyranny of established laws

"(...) la geometria no euclidiana va significar una nova llibertat de la tirania de les lleis establertes"

Linda Dalrymple Henderson a:[15]

1
Estudi matemàtic

Aquest capitol està dedicat a l'estudi aprofundit de les dues geometries no euclidianes que es tractaran a la proposta didàctica: la hiperbòlica i la del taxi. Es proposa una exploració de la història de l'aparició d'aquestes i alguns comentaris sobre les repercussions que van tenir en el desenvolupament posterior de les matemàtiques i altres camps com la física, amb les seves aplicacions concretes. A continuació es formalitza la seva descripció matemàtica, proposant-ne models de representació. A fi de comprendre-les en profunditat, i seguint l'afirmació de Klein a [1] sobre el fet que les propietats geomètriques es caracteritzen per la seva invariància respecte un particular grup de transformacions, considerarem doncs les isometries al pla de les geometries presentades. La major part de la formalització i l'estudi que es fa en aquest capítol servirà per adquirir un coneixement avançat de les geometries anomenades prèviament. D'un bon domini d'aquestes se'n podrà extreure una proposta didàctica profitosa, que haurà de ser adaptada al públic a qui es vol presentar.

És per això que es reforça un fil conductor històric a través dels diversos apartats, i s'estudien en detall conceptes que es podrien donar per sabuts, incidint en el *perquè* i el *com* de la seva aparició, considerant que així l'explicació que se'n podrà donar tindrà un ordre lògic.

1.1 Contextualització de la geometria no euclidiana

En aquest text s'estudien algunes geometries no-euclidianes. El seu nom ens indica el seu origen: són geometries que neixen en contraposició a la euclidiana. Per entendre-les, doncs, s'haurà de repassar les bases de l'euclidiana, i entendre en què es diferencien. Aquesta manera d'afrontar els conceptes que es tractaran a continuació té un especial interès quan pensem en com presentar-la a una classe de secundària: una bona base històrica ens ajuda a entendre les raons i context en què sorgeix, i així a comprendre'n millor la repercussió i importància.

Cal remarcar el fet que els esdeveniments i autors que es tracten són tots occidentals. Aquesta visió tan euro-cèntrica es deriva de com es transmetia el coneixement en temps anteriors a l'actual, i de què la comunicació d'idees entre Orient i Occident no era tan eficient com podia arribar a ser-ho dins dels respectius territoris.

De totes maneres és interessant notar que conceptes que s'associen a noms de cultures mediterrànies, apareixien paral·lelament a d'altres indrets del món. Un exemple n'és el tractat *Jiǔzhāng Suànshù* o *Els nou capítols de l'Art Matemàtic*, obra recopilada per Liu Hui c. l'any 200 d.C. (tot i que en general es creu que el text és dels voltants de l'any 200 a.C.). Es considera una obra de magnitud i importància semblant als *Elements* d'Euclides, diferenciant-se sobretot per tenir un procediment pràctic a partir de la resolució de problemes en contraposició amb la generalització d'Euclides. Nombroses temàtiques, però, apareixen a ambdós tractats. Per exemple, hi trobem dues demostracions diferents del Teorema de Pitàgores.

En aquest text, però, es posa el focus en els *Elements* d'Euclides, i en les idees i dubtes que va generar aquest tractat en matemàtics europeus posteriors.

1.1.1 Els Elements

L'obra més important del grec Euclides, és de circa el 300 a.E.C. Els *Elements*, estan composats de tretze llibres, i és un dels textos fonamentals de la geometria, recopilant tot el coneixement geomètric i de teoria de nombres de l'Antiguitat clàssica (a excepció de les seccions còniques). Es considera un dels tractats més rellevants de la història matemàtica, tenint una estructura lògica que esdevindria la referència per les obres matemàtiques posteriors. Aquesta obra no conté una aplicació pràctica de resolució de problemes, com d'altres anteriors, sinó que intenta ser una recopilació d'afirmacions que no necessiten d'experiments físics per verificar que són correctes.

Els *Elements* segueixen el mètode axiomàtic. Així, comencen amb 23 *definicions* dels conceptes matemàtics que s'usaran al llarg del tractat. A continuació s'introdueixen els cinc *postulats*, i cinc *nocions comunes* com podria ser "si afegim la mateixa quantitat a dues quantitats que són iguals, obtenim dues quantitats que són iguals". Aquestes seran les eines que utilitzarà Euclides per anar demostrant les proposicions que introduirà a continuació. A més, aquestes s'introdueixen ordenadament, de manera que proposicions poden necessitar de demostracions anteriors per ser provades.

Les definicions que s'usen als *Elements* tenen un origen fortament empíric [14, Capítol 8]. Per exemple, la definició d'un punt: "allò que no té parts", prové de la concepció dels grecs que la matèria no podia ser infinitament dividida. Així en termes físics es va definir l'àtom, "allò que no pot ser tallat", i l'objecte corresponent a la geometria en seria el punt. La definició de recta també té un caràcter físic reconeixible: "la quantitat que no té amplada".

S'introdueixen certes definicions donades per Euclides, es limiten a les indispensables per entendre els postulats que es veuran a continuació a l'Apartat 1.1.1.

Definició 1. *Un **punt** és allò que no té parts.*

Definició 2. *Una **línia** és una longitud sense amplada.*

Definició 4. *Una **línia recta** és aquella que esdevé igual de tots els seus punts.*

Definició 8. *Un **angle pla** és la inclinació mútua de dues línies que es troben una a l'altra en un pla i que no estan en línia recta.*

Definició 10. *Quan una recta aixecada sobre una altra recta forma angles adjacents iguals entre si, cadascun dels angles iguals és recte i la recta aixecada s'anomena* ***perpendicular*** *a aquella sobre la qual està.*

Definició 15. *Un* ***cercle*** *és una figura plana compresa per una línia de manera que totes les rectes que cauen sobre ella des d'un punt dels que estan dins de la figura són iguals entre si.*

Definició 16. *Aquest punt s'anomena* ***centre*** *del cercle.*

Els postulats

S'introdueixen, a continuació, els *postulats.* Com afirma Parrochia a [14, Capítol 8]:

> Suposicions de gran importància estan sovint amagades per l'aparent simplicitat de les condicions que es demanen

Els postulats tenen l'interès de ser afirmacions que no requereixen ser demostrades, s'accepten com a certes sense més justificació. Són cinc, els mínims possibles, on cap d'ells podria ometre's perquè es deriva dels altres quatre. No obstant, la creença que el cinquè d'aquests postulats podia ser demostrat a partir dels altres va ser la llavor que durant segles aniria germinant, i finalment donaria peu a la creació de geometries no euclidianes. S'enuncien, a continuació els quatre primers postulats:

Postulat 1. *Postuli's el traçar una línia recta des d'un punt qualsevol fins a un punt qualsevol.*

Postulat 2. *I el prolongar contínuament una recta finita en línia recta.*

Postulat 3. *I el descriure un cercle amb qualsevol centre i distància.*

Postulat 4. *I el que tots els angles rectes són iguals.*

Aquests no presenten problemes de comprensió, i s'accepten com a no demostrables entre si.

El cinquè postulat

Postulat 5. *I que si una recta incideix sobre dues rectes i es compleix que els dos angles interns del mateix costat són menors que dos rectes, les dues rectes prolongades indefinidament es trobaran en el costat en el qual hi ha els dos angles menors que dos rectes*

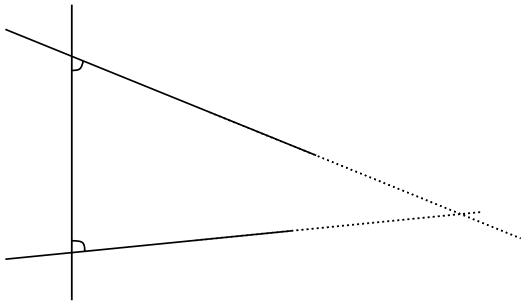


Figura 1.1: Representació gràfica del cinquè postulat

Comparant de manera superficial aquest postulat amb els precedents quatre, s'evidencia que hi ha una diferència notable entre la simplicitat dels primers i la complexitat de l'últim. Aquest fet ja feia predisposar els matemàtics posteriors a Euclides a qüestionar si aquest postulat podia, de fet, ser demostrat a partir dels altres. Més concretament, els altres quatre postulats es derivaven d'experiències on els dibuixos es podien fer usant regle i compàs. El cinquè postulat, en canvi, proposa un problema que no podem resoldre: amb les definicions donades per Euclides no podem estudiar allò què passa a l'infinit, i per tant no és evident que les dues rectes es trobin.

Arrel de la complexitat d'aquest cinquè postulat, matemàtics posteriors van intentar demostrar-lo a partir dels altres quatre, però va ser fútilment. En realitat, per fer-ho es va anar reformulant el cinquè postulat, i aquestes reescriptures alternatives generarien noves maneres d'abordar les matemàtiques, però l'objectiu de demostrar-lo a partir dels primers quatre postulats no va ser assolit.

La reformulació més comú i coneguda és la de Playfair (que agafa el nom del matemàtic John Playfair, que la va popularitzar al s.XVII, però que ja havia sigut proposada per Procle circa el s.V a.E.C.:

Postulat 5'. *Per cada recta i cada punt exterior a aquesta existeix una única recta que passa per aquest punt i que és paral·lela a la recta donada*

Proposició 1.1.1. *El Postulat 5 i la seva reformulació Postulat 5' són equivalents*

1.1.2 El sorgiment de la geometria no euclidiana

Finalment, durant la primera meitat del segle XIX (més de 2000 anys després de la mort d'Euclides) hi va haver un canvi en l'apropament a la qüestió del cinquè postulat.
Quatre matemàtics van decidir escollir un camí diferent al que s'havia seguit per dos mil·lenis, i acceptar l'últim postulat com a no demostrable a partir dels altres. Així es considerava la possibilitat de crear nous sistemes que partissin dels 4 primers postulats, però que no necessàriament complissin el cinquè. Concretament, van decidir substituir el cinquè postulat per una de les seves negacions possibles: "Per un punt exterior a una recta passen almenys dues paral·leles".

Una altra negació possible hagués sigut la d'assumir que "per un punt exterior a una recta no passa cap paral·lela", és a dir que totes les rectes que passen per un punt exterior a una recta, la tallen.

Els tres matemàtics que van posar els fonaments d'aquesta teoria, i de les geometries que se'n derivarien van ser Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856), János Bólyai (1802-1860) i Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Gauss va ser el primer en descobrir la geometria hiperbòlica, però mai va publicar res al respecte per desconfiança en la societat matemàtica de l'època, pensant que aquests descobriments no serien acceptats. Tot i això, era un personatge molt reputat, i va lloar els treballs de Lobačevskij, però sempre de manera privada, amb cartes a amics, però no públicament. Sobre la feina de Bólyai va arribar a dir que no podia lloar la seva obra ja que seria com lloar-se a si mateix, havent reflexionat de la mateixa manera durant els últims 35 anys, i havent arribat a les mateixes conclusions que ell.

Lobačevskij va mostrar com la geometria euclidiana no era la ciència exacta que contenia veritats absolutes que s'havia considerat fins aleshores. Va publicar una nova geometria, que es construia justament en la hipòtesi que el postulat de les paral·leles no era cert. D'aquí en va nèixer la geometria que treballarem a continuació: la geometria hiperbòlica.

Paral·lelament, Bólyai va arribar a les mateixes conclusions, definint la geometria absoluta: la que complia els primers quatre postulats però no necessàriament el cinquè. La geometria hiperbòlica n'és un cas particular.

1.2 Definicions i conceptes prèvis

Mètode utilitzat L'estudi de la geometria partirà de les nocions de punt i recta, i d'axiomes que els relacionin. Els models que es puguin proposar, seran només exemples d'aquestes geometries, perquè en compliran els axiomes, però és important fer la distinció entre els dos conceptes, remarcant que no s'ha d'equivaldre un model amb la geometria que model·litza.
En aquest treball es prioritzarà un plantejament mètric, que com es descriu a [7], és aquell que afegeix els conceptes de distància i mesura d'angle per permetre l'ús d'eines analítiques per l'estudi de la geometria. Tot i això, s'usarà també en part conceptes d'àlgebra (concretament teoria de grups) per estudiar les geometries tal com plantejava Klein al famós discurs de recepció de la plaça de professor a Erlangen al 1872 ([1]):

> (...) les propietats geomètriques són caracteritzades per romandre invariants per les transformacions del grup principal

En aquest treball s'estudia la geometria plana, i donarem per tant en general les definicions restringides al pla, tot i ser generalitzables a l'espai.
En la majoria de casos de demostracions per construcció s'explica el raonament i s'adjunta un link de GeoGebra dinàmic on s'ha reproduit aquesta construcció.

S'introdueixen a continuació, definicions i resultats rellevants per als posteriors apartats.

Definició 1.2.1. *Donades tres rectes d'un espai bidimensional, que s'intersequen en A, B, C tres punts de l'espai, definim un* ***triangle*** *com el conjunt dels tres punts A, B, C (vèrtexs) i els segments de recta que els uneixen (costats). El denotarem per ΔABC*

Notació 1. *Donats tres punts A, B, C denotem per:*

· *AB la recta que passa pels punts A, B*

· $\overline{AB}$ *el segment entre* A *i* B

· $\angle ABC$ *l'angle del triangle* ΔABC *amb vèrtex* B. *Aquest també es denotarà* $\angle B$, *en ocasions en que sigui evident el triangle al que es fa menció. Denotarem de mateixa manera un angle i la seva mesura.*

Definició 1.2.2. *Siguin* A, B *dos punts d'un espai i* $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ *una bijecció entre, direm que*

Definició 1.2.3. *Siguin* A, B, c, D, E, F *punts d'un pla* $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ *una bijecció entre aquestes punts. Direm que* f *és una* ***congruència de segments*** *si preserva longituds de segments (i.e. donats dos punts* A, B $d(A, B) = d(f(A), f(B))$*). Denotarem aleshores* $\overline{AB} \simeq \overline{f(A)f(B)}$
Serà una ***congruència d'angles*** *si preserva les mesures dels angles* $\angle A = \angle f(A)$. *Denotarem* $\angle A \angle f(A)$
Siguin ΔABC *i* ΔDEF *dos triangles, direm que f és una* ***congruència*** *si*

$$\overline{AB} \simeq \overline{f(A)f(B)}, \quad \overline{BC} \simeq \overline{f(B)f(C)}, \quad \overline{CA} \simeq \overline{f(C)f(A)}$$

i

$$\angle A \simeq \angle f(A), \quad \angle B \simeq \angle f(B), \quad \angle C \simeq \angle f(C)$$

Dos triangles seran ***congruents*** *si existeix una congruència entre els seus vèrtex. Siguin* ΔABC *i* ΔDEF *els dos triangles i* $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ *la congruència, si aquesta és f(A)=D, f(B)=E, i f(C)= F, s'escriurà* $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$

1.2.1 Isometries euclidianes

Un concepte que serà important comparar en les diferents geometries estudiades és el d'isometria. Per a poder fer-ho, entenem primer les euclidianes. En cada una d'elles es posa especial atenció en quins són els seus punts fixos.

Definició 1.2.4. *Una* ***mètrica o distància*** *en un conjunt* X *és una funció* $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$ *que compleix:*

i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$

ii) $d(x, y) = 0$ *si i només si* $x = y \quad \forall x, y \in X$

iii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

Considerarem les aplicacions del plà $\mathbb{R}^2$ en si mateix.

Definició 1.2.5. *Sigui* P *un punt, s'anomena* ***punt fix*** *respecte d'una aplicació si la imatge de* P *per aquesta aplicació és* P

Definició 1.2.6. *Una* ***isometria*** *és una funció* $\varphi : X \to Y$, *on* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *són espais mètrics i* φ *preserva la distància, i.e. es compleix per tot* $A, B \in X$

$$d_Y(\varphi(A), \varphi(B)) = d_X(A, B)$$

Definició 1.2.7. *Sigui $m \subset \mathbb{R}^2$ una recta, una **reflexió axial amb eix m**, que denotem R_m, és una aplicació que porta cada punt de la recta m a si mateix, i cada punt P exterior a m, a P' tal que m és la mediatriu del segment $\overline{PP'}$.*
Així doncs els punts fixos de la reflexió són els punts de la recta m

Definició 1.2.8. *Una **involució** és una funció que és igual a la seva inversa, és a dir $f : A \to A$ tal que, per tot $a \in A$, $f(a) = f^{-1}(a)$*

Observació 1.2.9. Una reflexió és una involució: $R_m^2 = I$

Proposició 1.2.10. *Si una isometria té més d'un punt invariant, ha de ser o bé la identitat o bé una reflexió*

Demostració. Siguin P i Q dos punts fixos i A un punt que no es troba sobre la recta PQ, aleshores $A' = R_m(A)$ compleix que $\overline{PA} \simeq \overline{PA'}$, per ser P un punt fix. Podem afirmar doncs que A' es troba sobre una circumferència de radi $d_E(A, P)$, amb centre P, i sobre una circumferència de radi $d_E(A, Q)$, centrada en Q. Com que A no és de la recta PQ, aquestes dues circumferències s'interseQuen en dos punts: al punt A(i en aquest cas, la aplicació seria la identitat, ja que tindriem $A = A'$), i a un altre punt que és la reflexió d'A respecte de la recta PQ, ja que P i Q són els centres de les circumferències que s'intersequen. □

Definició 1.2.11. *Sigui $C \in \mathbb{R}^2$ un punt, una **reflexió central amb centre C**, que denotem R_C és una aplicació que porta un punt C a si mateix, i qualsevol altre punt P a P', on C és el punt mig del segment $\overline{PP'}$.*

Es pot definir com producte de dues reflexions axials d'eixos m, n on m i n són perpendiculars. Té un únic punt invariant: C.

Definició 1.2.12. *Sigui $C \in \mathbb{R}^2$ i $\theta \in \mathbb{R}$, una **rotació amb centre C i angle** θ, que denotem per $R_{C,\theta}$ és una aplicació que porta el punt C a si mateix i qualsevol altre punt P a P', on d(P,C)=d(P'C) i $\angle C = \theta$.*

Es fàcil veure que és el producte de dues reflexions axials, on els eixos m i n s'intersequen amb un angle $\theta/2$
Té un únic punt invariant: O.

Definició 1.2.13. *Una **translació amb vector** $\overrightarrow{PQ}$, que denotem $T_{\overrightarrow{PQ}}$ és una aplicació que porta qualsevol punt X a un altre punt Y, tal que $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ}$.*

Es pot definir com a producte de dues reflexions centrals.
No té cap punt invariant

Definició 1.2.14. *Una **reflexió per lliscament amb vector** $\overrightarrow{PQ}$, que denotem $G_{\overrightarrow{PQ}}$ és la composició d'una reflexió amb eix PQ i una translació $T_{\overrightarrow{PQ}}$*

No té cap punt invariant.

1.3 La geometria del taxi

La geometria del taxi s'anomena així pel fet de representar el moviment d'un cotxe (en concret un taxi) a una ciutat. És per això que també se la coneix com a distància de Manhattan.
Introduïm en primer lloc la geometria deguda a Herman Minkowski (1864-1909), de la qual l'euclidiana i la del taxi en seran casos particulars.

Els estudis publicats per Minkowski es van centrar sobretot en en les àrees de la física matemàtica, de la teoria de nombres i de la relativitat.sobre teoria de nombres, teoria de grups, geometria, formes quadràtiques i física matemàtica. Va col·laborar al llarg de la seva vida amb Hilbert i Klein, i va ser professor, entre d'altres, d'Einstein. De fet, una de les aportacions més conegudes que va fer va ser la generar un marc matemàtic per la teoria de la relativitat. Introduint un espai de quatre dimensions (que passaria a conèixer-se com a espai de Minkowski) on el temps era la quarta variable, i generant doncs un model que evidenciès la relació espai-temps, va permetre una comprensió geomètrica de les teories que havien presentat Einstein i anteriorment Lorentz i Poincaré.

1.3.1 La geometria de Minkowski

Les definicions i proposicions que es presenten en aquest apartat s'han extret de [13]

Definició 1.3.1. *Una **norma** a un espai vectorial X és una aplicació $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisfà:*

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$

ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall x \in X$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x, y \in X$ *i* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ *(desigualtat triangular)*

A partir d'una norma podem definir una mètrica (o distància) $\delta(x, y) := \|x - y\|$. Aquesta generarà una topologia a X, la topologia de la norma.

Definició 1.3.2. *La **bola unitat** B a $(X, \|\cdot\|)$ un espai normat, és el conjunt:*

$$B = B[0, 1] := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

*i l' **esfera unitat** a $(X, \|\cdot\|)$ és la frontera de la bola, i.e. $\partial B = \{x \in X : \|x\| = 1\}$*

Definició 1.3.3. *Sigui $p > 1$, definim **norma** l_p com:*

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Les primeres tres propietats de la norma són directes de comprovar. La desigualtat triangular per la norma l_p és una proposició coneguda com Desigualtat de Minkowski. Demostrant-la podrem concloure que l_p és efectivament una norma.
Presentem un resultat necessàri:

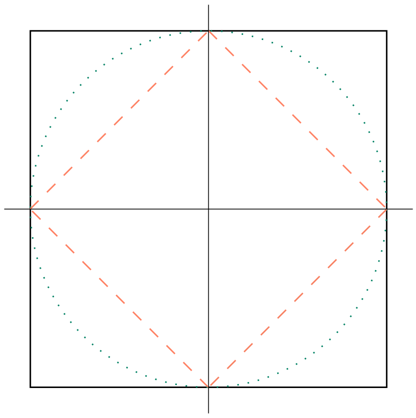


Figura 1.2: Boles unitat a $\mathbb{R}^2$ per diferents $p = 1$, $p = 2$ i $p = \infty$

Proposició 1.3.4. *(Desigualtat de Hölder) Sigui $x \in \mathbb{R}^n$, sigui $f \in (\mathbb{R}^n)*$ amb coordenades $\{_i\}$ relatives a la base dual usual i $p > 1$, i q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, aleshores:*

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \psi_i x_i\right| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |\psi_i|^q)^{1/q}$$

Demostració. Ens basem en la demostració proposada a [10].
Sigui $\alpha > 0$, considerem, en primer lloc la funció $\psi(t) = \alpha t - p^{-1}t^p$, on $p > 1$. Aquesta funció té màxim, quan $t \in [0, \infty)$ en $t = \alpha^{\frac{1}{p-1}}$.
Podem afirmar, doncs, que per un $\beta > 0$ qualsevol, $\alpha\beta - p^{-1}\beta^p \leq \alpha\alpha^{\frac{1}{p-1}} - p^{-1}\alpha^{\frac{1}{p-1}p}$
Sigui $q > 1$ tq $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, tindrem que $\alpha\alpha^{\frac{1}{p-1}} - p^{-1}\alpha^{\frac{1}{p-1}p} = \alpha^{\frac{p}{p-1}} - p^{-1}\alpha^{\frac{p}{p-1}} = \alpha^{\frac{p}{p-1}}(1 - p^{-}1) = \alpha^{\frac{q}{q-1}\frac{1}{q-1}}q^{-1} = q^{-1}\alpha^q$. Així:

$$\alpha\beta \leq p^{-1}\beta^p + q^{-1}\alpha^q$$

Ara, si ens fixem en la desigualtat que volem provar, veiem que els dos costats són homogenis per un valor positiu (ja que tractem amb valors absoluts). Això ens implica, que si provem la desigualtat quan les normes són unitàries, tindrem demostrada la desigualtat en el cas general. És a dir, si provem que quan $\|x\|_p = 1$ i $\|f\|_q = 1$, aleshores $|f(x) \leq 1$, tindrem la desigualtat demostrada. Tenim que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i x_i$, i doncs:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\phi_i||x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (q^{-1}|\phi_i|^q + p^{-1}|x_i|^p) = q^{-1}\sum_{i=1}^{n} |\phi_i|^q + p^{-1}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$$
$$= p^{-1} + q^{-1} = 1$$

Hem aplicat l'equació 1.3.1 a la segona desigualtat, i el fet que $\|x\|_p = 1$ i $\|f\|_q = 1$ a la penúltima igualtat □

Proposició 1.3.5. *(Desigualtat de Minkowski) Siguin $x, y \in \mathbb{R}^n$ i p>1, aleshores*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Demostració.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1}|y_i| \\ &\le (\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{q(p-1)})^{1/q}(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p)} + (\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{q(p-1)})^{1/q}(\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{1/p)} \\ &= (\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p)^{1/q}(\|x\|_p+\|y\|_p) = \|x+y\|^{p/q}(\|x\|_p+\|y\|_p)\end{aligned}$$

Així, $\|x+y\|_p^{p-p/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p$, i com que $\|x+y\|_p^{p-p/q} = \|x+y\|_p^{p\frac{q-1}{1}} = \|x+y\|_p$
Tenim doncs la desigualtat que buscàvem. □

Definició 1.3.6. *Sigui $p > 1$, **distància de Mikowski d'ordre p** és la indïda per la norma l_p. Es defineix:*

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

Observació 1.3.7. D'aquesta distància, la euclidiana i la distància del taxi en són casos concrets, en els casos de $p = 2$ i $p = 1$ respectivament, és a dir:

$$d_E(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \qquad i \qquad d_T(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Proposició 1.3.8. *La norma que defineix la distància euclidiana és sempre més petita o igual que la que defineix la distància del taxi*

Demostració.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i|^2} = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 \tag{1.3.1}$$

□

1.3.2 Definició i mètrica

Considerarem com a model de la geometria del taxi $(\mathbb{R}^2, d_T)$. Donats dos punts $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ la mètrica d_T, és:

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Observació 1.3.9. En aquesta part del treball utilitzem la mètrica definida a $\mathbb{R}^2$. En l'aplicació didàctica, però, se simplificarà al cas discret, i es treballarà doncs a $\mathbb{Z}^2$, com es pot observar a l'Apartat 2.2.4.

És evident, per 1.3.1 que:

$$d_T(x,y) \geq d_E(x,y)$$

De fet, s'assoleix la igualtat només quan els punts x i y estan alineats verticalment o horitzontal, com es pot observar en els punts P i Q de la Figura 1.3.

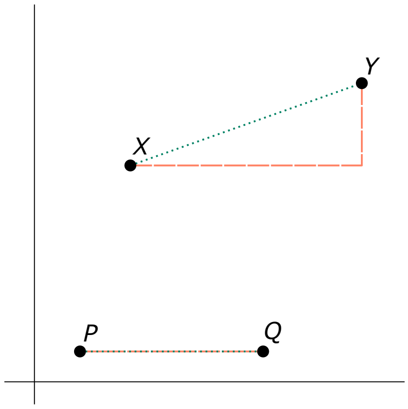


Figura 1.3: Distància entre dos punts. La línia de punts representa la distància euclidiana i la de ratlles la del taxi

A la geoemtria del taxi, definim els punts i les línies de la mateixa manera que en el cas euclidià. Els angles també es definiran com a la geometria euclidiana. Serà a la distància utilitzada, on raurà la diferència.

1.3.3 Llocs geomètrics rellevants

S'introdueixen a continuació alguns llocs geomètrics que es presentaran a la unitat didàctica. Els elements que s'introdueixen són molt elementals en la seva definició, però es considera important comentar la seva representació, per entendre millor la geometria estudiada.
Durant tot aquest apartat $K = \mathbb{R}$ al cas continu i $K = \mathbb{Z}$ al cas discret. Es presenten per al cas continu, i el cas discret, sent aquest segon el que es presentarà a l'aula.

Conjunt de punts equidistants a dos punts donats Ens caldrà haver comentat aquest concepte per una demostració posterior, i és un lloc geomètric interessant a comparar amb la mediatriu euclidiana. El conjunt de punts equidistants a dos punts x i y és:

$$E(x,y) = \{z \in K^2 | d_T(x,z) = d_T(y,z)\}$$

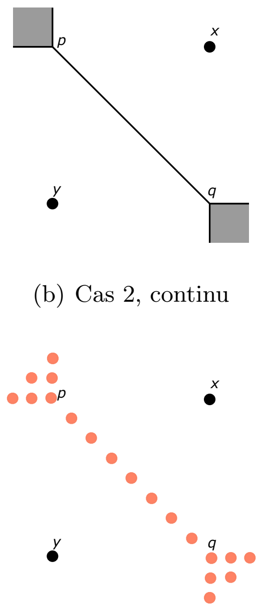
Definirem a més, el conjunt de punts equidistants a dos punts x i y a distància mínima d'aquests:

$$M(x,y) = \{z \in E(x,y) | d_T(x,z) = \min_{m \in E(x,y)} d_T(x,m)\}$$

Aquest conjunt depèn de les posicions relatives d'x i y que es descriuen a continuació i s'observen a la Figura 1.3.

- · Cas 1: x i y es troben alineats horitzontalment o vertical. Aleshores $E(x, y)$ és una recta; el lloc geomètric és el mateix que a la geometria euclidiana. En aquest cas $M(x, y)$ és un únic punt, el punt mig.
- · Cas 2: x i y es troben a la mateixa distància horitzontal que vertical (i.e. el pendent de la recta que uneix x i y és 1 o -1). Aleshores $E(x, y)$ és el conjunt que es pot observar a la Figura 1.4. En aquest cas $M(x, y)$ és el segment de recta pq
- · Cas 3: en cas que x i y no es trobin en cap de les posicions relatives anteriors, $E(x, y)$ és el conjunt que es pot observar a la Figura 1.4. En aquest cas $M(x, y)$ és el segment de recta pq

Les rectes que es mencionen seràn continues o formades per punts, depenent del cas en que ens trobem



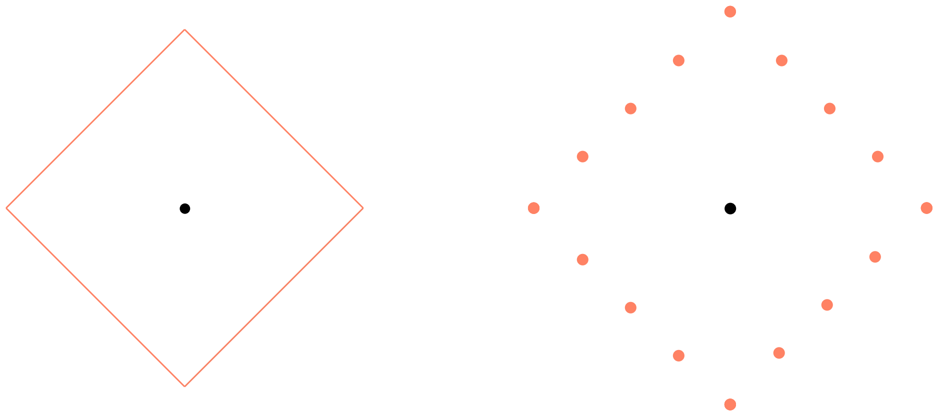
(a) Cas 1, continu (b) Cas 2, continu (c) Cas 3, continu

(d) Cas 1, discret (e) Cas 2, discret (f) Cas 3, discret

Figura 1.4: Conjunt de punts equidistants a dos punts donats, x i y

Circumferència És el lloc geomètric dels punts que es troben a una mateixa distància (que s'anomenarà radi) d'un punt fixat (anomenat centre).
Analíticament, si denotem r el radi i o el centre de la circumferència, aquesta serà el conjunt:

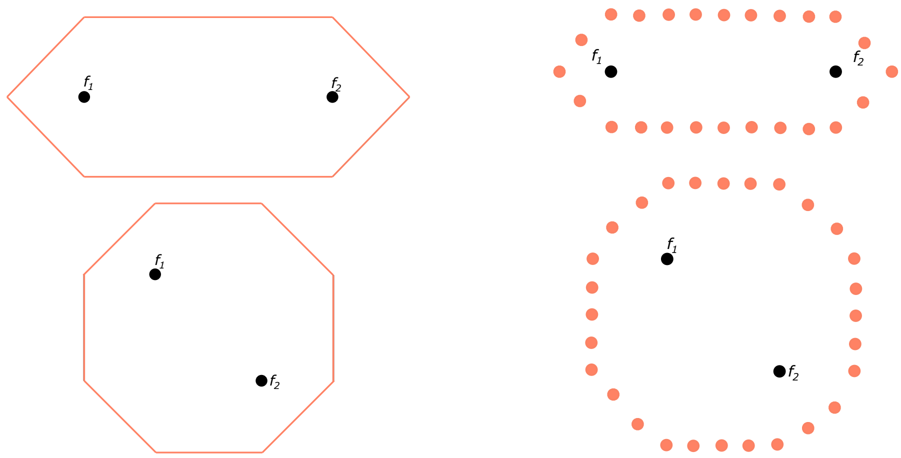
$$C = \{x \in K^2 : d_T(x, o) = r\}$$



(a) Circumferència al cas continu (b) Circumferència al cas discret

El·lipse És el lloc geomètric dels punts que compleixen que la suma de les distàncies a dos punts fixats (focus) és constant.
Analíticament, si denotem f_1 i f_2 els focus, l'el·lipse es defineix per:

$$E = \{p \in K^2 : d_T(f_1, p) + d_T(f_2, p) = k\}$$



(c) El·lipse al cas continu (d) El·lipse al cas discret

Interès dels llocs geomètrics S'han escollit aquests tres llocs geomètrics per la seva simplicitat però interès. l'equivalent de la mediatriu a la geometria del taxi engresca molt, i la circumferència i l'el·lipse, en el seu cas discret permeten estudiar les relacions entre el nombre de punts que es necessiten per representar-les i el radi, en el cas de la circumferència, i la distància entre els focus en el cas de l'el·lipse.

1.3.4 Perquè no és una geometria euclidiana?

Afirmarem que la geometria del taxi no és euclidiana perquè no compleix un dels axiomes de la geometria euclidiana. Veurem en primer lloc aquest axioma es compleix sempre a la geometria euclidiana, i a continuació presentarem un contraexemple a la geometria del taxi.

Definició 1.3.10. *Diem que una geomteria satisfà l'* ***Axioma Costat-Angle-Costat*** *(SAS de l'anglès Side-Angle-Side) si quan dos triangles* ΔABC *i* ΔDEF *compleixen* $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$*,* $\angle B \simeq \angle E$ *i* $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ *aleshores* $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$

Proposició 1.3.11. *El pla euclidià satisfà l'Axioma SAS*

Seguirem la demostració presentada a [7, capitol 6.1], introduint primer una proposició necessària:

Proposició 1.3.12. *(Llei euclidiana dels cosinus) Per tot triangle* ΔPQR*, es compleix*

$$d_E(P,R)^2 = d_E(P,Q)^2 + d_E(Q,R)^2 - 2d_E(P,Q)d_E(Q,R)\cos\angle Q$$

Considerant la noció euclidiana d'angle.

Demostració. Siguin ΔABC i ΔDEF dos triangles que compleixen $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\angle B \simeq \angle E$ i $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$. De la llei euclidiana del cosinus (Proposició 1.3.12) se'n deriva:

$$d_E(A,C)^2 = d_E(A,B)^2 + d_E(B,C)^2 - 2d_E(A,B)d_E(B,C)\cos\angle B$$

$$d_E(D,F)^2 = d_E(D,E)^2 + d_E(E,F)^2 - 2d_E(D,E)d_E(E,F)\cos\angle E$$

Per les hipòtesis d'ambdós triangles obtenim: $d_E(AB)^2 + d_E(BC)^2 - 2d_E(AB)d_E(BC)\cos\angle B = d_E(D,E)^2 + d_E(E,F)^2 - 2d_E(D,E)d_E(E,F)\cos\angle E$

Tenim doncs: $d_E(A,C)^2 = d_E(D,F)^2$ i per tant: $d_E(A,C) = d_E(D,F)$, perquè la distància entre dos punts és sempre positiva. Afirmem, així: $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$

Aïllant $\cos\angle Q$ de l'equació de 1.3.12, obtindriem: $\frac{d_E(P,R)^2 - d_E(P,Q)^2 - d_E(Q,R)^2}{-2d_E(P,Q)d_E(Q,R)}$. Així estudiant aquesta equació per als triangles ΔABC i ΔDEF però aquest cop fixant-nos en els angles $\angle A$ i $\angle D$ respctivament, per als triangles estudiats en concret ($\angle BAC$ i $\angle EDF$) obtenim:

$$\cos\angle A = \frac{d_E(B,A)^2 + d_E(A,C)^2 - d_E(B,C)^2}{2d_E(B,A)d_E(A,C)}$$

$$\cos\angle D = \frac{d_E(E,D)^2 + d_E(D,F)^2 - d_E(E,F)^2}{2d_E(E,D)d_E(D,F)}$$

A més, per les hiòtesis,

$$\frac{d_E(B,A)^2 + d_E(A,C)^2 - d_E(B,C)^2}{2d_E(B,A)d_E(A,C)} = \frac{d_E(E,D)^2 + d_E(D,F)^2 - d_E(E,F)^2}{2d_E(E,D)d_E(D,F)}$$

Podem afirmar doncs $\cos\angle A = \cos\angle D$ i per la injectivitat de $\cos\theta$ a $[0,\pi]$, $\angle A \simeq \angle D$. De manera anàloga, $\angle C \simeq \angle F$. Concloem que $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ □

Proposició 1.3.13. *A la geometria del taxi no se satisfà l'Axioma SAS*

Demostració. Trobem un contraexemple de l'Axioma a la geometria del taxi:
Sigui $A = (1,1)$, $B = (0,0)$, $C = (-1,1)$, $D = (2,0)$, $E = (0,0)$ i $F = (0,2)$. És directe que $d_T(A,B) = 2 = d_T(D,E)$ i doncs $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$. Anàlogament, $d_T(B,C) = 2 = d_T(E,F)$ i doncs $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$. Hem mencionat anteriorment que els angles a la geometria

del taxi és mesuren de la mateixa manera que a la euclidiana, i doncs podem afirmar que $\angle B = 90 = \angle E$, conseqüentment $\angle B \simeq \angle E$.

Es compleixen les hipòtesis de la definició 1.3.10, però $d_T(A,C) = 2 \neq 4 = d_T(D,E)$ i per tant $\overline{AC} \not\simeq \overline{DE}$. Concloem doncs que els triangles ΔABC i ΔDEF no són congruents. □

1.3.5 Estudi del grup d'isometries

Definició 1.3.14. *El **grup dihedral** D_n és el grup dels moviments rígids que deixen un polígon d'n costats invariant, amb la composició per operació. Explícitament:*

$$D_n =< \tau, \sigma : \tau^n = \sigma^2 = id \ i \ \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1} >$$

Observació 1.3.15. D_4 és el conjunt de les simetries d'un quadrat, és a dir:

$$D_4 =< \tau, \sigma : \tau^4 = \sigma^2 = id, \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1} >$$

on τ és la rotació de $\frac{\pi}{2}$ i σ és la reflexió respecte de la recta $\{y = x\}$. Hauriem pogut escollir com a recta de reflexió qualsevol entre $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{y = x\}$ o $\{y = -x\}$.

Notació 2. *Denotem T(2) el grup de translacions del pla*

Definició 1.3.16. *Sigui G un grup amb element neutre e, H un subgrup de G i N un grup normal a G, direm que G és **producte semi-directe** d'N i H si G és el producte dels subgrups i aquests tenen intersecció trivial, i.e. $G = NH$ i $N \cap H = e$*

Teorema 1.3.17. *El grup d'isometries del pla respecte de la mètrica del taxi és el producte semi-directe del grup D_4 i $T(2)$*

Demostració. Comprovem en primer lloc quines són les isometries de la geometria del taxi. Després comparem amb el producte semi-directe de D_4 i $T(2)$ és d'isometries.

Siguin x i y punts alineats verticalment o horitzontalment, qualsevol isometria que no transformi la recta passant per x i y en una recta horitzontal o vertical, és directament descartable. Això és perquè $d_T(x,y) = d_E(x,y) \iff x, y$ estan alineats verticalment o horitzontal. Així, si l'isometria transformés la recta en una no horitzontal o vertical, la distància del taxista augmentaria necessàriament.
És per això que [5] proposa fixar-se en les isometries euclidianes veient com actuen sobre una figura formada per dos segments amb un punt en comú, que incideixen amb un angle $\pi/2$ i els costats de la qual són paral·lels a l'eix horitzontal i vertical. Les isometries euclidianes que preservaran la distància, es visualitzen de manera clara són les que generen 8 posicions diferents de la figura, on els segments es mantenen paral·lels als eixos. Aquestes es poden obtenir a través de la composició de reflexions axials, per eixos horitzontals, verticals o diagonals amb pendent 1 o -1, i de rotacions de $\pi/2$. Evidentment les translacions, també seran isometries, i la seva composició amb les mencionades anteriorment.
Aquestes són efectivament les isometries que es mencionen a l'enunciat del teorema. Abans de veure-ho de manera analítica, però, comprovem que no hi d'altres isometries que no siguin les euclidianes.
Sigui τ una bijecció de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que conserva la distància del taxi. Vegem que és una isometria euclidiana. Escollim punts a i b del pla.

- Si estan alineats horitzontalment o vertical, la distància del taxi entre dos punts equival a la euclidiana: qualsevol bijecció que preservi la distància del taxi també preservarà la euclidiana

- Si no estan alineats horitzontalment o vertical. Escollim C com a punt d'intersecció de dues rectes a i b, una horitzontal i l'altra vertical. Així, C serà el vèrtex d'angle recte d'un triangle , amb $A \in a$ i $B \in b$. Per la injectivitat de τ podem definir $A' = \tau(A)$, $B' = \tau(B)$ i $C' = \tau(C)$.
  Com que τ preserva distàncies per a qualssevol punts del pla, en particular caldrà que donats X, Y dos punts, si $M(X, Y)$ és un únic punt aleshores $M(\tau X, \tau Y)$ també ha de ser un únic punt.
  En concret, en el nostre cas, tindrem que $M(A', C')$ és un punt i per tant A' i C' estan alineats verticalment o horitzontal. Anàlogament, A' i B' estan alineats verticalment o horitzontal.
  Així doncs, $\Delta A'B'C'$ és un triangle rectangle amb angle recte al vèrtex C'.
  Adicionalment,

$$d_T(A, C) = d_T(A', C') \quad d_T(B, C) = d_T(B', C')$$

$$d_T(A', C') = d_E(A', C') \quad d_T(B', C') = d_E(B', C')$$

  Podem afirmar, doncs que els triangles ΔABC i $\Delta A'B'C'$ són congruents. I doncs necessàriament $d_E(A, B) = d_E(A', B')$. τ preserva la distància euclidiana entre tots els punts: és una isometria euclidiana. S'observa un esquema d'aquest raonament a la Figura 1.5, on es proposen els dos casos possibles: a vertical i b horitzontal, o bé a horitzontal i b vertical.

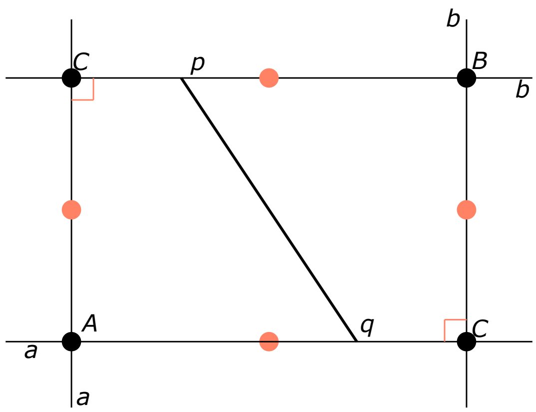


Figura 1.5: Esquema de la demostració

Concloem que les úniques isometries a $\mathbb{R}^2$ que preserven la distància del taxi són les euclidianes mencionades anteriorment
Ens faltarà comprovar que el grup generat per les isometries mencionades és efectivament el producte semi-directe de D_4 i $T(2)$.
Escrivim de manera analítica els elements del grup D_4 i $T(2)$. Identifiquem els punts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ amb punts $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$, per poder representar les transformacions en la

forma usual de matrius 3x3. Denotem R_j la rotació de $\frac{\pi j}{2}$, S_m les reflexions amb eix m, i T_{pq} les translacions.

$$R_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\{y=0\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S_{\{y=x\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\{x=0\}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\{y=-x\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix}$$

És evident que $D_4 \cap T(2) = I$. No és complicat de demostrar que $T(2)$ és normal del grup $G = D_4 T(2)$, però no s'inclouen en el present treball els càlculs.

□

1.4 La geometria hiperbòlica

La geometria hiperbòlica neix de la negació del cinquè postulat d'Euclides, i doncs té com a sistema axiomàtic el compliment dels quatre primers postulats i una de les possibles negacions del cinquè: "Podem afirmar que per un punt exterior a una recta passen **més d'una** rectes paral·leles a la recta donada".

Presentem a continuació un model del pla hiperbòlic: el semiplà de Poincaré. En tractarem les rectes, la longitud dels camins, i les isometries que el defineixen. Es proposarà, un cop presentats els elements amb que es treballa, una comprovació de que l'axiomàtica que el defineix és justament la mencionada anteriorment.
S'escull la recta y=0 i es considera com a recta a l'infinit. L'espai que es tractarà és el semiplà superior que queda determinat per aquesta:

$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

1.4.1 Introducció del Semiplà de Poincaré

Es consideren com a punts del model, doncs, els punts del semiplà superior, on no s'hi inclouen els de la recta de l'infinit. Les rectes hiperbòliques són les semirectes verticals i les semicircumferències centrades a la recta de l'infinit. És interessant notar que les semirectes verticals es poden sovint considerar com a semicircumferències centrades a l'infinit que tenen radi infinit. Utilitzem la notació donada a [7, Capítol 2.1.], per descriure les rectes:

Definició 1.4.1. *Les* ***rectes a*** $\mathbb{H}$ *són de dos tipus:*

· *tipus I:* ${}_aL = \{(x, y) \in \mathbb{H} | x = a\}, \quad a \in \mathbb{R}$

· *tipus II:* ${}_cL_r = \{(x, y) \in \mathbb{H} | (x - c)^2 + y^2 = r^2\}, \quad c, r \in \mathbb{R}$ *i* $r \in (0, \infty)$

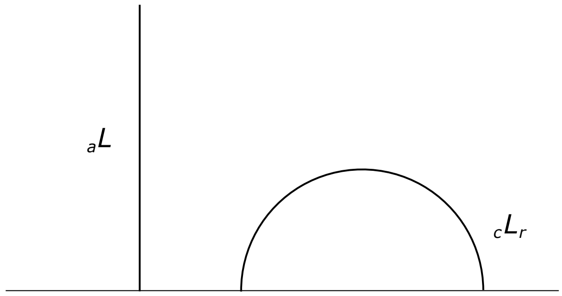


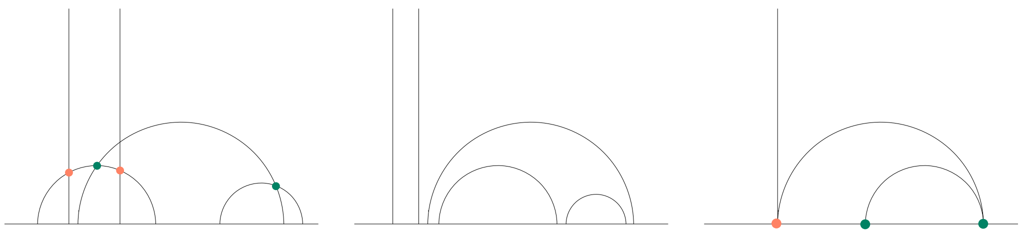
Figura 1.6: Rectes del pla hiperbòlic al model del semiplà de Poincaré

A més, hi ha una notació específica per les rectes en aquest model. Sigui $P = (a, b) \in \mathbb{H}$, es diu que dues rectes l_1 i l_2 són:

· secants: si $l_1 \cap l_2 = P$, on $b \neq 0$

· divergents (o ultraparalel·les): si $l_1 \cap l_2 = \emptyset$

· paralel·les (o asimptòtiques): si $l_1 \cap l_2 = P$, on $b = 0$



(a) Rectes secants (b) Rectes divergents (c) Rectes paral·leles

Figura 1.7: Tipus de rectes al semiplà de Poincaré

S'introdueix també, com resultat sorprenent i de possible interès per la unitat didàctica, D'altra banda, no es manté el concepte de recta respecte del model euclidià, però sí que s'hi mantindrà el d'angle.

Definició 1.4.2. *Siguin U, V oberts d'$\mathbb{R}^n$, la funció $f : U \to V$ es diu* ***transformació conforme*** *si preserva angles*

Al model del semiplà de Poincaré considerem un producte escalar que indueix l'estructura mètrica, però que varia de manera contínua quan ens movem pels punts d'$\mathbb{H}$:

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$$

La primera forma fonamental serà de la forma:

$$I_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pel fet de ser una mètrica amb forma fonamental un múltiple de la forma fonamental de la euclidiana, hi és conformement equivalent.
Tindrem doncs que, al semiplà de Poincaré podrem estudiar els angles de la mateixa manera que al pla euclidià.

1.4.2 Longitud d'una corba

Definició 1.4.3. *Un **camí** d'a a b és una aplicació diferencialble* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$*, tal que* $\gamma(0) = a$ *i* $\gamma(1) = b$

Definició 1.4.4. *La **longitud d'una corba*** $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$*, entre dos punts* $t_0, t_1 \in [0,1]$ *es defineix com:*

$$long(\gamma; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt$$

Aleshores, en el nostre cas tindrem,

$$\|\gamma'(t)\|dt = \sqrt{\begin{pmatrix} x`(t) & y`(t) \end{pmatrix} I_{(x,y)} \begin{pmatrix} x`(t) \\ y`(t) \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} x`(t) & y`(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x`(t) \\ y`(t) \end{pmatrix}} =$$
$$= \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2}$$

I doncs:

$$long(\gamma; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2} dt \tag{1.4.1}$$

Notació 3. *Denotem* $L(\gamma) = long(\gamma; 0, 1)$

Definició 1.4.5. *La **distància** entre dos punts a i b de* $\mathbb{H}$ *és*

$$d(a,b) = inf\{L(\gamma) \ / \ \gamma \text{ és un camí entre } a \text{ i } b\}$$

1.4.3 Geodèsiques

Equacions generals de les geodèsiques

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ serà una geodèsica si i només si, compleix:

$$\begin{cases} x'' + \Gamma_{11}^1 (x`)^2 + 2\Gamma_{12}^1 x'y' + \Gamma_{22}^1 (y')^2 = 0 \\ y'' + \Gamma_{11}^2 (x`)^2 + 2\Gamma_{12}^2 x'y' + \Gamma_{22}^2 (y')^2 = 0 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Busquem els símbols de Christoffel:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_x & \frac{1}{2}E_y & F_y - \frac{1}{2}G_x \\ F_x - \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x & \frac{1}{2}G_y \end{pmatrix}$$

Al nostre cas:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{-2}{y^3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{-2}{y^3} & 0 & \frac{1}{2}\frac{-2}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 & -\frac{1}{y} \end{pmatrix} \tag{1.4.3}$$

Substituïnt els símbols de Christoffel trobats a 1.4.3, a l'equació 1.4.2, tindrem que les geodèsiques compliran:

$$\begin{cases} x''y = 2x'y' \\ y''y = (y')^2 - (x')^2 \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Les dues geodèsiques possibles del semiplà Poincaré

Hem vist que hi ha dos tipus de rectes: les rectes són les semirectes verticals (tipus I) i les semicircumferències centrades en l'eix horitzontal (tipus II). Comprovem que aquestes rectes són geodèsiques. Per a això han de complir les equacions 1.4.4 vistes anteriorment. És important notar, que, per a que compleixin les equacions, hem d'escollir la parametrització adequada.

RECTES DEL TIPUS I
Escollim la parametrizació:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0 e^t)$$

És semirecta vertical, ja que té vector tangent: $\gamma(t)' = (0, y_0 e^t)$, que és vector amb direcció (0,1).
Comprovem que compleix les equacions vistes anteriorment (1.4.4):

$$\begin{cases} x''y = 0 \cdot y_0 e^t = 0 = 0 \cdot y_0 e^t = 2x'y' \\ y''y = y_0 e^t y_0 e^t = y_0^2 e^{2t} = (y_0 e^t)^2 - 0 = (y')^2 - (x')^2 \end{cases}$$

Podem afirmar que les rectes del tipus I són geodèsiques

RECTES DEL TIPUS II
Amb la parametrització:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + R\tanh t, \frac{R}{\cosh t})$$

És recta del tipus II, doncs compleix:

$$\begin{aligned}(x(t) - x_0)^2 + y^2(t) &= x_0^2 + 2Rx_0 \tanh t + R^2(\tanh t)^2 - 2x_0^2 - 2x_0 R \tanh t + x_0^2 + \frac{R^2}{(\cosh t)^2} = \\ &= R^2 \frac{((\sinh t)^2 + 1)}{(\cosh t)^2} = R^2 \frac{(\sinh t)^2 + (\cosh t)^2 - (\sinh t)^2}{(\cosh t)^2} = \\ &= R^2\end{aligned}$$

i per trobar-nos al semiplà superior, $(y(t) > 0)$, es tracta d'una semicircumferència.
Comprovem que compleix les equacions de les geodèsiques 1.4.4:

$$\begin{cases} x''y & = -2R\frac{sinh(h)}{cosh^3(x)}\frac{R}{\cosh t} = 2\frac{R}{(\cosh t)^2}\frac{-R\sinh t}{(\cosh t)^2} = 2x'y' \\ y''y & = R\left(\frac{(\tanh t)^2}{\cosh t} - \frac{1}{(\cosh t)^3}\right)\frac{R}{\cosh t} = R^2\left(\frac{(\tanh t)^2}{(\cosh t)^2} - \frac{1}{(\cosh t)^4}\right) = \\ & = \left(-R\frac{\tanh t}{\cosh t}\right)^2 - \left(-R\frac{1}{(\cosh t)^2}\right)^2 = (y')^2 - (x')^2 \end{cases}$$

Només existeixen els dos tipus de geodèsiques citades

Donat un punt i el seu vector tangent, voldrem demostrar que la geodèsica que passa per aquest punt ha de ser una de les dues definides anteriorment. Donat un punt i el vector inicial, pel teorema de Cauchy, el sistema 1.4.4 només tindrà una solució, i doncs, només hi ha una geodèsica que passi per un punt i que tingui com a vector director el vector tangent donat.

Sigui el punt $p = (x_0, y_0)$, i el vector $u = (u_x, u_y)$.

· Si el vector u és múltiple de el vector $(0,1)$, és evident que hi ha una semirecta vertical que passa per p amb vector director u.

· Si, en canvi, el vector és de qualsevol altra forma, és fàcil veure que hi ha una semicircumferència centrada en $\{y=0\}$ que passa per p i que, en p té a u com a vector tangent. Per visualitzar aquest fet, he creat un Geogebra dinàmic que permet, donat un punt inicial i un vector director, trobar aquesta semicircumferència. És possible trobar-lo al següent enllaç: `https://www.geogebra.org/m/wjdxw8hs`

Atès, doncs, que hi ha una única geodèsica que es defineixi per un punt i un vector, i que hem demostrat que, donat un punt i vector, podem trobar una de les dues geodèsiques que havíem definit, podem afirmar que només hi ha dos tipus de geodèsiques, i són les estudiades: les semirectes verticals i les semicircumferències centrades en l'eix d'abscisses.

La longitud d'una corba entre dos punts és mínima si la corba és una geodèsica

La longitud d'una geodèsica entre dos dels seus punts ha de ser mínima per definició. Vegem que les geodèsiques del semiplà de Poincaré compleixen aquest fet. Sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ un camí de a fins a b

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)}\sqrt{(x`(t))^2+(y`(t))^2}dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)}\sqrt{(y`(t))^2}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{y'(t)}{y(t)}dt = log\left(\frac{y(t_1)}{y(t_0)}\right)$$

Notem que, ja que ens trobem en $\mathbb{H}$, podem afirmar que $y(t) \neq 0$, i doncs el logaritme està ben definit. Ara, per definició de longitud vista a 1.4.1quan α entre a i b és del tipus I:

$$long(\alpha; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)}\sqrt{(y`(t))^2}dt = log\left(\frac{y(t_1)}{y(t_0)}\right) \tag{1.4.5}$$

Tenim doncs, que quan els dos punts estudiats a i b tenen la mateixa component x, la semirecta vertical que passa per aquests és la corba que minimitza longitud.

Ara, voldríem estudiar si, quan a i b no estan alineats verticalment, la recta del tipus II que passa per aquests punts també és la corba minimitzadora de longitud.

Primerament s'hauria de demostrar que entre dos punts qualssevol de $\mathbb{H}$ hi ha una semicircumferència centrada en $\{y=0\}$ que passa per aquests dos punts. Es pot veure una representació gràfica d'aquest fet en el Geogebra dinàmic següent: `https://www.geogebra.org/m/gamykm9t`. Ara, enlloc de calcular la longitud d'aquesta corba, podem, alternativament, aplicar la isometria de la inversió, que definim a 1.4.4 que porti a i b a punts d'una semirecta vertical. Així, ja que les isometries preserven distàncies, podrem afirmar que la longitud sobre aquesta semicircumferència serà mínima.

Per concloure, resumim: donats dos punts qualssevol del semiplà de Poincaré, podrem trobar una geodèsica que passa pels dos. Si aquesta geodèsica és una semirecta vertical, la longitud entre els dos punts serà la definida en 1.4.5. Si la geodèsica és una semicircumferència centrada en x0, una isometria anomenada inversió, podrem estudiar els punts sobre una semirecta vertical, i doncs, calcular la longitud entre els punts amb la fórmula 1.4.5 . Vist que la longitud es preserva per isometries, serà la mateixa sobre la semicircumferència estudiada.

1.4.4 Transformacions hiperbòliques

Les transformacions hiperbòliques que considerarem són:

Translació paral·lela a la recta de l'infinit $\{y = 0\}$

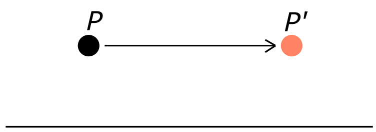


Figura 1.8: Translació paral·lela a {y=0}

Definició 1.4.6. *Una **translació al pla hiperbòlic** es defineix com la translació horitzontal en el cas euclidià:* $T_s : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *amb* $T_s(x, y) = (x + s, y)$

Teorema 1.4.7. T_s *és una isometria de* $\mathbb{H}$

Demostració. Siguin $a, b \in \mathbb{H}$ i sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, amb $t \in [0, 1]$ un camí que els uneix:

$$T_s(\gamma(t)) = (x(t) + s, y(t))$$

i doncs $\frac{d}{dt}T_s(\gamma) = (x'(t) + 0, y'(t)) = \gamma'(t)$ i per tant:

$$L(T_s(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = L(\gamma)$$

Com que es preserva la longitud d'arc, es preserva la distància, i doncs és una isometria. $\square$

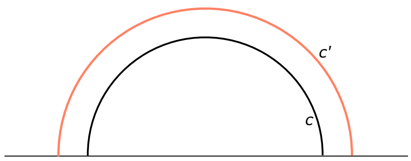


Figura 1.9: Dilatació

Dilatació

Definició 1.4.8. *Una **dilatació*** $D_\delta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$*amb* $\delta > 0$ *és*

$$D_\delta(x, y) := (\delta x, \delta y)$$

Teorema 1.4.9. D_δ *és una isometria de* $\mathbb{H}$

Demostració. Siguin $a, b \in \mathbb{H}$ i sigui $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ un camí que els uneix:

$$D_\delta(\gamma(t)) = (\delta x_(t), \delta y(t))$$

i doncs $\frac{d}{dt}D_\delta(\gamma) = (\delta x'(t), \delta y'(t)) = \delta\gamma'(t)$ i per tant:

$$L(D_\delta(\gamma)) = \int_0^1 \frac{|\delta\gamma'(t)|}{\delta y_(t)}dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{y_(t)}dt = L(\gamma)$$

Com que es preserva la longitud d'arc, es preserva la distància, i doncs és una isometria.

□

Inversió Definim en primer lloc la inversió en general, sobre el pla euclidià, com es presenta a [16], i n'exposem els resultats més importants.

Definició 1.4.10. *Sigui k una circumferència amb radi r i centre O, i sigui P un punt diferent d'O, en definim l'* ***invers*** *com el punt P' de la semirecta OP tal que* $d(O, P)d(O, P') = r^2$.
Anomenarem a P' l'invers de P, i a O el centre de la inversió.

Aquesta transformació serà una interpretació de la reflexió respecte una recta, però al pla hiperbòlic. La construcció de l'invers P' d'un punt P extern a la circumferència es fa trobant la tangent a k que passa per A. S'anomena B el punt on és secant a la circumferència k, i es troba la perpendicular a OP que passa per B. El punt on aquesta perpendicular talla amb OP, serà l'invers de P, com es pot obervar a la Figura 1.10. Quan el punt és interior a la circumferència, la construcció és la mateixa però en l'ordre contrari: es troba la perpendicular a OP, i s'escull qualsevol dels dos punts on talla amb k, denotant-lo per B. Es troba a continuació la tangent a k que passa per B, i el punt on talli la recta OP serà P'.
Això evidencia que si P és l'invers de P', aleshores P' ho és de P, respecte de la mateixa circumferència k. Els punts de la circumferència k són invariants respecte de la inversió

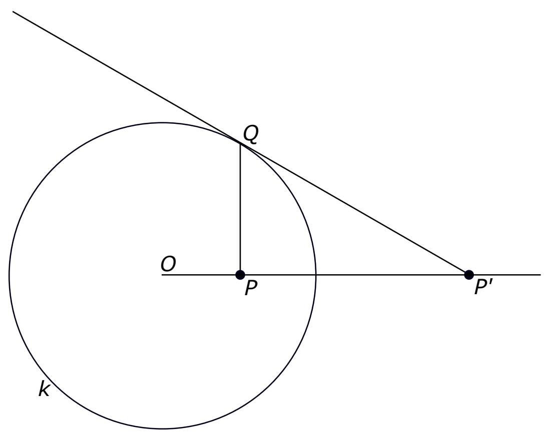


Figura 1.10: Inversió d'un punt P de l'interior d'una circumferència k

Teorema 1.4.11. *La inversió transforma rectes que no passen pel centre d'inversió en circumferències que sí passen pel centre d'inversió*

Demostració. La donem per construcció.
Siguin A, B dos punts d'una recta que no passa pel centre d'inversió O, voldrem veure que A' i B' els inversos d' A i B respectivament es troben sobre una circumferència que sí que hi passa.
Donats A i B d'una recta r que no talla la circumferència k, trobem els seus inversos respecte de la cirumferència k amb centre d'inversió O.
Definim la circumferència q com la que passa per A i O i tal que el seu centre es troba sobre el segment OA. Volem veure que B' és un punt de q. Els triangles ΔOAB i $\Delta OA'B'$ són semblants ($\angle AOB = \angle A'OB'$) i $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$ i doncs $\angle OAB = \angle OB'A'$ i $\angle OBA = \angle OA'B'$. Així doncs, podem afirmar que $\angle OB'A'$ és recte, ja que $\angle OAB$ ho és per construcció. Així doncs, $B' \in q$.
Es pot trobar la construcció següent al GeoGebra: `https://www.geogebra.org/m/bmxswrvv`
□

Es compleix també el recíproc del Teorema 1.4.11:

Teorema 1.4.12. *La inversió transforma circumferències que passen pel centre de la inversió per rectes que no hi passen*

Demostració. Siguin A, B dos punts d'una circumferència que passa pel centre de la inversió $(A, B \neq O)$, voldrem veure que A' i B' els inversos d' A i B respectivament defineixen una recta que no passa per O.
Es troben A' i B'. La recta que els uneix passarà per O si i només si, $OA = OB$, és a dir si i només si O, A i B estiguessin alineats. Això contradiria el fet que són tres punts d'una mateixa circumferència.
□

Teorema 1.4.13. *La inversió deixa invariant les magnituds dels angles*

Demostració. Siguin α i γ dues corbes que es tallen en A. Siguin α', γ' i A' els seus respectius inversos respecte una circumferència k. Utilitzant la Proposició 3.1. de [16, pàgina 25], l'angle entre la tangent a α en A i el segment AA', i l'angle entre la tangent en α' en A' i el segment AA' són el mateix.
Anàlogament, l'angle entre la tangent a γ en A i el segment AA', i l'angle entre la tangent en γ' en A' i el segment AA' també han de ser el mateix.
Així podem deduir que l'angle entre les tangents a α i γ en A és el mateix que entre α' i γ' en A'. □

Definida ara la inversió, ens interessa, al pla hiperbòlic, el cas en que la circumferència està centrada a un punt $O \in \{y = 0\}$. Així podem, escollint un sistema de coordenades on O és l'origen, definir la reflexió com una isometria més general. Composant la reflexió amb la translació per obtenir un O' qualsevol sobre $\{y = 0\}$ i amb la dilatació per passar de radi 1 a un radi R qualsevol; obtindrem la inversió.

Definició 1.4.14. *Una **inversió** és una aplicació $R : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tq $R(x, y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$*

Teorema 1.4.15. *La reflexió és una isometria*

Demostració. De la mateixa manera que anteriorment, volem provar que la longitud arc es manté per aquesta transformació. Seguim la idea proposada a [17], de fer un canvi de coordenades per simplificar la comprovació:
Sigui $\gamma(t) = (r(t)cos(\theta(t)), r(t)sin(\theta(t)))$, tindrem que:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(r'(t)cos(\theta(t)) + r(t)(-sin(\theta(t))))^2 + (r'(t)sin(\theta(t)) + r(t)cos(\theta(t)))^2}}{r(t)sin(\theta(t))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}}{sin(\theta(t))} dt \end{aligned}$$

A més:

$$R(\gamma(t)) = (\frac{r(t)cos(\theta(t))}{r^2(t)(cos^2(t) + sin^2(t))}, \frac{r(t)sin(\theta(t))}{r^2(t)(cos^2(t) + sin^2(t))}) = (\frac{cos(\theta(t))}{r(t)}, \frac{sin(\theta(t))}{r(t)})$$

Així:

$$\begin{aligned} L(R(\gamma)) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{-\sin\theta(t)}{r(t)} - \frac{\cos\theta(t)}{r^2(t)} r'(t))^2 + (\frac{\cos\theta(t)}{r(t)} - \frac{\sin\theta(t)}{r^2(t)} r'(t))^2}}{\frac{1}{r(t)}\sin\theta(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}}{r(t)\sin\theta(t)} dt \end{aligned}$$

Podem afirmar doncs que la longitud d'arc es manté per reflexió, i doncs que aquesta és una isometria. □

1.4.5 Els cinc postulats al semiplà de Poincaré

Analitzem els postulats d'Euclides. Els reescriurem, però, en notació actual, per fer-los més entenibles. Els primers quatre es compleixen al semiplà de Poincaré. Això té sentit en tant que justament la geometria hiperbòlica busca només negar el cinquè. El fet que es compleixin es deriven del fet que la geometria hiperbòlica al semiplà de Poincaré és conformememnt equivalent a la mètrica euclidiana. Presentem, de totes maneres, construccions de regla i compàs possibles per veure que efectivament es compleixen, com Euclides mateix hauria pogut demostrar-ho.

Postulat 1. *Donats dos punts existeix una única recta que els conté*

Hem demostrat que les geodèsiques existeixen i són les rectes del tipus I i II. La geodèsica és sempre la recta de mínima longitud que uneix dos punts, i per tant el primer postulat es compleix necessàriament, sent aquesta recta la geodèsica corresponent.
Alternativament podriem veure una manera constructiva de demostrar-ho: Anomenem els punts del pla hiperbòlic A i B, i r la recta buscada. Si A i B es troben sobre una recta euclidiana vertical, aleshores la recta hiperbòlica que passa per A i B és del tipus I, que existeix perquè existeix la respectiva recta euclidiana.
En cas contrari, haurem de veure que existeix una recta hiperbòlica del tipus II que els conté. La construcció d'aquesta es fa trobant la recta perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt mig d'aquest. Sent C el punt on aquesta recta talla la recta de l'infinit, aquest serà el centre de la recta buscada, i el radi serà la distància de A a C, que coincidirà amb la de A a B. Sabem que C existeix perquè l'únic cas en que la recta perpendicular a AB no tallaria la recta de l'infinit seria aquell en que hi fos paral·lela, però doncs ens trobariem amb que A i B estan alineats verticalment, cas que ja hem tractat. Aquesta construcció es pot apreciar al GeoGebra següent: `https://www.geogebra.org/m/p5vbz48c`.

Postulat 2. *Es pot prolongar qualsevol recta indefinidament*

Es deriva de la continuïtat de les rectes: donats dos punts A i B sobre una de les rectes euclidianes, per continuïtat, sempre existirà com a mínim un punt C tal que B es troba entre A i B. Així, la prolongació d'una recta sempre és possible, per molt que ens apropem a linfinit (ja sigui a l'infinit que es considera a la geometria euclidiana, com la recta de l'infinit del model).

Postulat 3. *Donat un punt i una distància, podem traçar una circumferència de centre el punt i radi la distància.*

Les circumferències hiperbòliques seran com les euclidianes Siguin P i R el punt i el radi donats. Tracem la recta r de tipus I que passa per P, i escollim, sobre aquesta, un punt a distància R de P, que anomenarem A. Volem trobar un B un altre punt a distància R de P. Per a fer-ho, considerem el punt d'interesecció de r i la recta de l'infinit: M. Construïm B per tal que $\frac{d_{\mathbb{H}}(P,M)}{d(A,M)} = \frac{d_{\mathbb{H}}(B,M)}{d_{\mathbb{H}}(A,M)}$.
Si agafem una dilació amb $\delta = \frac{d_{\mathbb{H}}(P,M)}{d_{\mathbb{H}}(A,M)}$, tindrem que $D_\delta(A) = P$ i $D_\delta(P) = B$. Podem afirmar que P és el centre (hiperbòlic) del segment $\overline{AB}$.
Voldrem comprovar que la circumferència hiperbòlica que busquem és la circumferència euclidiana q de centre O el punt mig (euclidià) del segment $\overline{AB}$. Haurem de provar, doncs, que tots els punts de q està a la mateixa distància hiperbòlica de A. Ho farem provant que els punts diametralment oposats d'aquesta circumferència es poden transformar en A i B per mitjà d'una transformació hiperbòlica.
Això requereix d'alguns càlculs que no es detallen, però es troba un punt P_1 tq és l'invers de P respecte de la circumferència q. Traçant una circumferència k que passa per P i P_1 i que té centre sobre la recta de l'infinit, anomenem C i D els punts de tall de les circumferències q i k. Traçant la circumferència de radi $d_{\mathbb{H}}(E, P)$, centrada a E, , que anomenem o, ens servirà per fer la inversió que ens portarà CP a AP, i DP a BP. Pel fet de ser ortogonals les dues circumferències, seran invariants l'una respecte la inversió de l'altra, en particular, q és invariant respecte de o. k però no ho és, de fet es transforma en la recta que passa per P i P_1. Això és conseqüència del Teorema 1.4.12 i del fet que P i P_1 són fixos per la inversió, per ser de la circumferència k. C és de q i k, on q és invariant per la inversió en o, i per tant C s'ha de transformar en un punt de q, que a més ha de pertàner a la recta que per inversió es transforma en k. Aquest punt ha de ser necessàriament A. Anàlogament, D es transforma en B. Així, pel fet de ser P un punt fix, PC es transforma en PA i PD en PB. q és doncs circumferència hiperbòlica, com voliem demostrar.

Postulat 4. *Tots els angles rectes són iguals*

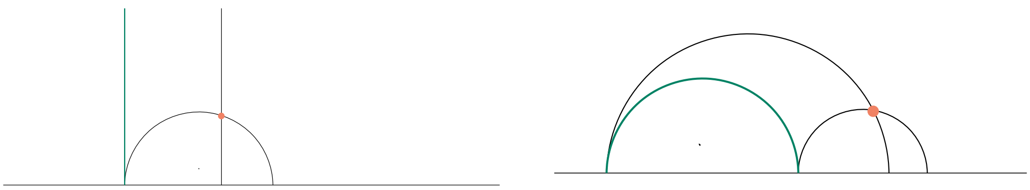
Hem comentat que la mètrica hiperbòlica del semiplà de Poincaré és conformement equivalent a la mètrica euclidiana, i doncs s'hi mesuren els angles com a la euclidiana. Així, sent aquest postulat cert per la mesura d'angles euclidiana , també ho és per la mesura d'angles del semiplà de Poincaré.

Postulat 5 hiperbòlic. *Donada una recta i un punt extern a aquesta, pel punt passen almenys dues rectes que no tallen la recta donada*

Per la definició de recta paral·lela al semiplà de Poincaré, dues rectes seran paral·leles si es tallen a un punt de l'infinit. Analitzem els dos tipus de recta que ens podem trobar:

- Donada una recta del tipus I: ${}_aL$, i un punt exterior $P = (b, c)$, podem escollir b_L recta del tipus I que passa per P. ${}_aL$ i ${}_bL$ seran paral·leles perquè es tallen a l'infinit en tant que punt amb component vertical infinita. S'escull ${}_dL_r$, on $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ i $d = a + r$ si $a < b$ o bé $d = a - r$, en cas contrari. Aquesta serà una recta del tipus II que passa per P i que talla {y=0} al punt $(a, 0)$. Pel fet de tallar a_L a la recta de l'infinit, serà paral·lela a a_L.
- Donada una recta del tipus II a_{Lr} i un punt exterior $P = (b, c)$, podem escollir dues rectes del tipus II que passen per P i tals que una d'elles talla a_{Lr} al punt $(a - r, 0)$ i l'altra al punt $(a + r, 0)$. Aquestes dues rectes seran paral·leles a la recta donada ja que la tallen a un punt de l'infinit.

Podem observar aquests dos casos a la Figura 1.11



(a) Respecte una recta a_L

(b) Respecte una recta a_{Lr}

Figura 1.11: Cinqué postulat

Conclusions del capítol

En aquest capítol ens hem familiaritzat amb el semiplà de Poincaré, model de la geometria hiperbòlica, i amb la geometria del taxi continua i discreta en dues dimensions. Hem notat que aquests models de geometries apareixen a partir de la segona meitat del s.XIX, i no és casualitat. Aquesta època, posterior a la de la revolució industrial, va ser una de grans descobriments, també en molts altres àmbits fora del matemàtic.

Un cop assentat el coneixement de les geometries mencionades, tindrem les eines necessàries per poder pensar com adaptar els coneixements per crear una proposta didàctica profitosa.

“Aprendre és tant perdre idees antigues com adquirir-ne de noves”

Daniel Hameline

2 Estudi didàctic

2.1 Fonaments didàctics

Per poder presentar una bona activitat no és suficient amb conèixer bé el contingut matemàtic que es presentarà. Una recerca prèvia sobre mètodes didàctics és basilar per a poder proposar un projecte que resulti interessant a l’alumnat.

Per aquesta raó, a continuació es presenta no només una explicació detallada de les raons que han portat a escollir el tema treballat, sinó també un estudi de la teoria didàctica triada com a base per la construcció de les sessions. A més, s’introdueixen els continguts i vessants matemàtiques específiques de l’assignatura de primer de batxillerat de Matemàtiques presentades al currículum del Departament d’Educació de la Generalitat de Catalunya [11], per tal de poder adaptar al públic desitjat les activitats que es volen proposar.

2.1.1 Didàctica no euclidiana

Perquè geometria? Com s’afirma a [3]:

> La intuició geomètrica, derivada de la nostra experiència del món, és un avantatge invaluable a la geometria, però aquesta intuïció ha de ser degudament amanida amb deducció formal, si es vol que el resultat siguin les matemàtiques

La geometria sintètica és un molt bon camp per aprendre a raonar, però s’ha basat massa en el còmput. A [3], l’autor fa una distinció entre la geometria analítica i la sintètica: la sintètica ensenya a raonar, l’analítica té un raonament que és primàriament computacional. És per aquesta raó que la segona complementa i amplia la primera, però tot i ser basilar, no és òptima per ensenya a raonar. És útil, quan l’alumnat ja té una maduresa matemàtica i habilitat computacional per poder apreciar-ne l’interès, però hauria d’introduir-se posteriorment. Coincidint en la reflexió de Buck, la proposta didàctica es centra en la geometria sintètica, l’àmbit on més apropiat és ensenyar a raonar per la confrontació directa que hi apareix entre la intuïció i la deducció matemàtica.

La geometria no euclidiana A l'institut, a l'assignatura de matemàtiques hi ha una equivalència no explicitada entre geometria i geometria euclidiana. La geometria no euclidiana, si es tracta, és sovint des d'un punt de vista anecdòtic; anomenant un parell de noms importants en la història de la seva aparició, però sense posar èmfasi en les diferències que existeixen entre les geometries i en el fet que n'existeixin més d'una.

Es fa patent, aquesta confrontació, sobretot amb la geometria hiperbòlica, ja que es presenta com quelcom que ens fa qüestionar què és realment la intuïció, i què, en canvi, els coneixements ensenyats que s'assumeixen com a intuïtius, per haver-los deixat de qüestionar. Tot i que aquesta proposta didàctica només pugui donar un tast del que vol dir apropar als alumnes la geometria hiperbòlica, el seu objectiu és més aviat veure l'interès de fer-ho. La importància d'aquest fet no resideix en els conceptes concrets que s'hi aprendran, sinó en el canvi de mentalitat que es genera en qüestionar quelcom que els alumnes accepten com a cert i únic. En general, quan es presenta la geometria euclidiana, s'assumeix que és la geometria, i no es presenta com una interpretació de l'espai físic concreta, i que, per consegüent en poden existir d'altres.

El salt a la geometria hiperbòlica és prou significatiu, i doncs es presenta la geometria del Taxi com a pont entre geometria euclidiana i hiperbòlica. En efecte, aquesta reuneix les característiques d'una geometria no euclidiana, però a diferència de la hiperbòlica, és propera a l'alumnat per la seva aplicació pràctica. Permetrà, doncs, qüestionar alguns conceptes sense però arribar a l'abstracció que requereix l'estudi de la geometria hiperbòlica.

Com defensa Krause a [6], la geometria no euclidiana escollida per tractar a l'aula hauria de complir les següents propietats:

1. ser propera a la geometria euclidiana en la seva estructura axiomàtica
2. tenir aplicacions significatives
3. ser entenible per qualsevol persona que hagi fet un curs introductori de geometria euclidiana

La geometria hiperbòlica, compleix les dues primeres propietats: l'estructura axiomàtica i la seva semblança amb la de l'euclidiana ha estat estudiada a l'Apartat 1.1.2; a més, les seves aplicacions a la física són molt reconegudes. Presenta, però, dificultats de comprensió si no es presenta de manera clara. La geometria del taxi, en canvi, compleix les primeres dues propietats, sent propera axiomàticament a l'euclidiana (com vist a l'Apartat 1.3.2) i tenint aplicacions a problemes referents a la geometria de les ciutats. És, a més, simple de comprendre per qualsevol persona amb nocions bàsiques de geometria euclidiana, i especialment per persones acostumades a moure's per barris com el de l'Eixample de Barcelona.

2.1.2 Teoria didàctica

Se seguirà la teoria didàctica que defensa l'existència de tres concepcions de l'aprenentatge de nous coneixements. Aquestes són la concepció transmissiva (o del cap buit), la behaviorista i la socio-constructivista.

La concepció transmissiva El principi del que es parteix és que l'alumnat no sap res sobre el coneixement que es planteja. Serà la persona docent qui presentarà el coneixe-

ment i l'alumne l'escoltarà. És una concepció que permet eficiència de temps i arribar a un nombre elevat d'alumnes fàcilment.
La problemàtica que pot presentar és el fet d'adquirir coneixement amb llacunes, només centrat en el tema concret plantejat. És perd doncs el sentit general i, sobretot, la dimensió d'aprendre a raonar matemàticament. Tota la dimensió *Aprendre a aprendre*, del currículum de batxillerat [11], de fet, hi és molt deficient.

La concepció behaviorista Es parteix del principi que no es pot accedir a les estructures mentals de l'individu i doncs l'objecte de l'estudi del docent han de ser els comportaments observables. La pedagogia s'estructura per objectius, fixats per la persona docent, i pot ser descomposat en sub-objectius. Es guía l'alumnat i els errors s'intenten evitar.

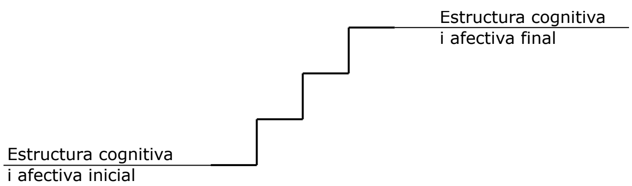


Figura 2.1: Esquema del coneixement a la concepció behaviorista

Aquest model és eficaç per adquirir automatismes i potencia el sentiment de succés de l'alumne, no incidint massa en els errors, però proporcionant una sensació d'autonomia major que en la concepció transmissiva.
En contrapartida, pot ser que l'alumnat no vegi massa clarament la raó del que fa, i només es fixi en els passos per arribar a l'estat final, perdent de vista el sentit general. Saber fer cada un dels passos, a més, no garanteix saber resoldre l'objectiu final. La manca d'errors fa que quan es deixi de guiar l'alumne, potser aquest no sàpiga quin és el següent pas.

La concepció socio-constructivista Es concep que l'aprenentatge passa per una ruptura: substituir una concepció antiga amb una de nova passant per una fase on es posa en dubte la concepció anterior. Així el que se sabia és alhora un recolzament i un impediment al nou coneixement. A diferència de la concepció transmissiva, la socio-constructivista mai considera la ment de l'alumne com a "buida"sinó que justament se serveix dels coneixements anteriors per crear les situacions desitjades. L'error és una eina important, utilitzada per la persona docent per a que l'alumnat arribi a conclusions pròpies.

És interessant sobretot pel fet de donar un sentit a l'aprenentatge i prendre en consideració les concepcions dels alumnes.
El problema és sobretot de limitació de temps i del gran nombre d'estudiants que sol tenir una classe. A més, tot i que el coneixement segueixi l'esquema presentat a la Figura 2.2, i per tant el resultat final es trobi en una posició "més alta", la desestabilització de les concepcions que l'alumne dóna com a certes pot crear complicacions.

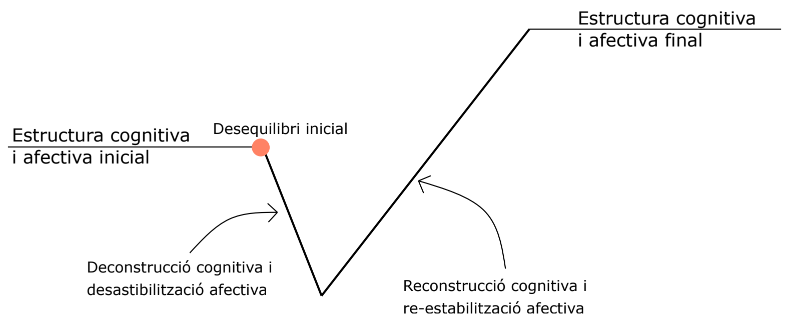


Figura 2.2: Esquema del coneixement a la concepció socio-constructivista adaptat a partir del proposat a [8]

Com escollir la millor concepció per a cada activitat De les descripcions anteriors se'n poden extreure conclusions sobre quina concepció és millor en cada situació. En general les dues últimes opcions semblen les més interessants, però es poden combinar les tres en una mateixa sessió. L'interès es centra sobretot en la concepció general de la transmissió de conceptes, on s'intentarà seguir la socio-constructivista, però en situacions concretes es decidirà utilitzar unes actituds més behavioristes o transmissives. Per clarificar quina concepció volem usar en cada cas, podem fer-nos les preguntes següents:

- Quin és el rol de l'alumne?
  Concepció transmissora: l'alumne escolta i/o escriu el que se li dicta.
  Concepció behaviorista: l'alumne respon a preguntes, omple taules, etc.
  Concepció constructivista: és un rol actiu. Se li presenta un problema a resoldre, que farà que es qüestioni.

- Quin és el rol de la persona docent?
  Concepció transmissora: és qui li presenta el saber a l'alumne.
  Concepció behaviorista: prepara els exercicis, dóna les definicions, i ajuda els alumnes, corregint si cal.
  Concepció constructivista: serà l'encarregada de supervisar i organitzar el treball, però no intervindrà en principi, i en tot cas dirigirà el debat

- Com apareix "el saber" a la lliçó?
  Concepció transmissora: a través de les explicacions de la persona docent.
  Concepció behaviorista: apareix de manera natural a una situació, és l'alumne qui el descobreix.
  Concepció constructivista: apareix a través de l'alumnat, i té la motivació de ser el que resoldrà el problema proposat. La persona docent només té el paper d'institucionalitzar aquest saber.

- Com es gestionen els errors? De quin tipus són?
  Concepció transmissora: gairebé no hi ha error, o no s'hi dona massa importància.
  Concepció behaviorista: l'error no és buscat. Es corregeix quan cal individualment, però els exercicis no estan redactats per a que apareguin errors.
  Concepció constructivista: els errors es planifiquen amb antelació, es consideren quelcom de formador, i que permetrà avançar en l'aprenentatge.

· Qui valida o valora la producció dels alumnes?
Concepció transmissora: és la persona docent qui valora la producció de l'alumnat.
Concepció behaviorista: és la persona docent qui valora la producció de l'alumnat.
Concepció constructivista: és la situació qui valida les respostes, quan el problema s'aconsegueix resoldre.

2.1.3 Adaptació al currículum de batxillerat

Vessants matemàtiques Es citen a la pàgina 257 de [11] les cinc vessants de l'activitat matemàtica a tenir en compte:

· Resoldre problemes matemàtics.

· Comunicar-se matemàticament.

· Raonar matemàticament.

· Valorar la matemàtica i la seva construcció.

· Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

S'ha encarat la proposta didàctica per intentar maximitzar l'assoliment d'aquestes competències. Es fa especial incidència en les comperències de raonament matemàtic, valoració de la matemàtica i la seva construcció, i en construir confiança en la pròpia capacitat matemàtica (en més detall a l'Apartat 2.2.1)

Connexions amb altres matèries En referència a les connexions amb altres assignatures, a [11] s'afirma el següent:

> Hi ha connexions molt evidents, per exemple, amb física o amb dibuix tècnic, però cal tenir en compte qualsevol espai comú que puguem trobar amb altres matèries, atès que ens poden proporcionar els entorns d'aprenentatge propers i significatius que es necessiten per a l'activitat matemàtica de resolució de problemes, i les sinergies que es puguin generar impulsaran la millora de l'aprenentatge tant de la matemàtica com de l'altra matèria que ens forneixi l'entorn d'aprenentatge.

S'ha donat, en la proposta didàctica presentada, un èmfasi alt en les possibles connexions interdisciplinars que poden tenir les activitats. La proposta segueix línies de conceptes que integrin el concepte STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Maths), en contraposició amb un enfocament STEM (Science, Technology, Engineering and Maths). Així, es recalca sobretot la relació que poden tenir les matemàtiques amb àmbits menys típicament proposats. Per això s'introdueix l'artista M.C.Escher, o es presenten preguntes relacionades amb la filosofia, que sempre ha estat intrínsecament relacionada amb les matemàtiques, però on aquesta relació, curiosament, no és una que es presenti sovint a l'aula.

Continguts matemàtics Dels continguts de primer de batxillerat presentats a [12] s'han tractat sobretot les àrees d'aritmètica i àlgebra, i de geometria. Concretament, per l'aritmètica i àlgebra, es tracta el concepte de progressions, introduint a la Primera Sessió situacions simples de col·lecions ordenades de nombres (relació entre nombre de punts i radi a les circumferències de la geometria del taxi, per exemple). En referència a la geometria, es tracten els llocs geomètrics, les còniques, en ambdues activitats. A més, com a processos desenvolupats durant el curs per mitjà dels continguts, es donarà prioritat a, d'entre els proposats a [12], els següents:

· La resolució de problemes, entesa com un estil d'ensenyament i aprenentatge que facilita la construcció de coneixement matemàtic a partir de l'experimentació, la cerca de patrons i regularitats i la formulació de resultats conjecturals.

· El raonament i la prova, que pren sentit quan l'alumne/a ha descobert la necessitat de consolidar resultats prèviament conjecturats, pel fet d'haver-ne descobert prèviament d'erronis.

· La integració de la cultura matemàtica en el procés d'ensenyament i aprenentatge, entesa com una activitat que permet que l'alumnat conegui moments històrics rellevants connectats amb els continguts que es desenvolupen en cada moment. Els apartats epistemològics que es tractin no s'haurien de limitar a una exposició purament anecdòtica.

2.2 Proposta didàctica

Les activitats proposades no formen part del currículum de batxillerat. Es presenten, en canvi, com un "tast" d'una temàtica matemàtica que no té estricta relació amb els temes tractats per l'alumnat a l'aula. Per això es proposa en horari extra curricular i de presencialitat voluntària. No requereix de bases prèvies, és una activitat oberta a tot l'estudiantat de primer de batxillerat i que seria presentable a cursos inferiors (o com a mínim parts de la primera sessió), pel seu caràcter teòric i reflexiu, més que d'aplicació de conceptes ja coneguts.

L'interès final d'aquesta proposta didàctica és el del qüestionament de les definicions que es donen dels objectes matemàtics al que l'alumnat està acostumat. Per a fer-ho, es treballarà amb objectes coneguts, però amb canvis en les condicions generals de les geometries usades: es tractaran rectes, circumferències, relacions entre objectes (paral·lelisme de rectes, distàncies mínimes entre punts); però es farà en la geometria del taxi i la geometria hiperbòlica.

2.2.1 Marc didàctic

Es decideix seguir, com a mètode general, una concepció del saber socio-constructivista (tractada a l'Apartat 2.1.2). En el cas estudiat, es crearà un trencament en la concepció que l'alumnat té de la geometria. Sent els conceptes que es tractaran de complexitat elevada, però, es proposa un acompanyament elevat en la creació del nou coneixement. Es combinaran, així, les concepcions socio-constructivista i behaviorista, havent-hi poques activitats concretes en que s'usarà la concepció transmissiva. (veure Apartats 2.2.4 i 2.2.5). El marc general, però, serà socio-constructivista. Així, a la primera sessió s'acompanyarà l'alumnat cap al trencament, proposant situacions a la geometria del taxista que no compleixen les propietats que l'alumnat espera. El punt de trencament més gran serà en la presentació de la geometria hiperbòlica i en com s'hi defineix la mètrica. A partir d'aquest punt, esglaonadament, i a través de la resolució d'exercicis mecànics s'aconseguirà arribar a conclusions generals i conceptuals. Veiem a continuació (Figura 2.3) la visualització d'aquest procès, en contraposició amb els esquemes Figura 2.1 i Figura 2.2.

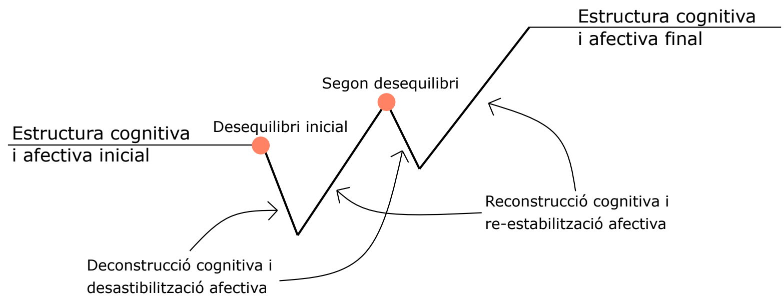


Figura 2.3: Esquema del coneixement proposat per al cas concret estudiat

En referència a les vessants de l'activitat matemàtica tractades, s'incidirà especialment en la valoració de la matemàtica i la seva construcció. És per aquesta raó que es proposa una contextualització històrica forta dels conceptes estudiats, i es decideix tenir com a objectiu final la "demostració"d'un resultat que va canviar la història matemàtica dràsticament. Es busca recalcar aquest triomf per l'alumne, per potenciar la vessant de la confiança en la pròpia capacitat matemàtica. Aquesta pot haver disminuit molt a l'inici de la segona sessió, i és per aquest motiu que es busca que l'alumnat acabi en un punt més alt no només de coneixement matemàtic, sinó també de seguretat en les seves capacitats. Aquestes vessants es tractaran a través del raonament matemàtic, utilitzant eines proposades a la lliçó per poder arribar a conclusions.

2.2.2 Anàlisi prèvia de la proposta

L'èxit d'una activitat depen de diferents factors. A [4], l'autor recorda que un factor, tot i que evident, és la classe davant la qual ens trobem. S'haurà de fer un esforç per posar el focus en preguntar-nos si els factors que han fet que l'activitat seguís uns camins diferents dels que proposàvem com a estàndards estan només relacionats amb els alumnes que ens hem trobat o tenen més a veure amb el plantejament que hem proposat. Sempre estaran relacionats amb les persones amb qui treballem, però serà important fer una distinció entre les persones individuals que hi ha a l'aula, i el concepte de classe.

En el cas específic de les sessions proposades, el grup classe és molt concret. Són alumnes de primer de batxillerat científic que han decidit participar a una activitat no-obligatòria en horari no-lectiu. L'activitat ha sigut adaptada segons els comentaris dels seus docents sobre els temes que havien sigut tractats, per tant les facilitats o dificultats que poguem trobar-nos seran sobretot de caràcter individual de cadascuna de les alumnes.

Un factor que en l'actualitat és evident, però que no ho haguès sigut fins al febrer del 2020 és l'adaptabilitat de l'activitat a la situació sanitària actual. Aquestes activitats s'han portat a terme a inicis de maig de 2021, i és per això que han sigut adaptades a un format virtual.

Així és que per poder adaptar les idees a tractar, es plantegen una sèrie de preguntes:

1. Quins són els continguts necessaris per a poder dur a termini l'activitat?

2. Quines són les dificultats previsibles dels alumnes?

3. Quines són les variables didàctiques en aquesta activitat? Les variables didàctiques són els elements de la situació que la persona docent pot variar, i la modificació de les quals comportarà un canvi en el procediment dels alumnes

4. Com podem adaptar l'activitat per a que es pugui portar a terme en les condicions actuals?

A la primera sessió Els continguts a conèixer prèviament són pocs. Es tractaran els temes de lloc geomètric d'algunes còniques, i s'introduirà l'ús de successions però sense explicitar-ne fòrmules o raonaments específics. És per aquesta raó que l'activitat podria ser portada a cursos inferiors, només necessitant d'explicar què és una el·lipse. Aquest concepte, però, no s'utilitza a la sessió de manera extremament formal, i doncs seria fàcil d'introduir, podent utilitzar el mètode del jardiner per esclarir-ho de manera gràfica.

No es preveuen especials dificultats de part de l'alumnat a nivell de resolució dels exercicis concrets. El que es pot preveure és una falta de visió general del perquè de l'activitat. És per això que es recomana recalcar l'interès de distanciar les definicions d'objectes matemàtics i la representació mental que en solen fer. A més, es preveu que l'últim problema presentat, on s'espera que es porti a la pràctica els exercicis que s'han fet anteriorment porti algun que altre problema, o que probablement es resolgui amb un mètode de prova-error més que utilitzant els llocs geomètrics que s'han presentat.

Una variable didàctica clara a modificar seria el fet d'utilitzar o bé nombres més grans o bé punts generals (per exemple $P = (a, b)$) enlloc de nombres, per forçar la generalització dels raonaments. Tal com es presenten els exercicis, són resolubles a força d'aplicar un mètode de prova-error, sent els nombres petits. De totes maneres, es proposa aquesta versió per potenciar el sentiment de triomf en l'alumnat, sent la segona sessió previsiblement més complicada d'entendre per parts dels alumnes, per ser el model de quelcom de menys identificable per ells. En funció dels resultats que s'estudiin a l'Apartat 2.2.6 es decidirà si recomanar variar aquesta variable didàctica, però de totes maneres en funció del grup, aquest és un punt on es proposa que la persona docent decideixi fer variacions per modificar el procediment que l'alumnat adoptarà.

La sessió s'adapta fàcilment a les condicions sanitàries. De fet, està dissenyada directament per a poder ser portada online (utilitzant una pissarra virtual), o bé fins i tot de manera asíncrona. Per això la Fitxa de l'alumne annexada () s'ha dissenyat de manera pautada, per poder ser resolta sense la necessitat d'una persona docent. Evidentment, sempre que la situació ho permeti, es recomana fortament que aquesta hi sigui, però degut als requeriments concrets de les estudiants, s'ha preparat per si no s'haguès pogut portar a terme síncronament. Finalment, per a la primera sessió sí ha estat possible.

A la segona sessió Els continguts prèvis requerits són menys que a la primera. De fet només és necessari saber les definicions de cercle com a lloc geomètric, i de rectes paral·leles. Això és perquè es posarà molta incidència en separar aquestes definicions de les propietats que se li associen directament. A més, tot i que continguts com a tal siguin pocs, la dificultat rau en la capacitat d'abstracció. És aquesta la que s'exercitarà, i posarà de manifest, i per tant és necessari estar acostumat al pas a l'abstracció, o tenir-hi una bona predisposició, ja que en cas contrari podrà ser una sessió frustrant.

Es preveu que les dificultats es presentin sobretot en forma d'incomprensió general de la direcció presa o dels conceptes presentats. La persona docent haurà, doncs, de tenir un paper molt actiu en el reforçament positiu de l'alumnat, i de seguiment de l'activitat.

Una variable didàctica podria ser el model escollit, sent el disc de Poincaré potser més natural per una part de l'alumnat.

De la mateixa manera que la primera, aquesta sessió està dissenyada expressament per adaptar-se a les condicions sanitàries del moment. La Fitxa de l'alumne annexada () s'ha creat de manera que la sessió pugui ser duta a terme de manera asíncrona. En el cas concret de la segona sessió, però, no es recomana fer-ho en general, ja que en aquest cas un acompanyament de la persona docent es considera gairebé indispensable. En casos particulars, però, a discreció de la persona docent, es podrà presentar com a sessió a fer per l'alumnat per grups des de casa. Es recomana, en aquest cas, una versió simplificada de l'activitat, on els passos estan completament pautats, i l'alumnat no té un paper tant actiu, sinó més aviat de comprensió del que se li presenta. En aquest cas, però s'hauria de potenciar molta discussió per part de l'alumnat, per que el seu rol sigui més actiu.

2.2.3 Realització de la proposta

En aquest cas concret, la proposta didáctica s'ha presentat a les tres classes de primer de Batxillerat científic de l'Institut Jaume Balmes, de Barcelona. La proposta es planetjava com dues sessions en dues setmanes consecutives, en horari extracurricular. La situacio sanitària actual, i de l'any anterior, ha generat un ambient poc propens a l'extracurricularitat: en general hi ha una gran quantitat de temari a recuperar, que es va perdre l'any passat degut a confinaments i circumstàncies poc comunes. Els alumnes han de fer un especial esforç fora de l'aula per "posar-se al dia", i la participació en activitats voluntàries ha baixat respecte a anys anteriors. Per aquesta mateixa raó, però, no es podien presentar les sessions en horari de classe, ja que no hi havia temps a dedicar a activitats que no fossin estrictament necessaries. Entenent la situació tant de l'alumnat com del professorat, que ha intentat incentivar la participació tant bé com ha pogut, s'ha intentat flexibilitzar al màxim els horaris proposats i donar facilitats per a que l'alumnat participés de les sessions. Malgrat això, la participació ha sigut menys nombrosa del que s'esperava. És per aquesta raó, també, que s'han presentat les dues sessions de manera que poguessin ser resoltes asíncronament. La primera sessió s'ha acabat fent de manera virtual amb 5 alumnes motivades, però la segona no ha estat possible dur-la a terme amb aquest mateix alumnat. És per això que s'ha decidit presentar les activitats a un altre grup de persones amb un perfil semblant a les estudiants de primer de batxillerat: persones que han cursat el batxillerat científic fa alguns anys, i que no han tornat a estudiar matemàtiques des d'aleshores. En aquest cas, s'han pogut presentar ambdues activitats de forma presencial. Es comenta a l'Apartat 2.2.6 com aquest fet ha influït en el resultat de la dinàmica de les activitats.

Les diferents activitats de cada sessió es presenten tant en la seva forma inicial com en l'adaptació que se n'ha hagut de fer per les circumstàncies concretes.

Les dues sessions estan estructurades de manera que són independents una de l'altra. Això permet presentar-ne només una al grup classe, tot i que no és ideal, ja que la segona activitat és on es posa més clarament en manifest el qüestionament dels conceptes coneguts. La primera sessió és molt útil per crear una entrada en matèria gradual. És per això que, les activitats són independents però es complementen, i doncs es recomana presentar ambdues, i en l'ordre proposat.

2.2.4 Primera sessió

Aquesta sessió té com a objectiu apropar l'alumnat al concepte de geometries no euclidianes. S'escull com a geometria introductòria la geometria del Taxi, que reuneix les característiques mencionades a l'Apartat 2.1.1.

Cal remarcar que aquesta primera sessió té com a objectiu final la introducció de l'alumnat a conceptes que apareixeran a la segona sessió de manera més abstracta. És per aquesta raó que la dificultat intenta ser prou continguda. Aquesta decisió també ha estat presa pel públic al que es dirigeix l'activitat: el professorat de l'Institut Jaume Balmes amb qui s'ha mantingut contacte ha recalcat l'interès en quelcom d'entenible, especialment degut a la situació en que es troben els alumnes.

L'activitat és doncs portable a cursos inferiors, de quart o fins i tot tercer d'E.S.O. Per aquesta raó es recomana a la persona docent fer especial incidència en els conceptes que es guien a continuació, posant èmfasi en els descobriments conceptuals més que en el tractament de la geometria en si, ja que per si sola no té un alt interès, especialment al nivell de primer de batxillerat.

ACTIVITAT 1: La geometria del taxi

La primera activitat és introductòria dels elements que usarem a la sessió. Es presenta la funció de distància entre punts a la geometria del taxi. Sent la del taxi una manera de calcular la distància a la que l'alumnat està acostumat inconscientment, no s'haurà de fer especial èmfasi en les propietats que té, ni fer masses exercicis d'apropament al seu ús.

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	5-10 min	5-10 min
Material	Pissarra	Pissarra virtual
Format	Grup classe	Grup classe

Objectius
- Familiaritzar-se amb la mètrica que s'usarà
- Assentar les bases per als conseqüents exercicis
- Esclarir la notació

Descripció de l'activitat
S'explicarà a la pissarra (virtual o física) què és la geometria del taxi. Es recomana usar el símil, des del principi, amb els carrers de l'Eixample de Barcelona per facilitar la

comprensió.
S'esclarirà la notació utilitzada, i es posarà especial èmfasi en el fet que la geometria del taxi amb la que treballem és discreta.
Siguin $P = (P_x, P_y)$ i $Q = (Q_x, Q_y)$ dos punts del pla, recordem que es definia la distància euclidiana com:

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$$

La distància de Manhattan o del taxi, es defineix:

$$d_T(P, Q) = |P_x - Q_x| + |P_y - Q_y|$$

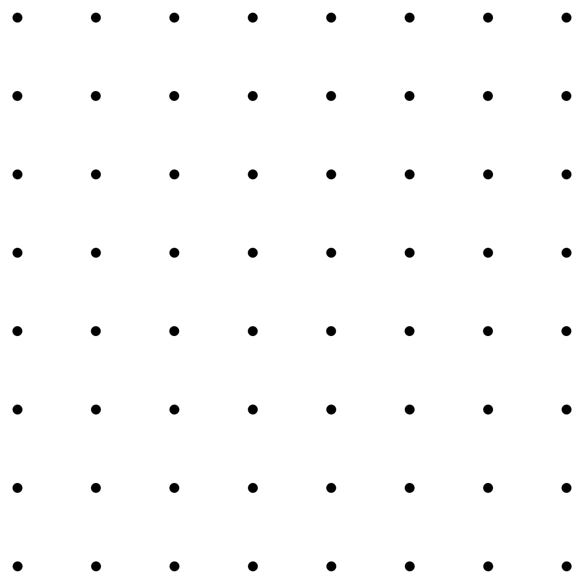


Figura 2.4: Graella de punts per calcular distàncies del Taxi

Es farà algún exemple entre tot el grup classe per recalcar sobretot la no-unicitat dels camins possibles. Així es proposaran dos punts P i Q sobre una graella de punts com la de la Figura 2.4 (es recomana que estiguin a una distància mínima de 3) i es convidarà a l'alumnat a dir en veu alta camins que vegin entre els dos punts. Es compararà, doncs, les distàncies dels diferents camins que hagin sortit, per arribar a la conclusió que no hi ha un únic camí mínim.

ACTIVITAT 2: Exercicis a una ciutat ideal

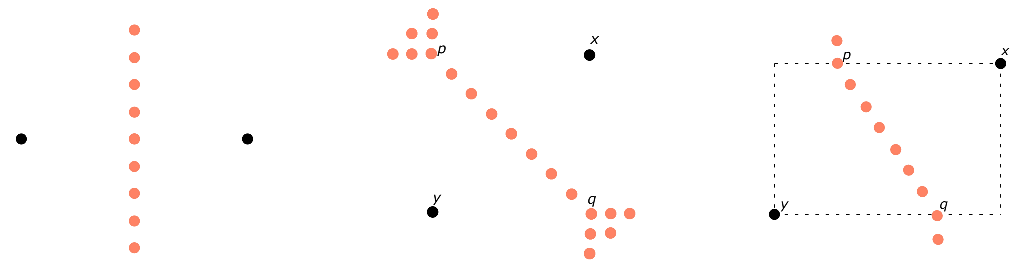
En aquesta activitat es treballaran els conceptes de distància mínima entre punts. Per a fer-ho més entenedor i remarcar-ne la utilitat pràctica, es presenten situacions reals, amb noms de persones que volen optimitzar el temps que triguen en trobar-se.

Objectius
- Comparar la forma que sol tenir un objecte matemàtic conegut (mediatriu) amb la seva forma a la geometria del taxi

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	10-15 min	10-15 min
Material	Pissarra	Pissarra virtual
Format	Grup classe	Grup classe

- Veure la utilitat en situacions de la vida cotidiana de l'alumnat que pot tenir la geometria del taxi

Descripció de l'activitat
Es presenten exericicis (veure la Fitxa de l'alumne a l'Annex) de trobar punts de distància mínima entre dos punts donats. Mitjançant prova i error, l'alumnat és guiat cap a conclusions sobre el concepte de distància mínima entre dos punts, i raonament lògic per poder generalitzar les respostes donades. A la Figura 2.5 es presenten els resultats gràfics que s'haurien de trobar:



(a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3

Figura 2.5: Conjunt de punts equidistants a dos punts donats,, x i y

ACTIVITAT 3: Figures del pla

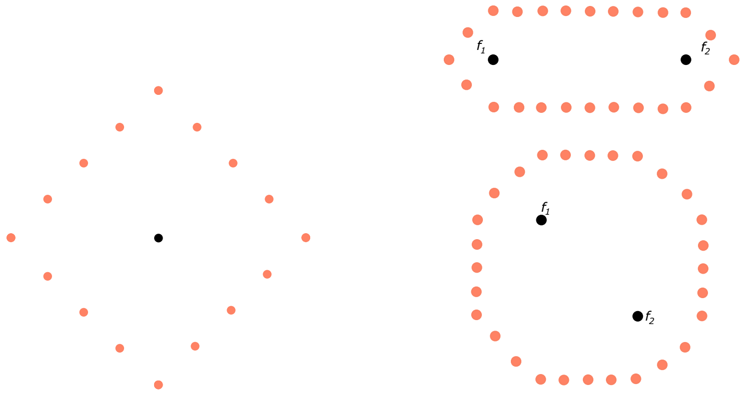
En aquesta activitat es recalca de manera més explícita la diferència entre la definició d'un lloc geomètric (circumferència, el·lipse) i les propietats que se li associen com a intrínsiques.

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	10 min	10 min
Material	Pissarra	Pissarra virtual
Format	Grup classe	Grup classe

Objectius
- Diferenciar la definició d'un lloc geomètric (que és general i independent de la geometria utulitzada) i les propietats que depenen de la geometria en que es treballa
- Aprendre a reconèixer successions simples

Descripció de l'activitat
Utilitzant la Fitxa de l'alumne (Annex), la persona docent farà preguntes a l'alumnat

per guiar la direcció de les conclusions, però el seu paper serà molt poc intrusiu. Els exercicis poden ser fets de manera individual, però es recomana comentar-los en grup classe, sobretot potenciant un ambient d'intercanvi del que cadascú ha pogur observar. Es veuran les formes que prenen la circumferència i l'el·lipse si s'utilitza la geometria del Taxi (Figura 2.6) i es potenciarà que l'alumnat aprengui a reconèixer patrons de successions utilitzant el nombre de punts que es necessiten per a dibuixar les circumferències i les el·lipses.



(a) Circumferència (b) El·lipse

Figura 2.6: Llocs geomètrics a la geometria del Taxi

ACTIVITAT 4: Exercicis a l'Eixample de Barcelona

Aquesta última activitat serveix per reunir el que s'ha anat veient durant la sessió, i aplicar-ho a un exemple concret, on l'alumnat veurà l'aplicació dels objectes que s'han definit al llarg de la sessió. Idealment els exercicis presentats es resoldran utilitzant les circumferències, el·lipses i punts intermitjos que s'han estudiat anteriorment.

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	15 min	5-10 min
Material	Fitxa per a l'alumnat	Fitxa per a l'alumnat
Format	Grup classe	Individual
Connexions interdisciplinars	Història de Barcelona	-

Objectius
- Visualitzar una aplicació clara del que s'ha estudiat durant la sessió
- Ús dels objectes descrits durant la sessió

Descripció de l'activitat
Després d'un exercici introductori per remarcar que la distància euclidiana entre dos punts és menor que la del taxi quan els dos punts no estan alineats hortizontalment ni vertical, es proposa un mapa de Barcelona extret de [18] sobre el que resoldre el problema següent:

> Al districte de l'Eixample, l'Albert i l'Adrià volen mudar-se a un lloc que tingui una escola (E) a una distància màxima de 5 costats d'illa. A més, com que l'Albert vol anar sovint a la piscina (P), i l'Adrià al gimnàs (G), han arribat al compromís de que el pis que busquin no estigui a més de 6 costats d'illa de cap d'aquests dos espais. L'últim requeriment que tenen és que la distància que han de fer per anar a casa de la seva millor amiga, la Berta (B), sigui la mínima possible. A on haurien de viure per a que es complissin totes aquestes condicions? Hi ha més d'una possibilitat?

La resolució, idealment, es farà de la manera que es presenta a la Figura 2.7. S'hi marquen en verd els punts que compleixen estar a màxim distància 5 d'E. Ssi estan a distància exactament 5, el punt té l'interior pintat. Els punts que estan a distància menor que 5 tenen només la frontera del punt pintada. Anàlogament en taronja per l'el·lipse delimitada per P i G. Aleshores es compararan tots els punts que siguin verds i taronges, per ser els que compleixen les dues condicions.

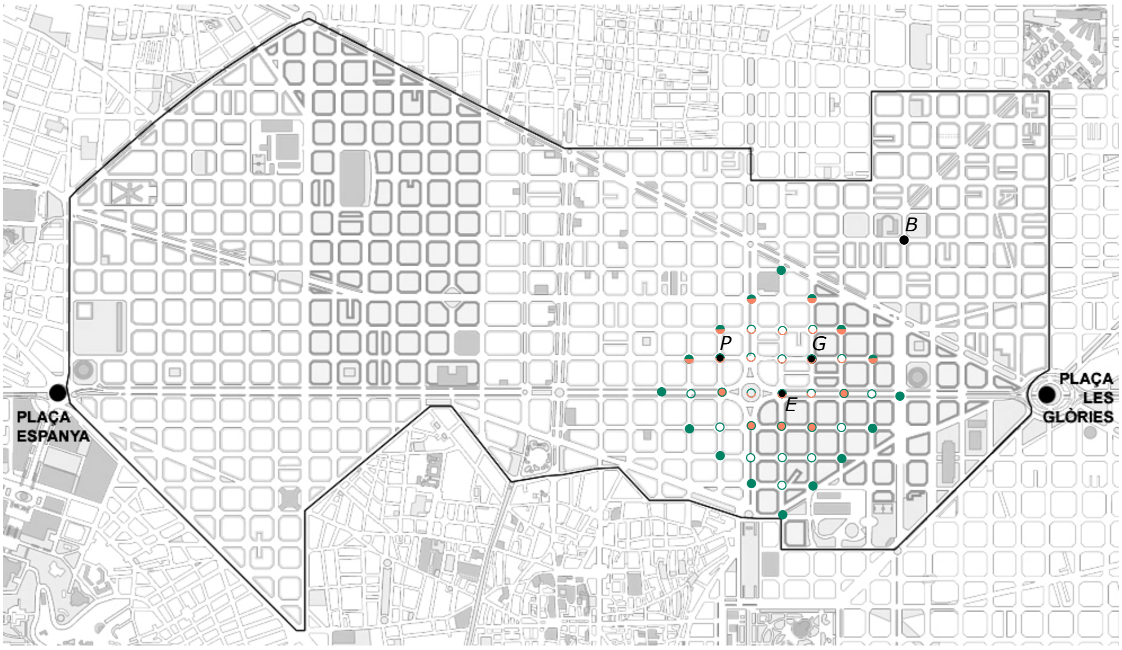


Figura 2.7: Resolució del problema presentat

2.2.5 Segona sessió

La sessió té com a interès últim el qüestionament del concepte de geometria, i, en general, de conceptes assimilats com a evidents.

Es posa èmfasi en trobar contraexemples de propietats assimilades com a evidents per l'alumnat (p.ex. "els angles d'un triangle sumen 180º"o "dues rectes paral·leles sempre tenen la mateixa distància entre tots els seus punts").

L'ordre de les activitats està pensat per entrar de manera gradual en matèria. Sent els conceptes tractats quelcom de nou per a l'alumnat, es prioritza la bona comprensió, i per arribar-hi hi ha un intent de crear situacions en que l'alumnat senti que genera el coneixement, i que arriba a conclusions importants. Això es fa patent en el fet de presentar el recorregut històric dels coneixements estudiats i aconseguint que l'alumnat trobi el contraexemple buscat durant segles.

ACTIVITAT 1: Parlem de geometria

Aquesta activitat inicial està pensada per crear un primer vincle amb l'alumnat, a través de preguntes "fàcils", per fomentar la participació. Així, en grups petits es genera un espai segur i s'agafa confiança, responent a preguntes a les que tothom pot donar una resposta. Les definicions proposades estan pensades per ser rellegides al final de la sessió i comprovar si hi ha canvis en la concepció de les nocions.

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	15 min	10-15 min
Material	Fitxa per a l'alumnat	Fitxa per a l'alumnat
Format	Grups petits	Individual

Objectius
- generar participació entre l'alumnat
- repassar conceptes bàsics que es tractaran durant la sessió
- posar en qüestió la importància de la definició formal
- (per al professorat:) comprovar si és cert que l'alumnat equipara la geometria a la geometria euclidiana

Descripció de l'activitat
IDEALMENT: En grups de tres o quatre alumnes es responen les preguntes adjuntes a la Fitxa per a l'alumnat. S'ha d'arribar a consens i escriure les respostes, a entregar al final de la classe. En funció del temps disponible també es pot tractar la pregunta opcional, aconsellada per segon de batxillerat, on a l'assignatura de filosofia es tracta Plató.
ADAPTACIÓ: Individualment es responen les preguntes de la Fitxa per a l'alumnat.

ACTIVITAT 2: Apropament històric a la geometria hiperbòlica

L'activitat proposada és opcional, però permet apropar l'alumnat als conceptes tractats durant la Sessió de manera orgànica. L'interès en concret d'usar explicacions històriques és de veure com el pensament matemàtic evoluciona, i com segueix uns patrons que l'alumnat pot interpretar com a lògics i sensats. També ens serveix per a que es pugui observar com alguns raonaments triguen segles en esdevenir conclusions, com aquestes poden ser considerades certes i ser rebatudes posteriorment, i com, al món del coneixement, tot i no treballar explícitament "en grup", les nocions necessàries per a model·lar idees solen estar assentades en l'anàlisi d'idees prèvies, ja sigui ampliant-les o negant-les.

Objectius
- Contextualització de l'aparició de les idees a tractar a continuació
- Apropament a conceptes poc tangibles des de coneixements coneguts per l'alumnat (per evitar un rebuig inicial a quelcom de massa abstracte)
- Entrada gradual en matèria, i de manera amena

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	15 min	10 min
Material	Fitxa per a l'alumnat	Fitxa per a l'alumnat
Format	Grup classe (discussió posterior a la lectura)	Individual
Connexions interdisciplinars	Història	Història

Descripció de l'activitat
Es llegeix el text adjunt a la Fitxa per a l'alumnat. En el cas de poder treballar en aula, es llegeix i es comenta en grup classe, sobretot fent incidència en entendre el cinquè postulat, si cal es pot resoldre l'exercici d'anomenar les rectes en grups.

ACTIVITAT 3: Els models hiperbòlics

L'activitat que es proposa és la més exigent de les quatre d'aquesta sessió. És aquí on l'alumnat tindrà l'oportunitat de treballar amb models de geometria hiperbòlica. Les activitats proposades, però, són de dificultat d'acció baixa. Els problemes es poden trobar sobretot en entendre el model del Semipla de Poincaré, més que enrecordar correctament les definicions dels objectes geomètrics utilitzats. És justament aquí on rau l'interès de l'activitat: aplicant conceptes que considera fàcils a un model que no coneix, l'alumnat podrà entendre millor el model i fer-se'l seu, en contraposició amb l'estudi més teòric d'aquest. S'introdueix també superficialment el model del Disc de Poincaré, de manera més anecdòtica, tot i que si hi hagués temps es podria plantejar una activitat semblant adaptada al Disc. Així, però, s'introdueix l'artista M.C. Escher, i obrint la porta a poder fer una activitat en col·laboració amb el Departament de Visual i Plàstica.

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	30 min	25 min
Material	Pissarra petita (o en defecte fulla de paper gran) per cada grup , regle, compàs, transportador d'angles	Fitxa per a l'alumnat, regle, compàs, transportador d'angles (opcional)
Format	Grups petits	Individual
Connexions interdisciplinars	Educació visual i plàstica	Educació visual i plàstica

Objectius
- Aprendre com funcionen de manera superficial dos models hiperbòlics
- Entendre que propietats que es compleixen a la geometria euclidiana no tenen perquè complir-se a la hiperbòlica
- Repassar conceptes bàsics de geometria
- Experimentar i arribar a conclusions sense que aquestes siguin presentades de manera directa
- Generar interès en la relació que pot existir entre matemàtiques i art

Descripció de l'activitat
IDEALMENT: Es reparteix una pissara petita o un full gros per grup de 3 o 4 alumnes. En aquest els alumnes resoldran exercicis proposats a la Fitxa per a l'alumnat(), per familiaritzar-se amb els elements de la geometria hiperbòlica. Així, s'observarà com funciona el concepte de recta secant al model presentat, s'estudiarà la suma d'angles d'un triangle, i finalment es trobarà un contraexemple del cinquè postulat d'Euclides.
En la versió del full, aquest es pot guardar i penjar a l'aula. En el cas de la pissarra, l'alumnat podrà fer fotografies dels diferents dibuixos i s'enviaran a la persona docent, així la pissarra es podrà anant reutilitzant per a cadascun dels exercicis. Es projecta la imatge escollida d'Escher a la pissarra i es comenta en grup classe què es creu que serien les rectes en aquest cas. Es marquen sobre la projecció de la pissarra.
ADAPTACIÓ: l'alumnat resoldrà els exercicis sobre paper, des de casa si cal.

ACTIVITAT 4: Repàs i conclusions

Aquesta última activitat serveix per reunir el que s'ha anat veient durant la sessió, posar-ho en comú, i arribar a conclusions.

És un moment important, i que servirà per a poder millorar la sessió en un futur, ja que és on es farà més patent si aquesta ha complert l'objectiu esperat.

	Idealment	**Adaptació**
Temporització	15 min	5-10 min
Material	Fitxa per a l'alumnat	Fitxa per a l'alumnat
Format	Grup classe	Individual

Objectius
- Posada de manifest explícit els dubtes apareguts durant la sessió
- Aconseguir que l'alumnat surti de la sessió amb concepcions diferents que quan hi ha entrat
- Fer patent aquest canvi per motivar l'alumnat
- (per a la persona docent:) entendre on hi ha hagut problemes de comprensió o de la sessió

Descripció de l'activitat
IDEALMENT: Per grups petits es repassen les preguntes de l'ACTIVITAT 2 i es veu si alguna d'elles té ara una resposta diferent per a l'alumnat. Posteriorment, en grup classe es comenta què s'ha notat que ha canviat, i es propicia un debat. S'aconsella posar èmfasi en un apropament generalista: a través de veure com algunes propietats com la de paral·lelisme funcionen diferent en diferents models geomètrics, debatre sobre perquè això els sorprèn, i què n'extreuen.

2.2.6 Anàlisi posterior de la proposta

Un cop presentades les sessions, s'analitzen els resultats. A nivell general, s'ha complert el que s'esperava: la primera activitat ha sigut poguda portar a terme sense complicacions, i la segona ha portat més problemes de comprensió. Es comenten per separat, i després se'n comenta el resultat general.

La primera sessió ha funcionat de manera fluïda. En ambdós grups on s'ha presentat, no hi ha hagut problemes de comprensió, i les activitats s'han realitzat dins els marges que s'havien previst. L'única activitat que ha portat més dificultats ha sigut la última, la que requeria més autonomia de part de les alumnes. Els resultats, en efecte, no han sigut els mateixos per tot l'alumnat, i només una de les alumnes ha utilitzat explicitament les eines presentades amb anterioritat per a resoldre el problema. Per a poder millorar aquest fet es proposen dues opcions: o bé fer l'exercici de manera més guiada (i en aquest cas podent-ne afegir un altre a fer individualment) o bé proposar exemples concrets quan s'introdueixen les còniques en les primeres activitats, per a que es faci patent que són eines que poden ser útils per resoldre els problemes proposats.
Amb el següent grup, s'ha remarcat oralment, mentres es presentaven les diferents còniques, que aquestes podien servir per resoldre problemes, tot i no posar-ne exemples. D'aquest segon grup, una part més gran ha resolt el problema amb les eines, i s'ha ideat conjuntament nous problemes, afegint condicions al problema: s'ha inclòs un nou punt que també representès una escola, i s'ha discutit sobre les posicions dels punts per tal que la diagonal que s'observa siguès rellevant pel problema tractat. Aquesta discussió ha sigut molt enriquidora, i ha fet de l'activitat quelcom d'encara més participatiu. El fet de treballar en grup, sent a una mateixa habitació, ha permès aquest tipus de discussions, que en canvi no s'han generat quan l'alumnat ha hagut de treballar online.

El que sí s'ha observat en ambdós grups, és que per part de l'alumnat hi ha hagut un interès alt en els patrons que es generaven entre nombre de punts i radi d'una circumferència, per exemple. Així, el primer dels processos esmenats a l'Apartat 2.1.3 es considera assolit.

Tot i que l'alumnat, en la resposta a l'enquesta hagi remarcat que el nivell d'autonomia era l'adequat, és esmenable el fet que l'activitat que se'ls ha demanat realitzar sense ser guiades ha sigut la que ha tingut resultats menys satisfactoris, al primer grup. Tot i haver gaudit de l'activitat i haver-la trobat interessant, l'alumnat ha cregut que el que l'haguès millorat hagués sigut la presencial. Veient els resultats que ha tingut en especial l'última activitat, és un comentari que es considera molt rellevant, i que en condicions que ho permetin, s'intentarà prioirtzar en un futur.

La segona sessió ha estat portada a un dels dos grups d'alumnes. S'ha fet de manera presencial, permetent un seguiment molt més proper dels problemes de comprensió que es podien observar. Ha sigut així que, podent dedicar temps a entendre bé cada un dels exercici pas per pas, s'ha pogut portar a terme de manera profitosa. S'ha observat, però, que sense un guiatge fort de part de la persona docent, la sessió hagués pogut comportar problemes de comprensió. De fet, s'ha enviat per a fer de manera asíncrona al grup de batxillerat però no ha sigut realitzada, pel fet dels alumnes estar molt enfeinats, però també per la dificultat que comportava fer-la individualment. En un principi es va enviar la sessió sobre geometria hiperbòlica com a primera sessió, però s'ha arribat a la conclusió que ha d'anar en segon lloc, pel fet que la sessió sobre la geomteria del taxi s'ha demostrat més comprensible, i doncs una bona manera d'entrar en matèria.
El grup que sí ha realitzat la sessió n'ha sortit prou més motivat que el que només ha fet la primera, havent resolt exercicis que li han generat un esforç de comprensió però també satisfacció en ser finalitzats.
L'alumnat ha proposat com a millora veure alguna de les aplicacions que han tingut els

models mencionats, quines repercussions han generat. Es tindrà en compte, ja que en branques de física tant la geometria hiperbòlica com en general la mètrica de Minkowski han tingut fortes repercussions.

En global es conclou que és important fer les dues sessions, en ordre. La primera servirà per fer un primer apropament als conceptes que es tractaran, i és interessant, en concloure la segona, fer una posada en comú del que s'ha tractat en cada sessió i en els paral·lelismes que hi ha. Es recomana altament una discussió posterior on l'alumnat digui la seva, sobretot que es qüestioni què és el que creu haver après.
Una de les alumnes, per exemple, responent a si havia après alguna cosa nova, després de fer la primera sessió, ha respost:

> No, és a dir, tot era bastant logic però mai m'havia plantejat aquesta manera de veure-ho.

Justament aquesta sembla la millor resposta a rebre, ja que denota una visió global del que s'ha tractat: no hi ha una resposta centrada concretament en com funciona la geometria del taxi en una ciutat, per exemple, sinó una concepció més generalista de què s'ha fet.
En el cas de l'alumnat que ha fet ambdues activitats, les respostes han sigut més en aquesta línia, sobre l'axiomàtica, fins i tot reflexions més filosòfiques. En canvi, quan la primera sessió es fa sola, està més descontextualitzada i sembla perdre part de l'objectiu. Cada una d'aquestes activitats, per si sola, sembla voler tenir un objectiu pràctic, de resolució d'exercicis concrets. Posades juntes, però, és sobretot quan es poden fer preguntes de caràcter més general, que és el perquè s'ha decidit aquesta Proposta Didàctica.

Conclusions

En aquest treball s'han presentat a conciència dos models de geometries no euclidianes. Per a fer-ho, s'ha introduït la història de la creació de les geometries euclidianes, i en contraposició aquelles que no ho són. Han sigut presentats, a continuació, una sèrie de resultats per ajudar a entendre els models mencionats, en diverses vessants, permetent així una comprensió profunda del funcionament dels elements tractats a cada un dels models. Per a aquest objectiu, s'han estudiat en detall les isometries al plà euclidià, al semiplà de Poincaré i al plà euclidià dotat de la mètrica del taxi. S'ha incidit en les raons per les quals les dues geometries presentades no són euclidianes, sent aquest el fil conductor de tot el treball, que uneix la part matemàtica i la didàctica.
En segona instància, s'ha fet recerca sobre criteris didàctics que semblaven adequats per la idea que es volia portar a l'aula i s'han generat una sèrie d'activitats per a poder-ho fer.

A nivell matemàtic, es pot afirmar que l'objectiu principal ha sigut assolit: s'ha generat un document on s'han recopilat eines que permeten entendre *millor* la geometria no euclidiana. Aquesta és molt vasta, justament pel fet de ser un sistema axiomàtic on la variació d'algun axioma o propietat pot generar noves concepcions. No s'ha estudiat, per exemple, la geometria el·líptica, molt rellevant també. Atès que la proposta didàctica es dirigeix a alumnat de primer de batxillerat, s'ha prioritzat aprofundir en un únic model de geometria hiperbòlica com és el semiplà de Poincaré, per donar-ne una comprensió més complerta. Aquest ha estat escollit respecte d'altres models de geometria hiperbòlica, o respecte a models de geometria el·líptica, per exemple, pel fet de tenir una representació clara per a l'alumnat. Tot i que pugui generar complicacions de concepció, per ser quelcom de molt diferent, el tractament que s'hi pot fer de les rectes i els punts és fàcilment reproduible pels alumnes. S'ha considerat, així, que a través de la pràctica era una bona manera d'arribar a les conclusions conceptuals que es contemplaven.
Afirmem doncs que el primer dels objectius que ens haviem proposat s'ha assolit: el meu coneixement sobre la geometria no euclidiana ha certament millorat, ja que aquest treball m'ha servit per poder tractar un tema en la seva globalitat. La geometria hiperbòlica és quelcom de poc present al grau de matemàtiques, hi apareix però no hi ha una posada en comú de tot el què l'envolta. L'interès d'aquest treball és el d'agrupar conceptes rellevants per entendre un dels seus model en la seva totalitat: el perquè de la seva existència i algunes propietats que s'hi compleixen. També m'ha permès de conèixer la geometria del taxi, que en un primer moment m'ha semblat menys interessant, però que ha resultat tenir propietats molt engrescadores. El fet d'intentar reunir conceptes de diferents branques, posant èmfasi en l'estudi històric fa que s'aconsegueixi una visió general del funcionament d'aquestes geometries.

El segon objectiu també s'ha complert, havent portat a dos grups una proposta didàctica preparada per mi. En aquesta, la introducció de la geometria del taxi no es considerava en un primer moment, però a través de la recerca de referents que treballessin amb ge-

ometries no euclidianes, s'ha pogut observar que era una molt bona eina per facilitar la introducció dels conceptes de no-euclidianitat. S'ha decidit, doncs, estudiar-ne la creació i, com anteriorment per la geometria hiperbòlica, les isometries i les raons per les que podem considerar que no és una geometria euclidiana.
Per tal de complir el segon objectiu, es tenia clar que la proposta didàctica havia de ser alhora simple i rigorosa, intuïtiva sense deixar de banda una formulació matemàticament correcta dels conceptes subjacents. El repte d'idear unes activitats en aquesta línia ha sigut molt interessant, ja que la recerca d'una formulació clara per l'alumnat m'ha portat a reflexionar profundament sobre els aspectes essencials de la geometria no euclidiana. Llegint textos que relacionaven els conceptes amb la filosofia, m'ha semblat un bon camí a encetar en futures activitats. A nivell didàctic també es va fer una recerca exhaustiva d'eines per trobar elements atractius i engrescadors per les estudiants, intentant però seguir unes pautes clares ideades per professionals que han recercat profundament en la didàctica de les matemàtiques, una branca que m'agradaria molt entomar.

Aquest document es considera que aconsegueix ser una exposició de material que proposa activitats complementàries al currículum de batxillerat. Efectivament, s'hi tracten models que en general no es troben a l'aula d'institut, però es fa de manera que hi hagi elements que s'hi tracten que siguin del currículum, i sobretot aquest s'utilitza per guiar les vessants i els processos utilitzats.
S'ha cregut important redactar el treball en català per tal de generar contingut específic que sigui aplicable en concret als batxillerats de Catalunya.

Veient els resultats de les activitats, sobretot de la segona sessió, podem confirmar que s'ha pogut transmetre la idea que s'havia plantejat, i que l'alumnat ha generat una visió més crítica de les conexions matemàtiques que té. S'ha generat un dubte a l'alumnat i juntament s'ha resolt, creant un ambient de qüestionament i interès. Una de les alumnes, després de fer la segona sessió, ha comentat:

> (...) les matemàtiques a banda de totes les fòrmules que a vegades requereixen, són molt lògiques

Aquest comentari, fa referència al fet d'existir una axiomàtica clara, que l'alumna no coneixia. Amb aquesta activitat, ha entès que aquesta estructura axiomàtica dóna sentit al model que ella està acostumada a utilitzar: l'euclidià. En general, la introducció de l'axiomàtica ha despertat molt d'interès, juntament amb la cerca de patrons en el nombre de punts necessàris per generar objectes coneguts, a la geometria del taxi.

Fer aquest treball m'ha servit per escollir un tema i conèixer-lo millor del que ho feia anteriorment, i buscar una manera de portar-lo a l'aula. Ha esta molt satisfactòri, en especial el fet de veure les reaccions de l'alumnat, i comprovar que responien de manera semblant a la que havia ideat. Aquesta és una proposta didàctica que a mi m'hagués agradat rebre quan era al batxillerat, i m'ha fet feliç poder haver-la portat a un alumnat motivat i receptiu. Així, puc afirmar que l'objectiu d'apropar-me al món de la docència s'ha complert, i que m'ha generat interès per seguir-ho fent.
També recalcar que considero important que la docència de les matemàtiques sigui feta per matemàtics. Sembla haver-hi una manca de professionals d'aquest camp a la docència, i haver d'utilitzar eines d'àlgebra abstracta, geometria diferencial i geometria axiomàtica formal, per a poder presentar dues sessions, m'ha fet adonar-me'n de com de rellevant és formar-se sobre el que es voldrà presentar, i de les facilitats que per a això comporta haver estudiat el grau de matemàtiques.

Bibliografia

[1] Klein F. "Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forsuchungen". A: (1872). URL: https://math.ucr.edu/home/baez/erlangen/erlangen_tex.pdf. (consultada la versió traduïda a l'anglès pel Dr. M. W. Haskell: maig de 2021).

[2] Escher M.C. *Cercle límit IV: Paradís i Infern.* 1960.

[3] Buck C. "What should high school geometry be?" A: *The Mathematics Teacher* 61.5 (1968), pàg. 466 - 471. DOI: http://www.jstor.org/stable/27957878.

[4] Leinwald S. "Four crucial insights for first-year teachers of mathematics". A: *The beggining teacher of mathematics: High School FALTA* 61.5 (1968), pàg. 466 - 471.

[5] Schattschneider D.J. "The Taxicab Group". A: *The American Mathematical Monthly* 91.7 (1984), pàg. 423 - 428. DOI: www.jstor.org/stable/2322995. (consultat: maig de 2021).

[6] Krause E.F. *Taxicab geometry. An adventure in Non-Euclidean Geometry.* Dover Publications, Inc., 1986.

[7] Parker R.S. Millman; G.D. *Geometry: a Metric Approach with Models.* Springer-Verlag, 1991. ISBN: 0-387-97412-1.

[8] Develay M. "De l'apprentissage à l'enseignement. Pour une épistémologie scolaire". A: Paris: Collection pédagogies. ESF éditeur, 1992.

[9] Greenberg M.J. *Euclidean and non-Euclidean geomtries: development and history.* W.H. Freeman i Company, 1993. ISBN: 0-7167-2446-4.

[10] Dray K. Thompson; T. *Taxicab Angles and Trigonometry.* 1999. URL: https://arxiv.org/pdf/1101.2917.pdf. (consultat: maig de 2021).

[11] *Currículum batxillerat Decret 142/2008.* 2008. URL: http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0028/f2989dc7-8a2c-4b2f-86e8-4d5929f43fd7/PUBL-curriculum%5C_batxillerat.pdf. (consultat: maig de 2021).

[12] *Currículum batxillerat Decret 142/2008 DOGC núm. 5183.* 2008. URL: http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0082/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf. (consultat: maig de 2021).

[13] Thompson A.C. *Minkowski geometry.* Cambridge University Press, 2018. ISBN: 0-521-40471-X.

[14] Parrochia D. *Mathematics and Philosophy.* ISTE Ltd i John Wiley & Sons, Inc, 2018. ISBN: 978-1-78630-209-0.

[15] Henderson L.D. *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art (Leonardo).* MIT Press, 2018. ISBN: 978-0262536554.

[16] Abardia J. “Taller de geometria hiperbòlica”. A: (). URL: https://mat.uab.cat/~juditab/taller.pdf. (consultat: maig de 2021).

[17] Snyder K. “Isometries of the hyperbolic plane”. A: (). DOI: http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Snyder.pdf. (consultat: maig de 2021).

[18] *Mapa mut de la ciutat de Barcelona.* URL: https://examentaxi.com/mapas-mudos-en-la-credencial-del-taxi.

Annexos

Primera sessió: geometria del taxi

ACTIVITAT 1: La geometria del taxi

Algunes de les definicions matemàtiques a les que estem acostumats no sempre són les més eficients o útils a la vida real. Per exemple, si pensem en el camí de distància mínima entre dos punts, ens imaginem una linia recta que els uneix, però podria ser que en la realitat, un riu ens atravesés el camí, i la manera més ràpida per arribar d'un punt a un altre fos fent una volta diferent. En aquesta activitat tractarem un tipus de geometria que és especialment útil per estudiar distàncies a ciutats. Enlloc de pensar que podem anar d'un punt a un altre directament, haurem d'imaginar-nos que ens movem en una graella de punts discrets. Així, veient la ciutat des de dalt, enlloc de poder desplaçar-nos com un ocell ho faria, de qualsevol punt a qualsevol altre, haurem de fer cas del fet que existeixen les illes d'edificis, i que no les podem atravessar. Així, ens moure'm com un cotxe ho faria pels carrers de l'Eixample.
Els punts i les línies són les mateixes que a la geometria euclidiana (la que usem habitualment) però canvia la definició de distància: Siguin $P = (P_x, P_y)$ i $Q = (Q_x, Q_y)$ dos punts del pla, recordem que es definia la distància euclidiana com:

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$$

La distància de Manhattan o del taxi, es defineix:

$$d_T(P, Q) = |P_x - Q_x| + |P_y - Q_y|$$

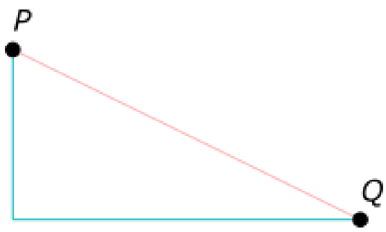


Figura 2.8: Distància entre dos punts (euclidiana rosa, taxi blava)

És important fixar-se també en que la distància del taxi, la definim de manera discreta, és a dir, només treballarem sobre punts amb coordenades enteres.

Fixa't que no hi ha un únic camí de distància mínima per la geometria del taxi entre dos punts P i Q, en canvi a la geometria euclidiana sí n'hi ha només un.

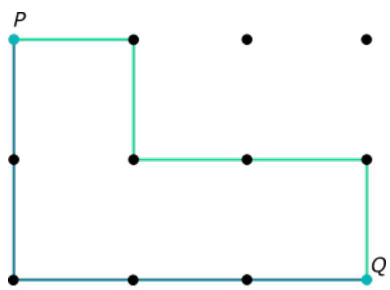


Figura 2.9: Diversos camins de distància mínima entre dos punts P i Q

ACTIVITAT 2: exercicis a una ciutat ideal

Mediatriu

Per cada un dels quatre esquemes següents, respon a les preguntes:

· Si l'Albert (viu al punt A) i la Berta (viu al punt B) es volen trobar a mig camí, i caminar el mínim posssible, on s'hauran de trobar? Marca-ho a la graella.

· Si volen caminar cada un exactament 2 illes abans de trobar-se, on s'hauran de trobar? I si en volen caminar 3?

· Quina relació veus entre els punts marcats?
Primer cas:
Segon cas:
Tercer cas:
Quart cas:

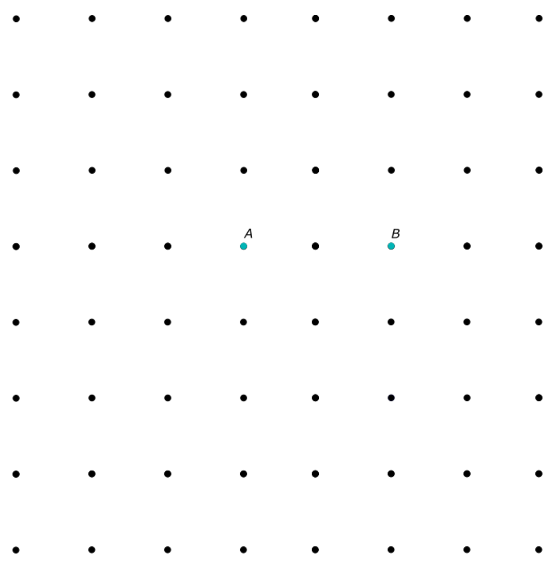


Figura 2.10: Primer cas

Figura 2.11: Segon cas

Figura 2.12: Tercer cas

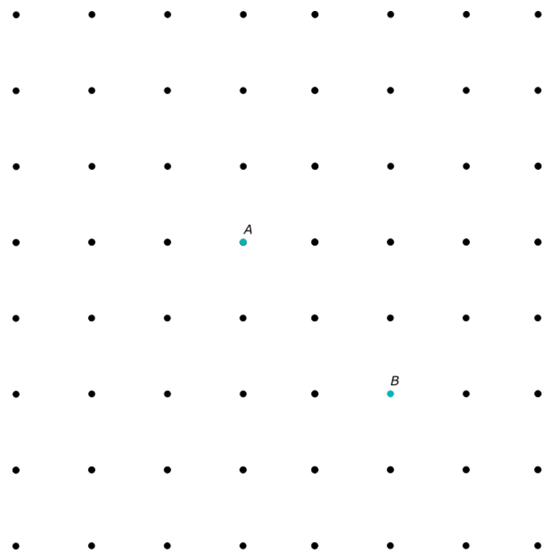
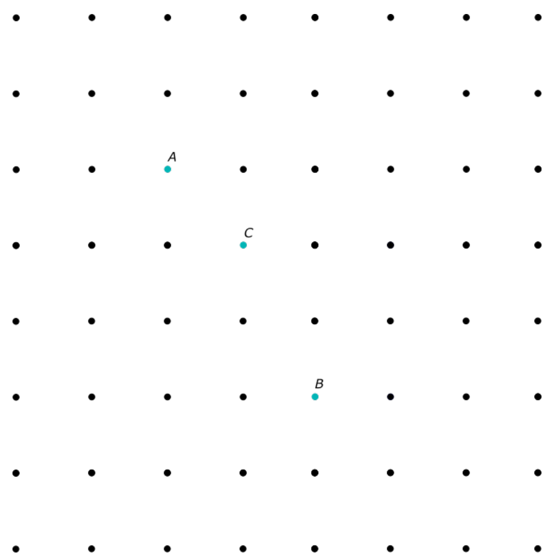


Figura 2.13: Quart cas

- Compara el concepte de mediatriu a la geometria euclidiana i a la del taxista. Quan és en abdós casos una recta? Quan no?

Mínima distància entre tres punts

- Si l'Albert (viu al punt A), la Berta (viu al punt B) i la Carme (viu al punt C) es volen trobar en el punt més òptim per als tres, és a dir, on la distància que recorren en total sigui la mínima
  Pista:Fixa't en qui està al mig horitzontalment i qui verticalment. Pots fer varies proves per veure si se't va augmentant o disminuïnt la distància.



- Torna a fer l'exercici anterior per els nous punts

· Explica raonadament com esculls, sense calcular cada una de les distàncies, el punt on la distància dels tres es minimitza, és a dir, el punt P tal que la suma $d_T(A,P)+d_T(B,P)+d_T(C,P)$ és mínima.

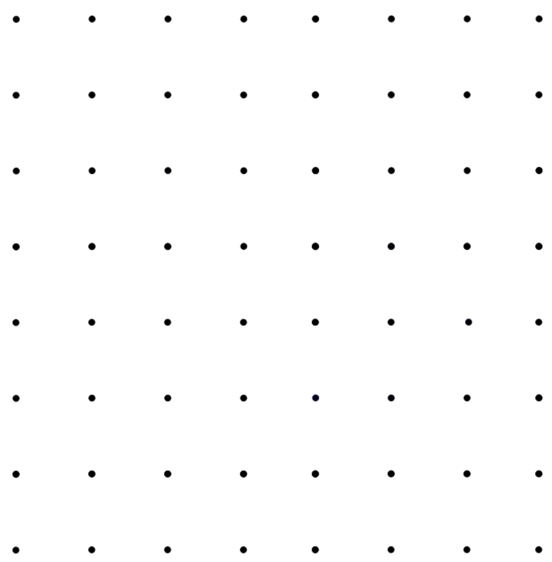
ACTIVITAT 3: figures del pla

Circumferència

· Com definiries una circumferència com a lloc geomètric?
<u>Pista:</u> Què compleixen els punts de la circumferència respecte al centre?

· A la geometria del taxista, donat un punt, quants altres punts estan a distància d_T 1 d'aquest punt? I a la geometria euclidiana?
<u>Pista:</u> Recorda que hem definit la geometria del taxi com a discreta, la euclidiana, en canvi és continua.

· Seguint la definició que has donat de circumferència, com creus que seria una circumferència de radi 2 a la geometria del taxista?



· Quants punts tindrà la circumferència de radi 2? I la de radi 3?

· Quants punts tindrà la circumferència de radi n? Perquè?
<u>Pista:</u> pensa en algún cas més (4, 5, 6...) i mira si veus el patró per trobar el nombre de punts necessaris per una circumferència arbitrariament gran, de radi n

El·lipse

· Com definiries una el·lipse com a lloc geomètric?

· Dibuixa les el·lipses a la geometria del taxi, donats els focus, i les distàncies als focus

Figura 2.14: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 4$

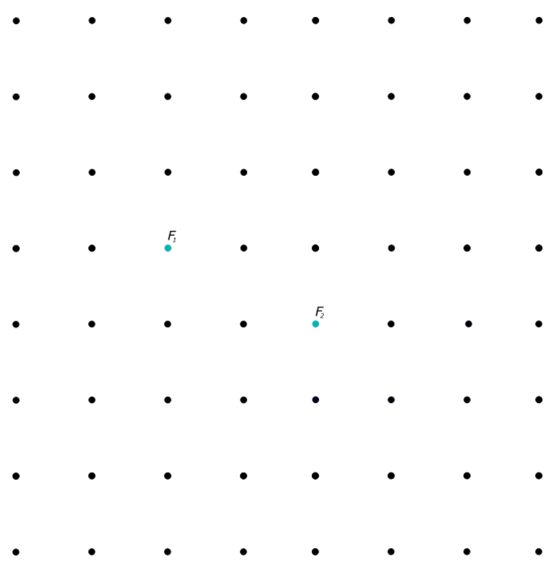


Figura 2.15: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 5$

Figura 2.16: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 6$

· Quants punts es necessiten en cada cas?

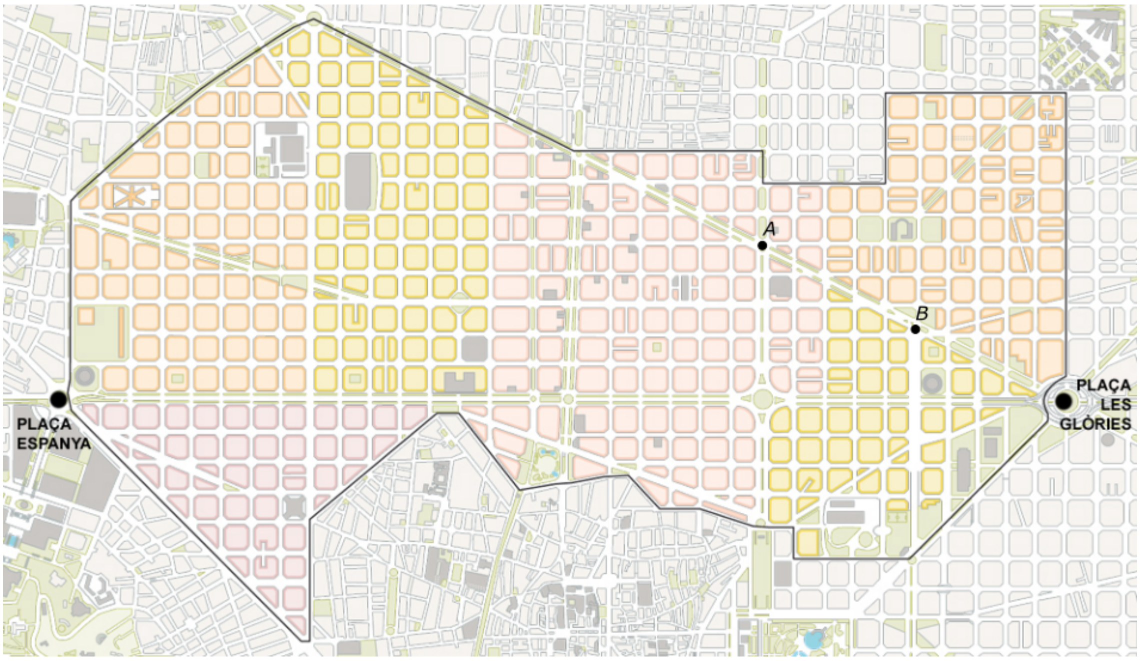
· Quants punts necessitaries per dibuixar una el·lipse on $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 12$?

· A la tercera el·lipse que has dibuixat, podrien haver sigut a algún altre lloc els focus? Si és que sí, marca'ls

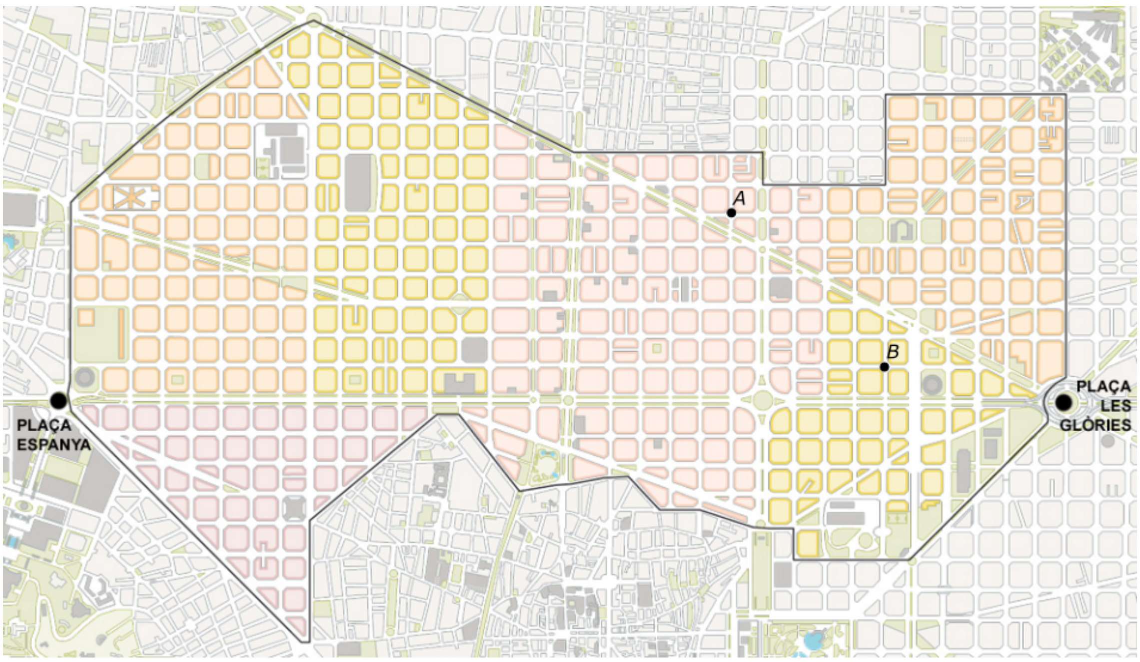
ACTIVITAT 4: exercicis a l'Eixample de Barcelona

Treballem sobre el districte de l'Eixample, que té una distribució ideal per a utilitzar-hi la distància del taxi; l'únic element que distorsiona el treball són els carrers diagonals.

· Quina és $d_E(A,B)$ i $d_T(A,B)$? Per tant per moure't per la diagonal, quina funció de distància et convindrà usar?

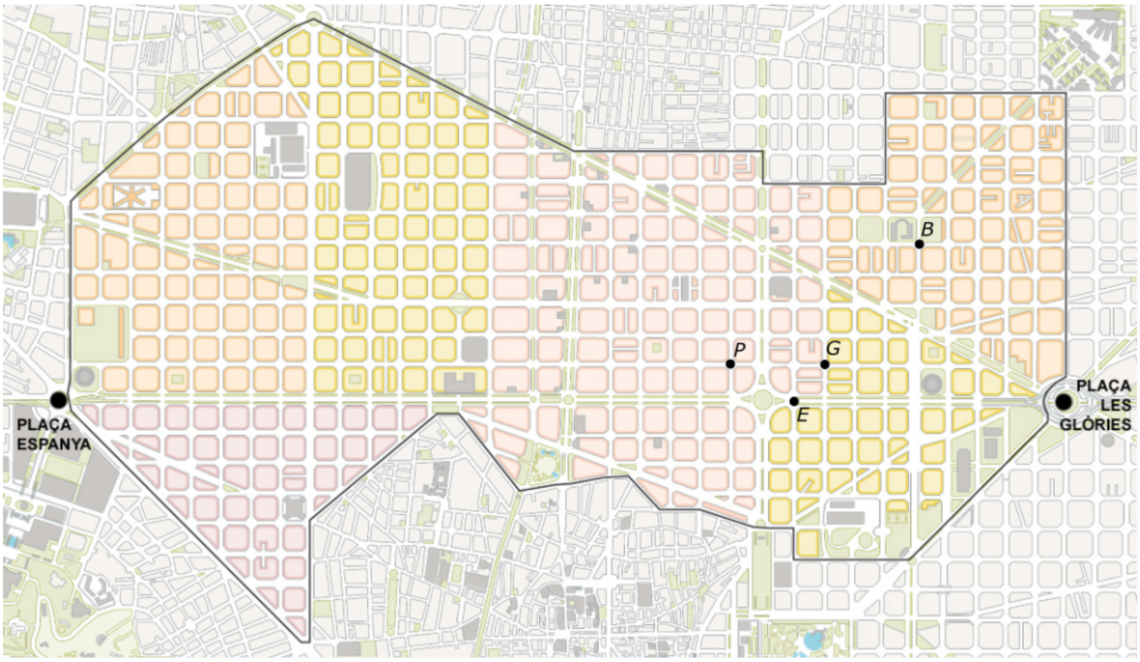


· Per anar del punt A al punt B, quin camí et convindrà fer? És únic?
<u>Pista:</u> Pots usar diferents funcions de distància per diferents parts del camí.



- Escriu la suma de distàncies anteriors usant $d_E(P,Q)$ i $d_T(P,Q)$ per punts P i Q que escullis.

Resol el problema següent: Al districte de l'Eixample, l'Albert i l'Adrià volen mudar-se a un lloc que tingui una escola (E) a una distància màxima de 5 costats d'illa. A més, com que l'Albert vol anar sovint a la piscina (P), i l'Adrià al gimnàs (G), han arribat al compromís de que el pis que busquin no estigui a més de 7 costats d'illa de cap d'aquests dos espais. L'últim requeriment que tenen és que la distància que han de fer per anar a casa de la seva millor amiga, la Berta (B), sigui la mínima possible. A on haurien de viure per a que es complissin totes aquestes condicions? Hi ha més d'una possibilitat?



Segona sessió: geometria hiperbòlica

ACTIVITAT 1: Parlem de geometria

1. Explica què creus que és la geometria

2. Creus que les matemàtiques (i en concret la geometria) sorgeixen per a donar resposta a problemes empírics? I en l'actualitat tenen aquest objectiu?

3. Dona una definició i les propietats que et semblin importants dels següents conceptes, i fes-ne un dibuix esquemàtic:

   · Triangle

   · Rectangle

   · Rectes secants

   · Rectes paral·leles

4. Saps què és la geometria euclidiana? Saps anomenar alguna geometria que no sigui euclidiana?

ACTIVITAT 2: Història de la geometria hiperbòlica

Per entendre què és la geometria hiperbòlica, primer repassem com va sorgir.

Els Elements

L'obra més important del grec Euclides, és dels voltants de l'any 300 abans de la Nostra Era. Els *Elements*, estan composats de tretze llibres, i es considera un dels tractats més rellevants de la història matemàtica, tenint una estructura lògica que esdevindria la referència per les obres de matemàtiques posteriors. Aquesta obra no conté una aplicació pràctica de resolució de problemes, com d'altres anteriors, sinó que intenta ser una recopilació d'afirmacions que no necessiten d'experiments físics per verificar que són correctes.

Els *Elements* segueixen el mètode axiomàtic. Així, comencen amb 23 *definicions* dels conceptes matemàtics que s'usaran al llarg del tractat i s'introdueixen, a continuació, els *postulats*. Aquests tenen l'interès de ser afirmacions que no requereixen ser demostrades, s'accepten com a certes sense més justificació. Són cinc, les mínimes possibles, on cap d'elles podria ometre's perquè es deriva de les altres.

S'enuncien, a continuació els cinc postulats reescrits per ser més comprensibles. A tenir en compte que per a Euclides una *línia recta* és un segment.

Postulat 1. *Donats dos punts qualssevol, és possible traçar una línia recta entre ells*

Postulat 2. *És possible allargar contínuament una recta finita en línia recta*

Postulat 3. *Donat un centre i un radi, és possible traçar un cercle*

Postulat 4. *Tots els angles rectes són iguals*

Postulat 5. *Si una recta incideix sobre dues rectes i es compleix que els dos angles interns del mateix costat són menors que dos rectes, les dues rectes prolongades indefinidament es trobaran en el costat en el qual hi ha els dos angles menors que dos rectes*

· Fixat en que el cinquè postulat és bastant més difícil d'entendre que els altres. En fem un esquema per entendre'l una mica més. Marca-hi r, l, s, α, β i P, si es reescriu el postulat: Si una recta (r) incideix sobre dues rectes(l i s) i es compleix que els dos angles interns del mateix costat (α i β) són menors que dos rectes (es refereix a dos angles rectes, és a dir, de 90 graus), les dues rectes prolongades indefinidament es trobaran en el costat en el qual hi ha els dos angles menors que dos rectes (al punt P).

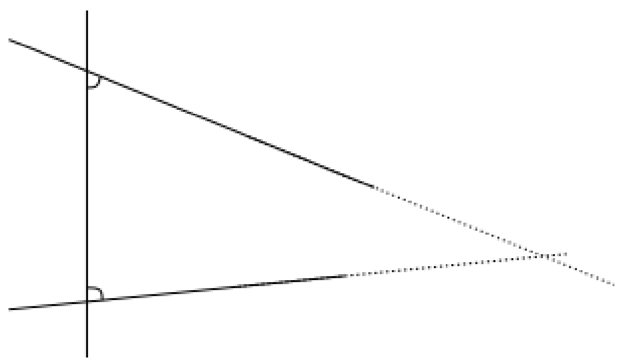


Figura 2.17: Representació gràfica del cinquè postulat d'Euclides

La reformulació més comú del i coneguda del cinquè postular és la del matemàtic Playfair:

Postulat 5'. *Per cada recta i cada punt exterior a aquesta existeix una única recta que passa per aquest punt i que és paral·lela a la recta donada*

· Pensa que Euclides només usava com a eines per a traçar dibuixos geomètrics: un regle (que però no servia per mesurar distàncies) i un compàs (que no podia transportar distàncies, és a dir com si un cop aixecat "es tanquès"). Hi ha algún dels postulats que creus que no podríes dibuixar amb aquestes eines? Quin i perquè?

El cinquê postulat

Hem vist, doncs, que el cinquè postulat semblava prou sospitòs, sent de formulació tan més complicada que els altres quatre. Aquest fet ja feia predisposar els posteriors matemàtics a qüestionar si aquest postulat podia, de fet, ser demostrat a partir dels altres. Més concretament, recalcaven que els altres quatre postulats es derivaven d'experiències on els dibuixos es podien fer usant regle i compàs. El cinquè postulat, en canvi, proposa un problema que no podem resoldre: amb les definicions donades per Euclides no es poden dibuixar línies, sinó segments; aquests poden ser allargats tant com es vulgui, però no es podrà arribar a l'infinit.

Arrel de la complexitat d'aquest cinquè postulat, posteriors matemàtics van intentar demostrar-lo a partir dels altres quatre, però va ser fútilment. En realitat, per a fer-ho es va anar reformulant, i aquestes reescriptures alternatives generarien avançaments en diferents camps de les matemàtiques, però l'objectiu de demostrar-lo no va ser assolit. Una d'aquestes reformulacions és la que hem vist anteriorment, proposada per Playfair.

El sorgiment de la geometria no euclidiana

Finalment, al segle XIX (més de 2000 anys després de la mort d'Euclides) hi va haver un canvi en l'apropament a la qüestió del cinquè postulat. Alguns matemàtics, van decidir escollir un camí diferent al que s'havia seguit per dos mil·lenis, i acceptar l'últim postulat com a no demostrable a partir dels altres. Això obria la porta, doncs, a crear nous sistemes que partissin dels 4 primers postulats, però que no necessàriament complissin el cinquè; Si aquest es derivés dels primers quatre, sempre que aquests fossin certs, ho hauria de ser també el cinquè, però si en canvi s'acceptava que era independent, es podia el·lidir o fins i tot negar.

Els tres matemàtics que van posar els fonaments d'aquesta teoria, i de les geometries que se'n derivarien van ser Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856), János Bólyai (1802-1860) i Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Tot i que Gauss mai va publicar res al respecte (ja que no creia que la societat matemàtica de l'època acceptaria aquests descobriments), era un personatge molt reputat, i va alabar els treballs de Lobačevskij, però sempre de manera privada, amb cartes a amics, però no públicament. Sobre la feina de Bólyai va arribar a dir que no podia lloar la seva obra ja que seria com lloar-se a si mateix, havent reflexionat de la mateixa manera durant els últims 35 anys, i havent arribat a les mateixes conclusions que ell.

Lobačevskij va mostrar com la geometria euclidiana no era la ciència exacta que contenia veritats absolutes que s'havia considerat fins aleshores. Va publicar una nova geometria, que es construia justament en la hipòtesi que el postulat de les paral·leles no era cert. D'aquí en va nèixer la geometria que treballarem a continuació: la geometria hiperbòlica.

Paral·lelament, Bólyai va arribar a les mateixes conclusions, definint la geometria absoluta: la que complia els primers quatre postulats però no necessàriament el cinquè.

Què és la geometria hiperbòlica

Un cop s'accepten els primers quatre postulats, com hem comentat, podem negar el cinquè. Hi ha, però, diverses maneres de negar-lo: Podem afirmar que per un punt exterior a una recta **no passa cap** recta paral·lela a ella, o que en passen **més d'una**. En el primer cas, estariem definint la geometria el·líptica, i en el segon, la hiperbòlica.

ACTIVITAT 3: Models de geometria hiperbòlica

Ara que hem vist d'on sorgeixen les geometries no euclidianes, treballarem en un dels models que s'han inventat per poder representar representar la geometria hiperbòlica. Nosaltres farem el procès invers a Lobačevskij: ell va decidir quins postulats volia que complís la geometria que definia, i a partir d'aquí en definiria els objectes que utilitzaria. Nosaltres usarem les seves definicions de rectes per acabar veient que els postulats que ell demanava es compleixen.

El Semipla de Poincaré

L'espai on es treballa és el semipla superior de l'espai euclidià, és a dir,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ on } y > 0$$

Estem acostumats a que una línia recta entre dos punts, on la distància és mínima, és la que segueix la funció de distància $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. A la geometria hiperbòlica, en canvi, es definirà per un segment d'arc de circumferència:

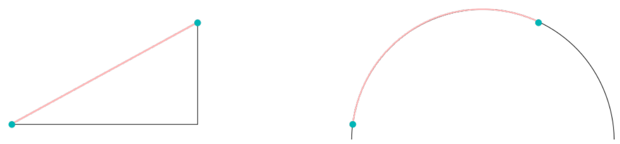


Figura 2.18: Mínima distància entre dos punts en geometria euclidiana VS en geometria hiperbòlica

Una geometria es defineix per l'espai on actúa, per la mètrica (o funció de distància) que s'hi utilitza, i els axiomes que s'hi compleixen. En el cas que ara tractem, la mètrica és la que defineic un arc de circumferència, com vist al dibuix, i els axiomes són els dels *Elements* més la negació del cinquè.

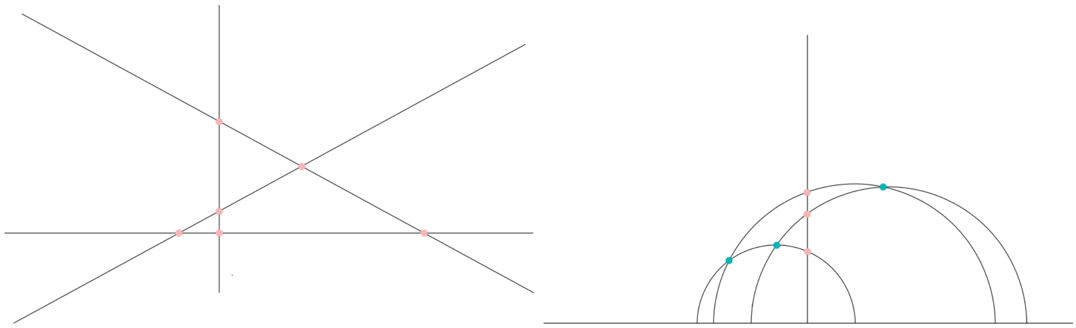
Com a concepte pot semblar confús, però en aquesta activitat ens centrarem en treballar amb els elements d'aquesta geometria per veure que no ho és tant. Els elements que usarem són:

- les semicircumferències centrades a l'eix de les abscisses (és a dir, les que tenen el seu centre sobre la recta $\{y = 0\}$)
- les semirectes verticals : (x, y) on $y > 0$ i $x = k$ (k és una constant qualsevol)

Podem usar les semirectes verticals perquè són semicircumferències centrades a $\{y = 0\}$ de radi infinit.

1. Experimenta sobre a aquest GeoGebra: `https://www.geogebra.org/m/p5vbz48c`). Quan la línia que passa per dos punts és la semirecta vertical?

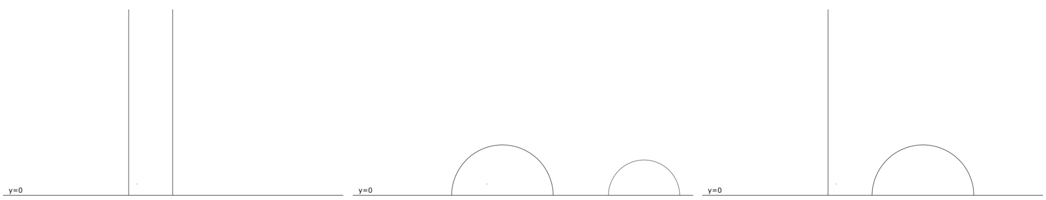
2. A continuació la representació de varies rectes secants al pla euclidià i al Semiplà de Poincaré. Què observes en les del model hiperbòlic?
Pista: fixat en que hi ha dos colors per als punts d'intersecció. Què els diferencia? Hi podria haver un tercer color?



(a) rectes secants al pla euclidià (b) rectes secants al semipla de Poincaré

Figura 2.19: Rectes secants dues a dues, amb punts d'intersecció

3. Dues rectes paral·leles en aquest model serien:
Fixem-nos: hi ha tres opcions: dues semirectes verticals, una semirecta vertical amb una semicircuferència centrada a $\{y = 0\}$, i dues semicircumferències centrades a $\{y = 0\}$



(a) Dues semirectes verticals (b) Dues semicircumferències (c) Una semirecta i una semicircumferència

Figura 2.20: Paral·leles al semiplà de Poincaré

Perquè compleixen la definició de paral·leles? Quina caracteristica de les paral·leles de la geometria euclidiana no es compleix en aquesta geometria?

4. Utilitzant semirectes verticals i/o semicircumferències centrades a $\{y = 0\}$, es poden dibuixar diversos triangles. Què et crida l'atenció d'aquests? Et sembla que els angles sumaran 180º?

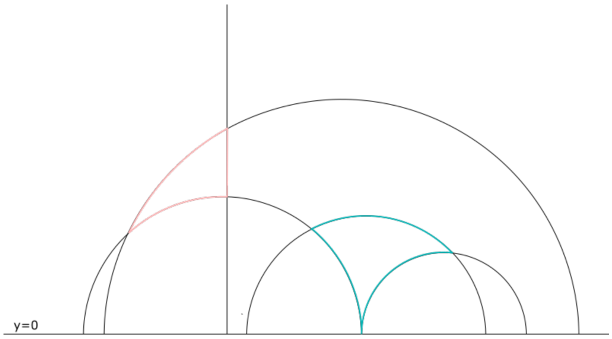


Figura 2.21: Triangle al semipla de Poincaré

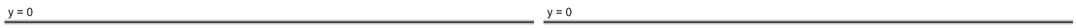
5. Dibuixa un contraexemple per al 5è postulat d'Euclides. Recorda que aquest era:

> Per cada recta (l) i cada punt exterior a aquesta (P) existeix una única recta que passa per aquest punt i que és paral·lela a la recta donada

Pista: Primer planteja quina hauria de ser la negació d'aquest postulat, i escriu-la. Després pensa en els dos casos possibles: quan la recta l és una semirecta vertical o quan la recta l és una semicircumferència centrada en {y=0}.

Negació del cinquè postulat:

Contraexemple:



(a) l és una semirecta vertical

(b) l és una semicircumferència centrada en {y=0}

Figura 2.22: Contraexemple del cinquè postulat d'Euclides al semipla de Poincaré

El Disc de Poincaré

Un altre model molt conegut és el Disc de Poincaré. Aquest és essencialment el mateix que hem vist ara, però enlloc de treballar sobre la recta $\{y = 0\}$ treballem sobre el cercle que obtenim identificant dos punts d'aquesta recta, és a dir: si la recta fos un fil i n'unissim els extrems, treballariem sobre un cercle. Veiem-ho a continuació per entendre-ho millor:

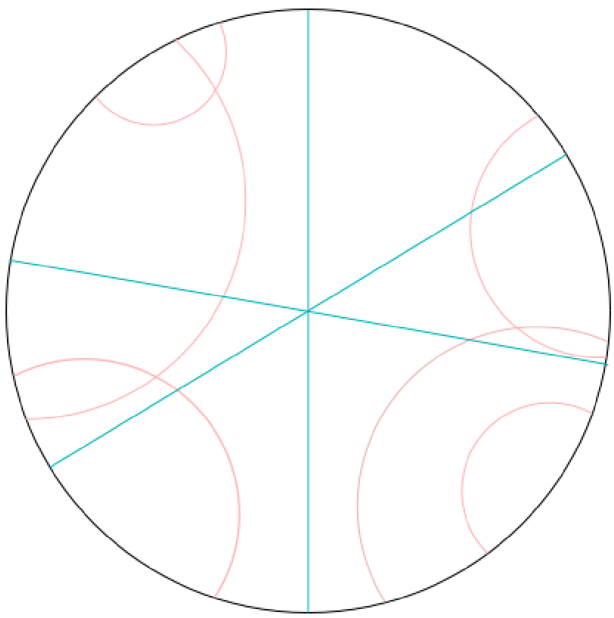
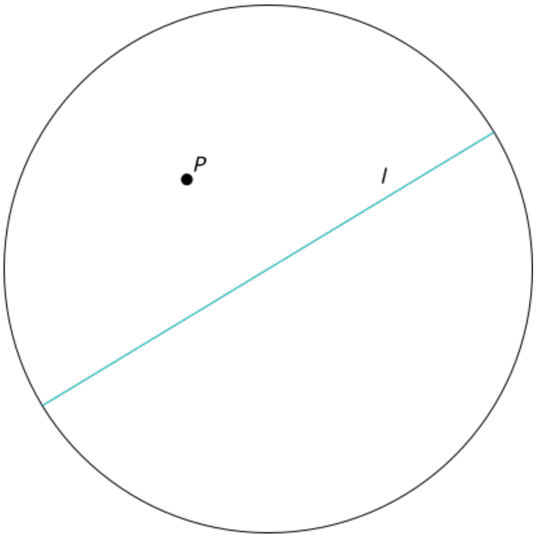


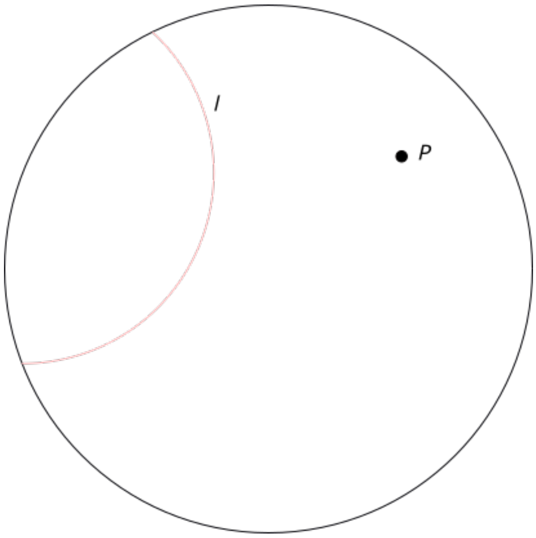
Figura 2.23: Disc de Poincaré

Com es veu a la imatge les semicircumferències són ara arcs del disc (en rosa), i el que abans eren les semirectes verticals ara són diàmetres (en blau).

Dibuixa altre cop la negació del cinquè postulat, ara en aquest model, usant els elements mencionats anteriorment:



(a) l és el diàmetre



(b) l és un arc

Figura 2.24: Contraexemple del cinquè postulat d'Euclides al Disc de Poincaré

Quin tipus de rectes pots utilitzar en cada un dels casos? I si al cas (b), el punt P fos el centre del cercle?

Aquest model va inspirar l'artista M.C. Escher en moltes de les seves obres:

Figura 2.25: *Cercle límit IV (Cel i Infern)*, de M.C. Escher [2]

ACTIVITAT 4: Conclusions

Ara que hem vist un altre tipus de geometria, canviaries alguna de les definicions i propietats que has donat a l'activitat 1, per a que fossin més generals i no relatives a la geometria euclidiana?