UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoría cuántica, introducción y análisis de su coherencia lógica a la luz de un resultado de Frauchiger y Renner

Autor: Sergio García-Arisco Vílchez

Director:	Dr. Antonio Bernal Serrano
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona,	18 de junio de 2021

Abstract

This paper consists of an introduction to quantum theory for finite dimensional systems, mostly 1/2 spin systems. Subsequently, the article "Quantum theory cannot consistently describe the use of itself" is analized, including the result that the authors arrive at: quantum theory is not consistent for complex macroscopic systems. This has generated a lot of controversy, which is why various articles have arisen both in favor and against it, some of them include [3, 4] defending it or [5, 6] criticizing it that I have read in order to understand better the initial article and its arguments. In addition to this, an observation is also made about the proof in [2].

Resumen

Este trabajo consta de una introducción a la teoría cuántica para sistemas de dimensión finita, sistemas de espín 1/2 en su mayoría. Posteriormente se analiza el artículo "Quantum theory cannot consistently describe the use of itself" y el resultado al que llegan los autores: la teoría cuántica no es consistente para sistemas macroscópicos complejos. Esto ha generado mucha controversia, por lo que han surgido diversos artículos tanto a favor como en su contra, cabe destacar algunos de ellos como [3, 4] defendiéndolo o [5, 6] criticándolo que he leído para poder entender mejor el artículo inicial y sus argumentos. Además de esto también se hace una observación sobre la demostración en [2].

2020 Mathematics Subject Classification. 81-01, 81P15, 81P16

Índice

1. Introducción

El primer apartado será una introducción a la teoría cuántica tomando como referencia [1], no de una manera global sino de una forma matemáticamente más simple pero rigurosa, la necesaria para poder entender y analizar el artículo de Frauchiger-Renner que explicaremos en detalle en del Capítulo 2. Una descripción detallada de la teoría cuántica se podría encontrar en diversas referencias bibliográficas más extensas, dedicadas profunda y únicamente a ello.

En esta introducción previa haremos una tabla con la notación que usaremos de ahora en adelante, esta es la llamada Notación de Dirac.

Notación	Significado
z^*	Complejo conjugado de un número z.
$\vert\Psi\rangle$	Vector del espacio de Hilbert. También llamado ket.
$\langle\Psi\vert$	Vector dual de $\vert\Psi\rangle$. También llamado bra.
$\langle\Phi\vert\Psi\rangle$	Producto interno entre los vectores $\vert\Phi\rangle$ y $\vert\Psi\rangle$.
$\vert\Phi\rangle\otimes\vert\Psi\rangle$	Producto tensorial entre $\vert\Phi\rangle$ y $\vert\Psi\rangle$.
$\vert\Phi\rangle\vert\Psi\rangle$	Forma abreviada del producto tensorial entre $\vert\Phi\rangle$ y $\vert\Psi\rangle$.
A^*	Matriz conjugada de la matriz A.
A^T	Matriz transpuesta de la matriz A.
$A^\dagger$	Matriz ajunta de la matriz A. $A^\dagger = (A^T)^*$.
$\langle\Phi\vert A\vert\Psi\rangle$	Producto interno entre $A\vert\Psi\rangle$ y $\vert\Phi\rangle$. Es equivalente al producto interno entre $A^\dagger\vert\Phi\rangle$ y $\vert\Psi\rangle$

En primer lugar, como se ha mencionado anteriormente la introducción a la teoría cuántica se hará en el contexto que nos resulta necesario para entender el artículo, esto es, en el contexto de una partícula con un espín $\frac{1}{2}$ con dos niveles (positivo y negativo), además tanto las posiciones como los momentos de las partículas no serán relevantes.

En este breve apartado se explicará uno de los elementos de la teoría cuántica, a partir de los cuales se crea dicha teoría, la función de onda.

La función de onda $\vec{\Psi}(\vec{r}$,t) es la representación del estado de un sistema de partículas. Contiene toda la información estadística del sistema.

Para un sistema de N partículas en $\mathbb{R}^3$ con un espín interno con D niveles la función de onda tiene la siguiente forma:

$$\vec{\Psi}(\vec{r},t) = (\Psi_1(\vec{r},t), ..., \Psi_D(\vec{r},t)) \tag{1.1}$$

con $\vec{r} = (\vec{r_1}, ..., \vec{r_N})$ y $\vec{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ haciendo referencia a la posición de la partícula i en el espacio y donde el espín es una propiedad física que poseen algunas partículas por tener momento angular. Otra forma de escribir la función de onda, o lo que es lo mismo, los estados del sistema es $|\Psi\rangle$, que como se ha visto en la tabla de notación es un vector del espacio de Hilbert que describiremos en el capítulo siguiente.

Pasamos ahora a explicar una de las premisas bajo las cuales trabajaremos y algunas de las simplificaciones que nos permitirá hacer.

Cuando tenemos una partícula con espín $s = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ y su posición no es importante, la descripción de su estado $|\Psi\rangle$ en un instante de tiempo t pasa a ser un elemento de $\mathbb{C}^2$, con esto lo que obtenemos es que los espacios de Hilbert con los que trabajaremos pasan a tener dimensión 2, en cambio de tener una dimensión que podría ser infinita.

Otra propiedad de los estados del sistema es que $|\vec{\Psi}(\vec{r},t)|^2$ nos da la densidad de probabilidad de presencia de la partícula en una región del espacio. Como esto es una probabilidad y queremos que este bien definida siempre normalizaremos los estados del sistema.

2. Introducción sucinta a la mecánica cuántica

2.1. Espacio de estados

El espacio de estados es un espacio de Hilbert (espacio vectorial con producto escalar) sobre los complejos, y los estados del sistema son vectores unitarios del espacio de Hilbert. Como se ha dicho anteriormente, en el caso de un espín 1/2 este espacio de Hilbert tiene dimensión 2 y podemos definir el producto escalar de la siguiente forma:

Sean $|\Phi\rangle = a_1|\uparrow\rangle + a_2|\downarrow\rangle$ y $|\Psi\rangle = b_1|\uparrow\rangle + b_2|\downarrow\rangle$ dos vectores expresados en una base ortonormal cualquiera, por ejemplo $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, su producto escalar es

$$\langle\Phi|\Psi\rangle \equiv a_1^* b_1 + a_2^* b_2 \tag{2.1}$$

Este producto no depende de la base escogida. Además, obviamente existen otro tipo de sistemas más complejos que el de un espín, incluso macroscópicos. En estos casos el espacio de Hilbert será mayor, incluso pudiendo tener dimensión infinita si consideramos grados de libertad continuos, más adelante se verá un ejemplo. En todo caso las complejidades matemáticas de esos espacios de Hilbert no resultan relevantes para el análisis del artículo. Esta introducción a los espacios de Hilbert permite enunciar el primer postulado.

Postulado 1: Todos los estados de un sistema son vectores de un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Además $|\Psi\rangle$ y $c|\Psi\rangle$, $\forall c \neq 0$ representan el mismo estado.

Un ejemplo para entender mejor la notación de Dirac y la definición del producto escalar, si $\Psi(\vec{r}, s) = c_1\Psi_1(\vec{r}, s) + c_2\Psi_2(\vec{r}, s)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tenemos:

- $|\Psi\rangle = c_1|\Psi_1\rangle + c_2|\Psi_2\rangle$.
- $\langle\Psi| = c_1^*\langle\Psi_1| + c_2^*\langle\Psi_2|$.

Como observación vemos que podemos construir una base ortonormal, ya que se ha visto que podemos normalizar los vectores del espacio de Hilbert.

Un ejemplo de los espacios de estados podría ser el de una partícula con espín 1/2, para la que hemos visto que el espacio de Hilbert asociado a este estado de espín es un espacio de Hilbert de dimensión 2, H, tal que $H \cong \mathbb{C}^2$. Si se usa una base ortonormal concreta, por ejemplo la formada por los estados de espín $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, respecto a una dirección fijada, los elementos del espacio H pueden representarse, mediante las coordenadas respecto dicha base, mediante pares de números complejos $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Como se ha dicho anteriormente trabajamos con vectores unitarios, por lo que tendríamos $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Otro ejemplo. Si tenemos un sistema mucho más complejo que un espín 1/2, aunque sea macroscópico, dicho sistema tendrá un espacio de Hilbert complejo, con una dimensión muy elevada o incluso infinita.

Si el sistema es un punto material que se mueve en una recta, el espacio de estados será el espacio de Hilbert complejo $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ completado convenientemente a un *rigged Hilbert space* o una terna de Gelfand, para dar cuenta de posibles estados no ligados. Esto da a la descripción del sistema una complejidad matemática muy considerable.

Para el objetivo de este trabajo, el análisis del artículo de Frauchiger-Renner, no es necesario detallar grados de libertad continuos como la posición espacial o los momentos lineales, de forma que si se considera un sistema macroscópico, se describirá su estado como un elemento de un cierto espacio de Hilbert, sin entrar en más detalles.

Dado que no nos interesan los grados de libertad continuos, podemos suponer que el espacio de Hilbert será de dimensión finita, aunque quizá de una dimensión enorme. Esto nos evita muchas complicaciones técnicas en el estudio.

2.2. Sistema Cuántico: Estado y evolución

En esta sección trataremos las posibles formas en las que podemos encontrar un estado cuántico y las maneras más comunes de las que puede evolucionar.

Empezaremos hablando de las dos posibles formas de encontrarnos un estado cuántico, que son el estado cuántico puro y el estado de mezcla estadística.

Un estado cuántico cuyo estado, $|\Psi\rangle$, se conoce exactamente se dice que es un estado puro. Otra forma de definirlo es decir que el sistema está formado por un solo vector de estado.

En contraposición a esto, cuando el sistema está en un conjunto estadístico de diferentes vectores de estado no conocemos exactamente el estado, entonces hablamos de un estado de mezcla estadística o estado mixto que está definido por el operador densidad o la matriz densidad.

El operador densidad corresponde a un operador lineal que codifica todas las propiedades estadísticas de un sistema cuántico en la situación más general posible, sobretodo cuando no es posible describir el sistema mediante un estado puro. Suponiendo que un sistema cuántico está en un estado $|\Psi_i\rangle$ con probabilidad p_i llamamos $\{(p_i, |\Psi_i\rangle)\}$ un *conjunto de estados puros* (es un conjunto finito en nuestro caso) y definimos el operador densidad

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \tag{2.2}$$

también conocido como la matriz densidad.

Esta matriz tiene dos propiedades importantes:

Propiedades 2.1. Suponemos que $\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ es una matriz densidad

1. La traza de ρ es 1

   Es algo fácil de ver ya que

$$tr(\rho) = \sum_i p_i tr(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|) = \sum_i p_i = 1 \tag{2.3}$$

2. La matriz densidad ρ es una matriz definida positiva.

   Si suponemos que $|\Phi\rangle$ es un vector cualquiera del espacio de estados tenemos

$$\langle\Phi|\rho|\Phi\rangle = \sum_i p_i \langle\Phi|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\Phi\rangle = \sum_i p_i |\langle\Phi|\Psi_i\rangle|^2 \geq 0 \tag{2.4}$$

Volviendo a los sistemas cuánticos, estos pueden evolucionar principalmente de dos formas diferentes:

- Evolución unitaria, que a su vez nos enuncia el segundo postulado.
  Postulado 2: Cuando el sistema está aislado, no interacciona con el exterior, la evolución viene dada por un operador unitario. Se habla entonces de evolución unitaria.

  Si tenemos dos instantes $t_1 \neq t_2$ (generalmente $t_1 < t_2$), $|\Psi_1\rangle$ es el estado en el primer instante y entre ambos instantes el sistema ha permanecido aislado, existe un operador unitario U_{t_1,t_2} esto es una aplicación lineal (necesariamente continua si el espacio es de dimensión finita) del espacio de Hilbert de estados del sistema en sí misma, tal que es unitaria (su adjunta coincide con su inversa), y tal que

  $$U_{t_1,t_2}^{-1} = U_{t_2,t_1} \qquad y \qquad U_{t_1,t_2}|\Psi_1\rangle = |\Psi_2\rangle \tag{2.5}$$

  Por concretar un ejemplo, si el sistema tiene un hamiltoniano cuántico H (operador de la energía del sistema, no se confunda con el espacio de Hilbert, que también denotamos por H) que no depende explícitamente del tiempo, la evolución unitaria del sistema viene dada por la expresión:

  $$U = exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) \tag{2.6}$$

  Otro ejemplo, si suponemos que la evolución de un sistema cerrado viene marcada por el operador unitario U y si el sistema está en un estado inicial $|\Psi_i\rangle$ con probabilidad p_i después de la evolución del sistema el estado final será $U|\Psi_i\rangle$ con probabilidad p_i. Esto nos dice el operador densidad pasa de ser:

  $$\rho = \sum_i p_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \tag{2.7}$$

  a ser

  $$\rho = \sum_i p_i U|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|U^\dagger = U\rho U^\dagger \tag{2.8}$$

- Medidas. En una medida se opera una interacción del sistema con el exterior, formado por un aparato de medida y un observador.

  El concepto de medida nos dice para qué sirve el espacio de Hilbert y el estado del mismo. En la formulación habitual de la mecánica cuántica, la medida es un proceso que está conectado con la descripción de un procedimiento experimental en el que todo el mundo comprende lo que significa medir.

  Lo que se mide es una magnitud observable. Dicha magnitud observable se corresponde en la teoría con un cierto operador autoadjunto, un operador lineal A del espacio de Hilbert en sí mismo tal que coincide con su adjunto.

  Un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert de dimensión finita tiene una base ortonormal de vectores propios, y los valores propios son números reales.

  La formulación habitual de la mecánica cuántica incluye como axioma la denominada regla de Born, que a su vez introduce dos postulados.

Postulado 3: Los resultados posibles de la medición de la magnitud física asociada al operador autoadjunto A son los valores propios de A, y, si el sistema se encuentra en un estado $|\Psi\rangle$ antes de hacer la medida, la probabilidad de observar uno de los posibles valores propios λ_i de A es $|\langle\Phi_i|\Psi\rangle|^2$ donde $|\Phi_i\rangle$ es el vector propio de A de valor propio λ_i.

Esto es lo mismo que decir que dicha probabilidad se obtiene expresando el vector $|\Psi\rangle$ como combinación lineal de la base de vectores propios de A

$$|\Psi\rangle = \sum_j c_j|\Phi_j\rangle \tag{2.9}$$

y la probabilidad es $|c_j|^2$. Además podemos definir el valor esperado de un operador A de la siguiente manera:

$$\langle A\rangle_{|\Psi\rangle} = \sum_i \lambda_i|\langle\Phi_i|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|A|\Psi\rangle \tag{2.10}$$

En nuestra formulación más abstracta, el observable A juega un papel secundario. Se consideran medidas del sistema respecto a una base ortonormal dada $|\Phi_j\rangle$.

Esta base ortonormal, respecto de la cual medimos, será la base de vectores propios de muchos observables, pero realmente lo que nos interesa es la base, que es la que determina el proceso abstracto de medida.

Postulado 4: El proceso de medida respecto a una base ortonormal $|\Phi_i\rangle$ del espacio de estados H, consiste en un paso aleatorio en el cual se selecciona un índice i, se postula que la probabilidad de que salga i si el estado del sistema es $|\Psi\rangle$ viene dado por la regla de Born: $|\langle\Phi_i|\Psi\rangle|^2$. Además, después de la medida, el sistema queda en el estado $|\Phi_i\rangle$. La evolución

$$|\Psi\rangle \mapsto |\Phi_i\rangle \tag{2.11}$$

es esencialmente diferente a la evolución unitaria anterior y se trata de forma separada.

Hay procesos de medida más generales pero para entender el artículo no es necesario profundizar más en el tema.

2.3. Producto tensorial

El producto tensorial entre espacios vectoriales es una manera de unir estos espacios vectoriales, para así crear uno más extenso, esto se puede extrapolar a espacios de Hilbert como veremos a continuación y nos será de gran utilidad a la hora de estudiar los sistemas multipartitos.

Sean V, W dos espacios vectoriales (sobre el mismo cuerpo) el producto tensorial $V \otimes W$ es un espacio vectorial, dotado de una aplicación bilineal tal que $(v, w) \mapsto v \otimes w$ con $v \in V$ y $w \in W$.

Observaciones 2.2. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente podemos hacer las siguiente observaciones:

1. Sean $|v_{1\rangle}, ..., |v_n\rangle$ y $|w_1\rangle, ..., |w_m\rangle$ son bases ortonormales de V y de W respectivamente, entonces los pares $|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$ forman una base ortonormal de V $\otimes$ W, se puede usar también la notación $|v_i\rangle|w_j\rangle$ o también $|v_i, w_j\rangle$, en cambio de $|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$.
2. Los elementos del espacio V $\otimes$ W son combinaciones lineales de elementos $|v\rangle \otimes |w\rangle$ donde $|v\rangle$ es un elemento de V y $|w\rangle$ lo es de W.
3. La dimensión del espacio V $\otimes$ W es nm.

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert de dimensión finita con los productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ respectivamente. Construimos el producto tensorial $H_1 \otimes H_2$ como lo hemos hecho con espacios vectoriales, además podemos extender esta definición viendo como se comporta el producto interno:

$$\langle \Phi_1 \otimes \Phi_2, \Psi_1 \otimes \Psi_2 \rangle = \langle \Phi_1, \Psi_1 \rangle_1 \otimes \langle \Phi_2, \Psi_2 \rangle_2 \tag{2.12}$$

$\forall \Phi_1, \Psi_1 \in H_1$ y $\forall \Phi_2, \Psi_2 \in H_2$

Postulado 5: El espacio de estado de un sistema físico multipartito es el producto tensorial de los espacios de estado de los sistemas físicos que lo componen. Además, si tenemos sistemas numerados del 1 al n, y el sistema número i está en el estado $|\Psi_i\rangle$ entonces el estado conjunto del sistema total es $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\Psi_n\rangle$.

Por como hemos definido el producto tensorial, este satisface las siguientes propiedades:

Propiedades 2.3. Sean V y W espacios de Hilbert:

1. Para cualquier z $\in \mathbb{C}$, $|v\rangle \in V$ y $|w\rangle \in W$:

$$z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z|w\rangle) \tag{2.13}$$

2. Para cualquier $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle \in V$ y $|w\rangle \in W$:

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle \tag{2.14}$$

3. Para cualquier $|v\rangle \in V$ y $|w_1\rangle$, $|w_2\rangle \in W$:

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle \tag{2.15}$$

4. Para dos operadores A y B que actúan sobre V y W respectivamente podemos definir como actúa A $\otimes$ B sobre V $\otimes$ W. Sean $|v\rangle \in V$ y $|w\rangle \in W$:

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) \equiv A|v\rangle \otimes B|w\rangle \tag{2.16}$$

Esta última propiedad se puede extender a cualquier combinación lineal de $V \otimes W$, y nos permite saber como trabajar con los observables aplicados sobre un producto tensorial.

2.4. Sistemas multipartitos y traza parcial

Continuamos con la introducción de los sistemas multipartitos, mediante los productos tensoriales.

Como se ha visto anteriormente si tenemos un sistema con dos partes I y II, (un espín y un laboratorio, dos partículas, un laboratorio y un observador exterior, etc.) y el sistema I tiene como espacio de estados H_1 y el sistema II tiene a H_2 como espacio de estados, el sistema compuesto formado por I y II, a veces se denota informalmente como $I \otimes II$ tiene como espacio de Hilbert $H_1 \otimes H_2$. Nuevamente, el poder suponer que los espacios de Hilbert son de dimensión finita, resulta en una gran simplificación técnica, ya que no es necesaria ninguna prevención especial relacionada con el Análisis Funcional, para definir lo que es el producto tensorial de dos espacios de Hilbert. Simplemente se trata del producto tensorial algebraico habitual, visto en el apartado anterior.

Si el sistema I está en un estado $|\Psi_I\rangle$ y el sistema II está en el estado $|\Psi_{II}\rangle$, y los dos sistemas están aislados entre ellos, el estado del sistema compuesto es simplemente $|\Psi\rangle = |\Psi_I\rangle \otimes |\Psi_{II}\rangle$. Si los sistemas I y II han interaccionado el estado del sistema compuesto será un vector del espacio $H_1 \otimes H_2$ pero no será posible, en la mayoría de casos, expresarlo como el producto tensorial de un vector de H_1 por uno de H_2, y tendremos una expresión del tipo

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |\Phi_{I,i}\rangle \otimes |\Phi_{II,j}\rangle, \tag{2.17}$$

donde $|\Phi_{I,i}\rangle$ y $|\Phi_{II,j}\rangle$ son bases ortonormales de H_1 y H_2 respectivamente. Si realmente es imposible expresar el estado como $|\Psi\rangle = |\Psi_I\rangle \otimes |\Psi_{II}\rangle$, se dice que los sistemas están entrelazados. No es posible considerar uno de los dos subsistemas sin hacer referencia al otro. La información que se encontraba en los estados iniciales de I y II, se ha movido entre ellos y una parte se encuentra en forma de correlaciones entre ambos.

Si tenemos dos sistemas I y II y su sistema compuesto se encuentra en un estado separado del tipo $|\Psi\rangle = |\Psi_I\rangle \otimes |\Psi_{II}\rangle$, podemos decir que $|\Psi\rangle$ es el estado del sistema compuesto, que $|\Psi_I\rangle$ es el estado del sistema I y que $|\Psi_{II}\rangle$ es el estado del sistema II, como sería de esperar.

Supongamos ahora que tenemos a I y II entrelazados, y que el sistema compuesto se encuentra en un estado puro $|\Psi\rangle \in H_1 \otimes H_2$, que no se puede expresar como $|\Psi\rangle = |\Psi_I\rangle \otimes |\Psi_{II}\rangle$. A veces, queremos una descripción de una de las partes, por ejemplo I, sin tener en cuenta la parte correspondiente a II. Al estar entrelazadas, aunque estemos tratando con un estado puro, la descripción del estado correspondiente a I sin tener en cuenta la parte del sistema II es una mezcla estadística.

A continuación introduciremos el concepto de traza parcial, y explicaremos como se calcula. Si tenemos un estado $|\Psi\rangle$ de $H_1 \otimes H_2$, la traza parcial del sistema I de $|\Psi\rangle$ es el estado del sistema I que obtenemos descartando la parte del sistema II, y es un estado de H_1, generalmente un estado mezcla. Análogamente la traza parcial del sistema II de $|\Psi\rangle$ es el estado del sistema II que obtenemos descartando la parte del sistema I, es un estado de H_2 que también suele ser un estado mezcla.

Sean dos sistemas físicos A y B, y ρ^{AB} el operador densidad asociado al sistema $A \otimes B$. El operador densidad reducido del sistema A es

$$\rho^A \equiv tr_B(\rho^{AB}) \tag{2.18}$$

donde tr_B es la traza parcial del sistema B que definimos como

$$tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2|\, tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \tag{2.19}$$

con $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ dos vectores del espacio de estados del sistema A y $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$ dos vectores del espacio de estados del sistema B, y donde $tr(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2|b_1\rangle$. Análogamente se calcula la traza parcial del sistema A.

3. Sobre el resultado de Frauchiger y Renner

Como se ha visto en los capítulos anteriores, la mecánica cuántica sirve para describir muchos de los procesos fundamentales en la física, también se ha visto que la teoría que hay detrás de esta mecánica cuántica se puede aplicar a los sistemas microscópicos, en los cuales se han llevado a cabo una gran cantidad de experimentos para comprobarlo. Lo que queremos ver analizando este artículo es si esta teoría cuántica puede servir también para sistemas complejos o no.

En el artículo una serie de personas (llamados *agentes*) hacen suposiciones sobre un sistema complejo, y uno de estos agentes llega a una conclusión al observar el resultado de una medida en particular, después de un análisis por parte de los agentes se llega a una contradicción con este primer resultado por tanto se llega a una conclusión: la teoría cuántica no puede extrapolarse de una manera sencilla a sistemas complejos o bien, alguna de las otras suposiciones hechas para llegar a este resultado, que se verán más adelante, no es válida.

En este capítulo hablaremos de las suposiciones y los razonamientos que estos agentes hacen para ver si son correctos y por tanto lo que afirma el artículo es cierto, o si por el contrario hay algún error, pero antes introduciremos la paradoja en la que se basa, en parte, el artículo que queremos estudiar, la conocida como paradoja del amigo de Wigner.

3.1. Paradoja del amigo de Wigner

Esta paradoja quiere demostrar que la mecánica cuántica no tiene una validez ilimitada.

Consideramos dos observadores, uno de ellos, el agente F, está dentro de un laboratorio y mide la polarización z de un espín 1/2 con dos posibles resultados $z = +1/2$ o bien $z = -1/2$, por lo tanto el agente F dirá que el sistema S está en un estado

$$\Psi_S = |\downarrow\rangle_S \qquad o \qquad \Psi_S = |\uparrow\rangle_S \tag{3.1}$$

El otro agente , W, no tiene acceso al resultado z que ha obtenido F, puesto que está fuera del laboratorio. El agente W puede suponer que el sistema del laboratorio como un sistema cuántico $L \equiv S \otimes D \otimes F$, que contiene los subsistemas S, haciendo referencia al espín, D para los dispositivos de medida de F y todo lo relacionado entre ellos y el subsistema F que hace referencia al agente F.
Desde la perspectiva de W, L está en un estado inicial puro que permanece aislado durante la medida del espín que hace F. Esto lo que nos dice es que la evolución del sistema S en el estado final de L es de una de las dos formas siguientes:

$$|\downarrow\rangle_S \mapsto |-\frac{1}{2}\rangle_L \equiv |\downarrow\rangle_S \otimes |\text{“}z = -\frac{1}{2}\text{”}\rangle_D \otimes |\text{“}\Psi_S = |\downarrow\rangle\text{”}\rangle_F \tag{3.2}$$

$$|\uparrow\rangle_S \mapsto |+\frac{1}{2}\rangle_L \equiv |\uparrow\rangle_S \otimes |\text{“}z = +\frac{1}{2}\text{”}\rangle_D \otimes |\text{“}\Psi_S = |\uparrow\rangle\text{”}\rangle_F \tag{3.3}$$

en este caso $|\text{“}z = -\frac{1}{2}\text{”}\rangle_D$ y $|\text{“}z = +\frac{1}{2}\text{”}\rangle_D$ hacen referencia a estados de D dependiendo del resultado de z. De igual manera $|\text{“}\Psi_S = |\downarrow\rangle\text{”}\rangle_F$ y $|\text{“}\Psi_S = |\uparrow\rangle\text{”}\rangle_F$ son estados de F que dependen en el resultado obtenido por el agente F. Además, si suponemos que el agente W sabe que el espín estaba en un estado inicial

$$|\rightarrow\rangle_S \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_S + |\uparrow\rangle_S) \tag{3.4}$$

antes de la medida de F, entonces el estado final de L que le asignaría W es

$$\Psi_L = \sqrt{\frac{1}{2}}(|-\frac{1}{2}\rangle_L + |+\frac{1}{2}\rangle_L) \tag{3.5}$$

una superposición lineal de dos posibles estados que son resultado de la evolución del sistema. Esto es diferente de lo que obtiene el agente F, ya que este sabe en que estado se encuentra el espín, en cambio W no, y en esta falta de información reside la diferencia, también es por eso que el estado puro que obtiene F (3.1) no es incompatible con el estado mezcla que obtiene W, y por ese motivo esta paradoja no puede ser vista como un argumento contra la validez universal de la teoría cuántica.

3.2. Descripción del experimento mental

El "Gedankenexperiment" o experimento mental que se trata en el artículo de Frauchiger-Renner es una extensión de la paradoja comentada anteriormente.

Consideramos a los agentes $\bar{F}$, $\bar{W}$, F y W, estos son capaces de aplicar la teoría cuántica y de hacer deducciones lógicas.

El agente $\bar{F}$ está dentro de un laboratorio $\bar{L}$, formado por $\bar{F}$, los dispositivos de medida $\bar{D}$ y un generador aleatorio R con dos posibles resultados: *cara* con probabilidad 1/3 y *cruz* con probabilidad 2/3. Podemos entender R como un sistema cuántico de dos dimensiones, con base B=$\{|cara\rangle_R, |cruz\rangle_R\}$ y un estado inicial

$$|inicial\rangle_R = \frac{1}{\sqrt{3}}|cara\rangle_R + \sqrt{\frac{2}{3}}|cruz\rangle_R \tag{3.6}$$

Por lo tanto $\bar{L} = \bar{F} \otimes \bar{D} \otimes R$.

También tenemos al agente F con sus dispositivos de medida D y llamamos provisionalmente al otro laboratorio L_0 tal que $L_0 = F \otimes D$. Los agentes $\bar{W}$ y W están fuera de los laboratorios $\bar{L}$ y L_0 y no tienen nada de información sobre los resultados obtenidos ni sobre los preparativos que han tenido lugar en los laboratorios, pero conocen el estado inicial de R y el protocolo que se describe a continuación.

El tiempo se separa en rondas n y una variable continua x tal que $t = n : x$.

Al empezar la ronda n, $t = n : 00$, una partícula S de espín 1/2 entra en $\bar{L}$, $\bar{F}$ hace funcionar a R y después mide R en la base B. Si sale cara $\bar{F}$ prepara S en el estado $|\downarrow\rangle_S$ utilizando $\bar{D}$, pero si sale cruz lo prepara en el estado

$$|\rightarrow\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_S + |\uparrow\rangle_S) \tag{3.7}$$

$\bar{F}$ no dice ni el resultado de R ni en que estado ha preparado S una vez ha pasado $t = n : 00$.

A continuación el laboratorio $\bar{L}$ queda aislado e introducimos S en L_0. Llamamos $|\bar{h}\rangle_{\bar{L}}$ y $|\bar{t}\rangle_{\bar{L}}$ los estados del laboratorio $\bar{L}$ cuando S ya ha salido de este, haciendo referencia a los resultados cara y cruz, respectivamente. Llamamos $L = L_0 \otimes S$ al segundo laboratorio.

El siguiente paso, a tiempo $t = n : 10$, el agente F mide S según la base $\{|\uparrow\rangle_S, |\downarrow\rangle_S\}$, y tampoco dice el resultado obtenido. Llamamos $|z = +1/2\rangle_L$ y $|z = -1/2\rangle_L$ los estados de L.

En el tiempo $t = n : 20$ el agente $\bar{W}$ mide $\bar{L}$ respecto a una base que contiene

$$|\bar{ok}\rangle_{\bar{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{h}\rangle_{\bar{L}} - |\bar{t}\rangle_{\bar{L}}) \tag{3.8}$$

Si el resultado de la medida es el que está asociado a este vector entonces $\bar{W}$ anuncia que $\bar{w} = \bar{ok}$, en caso contrario $\bar{w} = \bar{fail}$.

Una opción para este estado $|\bar{fail}\rangle$ podría ser

$$|\bar{fail}\rangle_{\bar{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{h}\rangle_{\bar{L}} + |\bar{t}\rangle_{\bar{L}}) \tag{3.9}$$

ya que tiene que ser ortogonal a $|\bar{ok}\rangle$.

Algo parecido pasa en $t = n : 30$ con el agente W midiendo L respecto a una base que contiene

$$|ok\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z = -1/2\rangle_L - |z = +1/2\rangle_L) \tag{3.10}$$

y si el resultado de la medida es $|ok\rangle_L$ entonces W anuncia $w = ok$, en caso contrario $w = fail$.

De la misma manera que antes, podemos definir el estado $|fail\rangle_L$ como

$$|fail\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z = -1/2\rangle_L + |z = +1/2\rangle_L) \tag{3.11}$$

que también tiene que ser ortogonal a $|fail\rangle$.

Finalmente, en $t = n : 40$, si $\bar{w} = \bar{ok}$ y $w = ok$ el experimento se para, en caso contrario se vuelven a empezar estos pasos desde $t = n + 1 : 00$.

Para continuar con el experimento mental se utilizan tres suposiciones que consisten en lo siguiente:

La primera, la suposición Q nos dice que todos los agentes $\bar{F}$, $\bar{W}$, F y W son conocedores de la teoría cuántica y que la pueden usar para analizar cualquier sistema físico, por muy complejo que sea.

La suposición C nos dice que si hay un agente A que sabe a las conclusiones que ha llegado otro agente B y los dos agentes consiguen sus resultados utilizando la misma teoría, entonces el agente A puede adoptar las conclusiones obtenidas por B.

Por último, la suposición S nos asegura que los resultados de una medida son únicos.

Estas suposiciones se reformulan tal y como están en el artículo, siguiendo [2] quedarían de la siguiente forma:

En la suposición Q, si suponemos que un agente A dice que el sistema S está en el estado $|\Psi\rangle_S$ en el instante t_0, y suponemos también que este agente sabe que el valor x es obtenido si medimos S respecto a una familia $\{\pi_x^{t_0}\}_{x\in\chi}$ de operadores de Heisenberg relativos al tiempo t_0 que se completa a tiempo t.
Además, si $\langle\Psi|\pi_\xi^{t_0}|\Psi\rangle = 1$ para cierto $\xi \in \chi$ el agente puede asegurar que $x = \xi$ en tiempo t.

Para la suposición C suponemos que un agente A ha llegado a la conclusión de que otro agente, el agente B, utilizando la misma teoría que usa A puede asegurar que $x = \xi$

es cierto en tiempo t. Entonces el agente A puede asegurar también que $x = \xi$ en tiempo t.

Finalmente, para la suposición S, si un agente A asegura que $x = \xi$ en tiempo t, entonces este agente debe negar $x \neq \xi$ en tiempo t.

3.3. Análisis del experimento mental

En el artículo de Frauchiger-Renner se usa la evolución unitaria de los sistemas, pero para los sistemas sobre los cuales se trabaja podemos suponer que la evolución unitaria de los operadores es la identidad, ya que estos son sistemas aislados y solo se ven alterados cuando se miden o se preparan en cierto estado determinado, así que el hecho de introducir la notación original solo complicaría y haría más tediosa la explicación, sin introducir ninguna novedad.

Como se ha explicado en el apartado anterior el agente $\bar{F}$ prepara el espín S y se lo envía a F sin darle ningún tipo de información sobre como lo ha preparado y por ese motivo para los agentes F (antes de $t = n : 10$ que es cuando F mide el sistema), $\bar{W}$ y W el sistema $\bar{L} \otimes S$ está en el estado:

$$|\Psi_1\rangle_{\bar{L}\otimes S} = \frac{1}{\sqrt{3}}|\bar{h}\rangle_{\bar{L}}|\downarrow\rangle_S + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{t}\rangle_{\bar{L}}(|\uparrow\rangle_S + |\downarrow\rangle_S) \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\bar{h}\rangle_{\bar{L}}|\downarrow\rangle_S + |\bar{t}\rangle_{\bar{L}}|\uparrow\rangle_S + |\bar{t}\rangle_{\bar{L}}|\downarrow\rangle_S) \tag{3.13}$$

Una vez hecho esto F hace una medida de S respecto a la base $\{|\uparrow\rangle_S, |\downarrow\rangle_S\}$, además para W y $\bar{W}$ el sistema $\bar{L} \otimes L$ se encuentra en el estado

$$|\Psi_2\rangle_{\bar{L}\otimes L} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\bar{h}\rangle_{\bar{L}}|z = -\frac{1}{2}\rangle_L + |\bar{t}\rangle_{\bar{L}}|z = +\frac{1}{2}\rangle_L + |\bar{t}\rangle_{\bar{L}}|z = -\frac{1}{2}\rangle_L) \tag{3.14}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2|\bar{fail}\rangle_{\bar{L}}|z = -\frac{1}{2}\rangle_L + |\bar{fail}\rangle_{\bar{L}}|z = +\frac{1}{2}\rangle_L - |\bar{ok}\rangle_{\bar{L}}|z = +\frac{1}{2}\rangle_L) \tag{3.15}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}}(3|\bar{fail}\rangle_{\bar{L}}|fail\rangle_L + |\bar{fail}\rangle_{\bar{L}}|ok\rangle_L - |\bar{ok}\rangle_{\bar{L}}|fail\rangle_L + |\bar{ok}\rangle_{\bar{L}}|ok\rangle_L) \tag{3.16}$$

utilizando las definiciones de $|\bar{ok}\rangle$, $|\bar{fail}\rangle$, $|ok\rangle$ y $|fail\rangle$, a partir de (3.16) y puesto que trabajamos con bases ortonormales se ve directamente

$$|_{\bar{L}}\langle\bar{ok}|_L\langle ok|\Psi_2\rangle_{\bar{L}\otimes L}|^2 = \frac{1}{12} \tag{3.17}$$

esto nos dice que la probabilidad de obtener $\bar{w} = \bar{ok}$ y $w = ok$ no es 0. Por lo tanto, existe algún n en el que el experimento se detendrá en un tiempo $n : 40$, porque $\bar{W}$ obtendrá $\bar{w} = \bar{ok}$ a tiempo $n : 20$ y W obtendrá $w = ok$ en $n : 30$.

De la misma forma que hemos llegado a la afirmación anterior, podemos también concluir a partir de (3.15) que

$$|_{\bar{L}}\langle\bar{ok}|_L\langle z = -\frac{1}{2}|\Psi_2\rangle_{\bar{L}\otimes L}|^2 = 0 \tag{3.18}$$

de lo cual obtenemos que si suponemos $\bar{w} = \bar{ok}$ es imposible que el resultado de la medida de F en tiempo $t = n : 10$ sea $z = -1/2$, el resultado debe ser $z = +1/2$. Esto último nos dice que $\bar{F}$ ha preparado y ha enviado el sistema S en el estado $|\rightarrow\rangle_S$. Una vez hemos llegado a estos resultados suponemos que nos encontramos en el caso que $\bar{W}$ ha anunciado $\bar{w} = \bar{ok}$ en $t = n : 20$ que es el resultado que nos interesa, y sabemos también que W es capaz de hacer estos razonamientos, por tanto, los tiene a su disposición en $t = n : 20$. Esto nos dice que W sabe que S estaba en el estado $|\rightarrow\rangle_S$ en $t = n : 09$, por lo tanto para W cuando F mide S respecto a la base $\{|\uparrow\rangle_S, |\downarrow\rangle_S\}$ el estado de L a tiempo $t = n : 10$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|z = +\frac{1}{2}\rangle_L + |z = -\frac{1}{2}\rangle_L) \tag{3.19}$$

Antes de continuar, hay que observar que este estado permanece inalterado, al estar L aislado y su evolución temporal ser la identidad, por lo que L permanecerá en este mismo estado hasta $t = n : 30$.

Este es un estado ortogonal a $|ok\rangle_L$ cosa que hace imposible para W obtener $w = ok$ a tiempo $t = n : 30$ y nos hace llegar a una contradicción con el resultado que dice que existe una ronda n para la cual se detendrá el experimento en $t = n : 40$.

4. Reacciones iniciales al artículo de Frauchiger y Renner

En esta sección hablaremos de *New quantum paradox clarifies where our views of reality go wrong* [3], este es un texto de carácter divulgativo que pretende explicar el artículo en el que se basa, [2], para hacerlo más fácil de entender.

4.1. Sobre el experimento mental

En la primera parte del artículo se explica que es lo que quieren demostrar Frauchiger y Renner con este experimento mental, así como una breve introducción de la función de onda y alguna de sus características.

Posteriormente detalla la descripción del experimento, aunque cambiándole el nombre a los agentes, los llama Alice, amiga de Alice, Bob y la amiga de Bob, en nuestro caso serían $\bar{W}$, $\bar{F}$, W y F respectivamente. No obstante, como es lógico, el procedimiento que siguen estos agentes durante el experimento es el mismo.

Continúa explicando el proceso mediante el cual la amiga de Alice tira una moneda y manda el espín S al otro laboratorio donde lo espera la amiga de Bob, esto hace que el laboratorio entero, como sistema físico con todo lo que contiene, esté en una superposición de estados.

Para entender esto hace una comparativa con un fotón que se encuentra en una superposición de estar polarizado vertical u horizontalmente. Una vez lo medimos vemos que está polarizado verticalmente y así seguirá si lo volvemos a medir, esto es debido a que al hacer la primera medida el fotón queda en el estado de polarización vertical.

Si ahora medimos la polarización del fotón respecto a otro angulo, por ejemplo 45º respecto a la vertical, tenemos una superposición de estados, lo que nos da un 50 % de probabilidad de que lo encontremos y otro 50 % de que no. Después de este proceso, si medimos el fotón que habíamos visto que estaba polarizado verticalmente ahora nos encontraremos con que este fotón vuelve a estar polarizado vertical y horizontalmente, en un estado de superposición.

Lo que nos dice esto es que el segundo proceso de medida, el de 45º respecto a la vertical, ha hecho que un fotón que estaba polarizado verticalmente (al haberse hecho la primera medida) pase a estar en una superposición de estados.

A partir de aquí se explica el análisis que se lleva a cabo en el experimento mental volviendo a hacer cambios en la notación, al resultado *ok* lo denota como *YES* y a $fail$ como *NO*, también usa *UP* para referirse a $|\uparrow\rangle$ y $DOWN$ para $|\downarrow\rangle$.

Usando el mismo razonamiento que en el capítulo anterior se llega a la contradicción, por lo tanto alguna de las suposiciones Q, C o S, vistas anteriormente no debe ser correcta.

4.2. Análisis de los resultados y posibles interpretaciones

Hasta aquí llega la parte que consiste en el análisis del experimento mental, a partir de ahora y como también pasa en el artículo que se está estudiando se quiere ver que teorías cumplen estas suposiciones y con cuales entran en conflicto.

Se habla de algunas de las interpretaciones que hay de la teoría cuántica y que la diferencia entre ellas radica en lo que sucede con la función de onda una vez se hace una medida.

Antes de esta medida solo podemos hablar en términos de probabilidad, si tomamos por ejemplo la posición de una partícula solo podemos saber cual es la probabilidad de encontrar esta partícula en algún lugar.

En el artículo se habla de las distintas interpretaciones de la teoría cuántica para ver como se pueden interpretar los resultados. La más conocida es la interpretación de Copenhagen que nos habla de que la función de onda colapsa una vez se mide y que por lo tanto hasta después de esta medida no se puede hablar de propiedades de una partícula, incluso algunos afirman que hasta esta medida las propiedades no son reales.

Pero esta no es la única, en este artículo se habla también de una interpretación que tiene en cuenta múltiples mundos o "Many worlds interpretation" y algunos, como David Deutsch, piensan que esta interpretación coge fuerza tras ver los resultados del experimento mental y que la suposición que falla es la que nos dice que el resultado de la medida es único.

Otra interpretación "Spontaneous collapse" nos habla de un posible colapso espontáneo y aleatorio de la función de onda que es más probable que se de a medida que la masa del sistema aumenta y que por tanto los sistemas microscópicos podrían mantenerse casi para siempre en un estado de superposición mientras que los sistemas más masivos colapsarán espontáneamente, como principal defensor de esta teoría tenemos a Nicolas Gisin, que afirma que en algún punto el principio que falla será el de superposición debido a este colapso espontáneo.

5. Reacciones posteriores al artículo de Frauchiger y Renner

Como hemos dicho previamente el artículo de Frauchiger y Renner ha generado mucha controversia y por eso vamos a analizar algunos de los artículos que se han publicado a raíz de [2], tanto a favor como en contra.

5.1. Artículos a favor

Uno de estos artículos a favor ha sido "Understanding the Frauchiger-Renner argument" de Jeffrey Bub [4], que hace una una observación: los agentes que se mencionan en el artículo se tienen que entender como sistemas físicos sobre los cuales se puede aplicar la teoría cuántica.

Posteriormente, como muchos de los artículos que hablan sobre este experimento mental, incluido el original, resume brevemente la paradoja de Wigner.

Una vez hecho esto nos sitúa en el escenario del experimento mental incluyendo las suposiciones Q, C y S que se hacen. Además añade que, como ya se dice en [2], los agentes son considerados como ordenadores cuánticos capaces de hacer las medidas del experimento mental y con capacidad para sacar conclusiones cuando estén seguros de los resultados de alguna medida.

A continuación se explica el procedimiento que llevan a cabo estos agentes y algunas de las conclusiones, tal y como se hace en el artículo original llegando así a la contradicción final.

Se explica también que algunos autores que "atacan" el artículo lo hacen diciendo que hay una suposición extra, H, que nos dice que cuando se hace una medida en un laboratorio cerrado, esta medida lleva a un colapso para los observadores en el interior, pero no para los del exterior.

Sin embargo, esto lo contrarresta diciendo que cuando uno de los agentes afirma que el valor de un observable X es ξ a tiempo t no es lo mismo que decir que el valor del observable X es ξ a tiempo t, ya que lo primero es un resultado al que se llega razonando con Q, C, y S.

Finalmente, recrea el procedimiento hecho, incluyendo los resultados a los que llegan los agentes, mostrando así la contradicción observada también en [2] y llega a la conclusión de que la mecánica cuántica no se puede aplicar a procesos que consisten en observar a observadores que a su vez observan otros sistemas.

5.2. Artículos en contra

Empezaremos analizando el "Copenhagen interpretation can survive the upgraded Schroedinger's cat Gedankenexperiment" [5]. Como es habitual este artículo empieza con una descripción del experimento mental.

A continuación, explica los resultados obtenidos por el experimento mental, primero para una interpretación de la teoría cuántica en la que las funciones de onda colapsan al hacer una medida, y posteriormente para una interpretación en la que no existe este colapso.

Lo que defiende el autor sobre las teorías en las que existe este colapso en la función de onda es que las ecuaciones que se utilizan para hacer los cálculos del experimento mental están mal formuladas ya que cuando $\bar{F}$ mida el sistema R el resultado será $|\bar{h}\rangle_{\bar{L}} \otimes |\downarrow\rangle_S$ con probabilidad 1/3 o bien $|\bar{t}\rangle_{\bar{L}} \otimes |\rightarrow\rangle_S$ con probabilidad 2/3. Sin embargo $\bar{W}$ no sabrá este resultado y, por lo tanto, para él no será un estado puro.

Utilizando este mismo razonamiento afirma también que esto le sucede a F a tiempo $t = n : 10$ al medir $|\rightarrow\rangle_S$ respecto a la base $\{|\uparrow\rangle_S, \downarrow\rangle_S\}$, el estado pasaría de $|\rightarrow\rangle_S$ a uno de los de la base, pero W este colapso no lo puede tener en cuenta puesto que no es consciente del resultado y para él aún debería ser un estado mezcla.

Estos estados mezcla, hacen que no sea incompatible para $\bar{W}$ obtener el resultado de $\bar{w} = \bar{ok}$ y, a su vez, $z = -1/2$ debido a que se afirma que el estado $|\bar{ok}\rangle_{\bar{L}} \otimes |\downarrow\rangle_S$ no es ortogonal al nuevo estado mezcla. Lo mismo pasa con W, el estado que esta asociado a este agente no es ortogonal a $|ok\rangle_L$ por lo que podemos obtener $w = ok$ a la vez que $z = +1/2$ o $z = -1/2$.

El argumento que creo que utiliza el autor para reformular los estados de $\bar{W}$ y W es que aunque los agentes saben que se produce la medida por parte de $\bar{F}$ y F, ni $\bar{W}$ ni W saben cual ha sido el resultado, y eso significa que, por lo que respecta a ellos, el estado se encuentra en una superposición.

Ahora pasamos a los argumentos que da siguiendo una interpretación de la teoría cuántica en la que no hay colapso de la función de onda.

Empieza aplicando que “Para cualquier agente (como $\bar{W}$) que no sabe nada de lo que ha pasado dentro del laboratorio (por ejemplo el resultado de $\bar{F}$) el estado del laboratorio se debe describir como una superposición en la que aparezcan todos los posibles resultados”.

Después sigue argumentando que como todos los agentes conocen los procedimientos del experimento mental, cuando algún agente hace una medida, como F midiendo S en $t = n : 10$, para el resto de agentes el laboratorio $L = S \otimes F$ también debe considerarse que esta evolucionando unitariamente. Obtiene así una ecuación para cuando W mide L a tiempo $t = n : 30$, que saben todos los agentes porque usan la misma teoría, y se debe decidir si es esta ecuación o la que hay en [2] la que sirve para describir el sistema.

Tanto para $\bar{W}$ como para W se ve que el sistema tiene que estar en un estado de superposición puesto que ellos no saben nada de lo que ocurre dentro del laboratorio, así que utilizarían la nueva ecuación. Además de esto $\bar{F}$ debe ser consciente de este hecho por lo que debería usar también esta ecuación, sino ella no estaría usando la misma teoría cuántica de manera consistente durante todo el experimento.

Otro artículo en contra es “The Frauchiger-Renner paradox”[6], se trata de un trabajo de fin de grado que empieza con una introducción tanto a la teoría cuántica como a los precedentes del experimento mental de Frauchiger y Renner.

En su segundo capítulo nos introduce una notación que parece estar basada en la lógica, con la que formula las suposiciones de [2] y el montaje del experimento mental.

A continuación se recrea el análisis del experimento usando su notación obteniendo los mismos resultados que ya hemos comentado, con la correspondiente contradicción.

Finalmente analiza las suposiciones, tanto implícitas como explícitas que se han utilizado en el artículo original, hay suposiciones, como Q, C y S, con las que afirma no tener problemas, sin embargo hay otras con las que dice no estar de acuerdo, estas dicen lo siguiente, cuando mides un laboratorio que está en una superposición de todos los posibles estados, aunque hagamos una medida del laboratorio después y podamos afirmar cual es el resultado, eso no significa que el estado del laboratorio estuviera bien definido antes y esto entra en contradicción cuando afirman que por saber el estado en el que está el laboratorio en un tiempo t_2 no se puede afirmar que ese fuese también su estado (sin ninguna superposición) en un tiempo t_1 con $t_1 < t_2$.

6. Conclusiones

Después de la lectura del artículo original y el resto de artículos analizados he llegado a un resultado similar al de [7].

En tiempo $t = n : 09$ el estado de L para F es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|z = +\frac{1}{2}\rangle_L + |z = -\frac{1}{2}\rangle_L) \tag{6.1}$$

Sin embargo al hacer la medida en $t = n : 10$ este estado pasa a ser

$$|z = +\frac{1}{2}\rangle_L \tag{6.2}$$

que, como observación, vemos a partir de la definición de $|ok\rangle_L$ que no son ortogonales, ya que

$$|ok\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_L - |\uparrow\rangle_L) \tag{6.3}$$

y $|z = +\frac{1}{2}\rangle_L$ es el resultado que se obtiene si al medir S según la base $\{|\uparrow\rangle_L, |\downarrow\rangle_L\}$ nos encontramos con el estado $|\uparrow\rangle_L$.

A pesar de que para $\bar{W}$ el laboratorio L aún se encuentra en una superposición, cuando mide $\bar{L}$ en $t = n : 20$ y obtiene como resultado $\bar{w} = \bar{ok}$ esto le lleva al mismo resultado que tiene F: "el estado de L es (6.2)". Esto contradice el argumento usado en [4], ya que F sí que había realizado una medida.

Además, al $\bar{W}$ hacer público el resultado de su medida hace que W sea consciente también de este nuevo estado, haciendo así que para W el estado de L sea también (6.2), que como hemos dicho, no es ortogonal a $|ok\rangle_L$, hecho que inhabilita la contradicción a la que se llegan Frauchiger y Renner.

Como hemos dicho, este es un argumento similar al que se da en [7] que además nos pone un ejemplo para entenderlo mejor.

Suponemos que un agente A prepara el espín de una partícula en el estado $|\uparrow\rangle$, lo guarda en un recipiente hermético y se lo da a un agente B. Para el agente B el sistema está en una superposición de los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, pero en el momento que A le dice a B que ha preparado el sistema en el estado $|\uparrow\rangle$ ahora para B el sistema también se encontrará en ese estado.

Referencias

[1] Nielsen, M.; Chuang, I. [en línea] *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition.* Cambridge: Cambridge University Press. Part I, Chapter 2: *Introduction to quantum mechanics* (2010) [Consulta: 16 de junio de 2021] Disponible en: <doi:10.1017/CBO9780511976667>

[2] Frauchiger, D.; Renner, R. [en línea] *Quantum theory cannot consistently describe the use of itself*, Nat Commun **9**, 3711 (2018). [Consulta: 16 de junio de 2021] Disponible en: <https://doi.org/10.1038/s41467-018-05739-8>

[3] Ananthaswamy A. [en línea] *New quantum paradox clarifies where our views of reality go wrong* Quanta Magazine. (2018) [Consulta: 16 de junio de 2021] Disponible en: <https://www.quantamagazine.org/frauchiger-renner-paradox-clarifies-where-our-views-of-reality-go-wrong-20181203>

[4] Bub, J. [en línea] *Understanding the Frauchiger-Renner argument*, Foundations of Physics **51**, 36 (2021). [Consulta: 16 de junio de 2021] Acceso para usuarios de la UB: <https://doi-org.sire.ub.edu/10.1007/s10701-021-00420-5>

[5] Ping He, G. [en línea] *Copenhagen interpretation can survive the upgraded Schroedinger's cat Gedankenexperiment*, Foundations of Physics **50**, 715-726 (2020). [Consulta: 16 de junio de 2021] Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10701-020-00343-7>

[6] Koot, I. [en línea] *The Frauchiger-Renner paradox*, Radboud University Nijmegen (2019) [Consulta: 16 de junio de 2021] Disponible en: <https://www.math.ru.nl/ landsman/IanKoot2019.pdf>

[7] Bernal, A. [en línea] *On the paper "Quantum theory cannot consistently describe the use of itself"*, ArXiv: 2106.07312v1 (2021) [Consulta: 16 de junio de 2021] Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/2106.07312v1.pdf>