Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS Y ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Trabajo final de grado

Portfolio management y Efecto Covid-19

Autora: Alona Hubarenko Zakorko

Director: Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia
Dr. José Bonifacio Sáez Madrid

Realizado en: Departamento de Matemáticas e Informática
Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial

Barcelona, 20 de junio de 2021

Abstract

A lot of sectors have suffered the effects of the current pandemic and its instability. It is clear that the stock market is really sensitive to periods of such instability and this phenomenon has been reflected in the IBEX 35.

The Markowitz's Model is a mathematical procedure to determine how to select an optimum portfolio in which to invest. This project is a theoretical and practical analysis of different definitions of risk, and its application into the model. The main aim of it is to compare several created portfolios using the defined risks before and during the pandemic.

Kewywords: stock market, IBEX 35, Markowitz's Model, optimum portfolio, invest, risk, pandemic.

Resumen

Muchos sectores se han visto castigados por la actual pandemia y la inestabilidad de su evolución. Es claro, el mercado bursátil es muy sensible a tales periodos de inestabilidad y, este fenómeno se ha visto reflejado en el IBEX 35.

El Modelo de Markowitz es un procedimiento matemático para determinar cómo seleccionar una cartera de inversión óptima en la cual invertir. En este trabajo se hace un recorrido teórico y práctico por diferentes definiciones de riesgo, y la implementación de ellas en el modelo. El principal objetivo es, comparar las carteras de inversión creadas usando dichas definiciones antes y durante la pandemia.

Palabras clave: mercado bursátil, IBEX 35, Modelo de Markowitz, cartera de inversión, invertir, riesgo, pandemia.

2020 Mathematics Subject Classification. 91G10, 91G70, G2P20

Agradecimientos

Con el presente proyecto finalizo una de las etapas más importante a nivel personal y profesional. Han sido seis duros años entre la Facultad de Matemáticas e Informática y, la de Economía y Empresa, en los que he perseguido un ambicioso reto.

Por eso, me gustaría mencionar a todos los profesores que he tenido a lo largo de mi etapa universitaria, que además se ha visto complicada por la actual pandemia.

Mencionar también a mis dos tutores, Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia y Dr. José Bonifacio Sáez Madrid, por asesorarme y guiarme en la elaboración de este trabajo final de grado. Un especial agradecimiento, al tutor por la parte de Administración y Dirección de Empresas por toda la paciencia y la rigurosa bibliografía facilitada.

Y, por último pero no menos importante, quería agradecer a mi profesora de matemáticas de bachillerato, Montserrat Sánchez Martín, por inculcarme su pasión por las matemáticas y motivarme en todo momento a iniciar su estudio.

Sin todos vosotros todo esto no hubiera sido posible. ¡Muchas gracias!

"Mide lo que se pueda medir; y
lo que no, hazlo medible"
Galileo Galilei.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y conceptos previos

Estudiante del doble grado de Matemáticas y, Administración y Dirección de Empresas, queriéndose dedicar al ámbito de las finanzas. La pandemia estalló en el último año de mi etapa univeristaria. Así, la elección del tema desarrollado se debe a que, a pesar de haber realizado las menciones de Economía y Finanzas en cada uno de los dos grado, no he tenido la oportunidad de comprobar cómo ha interferido la expansión del virus en muchos aspectos económicos, entre ellos, la cotización bursátil.

1.1. Objetivos

A lo largo de los capítulos se persiguen los objetivos concretos siguientes:

1. Comprender el funcionamiento de la gestión de carteras de inversión y sus fases.
2. Estudiar diferentes definiciones de riesgo financiero, y definir métodos de cuantificación asociados.
3. Analizar el Modelo de Markowitz y, modificar sus hipótesis aplicando definiciones alternativas de riesgo.
4. Manipular datos reales, aplicando el marco teórico realizado, mediante Microsoft Excel.
5. Crear una herramienta en Visual Basic para automatizar el cálculo y la representación gráfica de carteras de inversión eficientes.
6. Comparar las carteras de inversión eficientes obtenidas a través de las diferentes deficiones de riesgo, antes y durante la pandemia.

1.2. Desarrollo del proyecto

Los primeros cuatro capítulos forman el marco teórico. Inicialmente, se definen varios conceptos financieros para más adelante, poder comprender el Modelo de Markowitz. Una vez analizado el modelo, se procede a la modificación de sus hipótesis mediante la aplicación de diversas definiones de riesgo financiero y el estudio de las consecuencias sobre el IBEX 35. Para ello, se usa la herramienta creada en Visual Basic, incluida en los anexos, además de otras funciones de Microsoft Excel. Se persigue ilustrar la heterogeneidad existente en la cuantificación del riesgo financiero y las diferencias que añade un fenómeno inestable como la pandemia a dicha cuantificación.

1.3. Conceptos previos

Veáse [2], [7], [8] y de [12] a [19]. En esta sección, se definen conceptos clave, que serán usados a lo largo de todo el proyecto.

Entre todos los conceptos desarrollados, cabe destacar los siguientes:

- Acción
- Bolsa de valores
- Capitalización bursátil
- Índice bursátil

Según los autores Paul R. Krugman y Robin Wells (veáse [8]), un activo es un recurso con valor que se posee con la intención de que este genere un beneficio futuro. El activo, conjunto de todos los activos, es uno de los tres elementos patrimoniales que configuran una sociedad, junto con el pasivo y el patrimonio neto. El pasivo representa las deudas y obligaciones con las que una empresa financia su actividad y le sirve para pagar su activo. El patrimonio neto es el valor total de una empresa una vez descontadas las deudas, es decir, es la diferencia entre el activo y el pasivo. Por su parte, el patrimonio neto está formado principalmente por las aportaciones de capital de los socios y las reservas o beneficios generados y no distribuidos por la compañía. Por lo tanto,

$$Patrimonio\ neto \ = \ Activo - Pasivo. \tag{1.1}$$

A grandes rasgos, podemos entender el total de activos de una empresa como el conjunto de activos financieros y el de activos físicos. Durante todo el proyecto, se trabaja únicamente con activos financieros. De esta manera, si en alguna ocasión no se especifica el tipo de activo, se sobrentenderá que se trata de un activo de tipo financiero.

Definición 1.1. *Un* ***activo financiero*** *es un título o anotación contable que otorga al comprador el derecho a recibir un ingreso futuro por parte del vendedor. Un* ***activo físico*** *es todo activo que no es considerado activo financiero. En concreto, son objetos tangible cuyo propietario tiene el derecho de disponer de él a su antojo.*

Según la definición anterior, un coche, una máquina o un software informático son ejemplos de activos físicos. En sentido contrario, un depósito bancario es considerado un activo financiero.

Definición 1.2. ***Una bolsa de valores****, o simplemente bolsa, es un mercado financiero, oficialmente regulado, con unos intermediarios y formas de contratación específicas donde se negocia todo tipo de activos financieros. La sociedad rectora de bolsas de valores, es una sociedad encargada exclusivamente de regir y administrar una bolsa de valores. En otras palabras, será responsable de su organización y funcionamiento interno.*

En las bolsas de valores cotizan diferentes tipos de activos financieros. Son ejemplo los activos de renta fija pública y corporativa, las divisas, los índices, los derechos de suscripción y las criptomonedas, entre otros.

El origen de la bolsa de valores en España se sitúa en 1831 con la publicación de la Ley de creación de la Bolsa de Madrid. En 1890 nace la Bolsa de Bilbao, en 1915 la Bolsa de Barcelona y en 1970 la Bolsa de Valencia. Actualmente, todas se integran en Bolsas y Mercados Españoles (BME).

Algunos ejemplos de las bolsas más populares son; la Bolsa de Nueva York (NYSE) con un valor aproximado de 5 billones de dólares, la Bolsa de Tokio (JPX) y la Bolsa de Londres (LSE) ambas con un valor alrededor de 3,3 billones de dólares. En comparación, la Bolsa española, tendría un valor de 950.000 millones de euros a final de 2020.

En dichos mercados financieros organizados, todos los activos deben estar inequívocamente identificados a nivel mundial. Para ello, se usan el *ticker* y el código ISIN (*International Securities Identification Number*), definidos ambos a continuación.

Definición 1.3. *El* ***ticker*** *de un activo financiero es una abreviatura de 3 o 4 caracteres identificativos de su empresa.*

El *ticker* crearía dudas en las denominaciones de los activos que no van asociados a una empresa, como en el caso de los activos de la deuda pública. Este problema, queda solucionado con el código ISIN.

Definición 1.4. *El* ***código ISIN*** *es una referencia alfanumérica de 12 caracteres asociados únicamente a un activo financiero.*

A modo de ejemplo, los códigos *ticker* y ISIN de las acciones de CaixaBank y Merlin Properties, respectivamente, son:

CaixaBank	CABK	ES0140609019
Merlin Properties	MRL	ES0105025003

Análogamente, los códigos ISIN de ciertos activos de Deuda Pública española son:

LET TESORO PÚBLICO DESC 03/2019	ES0L01903084
OBL TESORO PÚBLICO - IDX 0,700 11/2033	ES0000012B88

Definición 1.5. *La* ***renta variable*** *es un tipo de inversión formada por todos aquellos activos financieros de evolución incierta. Al contrario que en la* ***renta fija****, no conocemos los flujos de caja que vamos a recibir de antemano.*

Definición 1.6. *Una* ***acción*** *es un tipo de activo financiero de renta variable. Se define como la parte alícuota del capital de una empresa, y además de los derechos políticos que otorga a sus propietarios, también otorga derechos económicos.*

La manera de valorar una acción, no es única. Se distinguen, al menos 7 métodos para ello.

- **Valor de mercado**

  Definición 1.7. *El valor de mercado es el precio o cotización que presenta una acción en un momento determinado en la bolsa de valores, este cambia continuamente por la interacción de la oferta y la demanda.*

- **Valor de adquisición**

  Definición 1.8. *El valor de adquisición es la cantidad que realmente pagará el cliente al final de la operación, una vez se hayan sumado las comisiones y gastos que perciben el intermediario bursátil y la Sociedad Rectora de la Bolsa.*

- **Valor de venta**

  Definición 1.9. *El valor de venta es la cantidad que realmente cobrará el cliente final de la operación, una vez se hayan deducido las comisiones y gastos que perciben el intermediario bursátil y la Sociedad Rectora de la Bolsa.*

- **Valor nominal (VN)**

Definición 1.10. *El valor nominal es el valor que figura impreso en el título físico o anotado en cuenta del título. Se obtiene mediante el cociente siguiente:*

$$VN = \frac{Capital\ Social}{Número\ de\ acciones}. \tag{1.2}$$

El valor nominal no suele cambiar salvo que:
a) La empresa realice un *split*.
b) La empresa realice un *contrasplit*.

Definición 1.11. *Un **split** es una operación que consiste en desdoblar una acción en varias. En consecuencia, el precio de la acción queda dividido por el mismo número, multiplicándose asimismo el número de acciones de la empresa.*

Definición 1.12. *Un **contrasplit** es una operación que consiste en reagrupar varias acciones antiguas en una nueva acción. En consecuencia, el precio de la acción queda multiplicado por el mismo número, dividiéndose el número de acciones de la empresa.*

Observación 1.13. Aunque en las operaciones *split* y *contrasplit* no varía el valor total de la empresa, se modifica la percepción que se tiene de las acciones. En otras palabras, para el accionista es equivalente tener una acción de 10 euros que 2 acciones de 5 euros.

- **Valor contable o *Price/Book* (P/B)**

Definición 1.14. *El valor contable o Price/Book es el valor que se desprende de los registros de la sociedad. Se obtiene mediante el cociente siguiente:*

$$P/B = \frac{Patrimonio\ Neto}{Número\ de\ acciones}. \tag{1.3}$$

Varía diariamente puesto que la generación de beneficios o pérdidas que afectan al patrimonio neto de la empresa se produce continuamente. No se debe confundir, una cuestión distinta es que dicho valor pueda conocerse, ya que los registros se publican mensualmente o trimestralmente.

- **Valor de liquidación**

Definición 1.15. *El valor de liquidación es el valor que se obtendría si se valorara el patrimonio de la empresa como si fuera a ser liquidada en el momento actual.*

- **Valor teórico, valor objetivo o valor intrínseco**

  Definición 1.16. *El valor teórico, valor objetivo o valor intrínseco es el valor que se obtiene por la actualización de las expectativas de los flujos monetarios de la acción.*

  El método de actualización de las expectativas no es único. Entre los más usados, encontramos el método de los índices y el cálculo del valor actual neto (VAN). La definición de dicho métodos se omite ya que se aleja de los objetivos del proyecto.

Como ya se ha mencionado en su definición, las acciones otorgan a sus propietarios derechos políticos y derechos económicos. Según la BME, entre los derechos económicos que pueden poseer las acciones, se distinguen hasta 19 formas distintas de retribución, entre las que destacan:

- **Dividendo clásico**

  Definición 1.17. *El dividendo clásico es la parte de los beneficios netos de la empresa que la Junta de Accionistas destina a la retribución del accionista en forma de dinero efectivo.*

  Observación 1.18. De la definición, se deduce que el reparto de dicho dividendo produce una disminución en el patrimonio de la empresa. Y, por lo tanto en el valor contable de la acción y la cotización de la acción.

  Definición 1.19. *Al porcentaje que el dividendo representa sobre el beneficio neto se le denomina **pay-out** y se representa como δ:*

  $$\delta = \frac{Dividendos}{Beneficio\ neto}. \tag{1.4}$$

- **Derechos de suscripción**

  Definición 1.20. *Los derechos de suscripción son un derecho del accionista que aparece en las ampliaciones de capital con emisión de nuevas acciones, y que le permite suscribir un número de acciones proporcional a su participación en el capital social de la empresa.*

  Cuando el Consejo de Administración de una sociedad aprueba realizar una ampliación de capital social, todo accionista tiene el derecho preferente a suscribir nuevas acciones. Este derecho persigue que el accionista pueda conservar el mismo porcentaje de participación en el capital social que tenía antes de afectuarse la ampliación. En otras palabras, conservar el cociente siguiente:

$$\%\ participación = \frac{Acciones\ poseídas\ \times\ Valor\ nominal}{Capital\ social}. \tag{1.5}$$

Si el accionista dedice no ejercer el derecho de suscripción, cabe la posibilidad de venderlo y, su valor viene dado por la diferencia entre la cotización de las acciones antes de la ampliación y el precio de suscripción de las nuevas acciones emitidas. En este caso, su porcentaje de participación se verá reducido y tendrá lugar el llamado efecto dilución. Si el accionista ejerce su derecho, recibirá las nuevas acciones y deberá pagar su valor a la empresa.

- **Dividendo elección o *scrip dividend***

  Definición 1.21. *El dividendo elección o scrip dividend consiste en realizar una ampliación de capital con cargo íntegro a reservas, de tal forma que el accionista puede elegir entre vender en el mercado sus derechos de suscripción y obtener dinero efectivo, o canjearlos sin coste por nuevas acciones en la proporción establecida.*

- **Devolución de primas de emisión**

  Definición 1.22. *Las primas de emisión son el sobreprecio sobre el valor nominal con el que se emiten las nuevas acciones en una ampliación de capital.*

  Definición 1.23. *La devolución de primas de emisión es una forma de retribuir al accionista con cargo a reservas voluntarias, debido a que los beneficios del ejercicio son escasos o inexistentes.*

  Estas reservas voluntarias se crearon con las primas de emisión que pagaron los accionistas en anteriores ampliaciones de capital realizadas por la empresa, de ahí que este derecho económico reciba el nombre de devolución de primas de emisión.

  Observación 1.24. Análogamente al caso del dividendo clásico, la devolución de primas de emisión genera una reducción del valor contable y la cotización de la acción puesto que disminuye el patrimonio neto de la empresa.

Definición 1.25. *Un **índice** es un cociente que expresa una relación de carácter económico con fines explicativos. En particular, mide las variaciones de una determinada magnitud referida a un valor que se toma como base en un momento dado en el tiempo.*

El Índice de Precios al Consumo (IPC), es un ejemplo de índice ampliamente usado en Economía. Tiene como objetivo medir la evolución de los precios de bienes y servicios representativos de los gastos de consumo de los hogares de una determinada zona. El IPC español en abril de 2021 fue del 2,2 % (veáse [18]). Esto significa que toda persona tendrá que gastar en promedio un 2,2 % más para adquirir lo que se considera la cesta de consumo básica.

Puesto que no es posible recoger el comportamiento agregado de todas las empresas de un mercado, por una cuestión de coste de gestión de toda la información, se suele escoger un grupo simplificado de empresas que sea lo suficientemente representativo del comportamiento de todas. Dicho grupo forma lo que se conoce como **índice bursátil**. Aparte de los existentes índices, en ocasiones también se crean índices sintéticos o artificiales.

No existe un criterio único para seleccionar los valores que deben formar parte de la composición de un índice, algunos de los criterios posibles son:

- **Según el volumen de contratación**

- **Según la capitalización bursátil**

  Definición 1.26. *La capitalización bursátil es el valor que tiene una empresa en el mercado en un momento dado. Se obtiene multiplicando el precio de cotización/acción por el número total de acciones que posee la sociedad en dicho momento.*

  A modo de ejemplo, según la información facilitada por el Banco Sabadell (veáse [19]), al cierre de este primer trimestre la entidad contaba con 5.626.964.701 de acciones a un precio de 0,456€/acción. Esto la hace poseer una capitalización bursátil de 2.565.895.904 € para dicho periodo.

- **Según la frecuencia de cotización**

  Definición 1.27. *La frecuencia de cotización expresa, en tanto por ciento, la relación que existe entre el número de días que un determinado valor cotiza en el mercado y el número de días hábiles de dicho mercado.*

La composición de un índice bursátil no siempre es la misma y puede variar periódicamente debido a la dinámica de los mercados. Además, no todos los índices bursátiles están calculados del mismo modo, y por lo tanto no son comparables. Se distinguen principalmente dos métodos de cálculo para los índices de renta variable, se exponen ambos a continuación.

- **Método de ponderación por precios o *price weighting***

El índice se obtiene a través del cociente entre la suma aritmética de los precios finales de las acciones y el divisor del índice respecto de una fecha inicial.

Sea B el valor base o inicial del índice, n el número total de empresas que forman el índice, p_t^j los precios finales de las acciones de las empresas que forman el índice, p_0^j los precios iniciales y c_j el coeficiente de ajuste en el caso de que una acción dada tenga un split. Entonces,

$$IPW_{t/0} = B \cdot \frac{p_t^1 + ... + p_t^n}{c_1 \cdot p_0^1 + ... + c_n \cdot p_0^n}. \qquad (1.6)$$

El Down Jones norteamericano y el Nikkei japonés son ejemplos de índices que utilizan este método de cálculo.

Entre las ventajas de este método de cálculo se encuentran su fácil aplicación sin *splits* y el hecho de que las grandes empresas no tienen elevada influencia sobre el índice. Por otro lado, entre las desventajas encontramos que al no tener en cuenta el número de acciones de las empresas, las pequeñas empresas pueden tener demasiada influencia en el índice.

- **Método de ponderación por valor o *value weighting***

El índice se obtiene a través del cociente entre la suma final de la capitalización bursátil de las empresas del índice y el divisor respecto a una fecha inicial.

Respetando la notación anterior, sea q_t^j el número final de acciones de las empresas que forman el índice y q_0^j el número inicial de acciones. Entonces,

$$IVW_{t/0} = B \cdot \frac{p_t^1 \cdot q_t^1 + ... + p_t^n \cdot q_t^n}{p_0^1 \cdot q_0^1 + ... + p_0^n \cdot q_0^n}. \qquad (1.7)$$

El EuroStoxx-50 y el S&P 500, como la mayoría de índices, utilizan este método de cálculo que no se ve afectado por la existencia de *splits*.

Entre las ventajas de este método de cálculo, el índice evoluciona según el tamaño y el peso que tienen las empresas en la economía. La desventaja que esto comporta es que las grandes empresas tienen una gran influencia sobre el índice, y por lo tanto, la evolución del índice va asociado a las grandes empresas.

El **IBEX 35** es el índice oficial de referencia para la Bolsa española. Como su nombre indica, está compuesto por las acciones de las 35 empresas españolas de mayor capitalización bursátil.

Dos veces al año se seleccionan las empresas que van a formar parte del índice durante cada uno de los semestres naturales (del 1 de enero al 30 de junio y del 1 de julio al 31 de diciembre). Es actualizado constantemente a través del método de ponderación de valor o *value weighting*, expuesto anteriormente.

Por ejemplo, el día 9 de mayo de 2021, a las 9.00h el índice poseía un valor de 9.042,00 puntos. Y durante el mismo día, osciló en el intervalo [8.982,90 , 9.065,90].

De la ecuación (1.7) se observa que, el IBEX 35 no tiene en cuenta el pago de dividendos en su cálculo. Para ello, encontramos otros índices como el IBEX Top Dividendo.

Puntualmente, el índice puede no estar formado por 35 empresas. Por ejemplo, en septiembre de 2020 la empresa MásMóvil abandonó el índice tras la realización de una Oferta Pública de Adquisión (OPA). De este modo, hasta el 1 de enero de 2021 el índice se estuvo calculando con 34 empresas.

Según el informe mensual de BME (veáse [17], página 57), actualmente las empresas que forman el IBEX 35, y sus respectivos porcentajes de ponderación al índice son:

Nombre de la empresa	% Ponderación	Nombre de la empresa	% Ponderación
1. Iberdrola	15,55	19. Arcel.Mittal	1,20
2. Inditex	11,59	20. Bankinter	1,17
3. Santander	11,08	21. Enagas	1,07
4. BBVA	6,51	22. Acciona	1,04
5. Amadeus IT	6,00	23. Merlin Prop.	0,90
6. Telefonica	4,65	24. Mapfre	0,72
7. Cellnex	4,22	25. Acerinox	0,66
8. CaixaBank	3,75	26. Fluidra	0,63
9. Aena	3,66	27. Viscofan	0,60
10. Repsol	3,65	28. Banco Sabadell	0,57
11. Ferrovial	3,59	29. Inm. Colonial	0,56
12. Int. Airl. GRP	2,56	30. Solaria	0,50
13. Endesa	2,11	31. Cie Automot.	0,48
14. Grifols	2,10	32. Almirall	0,41
15. Siemens Gam.	1,98	33. Pharma Mar	0,40
16. Acs Const.	1,94	34. Indra "A"	0,29
17. Red Ele. Corp.	1,80	35. Melia Hotels	0,25
18. Naturgy Ener.	1,79		

Una manera de estudiar la evolución del índice, es agrupar a las empresas por sectores. Se distinguen básicamente 7, y las empresas quedan clasificadas de la manera que se expone a continuación.

1. Pétroleo y Energía (26,57 %)

   Iberdrola, Red Ele. Corp., Enagas, Endesa, Repsol, Naturgy Ener. y Solaria.

2. Materiales básicos, Industria y Construcción (11,44 %)

   Acs Const., Arcel.Mittal, Acciona, Siemens Gam., Ferrovial, Fluidra, Cie Automot. y Acerinox.

3. Bienes de Consumo (18,76 %)

   Inditex, Grifols, Aena, Pharma Mar, Almirall y Viscofan.

4. Servicios de Consumo (2,81 %)

   Melia Hotels y Int. Airl. GRP.

5. Servicios Financieros (23,8 %)

   Santander, BBVA, CaixaBank, Banco Sabadell, Bankinter y Mapfre.

6. Tecnología y Telecomunicaciones (15,16 %)

   Amadeus IT, Telefonica, Cellnex y Indra "A".

7. Servicios Inmobiliarios (1,46 %)

   Merlin Prop. y Inm. Colonial.

Capítulo 2

Portfolio management

Veáse [3], [4], [6] y [9].

A través del presente capítulo se define el término cartera y las fases que engloba su gestión. A pesar de que los conceptos de rentabilidad y riesgo no se desarrollan hasta el siguiente capítulo, intervienen en la definición de *portfolio management*. Por ahora, se entenderá como rentabilidad la capacidad de producir un beneficio anualmente, y como rentabilidad esperada la rentabilidad que un inversor espera obtener de cara al futuro de una determinada inversión. Así mismo, se entenderá por riesgo la contingencia o la proximidad de un daño, definciones extraídas del diccionario de la Real Academia Española.

2.1. Definición y fases del *portfolio management*

Definición 2.1. *Una* ***cartera*** *es un conjunto de activos, no necesariamente financieros, que se reúnen dentro del patrimonio de un determinado inversor o gestor para conseguir un objetivo final determinado en un plazo concreto.*

Las carteras se clasifican según el tipo de activos que las componen. De esta manera, una posible clasificación es la siguiente:

- **Cartera de valores mobiliarios**
  Son carteras de valores mobiliarios aquellas carteras que reúnen activos financieros tales como acciones, letras o bonos. Por lo tanto, estas son las carteras a considerar para el desarrollo del proyecto.
- **Carteras de valores inmobiliarios**
  Son carteras de valores inmobiliarios las compuestas por bienes tales como pisos, locales, terrenos o oficinas, entre otros.
- **Cartera de *commodities***
  Las carteras de *commodities* se encuentran compuestas por materias primas como petróleo, cacao, café, azúcar, oro o cobre.

- **Cartera de productos derivados, divisas, criptomonedas, etc**
- **Cartera de cuadros, sellos, monedas, joyas, etc.**

Definición 2.2. *La* ***gestión de carteras de valores****, más comunmente conocida por su nombre anglosajón* ***portfolio management****, es el conjunto sistemático y ordenado de actividades que se realizan desde el momento que se pretende construir o adquirir una cartera hasta el momento que se liquida o vende esta.*

El descrito conjunto de actividades sigue un proceso de inversión estructurado en tres etapas:

- Política de inversión
- Asignación de activos
- Valoración de la gestión

Todas ellas, se desarrollan en profundidad a continuación.

2.1.1. Política de inversión

Esta primera etapa, reduce la posibilidad de tomar decisiones inapropiadas en el proceso de inversión puesto que en ella se fija:

- **El objetivo final en la constitución de la cartera**

  El objetivo final puede variar dependiendo de si la cartera que se vaya a construir está diseñada por una entidad con el fin de comercializarla de forma estándar a un público concreto, o bien está diseñada de forma personalizada para un inversor.

  Algunos objetivos, cuando la cartera está diseñada para su comercialización, podrían ser: alcanzar una rentabilidad igual o superior a la inflación, replicar o batir algún índice de referencia o limitar la posibilidad de pérdida. Mientras que cuando la cartera se personaliza, encontramos objetivos como alcanzar un capital para pagar la educación de los hijos o la adquisición de la vivienda habitual.

  En el caso de que un inversor desee alcanzar varios objetivos finales, se recomienda constituir una cartera para cada objetivo.

- **El horizonte temporal para alcanzar el objetivo**

- **El perfil de riesgo del inversor**
  El perfil de riesgo del inversor se suele conocer a través de una encuesta, y puede depender de diferentes variables cualitativas y cuantitativas como pueden ser la edad, la cultura o la situación familiar, entre otras.

  En función del riesgo que desee asumir el inversor, se distinguen diferentes perfiles de inversor.

  - **Inversor averso al riesgo o inversor conservador**
    Se considera que este inversor sólo asume mayores riesgos si cree que proporcionalmente obtendrá mayores niveles de beneficios.

  - **Inversor amante al riesgo o inversor arriesgado**
    Un inversor es amante al riesgo si para alcanzar mayores niveles de beneficios, está dispuesto a asumir proporcionalmente mucho más riesgo.

  - **Inversor indiferente al riesgo o inversor moderado**
    No son inversores a los que no les importe el riesgo, como podría parecer según su nombre, sino que sólo admitirán mayores niveles de riesgo si proporcionalmente creen que obtendrán el mismo incremento en el nivel de beneficio.

  Las loterías y los seguros son ejemplos de que existen formas mixtas de comportamiento.

2.1.2. Asignación de activos

La segunda etapa del *portfolio management*, consiste en el diseño e implementación de la estrategia concreta necesaria para llevar a cabo la política de inversión, etapa previa a esta. Para ello, se debe tener en cuenta el escenario macroeconómico y político del momento, la situación de los mercados financieros y para cada cartera se definirá:

- ***Asset allocation***: elección y ponderación de las categorías de activos que compondrán la cartera.
- ***Security selection***: elección de los títulos concretos que formarán la cartera.
- ***Market timing***: elección de los momentos más adecuados para comprar o vender los títulos.
- La **forma de gestionar** la cartera, que tendrá como referencia la existencia o no de un índice.
- El **método de inversión**, o formas en que se puede disponer o distribuir los capitales a lo largo del tiempo.

- Las **restricciones** existentes a la inversión, tanto legales como personales de cada inversor.

2.1.3. Valoración de la gestión

Por último, la valoración de la gestión consiste en la revisión periódica, o bien cuando exista un cambio sustancial en la situación de los mercados o del inversor, que confirme o no el cumplimiento de la política de inversión. En particular, dicha valoración consistirá en:

- Calcular y comparar la rentabilidad con una cartera de referencia para averiguar el origen de los aciertos y errores que se puedan haber cometido en la selección de activos o en su ponderación.
- Valorar si dicha rentabilidad se ha obtenido acorde a un riesgo comparable al de la cartera de referencia y asumible por el inversor.

Con toda la información anterior, periódicamente se deberán tomar las decisiones necesarias para cumplir con la política de inversión marcada para la cartera.

2.2. Modelización de carteras

Como ya se ha comentado anteriormente, invertir en acciones no garantiza obtener un beneficio conocido ya que este depende de múltiples factores asociados a la empresa en cuestión y a los mercados financieros. Tener en cuenta todos los posibles factores influyentes es complejo y para simplificar su estudio se emplean modelos. No sólo es una cuestión de reducción del coste de gestión de toda la información, además un modelo complejo y costoso tampoco garantiza el éxito.

Los Modelos de H. Markowitz y W. Sharpe fueron los precursores de lo que porteriormente se ha denominado Teoría Moderna de Carteras y por ello recibieron el Premio Nobel de Economía en 1990. El Modelo de H. Markowitz es un modelo clásico para construir fronteras eficientes con activos de renta variable, y queda recogido en el capítulo 4 de este proyecto.

Prácticamente todos los modelos de gestión de carteras se pueden plantear como un problema en el que se persigue:

- **Minimizar**: una medida de riesgo.
- **Maximizar**: una medida de rentabilidad.
- **Sujeto a unas restricciones**: sobre los activos, por normativa legal o sobre el inversor.

Definición 2.3. *Una cartera es* ***eficiente*** *si no existe ninguna otra cartera que proporcione una mayor rentabilidad para el mismo nivel de riesgo. De manera equivalente, una cartera es eficiente si no existe ninguna otra que proporcione un menor riesgo para la misma rentabilidad.*

En general, la cartera que minimiza el riesgo no coincide con la cartera que maximiza la rentabilidad. Las condiciones de optimización planteadas en el problema no lineal a resolver, se pueden generalizar a un problema general de optimización que cumple las llamadas condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), y sobre su resolución se tienen los resultados expuesto mediante los siguientes teoremas.

Consideramos las funciones

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k.$$

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, muestran cómo encontrar solución al problema:

$$\textit{Mínimo de } f(v) : g(v) = 0, \ \textit{con } g(v) = (g_1(v), ..., g_k(v)), \ (2.1)$$

tomando valores en $\mathbb{R}^k$.

Sea $g'(v)$ la **matriz Jacobiana** $k \times n$

$$g'(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(v) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(v) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(v) & ... & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(v) \end{pmatrix}.$$

Diremos que $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es continuamente diferenciable si todos los elementos de la matriz Jacobiana son funciones continuas. Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, su matriz Jacobiana se define como:

$$f'(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(v) & . & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(v) \end{pmatrix}.$$

En ocasiones, es más conveniente usar un vector en lugar de la matriz $1 \times n$ definida, dicho vector recibe el nombre de **gradiente**.

$$\bigtriangledown f(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(v) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(v) \end{pmatrix}.$$

Las condiciones necesarias para que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tenga un mínimo v^*, y además se cumpla que siendo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una función continuamente diferenciable, $g(v^*) = 0$, se indican en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Manteniento la notación, si v^* es una solución del problema definido (2.1) y $g'(v)$ es una matriz de rango k entonces $\exists \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\bigtriangledown f(v^*) - (\lambda_1 \bigtriangledown g_1(v^*) + ... + \lambda_k \bigtriangledown g_k(v^*)) = 0. \tag{2.2}$$

Observación 2.5. El teorema únicamente proporciona condiciones necesarias para el mínimo de f. Así, si un v^* cumple la ecuación (2.2) no implica que sea un mínimo de f.

Para demostrar el teorema es necesario usar el **Teorema de la función implícita**, que se expone a continuación sin demostración. Su demostración se puede consultar en [3], capítulo 9.

Teorema 2.6. ***Teorema de la función implícita***
Para $g = (g_1, ..., g_k) : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ siendo $x = (x_1, ..., x_l)$, $y = (y_1, ..., y_m)$, se definen $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ como:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x,y) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_l}(x,y) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x,y) & ... & \frac{\partial g_k}{\partial x_l}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x,y) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(x,y) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(x,y) & ... & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Sea $n > k$, y g una función continuamente diferenciable, $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ tal que:

$$g(x^*, y^*) = 0,$$

y $\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)$ es invertible. Entonces, existe un entorno $U \times V \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ de (x^*, y^*) y una función continuamente diferenciable

$$h : U \to V,$$

tal que

$$g(x, h(x)) = 0 \ \forall x \in U.$$

Además, $\forall v \in U \times V$ si $g(v) = 0$ entonces, $v = (x, h(x))$ para algún $x \in U$.

Observación 2.7. Para la función h definida, usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))$ es invertible, se cumple:

$$h'(x) = -\Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))\Big)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x)).$$

Demostración del Teorema 2.4:
Queremos ver que si v^* es una solución del problema (2.1) y $g'(v)$ es una matriz de rango k entonces $\exists \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\bigtriangledown f(v^*) - (\lambda_1 \bigtriangledown g_1(v^*) + ... + \lambda_k \bigtriangledown g_k(v^*)) = 0.$$

Por ser $g'(v^*)$ de rango k, existe un vector $k-$dimensional y, tal que $\frac{\partial g}{\partial y}(v^*)$ es invertible. Reordenamos las coordenadas para que $x = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^{n-k}$ y $y \in \mathbb{R}^k$. Por el teorema de la función implícita, $\exists h$ tal que

$$g(x, h(x)) = 0.$$

Como $v^* = (x^*, y^*)$ es solución del problema (2.1), x^* es un mínimo de $f(x, h(x))$. Por lo tanto, la derivada de $f(x, h(x))$ respecto x es cero en x^*. Aplicando la observación 2.7,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(v^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(v^*)h'(x^*) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(v^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(v^*)\Big(\frac{\partial g}{\partial y}(v^*)\Big)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}(v^*). \end{aligned}$$

Definimos la matriz Λ de dimensión $1 \times k$ como:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & . & \lambda_k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(v^*)\Big(\frac{\partial g}{\partial y}(v^*)\Big)^{-1}.$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(v^*) = \Lambda\frac{\partial g}{\partial x}(v^*). \tag{2.3}$$

De la definición de Λ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(v^*) = \Lambda\frac{\partial g}{\partial y}(v^*) \tag{2.4}$$

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) prueban la igualdad (2.2). □

Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, llamamos a la matriz $n \times n$

$$H(f,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(v) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(v) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(v) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(v) \end{pmatrix},$$

la **matriz Hessiana** de f en v. Una función es dos veces diferenciable con continuidad si todos los elementos de la matriz Hessiana son funciones continuas.

Teorema 2.8. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable con continuidad, $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tal que la matriz Hessiana $H(f,v)$ es definida semipositiva, es decir,*

$$w^T H(f,v) w \geq 0, \tag{2.5}$$

para cualquier $w \in \mathbb{R}^n$. Y se tiene,

$$g(v) = Av - c,$$

donde A es una matriz $k \times n$ y $c \in \mathbb{R}^k$. Si podemos encontrar $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ y $v^* \in \mathbb{R}^n$ tal que cumpla la ecuación (2.2), entonces v^* es solución del problema (2.1).

Para demostrar el teorema se necesita el resultado de la **fórmula de Taylor**, expuesto a continuación sin demostrar.

Teorema 2.9. ***Fórmula de Taylor*** *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable con continuidad. Para cualquier valor $v, w \in \mathbb{R}^n$ existe un punto ζ contenido en el segmento que une v y $v + w$,*

$$\zeta \in v + \alpha w : \alpha \in [0,1],$$

tal que

$$f(v+w) = f(v) + \bigtriangledown f(v) \cdot w + \frac{1}{2} w^T H(f,\zeta) w.$$

Demostración Teorema 2.8:
Para demostrar el teorema 2.8, debemos ver que si encontramos $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ y $v^* \in \mathbb{R}^n$ tal que cumpla la ecuación (2.2), entonces v^* es solución del problema (2.1).

Sea un v cualquiera tal que $g(v) = 0$. Queremos ver que:

$$f(v) \geq f(v^*).$$

Como $g(v) = Av - c$, sea $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$,

$$\lambda_1 \bigtriangledown g_1(v^*) + ... + \lambda_k \bigtriangledown g_k(v^*) = A^T \lambda.$$

Sea $w = v - v^*$. Como $g(v) = 0,\ g(v^*) = 0$, usando la linealidad de A obtenemos,

$$0 = g(v) = g(v^* + w) = Av^* + Aw - c = g(v^*) + Aw = Aw.$$

Aplicando el teorema de la fórmula de Taylor,

$$f(v^* + w) = f(v^*) + \bigtriangledown f(v^*) \cdot w + \frac{1}{2} w^T H(f, \zeta) w.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} f(v) = f(v^* + w) &= f(v^*) + \bigtriangledown f(v^*) \cdot w + \tfrac{1}{2} w^T H(f, \zeta) w \\ &= f(v^*) + A^T \lambda \cdot w + \frac{1}{2} w^T H(f, \zeta) w \\ &= f(v^*) + (A^T \lambda)^T w + \frac{1}{2} w^T H(f, \zeta) w \\ &= f(v^*) + \lambda^T A w + \frac{1}{2} w^T H(f, \zeta) w \\ &= f(v^*) + \frac{1}{2} w^T H(f, \zeta) w \geq f(v^*), \end{aligned}$$

usando que $w^T H(f, v) w \geq 0$.

□

Teorema 2.10. *La solución a los modelos de gestión de carteras no es única, y conduce a una* ***frontera eficiente****, conjunto de todas las carteras eficientes.*

Observación 2.11. Aunque la solución a los modelos de gestión de carteras conduce a una frontera eficiente, en la práctica suele restringirse a unas cuantas carteras denominadas **carteras modelo**.

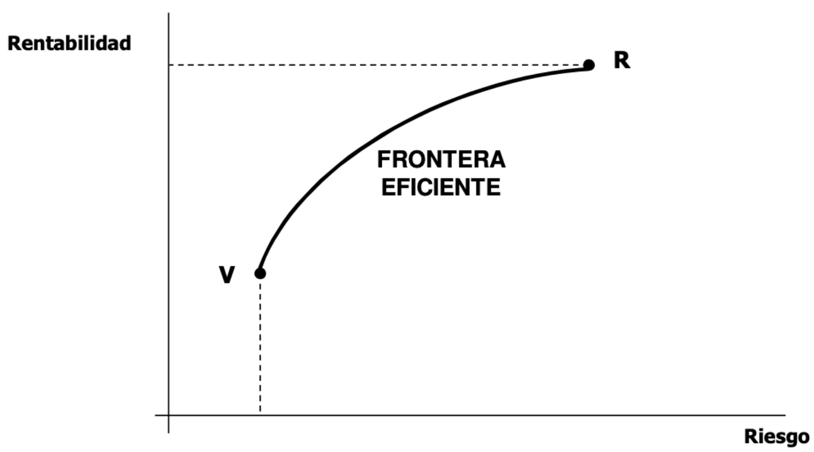


Figura 2.1: Representación gráfica de la frontera eficiente.

La frontera eficiente estará delimitada en un extremo por la cartera de máxima rentabilidad esperada R y por el otro lado por la de mínimo riesgo V.

Definición 2.12. *Una cartera es **óptima** si es seleccionada de entre todas las carteras eficientes, fijándose el riesgo que desea asumir el inversor.*

De entre todas las carteras eficientes, cada inversor, en función de su perfil de riesgo debería seleccionar su cartera óptima, aunque en la práctica esta se escoge de entre las carteras modelo elaboradas. Tal y como se ha expuesto en el punto 2.1, distinguimos entre inversores conservadores, moderados y arriesgado.

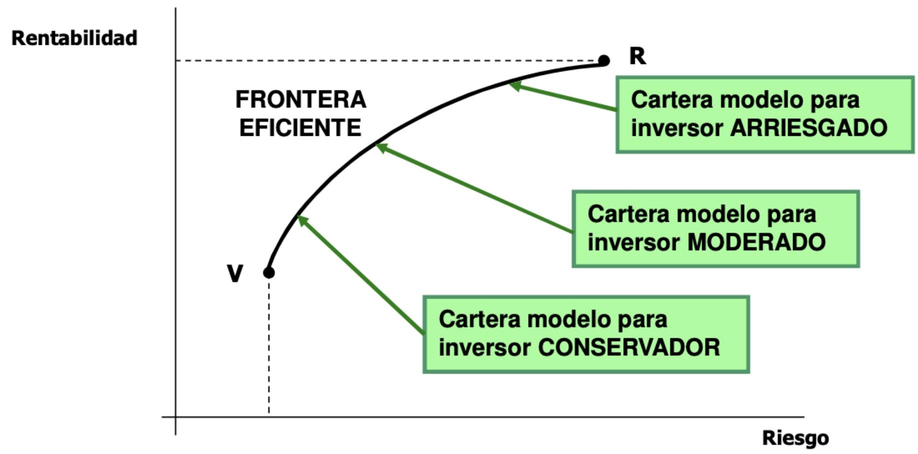


Figura 2.2: Carteras modelo en función del perfil de riesgo del inversor.

Capítulo 3

Rentabilidad y riesgo

Veáse [1] y [10].

Cuantificar la rentabilidad y el riesgo para la modelización de carteras es clave y se persigue durante este capítulo. Previamente, se ha definido la rentabilidad como la capacidad de producir beneficio. Conforme la manera de producir este beneficio se expondrán dos definiciones de rentabilidad:

- Rentabilidad simple
- Rentabilidad compuesta

En cuanto al riesgo, debido a la subjetividad de cada inversor sobre su percepción podemos encontrar diferentes definiciones de riesgo y, al menos una medida de riesgo asociada a cada definición. A lo largo del capítulo se exponen diferentes deficiones de riesgo, y las medidas de riesgo asociadas a ellas siguientes:

- Volatilidad
- Probabilidad de pérdida
- *Value at Risk* (VaR)
- Coeficiente de variación

3.1. La rentabilidad

Definición 3.1. *Sea P_t el precio de un activo en el momento t, P_{t-1} el precio del activo en el momento $t-1$, y D_t el dividendo obtenido por el activo en el momento t. La* ***rentabilidad simple*** *del activo en el periodo comprendido entre $t-1$ y t, r_t, se define como:*

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1. \tag{3.1}$$

Observación 3.2. El cociente $\frac{P_t+D_t}{P_{t-1}}$ de la ecuación (3.1) será mayor que la unidad si el precio del activo ha sufrido un incremento, respecto al precio final considerando dividendos. Además, los valores de la rentabilidad simple se encuentran en el intervalo [-1, $+\infty$].

Cuando se quiere obtener la rentabilidad de una inversión y se dispone únicamente de las rentabilidades simples de varios periodos intermedios, se recurre a la rentabilidad compuesta.

Sea R_T la rentabilidad total acumulada en todo el periodo. Sean $r_1, r_2, ..., r_t$ las rentabilidades simples de los período $1, 2, ..., t$, y R(0,t) la rentabilidad anual promedio del periodo en media geométrica.

Entonces,

$$(1 + R_T) = \frac{P_t + D_t}{P_0} = (1 + r_1)(1 + r_2)...(1 + r_t) = [1 + R(0,t)]^T. \tag{3.2}$$

Por lo tanto, despejando R(0,t) de la ecuación (3.2) se obtiene:

$$R(0,t) = \sqrt[T]{(1 + R_T)} - 1. \tag{3.3}$$

Definición 3.3. *Respetando la notación anterior, $R(0,t)$ es la* ***rentabilidad compuesta****, o también llamada rentabilidad geométrica.*

La rentabilidad compuesta, a diferencia de la simple, tiene en cuenta el efecto reinversión, es decir, se invierten los beneficios obtenidos a lo largo de los diferentes periodos.

Definición 3.4. *Dada una cartera formada por n activos financieros. Sean $\widetilde{R_k}$ sus respectivas rentabilidades en un periodo de tiempo establecido y x_k los pesos relativos de dichos activos $\forall k \in \{1, ..., n\}$. Entonces, la* ***rentabilidad de la cartera*** *en el periodo referido, $\widetilde{R_p}$, se define como:*

$$\widetilde{R_p} = \sum_{k=1}^{n} x_k \widetilde{R_k}. \tag{3.4}$$

Definición 3.5. *Dado un activo financiero cualquiera k. Sean $r_{1k}, ..., r_{nk}$ sus rentabilidades históricas, todas calculadas en periodos anteriores de igual longitud. Entonces, la* ***rentabilidad media histórica del activo****, $\overline{R_k}$, se define como la media aritmética de sus rentabilidades históricas. Es decir,*

$$\overline{R_k} = \frac{r_{1k} + r_{2k} + ... + r_{nk}}{n}. \tag{3.5}$$

Definición 3.6. *Respetando la notación, la* ***rentabilidad media histórica de una cartera****, $\overline{R_p}$, se define como:*

$$\overline{R_p} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{R_k}, \tag{3.6}$$

donde $\overline{R_k}$ es la rentabilidad media histórica del activo k, $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

Como se ha adelantado en el capítulo anterior, la rentabilidad esperada se define como la rentabilidad que un inversor espera obtener de cara al futuro de una determinada inversión. Existen diversos métodos econométricos de predicción para estimar la rentabilidad esperada. Lógicamente, las rentabilidades históricas influyen en la rentabilidad esperada. Por ese motivo, y para no alejarse de los objetivos establecidos del proyecto, la rentabilidad esperada de una cartera será aproximada por la rentabilidad media histórica de la cartera en cuestión.

3.2. El riesgo

3.2.1. Volatilidad

Definición 3.7. *El riesgo de un activo puede definirse como la incertidumbre que genera la fluctuación de su rentabilidad respecto a su valor medio.*

La medida asociada a esta definición de riesgo es la volatilidad y, calcular la volatilidad de un activo es equivalente a calcular su desviación tipo o desviación estándar.

Por lo tanto,

$$Var(r_T) = \frac{1}{n-1} \sum_{t \in T} (r_t - \overline{R_T})^2, \tag{3.7}$$

$$Volatilidad_T := \sigma_T = \sqrt{Var(r_T)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t \in T} (r_t - \overline{R_T})^2}. \tag{3.8}$$

Análogamente a la volatilidad de un activo, se cuantifica la volatilidad de una cartera. La rentabilidad de una cartera ha sido definida previamente como combinación lineal de las rentabilidades de cada uno de los n valores que la componen (veáse definición 3.4). De esta manera, la volatilidad de una cartera, σ_p, es la desviación tipo de dicha variable.

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2(\widetilde{R_p})},\ \textit{donde} \tag{3.9}$$

$$\sigma^2(\widetilde{R_p}) = E[\widetilde{R_p} - \overline{R_p}]^2 = E\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \widetilde{R_k} - \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{R_p}\Big]^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq k}^{n} x_k \cdot x_j \cdot \sigma_{kj} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sigma_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j>k}^{n} x_k \cdot x_j \cdot \rho_{kj} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_j.$$

Que en forma matricial sería:

$$\sigma^2(\widetilde{R_p}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x^T \cdot V \cdot x, \tag{3.10}$$

donde V es la llamada matriz de varianzas y covarianzas, x el vector de pesos relativos de los n activos dentro de la cartera y x^T su vector transpuesto.

Por lo tanto, se observa que la volatilidad de una cartera no sólo depende de las volatilidades y proporciones de cada activo en la cartera sino que también dependerá de las covarianzas entre cada par de activos.

Proposición 3.8. *Un activo A tiene mayor riesgo que otro activo B $\Longleftrightarrow$ Volatilidad(A) $>$ Volatilidad (B). Análogamente para el riesgo de una cartera.*

Una variable se considera más estable cuando menos fluctuaciones presente. Es claro, cuanto mayores sean dichas dispersiones, mayor será la volatilidad. Aplicando la volatilidad como medida del riesgo, un conjunto de activos posee un riesgo mayor cuanto mayor sea su volatilidad. El dominio de la volatilidad es el intervalo $[0, +\infty]$.

La volatilidad es una medida ampliamente utilizada, pero su principal inconveniente es que tiene en consideración las desviaciones tanto positivas como negativas. De esta manera, a los inversores más conservadores les puede parecer más interesante emplear una medida de riesgo que refleje principalmente las desviaciones negativas.

3.2.2. Probabilidad de pérdida

Definición 3.9. *El riesgo puede definirse como la probabilidad de obtener una rentabilidad inferior a un valor R^* fijado, denominado rentabilidad mínima deseada.*

Así, el riesgo puede medirse a través de la probabilidad de pérdida. Por lo tanto, cuantificar el riesgo de un activo según esta definción es equivalente a calcular la probabilidad de pérdida de este, y análogamente para cuantificar el riesgo de una cartera. En otras palabras,

$$Probabilidad\ de\ p\acute{e}rdida_T = Pr(R \leq R^*).$$

Observación 3.10. Según la definición anterior, incurrimos en pérdidas siempre que se obtenga una rentabilidad menor a R^*, aún siendo esta positiva. Aun así, suele tomarse $R^*= 0$.

A menudo, se considera que las rentabilidades durante un periodo T cualquiera siguen una ley normal. Por lo tanto, sea R_p una variable aleatoria de distribución normal con media μ_p y desviación estándar σ_p,

$$Pr(R_p \leq R^*) = Pr\Big(Z_p \leq \frac{R^* - \mu_p}{\sigma_p}\Big). \tag{3.11}$$

Así, el dominio de la probabilidad de pérdida es el intervalo (0,1).

Proposición 3.11. *Un activo A tiene mayor riesgo que otro activo $B \iff$ $Probabilidad\ de\ p\acute{e}rdida_A > Probabilidad\ de\ p\acute{e}rdida_B$. Análogamente para el riesgo de una cartera.*

La ventaja que presenta esta medida de riesgo es que tiene la capacidad de adaptarse a cada inversor, pero este mismo hecho la hace una medida más subjetiva, como contrapartida.

3.2.3. *Value at Risk* (VaR)

Definición 3.12. *El riesgo puede definirse como la pérdida máxima que puede experimentar un activo.*

El *Value at Risk* (VaR) es otra forma alternativa de medir el riesgo, que cuantifica la pérdida máxima que puede experimentar un activo durante un periodo temporal y a un determinado nivel de confianza.

El VaR de un activo, para un periodo T, se puede calcular utilizando tres métodos: paramétrico, simulación histórica y simulación Montecarlo. Usando el método paramétrico, y como en el punto anterior, considerando que las rentabilidades durante un periodo T cualquiera siguen una ley normal. Entonces,

$$VaR_T = |Min(0, \overline{R_T} - k_\alpha \sigma_T)|, \tag{3.12}$$

donde, a su vez, $Pr(Z > k_\alpha) = \alpha$.

Así, el dominio de la probabilidad de pérdida es el intervalo [0, $+\infty$). Por ejemplo, dado un VaR del 10 %, y un nivel de significación α de 0,05. Existe un 95 % de probabilidad de que la rentabilidad sea superior al -10 %. En otras palabras, únicamente hay un 5 % de probabilidad de que la pérdida sea superior al 10 %.

Proposición 3.13. *Un activo A tiene mayor riesgo que otro activo B* $\iff$ $VaR_A > VaR_B$*. Análogamente para el riesgo de una cartera.*

En la línea de la probabilidad de pérdida, el VaR tiene la capacidad de adaptarse a cada inversor a través de los valores de α fijados. Tanto el VaR como la probabilidad de pérdida asumen que las rentabilidades siguen una distribución normal, hipótesis que no tiene porque darse en la realidad.

3.2.4. Coeficiente de variación

Definición 3.14. *El riesgo, también, puede definirse como la volatilidad que se debe asumir en una cartera por cada punto que se desee obtener de rentabilidad media.*

La medida de riesgo asociada a dicha definición es el coeficiente de variación, relación entre la volatilidad y la rentabilidad media.

$$CV = \frac{\sigma_T}{\overline{R_T}}. \tag{3.13}$$

Dado que el dominio de la volatilidad es $[0, +\infty]$, según esta medida de riesgo distinguimos dos grupos de activos. Análogo para carteras, en lugar de activos.

- $CV_k \leq 0$, ya que $\overline{R_T} \leq 0$, considerados de menor riesgo.
- $CV_k > 0$, ya que $\overline{R_T} > 0$, considerados de mayor riesgo.

Así el dominio del coeficiente de variación es [-$\infty, +\infty$].

Proposición 3.15. *Un activo A tiene mayor riesgo que otro activo B* $\Longleftrightarrow$ $|CV_A| > |CV_B|$. *Análogamente para el riesgo de una cartera.*

Observación 3.16. La volatilidad mide la oscilación en términos absolutos. En cambio, el coeficiente de variación, lo hace en términos relativos, puesto que tiene en cuenta la rentabilidad media.

A modo de ejemplo, dadas dos carteras con las siguientes características:

$$Cartera\ A : \overline{R_A} = 25\,\%, \sigma_A = 15\,\% \longrightarrow CV_A = \frac{15\,\%}{25\,\%} = 0,6.$$

$$Cartera\ B : \overline{R_B} = 5\,\%, \sigma_B = 10\,\% \longrightarrow CV_B = \frac{10\,\%}{5\,\%} = 2.$$

Aplicando la volatilidad como medida de riesgo, y comparando ambas carteras, obtenemos que la cartera B es la menos arriesgada. Sin embargo, usando el coeficiente de variación como medida de riesgo se obtiene el resultado contrario.

Mediante el anterior ejemplo, vemos que una de las ventajas de esta medida de riesgo es la relatividad. Aún así, presenta la misma problemática que la volatilidad, pues esta interviene de forma directa en el cálculo.

3.3. Objetivo de diversificar

Uno de los objetivos cuando se construyen carteras es reducir el riesgo, y el instrumento para conseguirlo es a través de una adecuada diversificación. Cabe destacar que, no se diversifica para maximizar la rentabilidad, pues en tal caso, la estrategia sería invertir todo el presupuesto en el activo de mayor rentabilidad esperada (rentabilidad media histórica, en nuestro caso).

El objetivo de reducir riesgos puede estar condicionado por restricciones legales. En concreto, la mayor restricción de tipo legal que existe es España está impuesta por el Ministerio de Economía que en su Real Decreto 1082/2012 de 13 de julio pretende regular la actividad de las Instituciones de Inversión Colectiva (IIC) sean Sociedades o Fondos de Inversión.

De este modo, la diversificación persigue encontrar, para un determinado plazo temporal, la composición de la cartera que, ofreciendo un nivel de rentabilidad aceptable para el inversor, y respetando las restricciones, tenga el menor riesgo.

Así, para hallar la composición de una cartera diversificada se resuelve un problema matemático como el siguiente:

- **Miniminar**: una medida de riesgo.
- **Sujeto a unas restricciones**: rentabilidad aceptable de la cartera, limitaciones legales del mercado, etc.

Y en las medidas de riesgo estudiadas, ello se consigue adquiriendo títulos poco correlacionados entre sí, y por lo tanto, el número de títulos que formarán la cartera no es un elemento trascendental.

Capítulo 4

Modelo de Markowitz

Veáse [4], [5] y [11].

Tal y como ya se ha adelantado previamente, en este cuarto capítulo se desarrolla el Modelo de Markowitz, modelo clave en la modelización de carteras.

Definición 4.1. *Una* ***venta al descubierto, venta a crédito o short selling*** *se produce cuando los agentes venden activos financieros que no poseen. El agente pide el activo prestado a un invididuo que lo tenga y, una vez recibido, lo vende en el mercado. Con la operación, el agente se compromete a devolver el activo junto con todos los pagos que produzca este durante la vida del préstamo. Esta devolución implica que en el momento del vencimiento del préstamos, el agente debe comprar el activo en el mercado para poder cancelar su compromiso de préstamo.*

Observación 4.2. Es claro, un agente realizará una venta en descubierto cuando sus expectativas sobre la evolución futura del precio del activo sean a la baja, beneficiándose así de la operación.

4.1. Hipótesis del modelo

Harry Max Markowitz, premio Nobel de Economía en 1990, descataca por la publicación del artículo *Portfolio Selection* y el posterior desarrollo del libro *Portfolio Selection: Efficient of diversification of investments.* El premio Nobel lo recibieron, además, los autores Merton Miller y William Sharpe, por las aportaciones teóricas realizadas también en el área de la gestión de carteras.

El Modelo de Markowitz asume las siguiente hipótesis:

1. Es un modelo de gestión uniperiódica, es decir, todas las inversiones tienen el mismo período de tiempo.
2. Los n activos que formarán parte de la cartera son conocidos.
3. Todos los activos seleccionados son arriesgados, tomando como medida de riesgo la volatilidad: $\forall k \in \{1,2,...,n\}$, $\sigma_k > 0$.
4. Las variables aleatorias de la rentabilidad de todos los activos se distribuirán según leyes normales.
5. Se debe agotar todo el presupuesto que se destine a la constitución de la cartera. Equivalentemente, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, siendo x_k los pesos relativos de los activos en la cartera conjunta.
6. No se admite la venta al descubierto, lo que implica que, $\forall k \; x_k \geq 0$.
7. Los inversores son aversos al riesgo.
8. Los activos son infinitamente divisibles y no se tendrán en cuenta ningún tipo de gastos, inflación o impuestos.

Encontrar la frontera eficiente, aplicando el Modelo de Markowitz, equivale a resolver el siguiente problema matemático, ya introducido preaviamente:

- **Minimizar**: $\sigma_p^2 = x^T \cdot V \cdot x$.
- **Maximizar**: $\overline{R_p} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{R_k}$.
- **Sujeto a**: $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1, \; x_k > 0$.

4.2. Resolución del problema asociado

Para resolver este modelo, en general, se selecciona el riesgo como objetivo prioritario y la rentabilidad como restricción del inversor. Esto transforma el problema de optimización planteado en el siguiente:

- **Minimizar**: $\sigma_p^2 = x^T \cdot V \cdot x$.
- **Sujeto a**: $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \sum_{k=1}^{n} x_k = 1, \; x_k > 0$, $\overline{R_p^*} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{R_k}$.

Un método para resolver este problema no lineal es el método de la línea crítica, algoritmo de programación cuadrática que tiene como objetivo detectar carteras esquina, definidas a continuación.

Definición 4.3. *Una **cartera esquina**, también denominadas corner portfolio, es una cartera eficiente que tiene la propiedad de que su composición cambia cualitativamente en la frontera eficiente si:*

- *Se incorpora un nuevo activo a la frontera eficiente que antes no pertenecía.*
- *Sale de la frontera eficiente un activo que antes sí pertenecía.*

Teorema 4.4. *Una cartera es eficiente si y sólo si es combinación lineal convexa entre dos carteras esquina consecutivas.*

Supongamos que al aplicar el algoritmo a n activos, se detectan m carteras esquina, y conociendo la información recogida en la tabla sobre ellas:

Cartera esquina	Rent. hist. media	Riesgo	Proporciones
1	$\overline{R_1}$	σ_1^2	$\mathrm{X}_1 = (x_{1,1}\ x_{1,2}\ ...\ x_{1,n})$
...	...	...	...
h	$\overline{R_h}$	σ_h^2	$\mathrm{X}_h = (x_{h,1}\ x_{h,2}\ ...\ x_{h,n})$
h+1	$\overline{R_{h+1}}$	σ_{h+1}^2	$\mathrm{X}_{h+1} = (x_{h+1,1}\ x_{h+1,2}\ ...\ x_{h+1,n})$
...	...	...	...
m	$\overline{R_m}$	σ_m^2	$\mathrm{X}_m = (x_{m,1}\ x_{m,2}\ ...\ x_{m,n})$

En la tabla consta como medida de riesgo la volatilidad, pero el resultado es análogo para cualquier otra medida de riesgo. Sea $\overline{R^*}$ la rentabilidad esperada deseada por el inversor, en nuestro caso, la rentabilidad histórica media deseada, y que cumple:

$$\overline{R_h} \geq \overline{R^*} \geq \overline{R_{h+1}}.$$

Entonces,

$$\overline{R^*} = \lambda \cdot \overline{R_h} + (1-\lambda) \cdot \overline{R_{h+1}} \longrightarrow \lambda = \frac{\overline{R^*} - \overline{R_{h+1}}}{\overline{R_h} - \overline{R_{h+1}}}.$$

Así, la cartera eficiente que porporciona una rentabilidad esperada $\overline{R^*}$, será:

$$X^* = \lambda \cdot X_h + (1-\lambda) \cdot X_{h+1}.$$

Que en forma matricial sería:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ ... \\ x_n^* \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_{h,1} \\ x_{h,2} \\ ... \\ x_{h,n} \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_{h+1,1} \\ x_{h+1,2} \\ ... \\ x_{h+1,n} \end{pmatrix}.$$

El Modelo de Markowitz ha sido clave a nivel teórico, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones. Un ejemplo es, el modelo de Black-Litterman, que parte de las mismas hipótesis pero considerando la posibilidad de realizar ventas en descubierto.

En concreto,

- **Minimizar**: $\sigma_p^2 = x^T \cdot V \cdot x$.
- **Sujeto a**: $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \sum_{k=1}^{n} x_k = 1, \overline{R_p^*} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overline{R_k}$.

El problema sólo tiene restricciones de igualdad, por lo tanto, su resolución matemática se puede realizar por sustitución de variables. Al ser un modelo con menos restricciones, su frontera eficiente iguala o mejora la frontera eficiente del Modelo de Markowitz.

En comparación con el éxito teórico, a nivel práctico, el éxito del Modelo de Markowitz ha sido menor. En su momento, su escasa utilización era debida al elevado número de cálculos a realizar para su aplicación, dicho problema ha quedado solventado por los múltiples aplicativos informáticos disponibles actualmente. Otro motivo a considerar, son las restricciones que se presentan como hipótesis del modelo, entre ellas, que no se tienen en cuenta costes o que se considera perfectamente divisible cualquier activo financiero.

Capítulo 5

Aplicación práctica: IBEX 35

Veáse Apéndice A para obtener más detalle de la metodología empleada en la obtención de los resultados expuestos en esta sección. Para esta sección, también se ha empleado [20] y [21].

El objetivo de la parte práctica es obtener la frontera eficiente de diversas carteras de inversión, para posteriormente contrastarlas. Para ello, se consideran las acciones de las 35 empresas que cotizan en el IBEX 35 durante dos periodos, separados por el decreto del estado de alarma para hacer frente a la expansión del virus Covid-19.

Así, los dos periodos en los que se va a trabajar son:

- Periodo anterior al estado de alarma: del 15 de marzo del 2019 al 15 de marzo del 2020. Llamado en este proyecto, periodo pre-covid.
- Periodo posterior al estado de alarma: del 16 de marzo del 2020 al 15 de marzo del 2021. Llamado en este proyecto, periodo covid.

En los dos periodos considerados, las empresas que han formado parte del IBEX 35 han sido las mismas. A través de la página web https://www.investing.com, se han obtenidos los precios de cierre diarios de las empresas consideradas en ambos periodos. Para cada empresa se dispone de un total de 255 observaciones en cada uno de los periodos. Esto nos permite calcular las rentabilidades diarias de los activos y, a su vez, la rentabilidad media histórica de estos. Al usar precios diarios es lógico que obtengamos rentabilidades pequeñas por eso, para no tener problemas de sensibilidad decimal en Microsoft Excel, las rentabilidades han sido multiplicadas por un factor de 20.

En las siguientes tablas se encuentran recogidas las rentabilidades medias históricas de las 35 empresas y, las mismas rentabilidades multiplicadas por el factor escogido.

Figura 5.1: Rentabilidades medias históricas diarias.

Pre-covid				Covid			
Empresa	Rent. Media histórica	Empresa	Rent. Media histórica	Empresa	Rent. Media histórica	Empresa	Rent. Media histórica
ACS	-0,37%	ICAG	-0,26%	ACS	0,35%	ICAG	0,14%
ACX	-0,13%	IDR	-0,08%	ACX	0,23%	IDR	0,05%
AENA	-0,20%	ITX	-0,09%	AENA	0,20%	ITX	0,17%
ALM	-0,17%	MAP	-0,22%	ALM	0,16%	MAP	0,05%
AMA	-0,14%	MEL	-0,35%	AMA	0,19%	MEL	0,43%
ANA	-0,02%	MRL	-0,07%	ANA	0,18%	MRL	0,05%
BBVA	-0,25%	MTS	-0,33%	BBVA	0,26%	MTS	0,52%
BKT	-0,26%	NTGY	-0,18%	BKT	0,26%	NTGY	0,14%
CABK	-0,21%	PHMR	0,46%	CABK	0,20%	PHMR	0,41%
CIEA	-0,20%	REE	-0,10%	CIEA	0,26%	REE	0,00%
CLNX	0,21%	REP	-0,27%	CLNX	0,10%	REP	0,27%
COL	-0,06%	SABE	-0,26%	COL	0,09%	SABE	0,09%
ELE	-0,13%	SAN	-0,28%	ELE	0,13%	SAN	0,19%
ENAG	-0,16%	SGREN	0,00%	ENAG	0,03%	SGREN	0,33%
FER	-0,01%	SLRS	0,13%	FER	0,09%	SLRS	0,48%
FLUI	0,00%	TEF	-0,26%	FLUI	0,39%	TEF	0,03%
GRLS	0,02%	VIS	-0,05%	GRLS	-0,08%	VIS	0,07%
IBE	0,05%	Promedio	-0,12%	IBE	0,09%	Promedio	0,19%

Figura 5.2: Rentabilidades medias históricas diarias multiplicadas por 20.

Pre-covid				Covid			
Empresa	Rent. Media histórica	Empresa	Rent. Media histórica	Empresa	Rent. Media histórica	Empresa	Rent. Media histórica
ACS	-7,43%	ICAG	-5,22%	ACS	6,91%	ICAG	2,74%
ACX	-2,63%	IDR	-1,70%	ACX	4,64%	IDR	1,03%
AENA	-4,08%	ITX	-1,72%	AENA	4,04%	ITX	3,40%
ALM	-3,39%	MAP	-4,48%	ALM	3,12%	MAP	0,94%
AMA	-2,90%	MEL	-6,95%	AMA	3,89%	MEL	8,57%
ANA	-0,39%	MRL	-1,48%	ANA	3,64%	MRL	1,03%
BBVA	-5,07%	MTS	-6,54%	BBVA	5,20%	MTS	10,47%
BKT	-5,28%	NTGY	-3,69%	BKT	5,16%	NTGY	2,71%
CABK	-4,15%	PHMR	9,14%	CABK	4,04%	PHMR	8,20%
CIEA	-4,07%	REE	-1,92%	CIEA	5,17%	REE	0,01%
CLNX	4,16%	REP	-5,42%	CLNX	1,95%	REP	5,36%
COL	-1,11%	SABE	-5,18%	COL	1,75%	SABE	1,82%
ELE	-2,65%	SAN	-5,56%	ELE	2,64%	SAN	3,78%
ENAG	-3,17%	SGREN	-0,08%	ENAG	0,59%	SGREN	6,59%
FER	-0,18%	SLRS	2,51%	FER	1,75%	SLRS	9,55%
FLUI	0,01%	TEF	-5,21%	FLUI	7,89%	TEF	0,57%
GRLS	0,45%	VIS	-1,09%	GRLS	-1,57%	VIS	1,35%
IBE	1,08%	Promedio	-2,44%	IBE	1,82%	Promedio	3,74%

Recordemos, las medidas de riesgo que han sido expuestas en el capítulo 3 son la volatilidad, la probabilidad de pérdida, el *Value at Risk* y el coeficiente de variación. Para el cálculo de la probabilidad de pérdida se ha fijado $R^* = 0$ y, para el VaR se ha fijado $\alpha = 0{,}05$.

Las siguientes cuatro tablas recogen, en las unidades iniciales, el resultado de aplicar estas medidas de riesgo en ambos periodos.

Figura 5.3: Medición del riesgo mediante la **volatilidad**.

Pre-covid				Covid			
Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo
ACS	2,26%	ICAG	3,34%	ACS	3,72%	ICAG	5,44%
ACX	2,04%	IDR	2,34%	ACX	2,46%	IDR	2,72%
AENA	1,84%	ITX	1,58%	AENA	3,09%	ITX	2,43%
ALM	1,96%	MAP	1,68%	ALM	2,18%	MAP	2,50%
AMA	2,02%	MEL	2,31%	AMA	3,39%	MEL	4,95%
ANA	2,26%	MRL	1,38%	ANA	2,43%	MRL	2,98%
BBVA	2,18%	MTS	3,28%	BBVA	3,46%	MTS	3,80%
BKT	2,17%	NTGY	1,76%	BKT	3,19%	NTGY	2,18%
CABK	2,44%	PHMR	4,94%	CABK	3,03%	PHMR	4,35%
CIEA	2,15%	REE	1,58%	CIEA	2,91%	REE	1,51%
CLNX	2,06%	REP	1,98%	CLNX	2,24%	REP	3,42%
COL	1,72%	SABE	2,98%	COL	2,98%	SABE	4,48%
ELE	1,67%	SAN	2,20%	ELE	1,59%	SAN	3,34%
ENAG	1,97%	SGREN	2,59%	ENAG	1,80%	SGREN	2,65%
FER	1,64%	SLRS	3,04%	FER	2,42%	SLRS	3,64%
FLUI	2,55%	TEF	1,66%	FLUI	2,45%	TEF	2,76%
GRLS	1,61%	VIS	1,85%	GRLS	2,10%	VIS	1,56%
IBE	1,61%	Promedio	2,19%	IBE	1,45%	Promedio	2,90%

Figura 5.4: Medición del riesgo mediante la **probabilidad de pérdida** con $R^* = 0$.

Pre-covid				Covid			
Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo
ACS	56,53%	ICAG	53,12%	ACS	46,31%	ICAG	49,00%
ACX	52,57%	IDR	51,45%	ACX	46,24%	IDR	49,25%
AENA	54,42%	ITX	52,17%	AENA	47,40%	ITX	47,22%
ALM	53,44%	MAP	55,31%	ALM	47,14%	MAP	49,25%
AMA	52,86%	MEL	55,99%	AMA	47,71%	MEL	46,55%
ANA	50,35%	MRL	52,13%	ANA	47,01%	MRL	49,31%
BBVA	54,63%	MTS	53,97%	BBVA	47,01%	MTS	44,52%
BKT	54,84%	NTGY	54,17%	BKT	46,78%	NTGY	47,52%
CABK	53,39%	PHMR	46,31%	CABK	47,34%	PHMR	46,24%
CIEA	53,78%	REE	52,43%	CIEA	46,46%	REE	49,99%
CLNX	45,97%	REP	55,44%	CLNX	48,27%	REP	46,88%
COL	51,28%	SABE	53,47%	COL	48,83%	SABE	49,19%
ELE	53,16%	SAN	55,03%	ELE	46,68%	SAN	47,74%
ENAG	53,20%	SGREN	50,06%	ENAG	49,35%	SGREN	45,05%
FER	50,22%	SLRS	48,35%	FER	48,55%	SLRS	44,77%
FLUI	49,99%	TEF	56,23%	FLUI	43,60%	TEF	49,59%
GRLS	49,44%	VIS	51,17%	GRLS	51,49%	VIS	48,28%
IBE	48,65%	Promedio	52,44%	IBE	29,01%	Promedio	47,02%

Figura 5.5: Medición del riesgo mediante el ***Value at Risk*** con $\alpha = 0,05$.

Pre-covid				Covid			
Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo	Empresa	Riesgo
ACS	4,09%	ICAG	5,75%	ACS	5,78%	ICAG	8,81%
ACX	3,48%	IDR	3,93%	ACX	3,81%	IDR	4,43%
AENA	3,23%	ITX	2,69%	AENA	4,88%	ITX	3,83%
ALM	3,40%	MAP	2,98%	ALM	3,42%	MAP	4,06%
AMA	3,47%	MEL	4,14%	AMA	5,38%	MEL	7,71%
ANA	3,74%	MRL	2,34%	ANA	3,81%	MRL	4,85%
BBVA	3,84%	MTS	5,72%	BBVA	5,43%	MTS	5,73%
BKT	3,84%	NTGY	3,08%	BKT	4,99%	NTGY	3,45%
CABK	4,22%	PHMR	7,67%	CABK	4,79%	PHMR	6,74%
CIEA	3,74%	REE	2,69%	CIEA	4,53%	REE	2,48%
CLNX	3,17%	REP	3,53%	CLNX	3,59%	REP	5,36%
COL	2,89%	SABE	5,16%	COL	4,81%	SABE	7,28%
ELE	2,88%	SAN	3,90%	ELE	2,48%	SAN	5,30%
ENAG	3,40%	SGREN	4,26%	ENAG	2,92%	SGREN	4,03%
FER	2,71%	SLRS	4,88%	FER	3,89%	SLRS	5,50%
FLUI	4,19%	TEF	2,99%	FLUI	3,64%	TEF	4,50%
GRLS	2,62%	VIS	3,10%	GRLS	3,54%	VIS	2,50%
IBE	2,59%	Promedio	3,72%	IBE	2,29%	Promedio	4,59%

Figura 5.6: Medición del riesgo mediante el **coeficiente de variación**.

Pre-covid			
Empresa	**Riesgo**	**Empresa**	**Riesgo**
ACS	-6,09	ICAG	-12,79
ACX	-15,49	IDR	-27,54
AENA	-9,01	ITX	-18,37
ALM	-11,58	MAP	-7,49
AMA	-13,95	MEL	-6,63
ANA	-115,55	MRL	-18,68
BBVA	-8,59	MTS	-10,03
BKT	-8,23	NTGY	-9,55
CABK	-11,76	PHMR	10,80
CIEA	-10,55	REE	-16,42
CLNX	9,89	REP	-7,31
COL	-31,13	SABE	-11,50
ELE	-12,61	SAN	-7,92
ENAG	-12,46	SGREN	-681,91
FER	-181,10	SLRS	24,23
FLUI	5104,00	TEF	-6,37
GRLS	71,66	VIS	-33,96
IBE	29,64	Promedio	112,16

Covid			
Empresa	**Riesgo**	**Empresa**	**Riesgo**
ACS	10,78	ICAG	39,74
ACX	10,59	IDR	52,98
AENA	15,32	ITX	14,33
ALM	13,93	MAP	53,07
AMA	17,39	MEL	11,55
ANA	13,33	MRL	58,07
BBVA	13,31	MTS	7,26
BKT	12,37	NTGY	16,06
CABK	15,01	PHMR	10,60
CIEA	11,27	REE	3723,10
CLNX	23,07	REP	12,77
COL	33,96	SABE	49,13
ELE	11,99	SAN	17,68
ENAG	61,38	SGREN	8,04
FER	27,60	SLRS	7,61
FLUI	6,21	TEF	96,50
GRLS	-26,71	VIS	23,20
IBE	15,91	Promedio	128,24

Es claro, las diferentes manera de medir el riesgo conducen a conclusiones dispares. Usando la volatilidad, el coeficiente de variación o el VaR, en media, los activos durante el periodo covid presentan un riesgo mayor que durante el periodo previo a este. Por otra parte, usando la probabilidad de pérdida, se obtiene la conclusión opuesta ya que los activos presentaban un riesgo mayor en media durante el periodo llamado pre-covid. Cabe recordar que tanto la volatilidad com el coeficiente de variación, tienen en consideración las desviaciones tanto positivas como negativas.

La Figura 5.3, a través de la volatilidad, recoge las fluctuaciones de la rentabilidad diarias respecto a su valor medio. Se observa que durante el periodo covid dichas fluctuaciones han sido mayores, en especial para las empresas Sabadell y International Airlines Group. Las fluctuaciones de Sabadell son en parte explicadas por la negociación de la fusión con BBVA (veáse [20]) y, las de la empresa International Airlines Group por su modelo de negocio, así como la incertidumbre que el Covid-19 ha generado para las aerolíneas.

La Figura 5.4, a través de la probabilidad de pérdida, recoge las probabilidades de obtener una rentabilidad inferior al 0 %. En el periodo pre-covid dicha probabilidad se sitúa en el intervalo [45,97 %, 56,53 %], mientras que para el periodo covid lo hace en el intervalo [29,01 %, 51,49 %]. Esta gran diferencia es causada por Ibedrola que ha pasado de tener una probabilidad de pérdida del 48,65 % a tener una del 29,01 %. Si extraemos dicha observación, el intervalo para el periodo covid se sitúa en [43,60 %, 51,49 %]. En promedio, podemos afirmar que durante el periodo covid la probabilidad de obtener una rentabilidad inferior al 0 % es menor.

La Figura 5.5, a través del VaR, muestra la pérdida máxima que puede experimentar un activo con un nivel de confianza del 95 %. Los activos, en promedio, son más arriesgados durante el periodo covid. En particular, los activos que han experimentado un incremento de riesgo mayor, según esta definición, son los de las empresas International Airlines Group y Melia Hotels.

Fijándonos en el último cuadro, que aplica el coeficiente de variación como medida de riesgo, vemos que hay un número elevado de activos financieros que han pasado de tener un coeficiente de variación negativo a tenerlo positivo. En otras palabras, muchos activos han pasado de considerarse activos de menor riesgo a ser considerados activos arriesgados. Llama la atención el caso de Fluidra en el periodo pre-covid y el caso de Red Eléctrica de España durante el periodo covid, ambas empresas poseen coeficientes muy elevados en comparación al resto. Fluidra posee un coeficiente de variación de 5.104,00 durante el periodo pre-covid, debido a la baja rentabilidad en dicho periodo, en concreto un 0,01 %. Posteriormente la rentabilidad aumenta, y pasa a ser del 7,89 %, y con ello disminuye el coeficiente de variación haciendo que las acciones de Fluidra sean vistas como menos arriesgadas bajo esta definición. En relación al caso de Red Eléctrica de España, la rentabilidad pasa de -1,92 % a 0,01 % en el periodo llamado covid, esto es lo que hace que en dicho periodo posea un coeficiente de variación de 3.723,10 y sea considerado el activo más arriesgado. Así, podemos decir que ambos casos son explicados por la mejora de la rentabilidad, y esto se debe a un aumento de precios. Según la clasificación por sectores de las empresas del IBEX 35 realizada (veáse página 11), Fluidra pertenece al sector de materiales básicos, industria y construcción. Teniendo esto en consideración y las rentabilidades de la Figura 5.2, se deduce que dicho sector ha crecido en media un 8,45 %. Destaca el crecimiento de las empresas ACS con un 14,33 %, Cie Automot. con un 9,24 % y Arcel. Mittal con un 17,01 %. Estas tres empresas pertecen al subsector de minerales, metales y transformación, donde los precios crecen principalmente por la demanda tras el confinamiento, la transición verde o la competencia de las infraestructuras que implica un uso intensivo de metales (veáse [20]). De manera análoga, el caso de Red Eléctrica de España, que petenece al sector Petróleo y Energía y ha experimentado un crecimiento en media del 2,82 %. En este crecimiento destacada la contribución del subsector Petróleo, subsector donde se encuentra la empresa Repsol con un crecimiento del 10,78 %. En todo momento, cuando se ha hablado de diferencias entre rentabilidades, se ha hecho en términos absolutos.

Para obtener las diferentes fronteras eficientes se ha resuelto el problema de optimización asociado al Modelo de Markowitz, empleando la herramienta Solver de Microsoft Excel y parte de la herramienta desarrollada en Visual Basic (Veáse Apéndice A). Tal y como se ha expuesto en la parte teórica, la frontera eficiente estará delimitada en un extremo por la cartera de máxima rentabilidad esperada y, por el otro lado, por la de mínimo riesgo. A continuación, se grafican un total de 8 fronteras eficientes y 8 composiciones de carteras, una por cada periodo y medida de riesgo. Las gráficas de composición de cartera muestran la evolución de los pesos relativos de los activos a lo largo de la frontera eficiente.

No sólo la forma de la frontera eficiente varía según la definición de riesgo que se decida aplicar, también cambia la composición de las respectivas cartera.

Figura 5.7: Frontera eficiciente y composición de cartera usando la **volatilidad**.

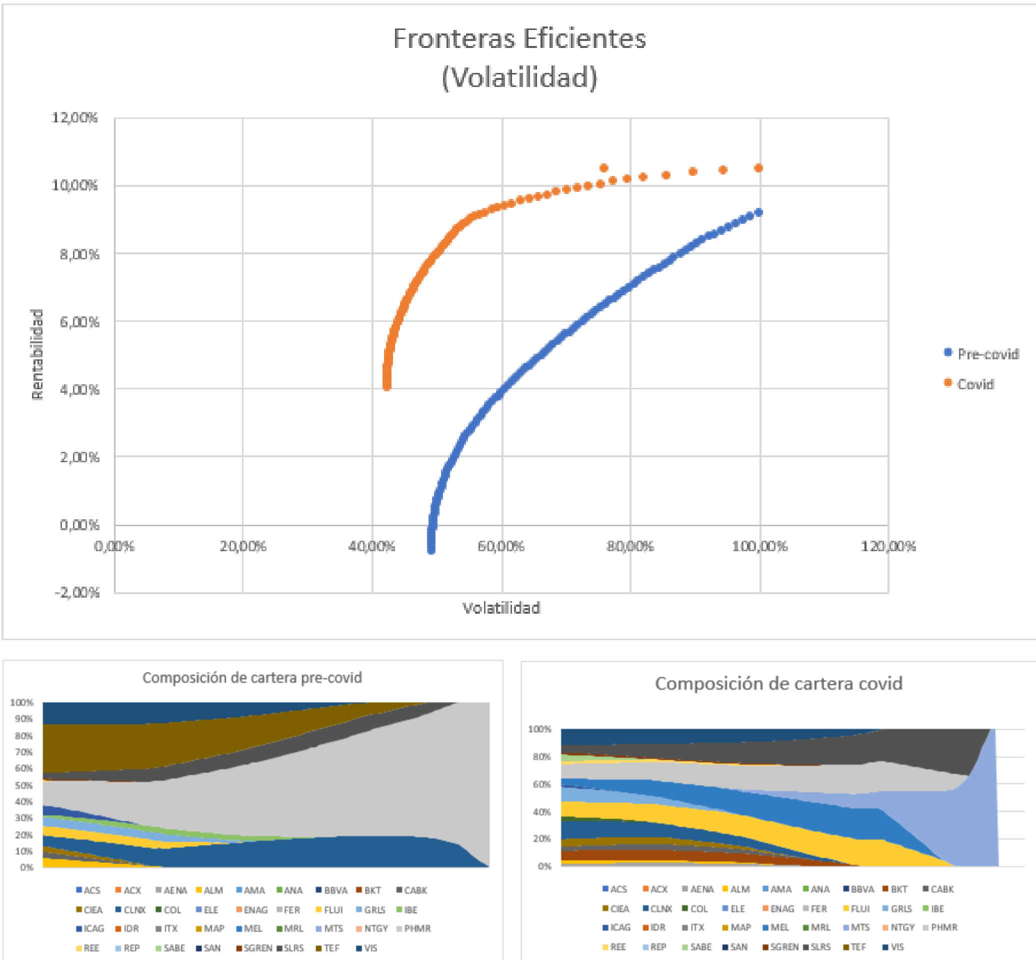


Figura 5.8: Frontera eficiente y composición de cartera usando la **probabilidad de pérdida** con $R^* = 0$.

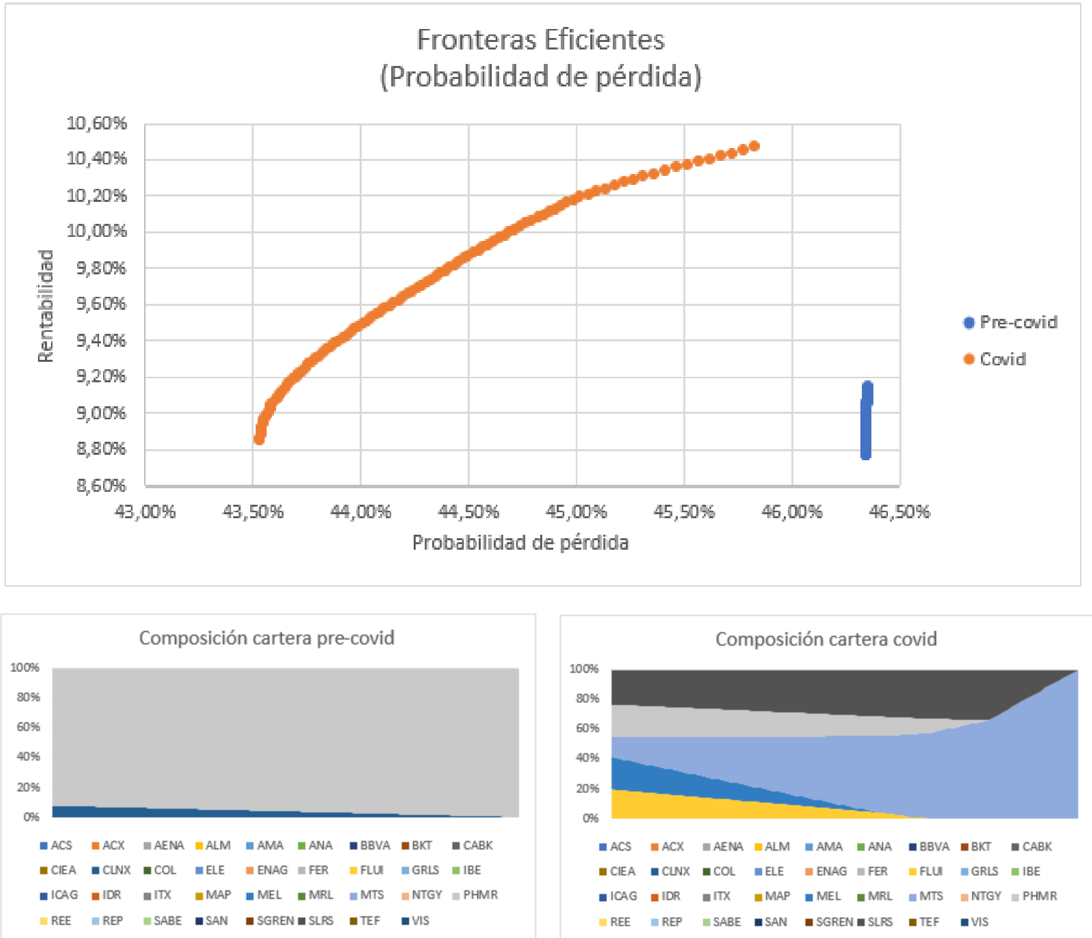


Figura 5.9: Frontera eficiciente y composición de cartera usando el **VaR** con $\alpha = 0,05$.

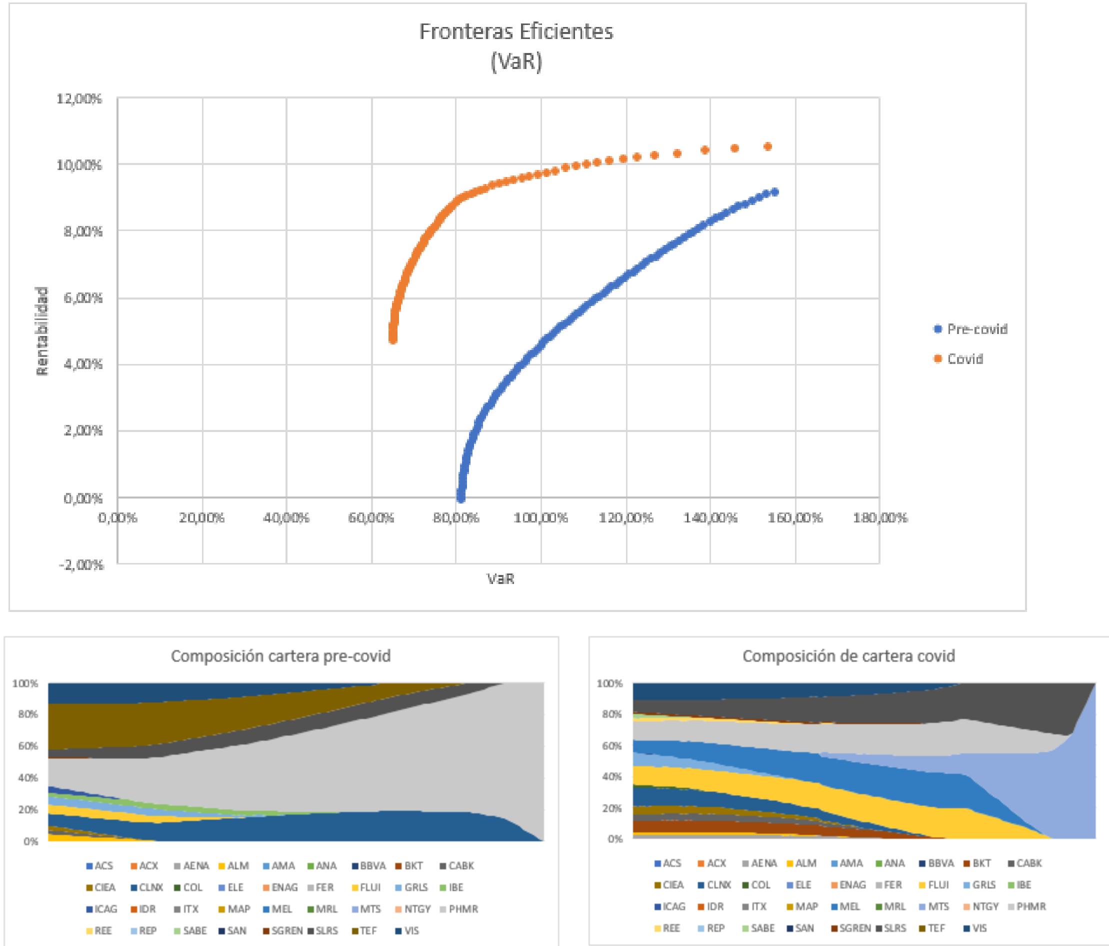
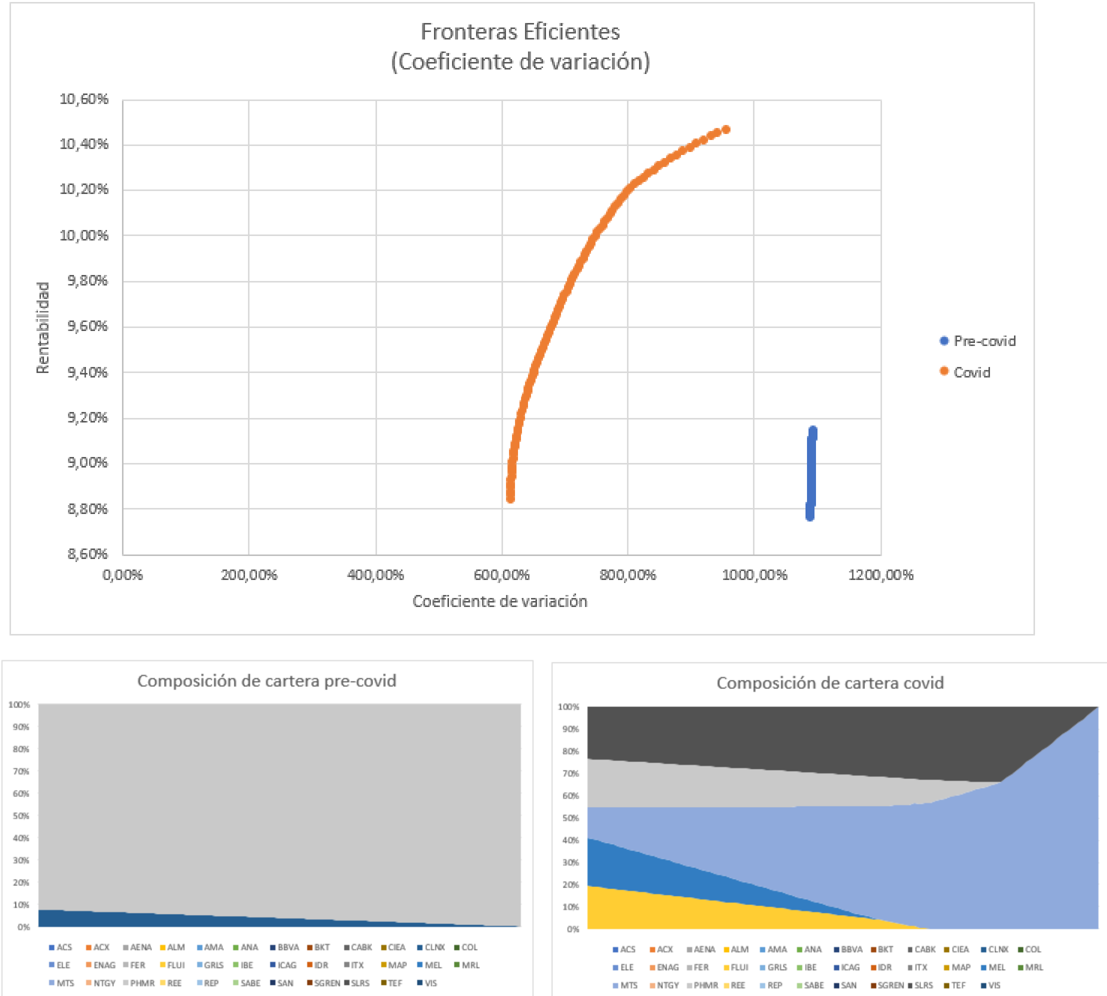


Figura 5.10: Frontera eficiciente y composición de cartera usando el **coeficiente de variación**.



En primer lugar, observamos que todas las fronteras eficientes del periodo covid se encuentran por encima de las fronteras del periodo pre-covid. Si las fronteras eficientes del periodo covid están por encima del periodo pre-covid, significa que los mercados bursátiles no han interpretado de forma tan catastrófica la pandemia, y aunque hubo importantes caídas iniciales por la "sorpresa" y las medidas adoptadas de confinamiento, el mercado ha interpretado que aparecerán importantes oportunidades de inversión que han ayudado a que se incremente la rentabilidad o se reduzca el riesgo (en cualquiera de las medidas estudiadas). Por lo tanto, el mercado bursátil, en contra de lo que podría parecer ofrece mejores carteras rentabilidad-riesgo después que antes de la pandemia.

Usando como medida de riesgo la probabilidad de pérdida con $R^* = 0$ o el coeficiente de variación, se observa que la diversificación de cartera es menor que la obtenida usando otras medidas de riesgo. En concreto, durante el periodo pre-covid en las carteras predominaron los activos financieros de las empresas PharmaMar y Cellnex. En cambio, para el periodo covid la composición varía, manteniéndose PharmaMar, pero destacando también los activos de Solaria y, para un riesgo mayor, los de la empresa Arcel. Mittal.

Se observa que, independientemente de la medida de riesgo usada, la composición de cartera pasa a ser más diversificada durante el periodo covid. Es lógico, diversificar es una buena estrategia para mitigar la incertidumbre en la evolución de la bolsa. Además, en todas las medidas de riesgo empleadas coincide que los inversores más arriesgados invierten en PharmaMar durante el periodo pre-covid y lo hacen en Arcel. Mittal durante el periodo posterior. Este hecho pone de manifiesto la manera en que se han definido las medidas de riesgo, en todas ellas interviene la volatilidad de forma directa o indirecta.

Capítulo 6

Conclusiones

Una vez alcanzados los objetivos marcados inicialmente, y considero que también, las competencias vinculadas a la elaboración del trabajo de final de grado propuestas por la Universidad de Barcelona, se procede a la extracción de conclusiones sobre el estudio realizado.

Las competencias más destacables que considero que he desarollado y perfeccionado a lo largo del proyecto, entre las recogidas por la universidad, son las listadas a continuación.

- Capacidad comunicativa, de aprendizaje y responsabilidad.
- Capacidad para usar las tecnologias de información.
- Capacidad de análisis de teorías y modelos económicos.
- Capacidad para elaborar, analizar e interpretar la informacón económica.

Se ha visto y comprobado que en Economía, a diferencia de como sucede en las Matemáticas, un término puede tener más de una definición. En particular, el riesgo ha sido definido a través de cuatro definiciones diferentes, y cada una con una medida asociada distinta. Aplicando estas medidas, en la parte práctica al IBEX 35, se ha comprobado la obtención de conclusiones dispares. A través de la volatilidad, el coeficiente de variación y el VaR se califica, en promedio, como más arriesgado el periodo covid, y de manera opuesta usando la probabilidad de pérdida como medida de riesgo.

El Modelo de Markowitz ha sido fácil de manipular tanto a nivel teórico como a nivel práctico, esto último debido a la gran potencia de optimización de Visual Basic. Con el programa desarollado (detallado en el anexo) se han resuelto más de 800 ecuaciones en cuestión de minutos, y ello ha permitido la obtención y representación gráfica tanto de las fronteras eficientes como de la composición de las diferentes carteras eficientes. Aunque las hipótesis del modelo son rígidas y en ocasiones pueden alejarse de la realidad, es una excelente herramienta para iniciar el estudio de la gestión de carteras o *portfolio management*.

Parece, por sentido común, que durante el covid la situación económica ha empeorado bastante respecto de la situación pre-covid, pero en cambio, los mercados financieros muestran una situación totalmente contraria ya que encontramos mejores carteras rentabilidad-riesgo después que antes de la pandemia. A través de las fronteras eficientes obtenidas, se ha observado que a pesar de que la composición de estas varía según la definición de riesgo escogida, en todas coincide que durante el periodo covid son más diversificadas. Es claro, tal y como se ha argumentado a lo largo de todo el proyecto, la diversificación es una estrategia clave para mitigar el riesgo, y la pandemia ha sido un periodo más de incertidumbre para la economía.

Por último, cabe destacar que la parte práctica se ha desarrollado en un marco muy acotado, y su extrapolación no es posible. Es decir, se ha estudiado el IBEX 35 y el Covid-19, no podemos asegurar que obtendríamos los mismos resultados estudiando un mercado bursátil diferente o bien otra pandemia mundial. Además, el IBEX 35 es calculado mediante el método de ponderación por valor o *value weighting*, donde las grandes empresas tienen una gran influencia. Por este motivo, tampoco podemos asegurar estas conclusiones para empresas de reducida dimensión. Podemos concluir que la gestión de carteras tiene en consideración un número elevado de variables para la toma de decisiones. Así, si se quiere obtener una rentabilidad a través de la inversión en activos financieros se debe indagar de manera exhaustiva en qué depositamos nuestro dinero y confianza, y definir qué entendemos por riesgo como inversores.

Bibliografía

[1] Xavier Brun, Oscar Elvira, Xavier Puig, (2008), *Matemáticas financiera y estadística básica*, Bresca Editorial.

[2] Xavier Brun, Oscar Elvira, Xavier Puig, (2008), *Mercados de renta variable y mercado de divisas*, Bresca Editorial, S.L.

[3] Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández, José Manuel Vegaas Montaner, (2003), *Cálculo Diferencial de Varias Variables*, Thomson Editores.

[4] Maciej J. Capinski, (2014), *Portfolio theory and risk management*, Cambridge University Press.

[5] Jack Clark Francis, Stephen H. Archer, (1979), *Portfolio Analysis*, Prentice-Hall.

[6] Juan García Boza, (2013), *Inversiones financieras: Selección de carteras. Teoría y práctica*. Ed. Pirámide.

[7] Lawrence J. Gitman, Michael D. Joehnk, (2005), *Fundamentos de inversiones*, Pearson Educación, S.A.

[8] Paul Krugman, Robin Wells, (2007), *Introducción a la Economía*, Worth Publishers.

[9] Henry Latane, Donald Tuttle, (1967), *Criteria for Portfolio Building*. Journal of Finance, 22.

[10] José M. Marín, Gonzalo Rubio, (2001), *Economía financiera*, Antoni Bosch Editor, S.A.

[11] Harry M. Markowitz, (1952), *Portfolio Selection. Journal of Finance, Volume 7, Number 1.*

[12] https://www.eleconomista.es/mercados-cotizaciones/noticias/10864082/11/20/MasMovil-pone-fin-a-ocho-anos-en-la-bolsa-espanola.html
Xavier Martínez Galiana, (31 noviembre 2020), *MásMóvil pone fin a ocho años en la bolsa española*. El Economista.

[13] Rosana de Pablo Redondo, Julio González Arias, (2013), *Teoría de la financiación*, Publicaciones UNED.

[14] Ruperto Pérez Fernández-Tellado, (2010), *Teoría y práctica de la Bolsa*, Ediciones Díaz de Santos.

[15] José Antonio Ramírez Prados, (2010), *Cómo entender los datos de la prensa financiera*, ESIC Editorial.

[16] https://www.bbva.es/finanzas-vistazo/ef/fondos-inversion/que-es-la-renta-variable.html

[17] https://www.bmerv.es/docs/Sbolsas/InformesSB/Mensual.pdf

[18] https://datosmacro.expansion.com/ipc-paises/espana

[19] https://www.grupbancsabadell.com/corp/es/accionistas-e-inversores/la-accion.html

[20] https://www.niusdiario.es/economia/motor/alza-precio-aluminio-acero-amenaza-produccion-vehiculos_18_3094095304.html

[21] https://cincodias.elpais.com/cincodias/2021/03/08/companias/1615208769_092395.html

Apéndice A

Anexos

En este anexo se incorpora el código del programa en Visual Basic desarrollado para trabajar los datos, así como una muestra de los *outputs* que se obtienen con cada una de las funciones definidas.

```
'Declaración de variables
Dim Explicit
Dim i, j, total_empresas, fila_rellenado, total_datos, fila, factor, max_pasos, pasos As Integer
Dim empresas(40), empresas_abrev(40) As String
Dim ruta_carpeta, ruta_archivo, extracción  As String
Dim rentabilidad_max, rentabilidad_min, rentabilidad, tol As Double
```

```
'Función 1.
'Importa los datos necesarios
'Para cada una de las compañías, se importarán los last price en los periodos considerados
'La información ha sido descargada de la página investing en formato Excel
'Un Excel por compañía
'En nuestro caso, el programa explorá un total de 35 archivos (uno por compañía)
'Explorará todos los archivos de la carpeta indicada y clonará Máster CIA para su posterior rellenado
'Máster CIA es una pestaña creada anteriormente
'El máster contiene fórmulas que una vez cálculadas las rentabilidades (función 2) se computaran
'En concreto, se calculará la máxima rentabilidad y la mínima
'Además, la rentabilidad media histórica y la volatilidad
Sub Importar_datos()
    'Creamos vectores con los nombres de las empresas y sus abreviaciones
    'Constan en la pestaña Parámetros
    'Se han ordenado alfabéticamente para facilitar su posterior tratado
    i = 2
    ThisWorkbook.Sheets("Parámetros").Activate
    While ThisWorkbook.Sheets("Parámetros").Cells(i, 1).Value <> ""
        empresas(i - 2) = ThisWorkbook.Sheets("Parámetros").Cells(i, 1).Value
        empresas_abrev(i - 2) = ThisWorkbook.Sheets("Parámetros").Cells(i, 3).Value
        i = i + 1
    Wend

    total_empresas = i - 2
    MsgBox ("Se han registrado " & total_empresas & " empresas")
    'Abrimos el fichero para cada compañía
    'El nombre de los ficheros son las abreviaciones de las compañías
    ruta_carpeta = "C:\Users\UN51084\Documents\Empresas IBEX 35"
    i = 0
    While i < total_empresas
        ruta_archivo = ruta_carpeta & empresas_abrev(i) & ".xlsx"
        Workbooks.Open Filename:=ruta_archivo, UpdateLinks:=False
        extracción = ActiveWorkbook.Name
```

```
        'Hacemos una copia del Máster CIA para cada una de las compañías y procedemos a su rellenado
        ThisWorkbook.Sheets("Máster CIA").Select
        ThisWorkbook.Sheets("Máster CIA").Copy Before:=Sheets(1)
        ThisWorkbook.Sheets("Máster CIA (2)").Select
        ThisWorkbook.Sheets("Máster CIA (2)").Name = empresas_abrev(i)
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(1, 1).Value = _
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(1, 1).Value & empresas(i)
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(1, 1).Value = _
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(1, 12).Value & empresas(i)

        fila_rellenado = 1
        While Workbook.Sheets(extracción).Cells(fila_rellenado, 1) <> ""
            fila_rellenado = fila_rellanado + 1
        Wend
        total_datos = fila_rellenado - 1

        'Rellenamos los datos del periodo covid
        fila = 1
        fila_rellenado = 3
        While fila < total_datos / 2 + 1
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila_rellenado, 1).Value = _
                Workbooks(extracción).Cells(fila, 1).Value
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila_rellenado, 2).Value = _
                Workbooks(extracción).Cells(fila, 2).Value
            fila = fila + 1
            fila_rellenado = fila_rellenado + 1
        Wend

        'Rellenamos los datos del periodo pre-covid
        fila_rellenado = 3
        While fila < total_datos + 1
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila_rellenado, 12).Value = _
                Workbooks(extracción).Cells(fila, 1).Value
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila_rellenado, 13).Value = _
                Workbooks(extracción).Cells(fila, 2).Value
            fila = fila + 1
            fila_rellenado = fila_rellenado + 1
        Wend

        'Una vez importados los datos cerramos sin guardar
         Workbooks(extracción).Close False
    Wend

End Sub
```

```
'Función 2.
'Para cada uno de las pestañas creadas con la función anterior cálcula las rentabilidades diarias
'Además translada los datos a un cuadro resumen para cada periodo
'Por lo tanto, obtendremos dos cuadros resumen
Sub Rentabilidades()

    'Leemos el factor por el cual vamos a multiplicar las rentabilidades
    ThisWorkbook.Sheets("Parámetros").Activate
    factor = ThisWorkbook.Sheets("Parámetros").Cells(1, 6).Value

    i = 0
    fila = 3
    While i < total_empresas
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Activate
```

```
        'Las rentabilidades simples del periodo covid van en la col. 4
        'Las rentabilidades simples del pre periodo covid van en la col. 15
        While ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila, 2) <> "" And _
            ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila + 1, 2) <> ""

                rentabilidad = ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila, 2) - _
                    ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila + 1, 2)
                rentabilidad = rentabilidad / ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila + 1, 2)
                retabilidad = rentabilidad * factor
                ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila, 4) = rentabilidad

                rentabilidad = ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila, 13) - _
                    ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila + 1, 13)
                rentabilidad = rentabilidad / ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila + 1, 13)
                retabilidad = rentabilidad * factor
                ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(fila, 15) = rentabilidad
                fila = fila + 1
        Wend
        i = i + 1
    Wend

    'Transladamos las rentabilidades históricas medias y volatilidades a una pestaña
    'Pestaña llamada Cuadro Resumen1 contendrá los datos del periodo covid
    'Pestaña llamada Cuadro Resumen2 contendrá los datos del periodo pre-covid
    i = 0
    fila = 2
    While i < total_empresas
        'Cuadro Resumen1
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Activate
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(3, 8) = ThisWorkbook.Sheets("Cuadro Resumen1").Cells(fila, 2)
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(3, 9) = ThisWorkbook.Sheets("Cuadro Resumen1").Cells(fila, 3)

        'Cuadro Resumen2
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Activate
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(3, 19) = ThisWorkbook.Sheets("Cuadro Resumen2").Cells(fila, 2)
        ThisWorkbook.Sheets(empresas_abrev(i)).Cells(3, 20) = ThisWorkbook.Sheets("Cuadro Resumen2").Cells(fila, 3)
        fila = fila + 1
        i = i + 1
    Wend
End Sub
```

Ejecutando estas dos funciones, se obtiene para cada una de las compañías tratadas una pestaña como la de la página siguiente. También, dos pestañas llamadas Cuadro Resumen1 y Cuadro Resumen2, donde se recoge la rentabilidad media histórica y la volatilidad para cado uno de los activos de las 35 empresas y periodos tratados.

Datos históricos COVID FLUIDRA						
Fecha	**Último**	**Rentabilidad Simple**	Mín.	Máx.	Rentabilidad media histórica	Volatilidad
15.03.2021	23,7	-8,40%	-142,66%	215,92%	7,89%	0,49003
12.03.2021	23,8	-16,67%				
11.03.2021	24	51,28%				
10.03.2021	23,4	-21,14%				
09.03.2021	23,65	30,04%				
08.03.2021	23,3	17,32%				
05.03.2021	23,1	30,77%				
04.03.2021	22,75	8,83%				
03.03.2021	22,65	-38,96%				
02.03.2021	23,1	39,74%				
01.03.2021	22,65	31,39%				
26.02.2021	22,3	27,27%				
25.02.2021	22	105,26%				
24.02.2021	20,9	9,62%				
23.02.2021	20,8	-69,61%				
22.02.2021	21,55	-22,94%				
19.02.2021	21,8	42,15%				
18.02.2021	21,35	33,33%				
17.02.2021	21	-46,51%				
16.02.2021	21,5	9,35%				
15.02.2021	21,4	38,10%				
12.02.2021	21	9,57%				
11.02.2021	20,9	-14,25%				
10.02.2021	21,05	-46,40%				
09.02.2021	21,55	-40,91%				
08.02.2021	22	22,99%				
05.02.2021	21,75	111,65%				
04.02.2021	20,6	9,76%				
03.02.2021	20,5	9,80%				
02.02.2021	20,4	14,81%				
01.02.2021	20,25	45,45%				
29.01.2021	19,8	-20,00%				
28.01.2021	20	72,54%				
27.01.2021	19,3	-60,30%				
26.01.2021	19,9	-14,96%				
25.01.2021	20,05	45,92%				
22.01.2021	19,6	10,26%				
21.01.2021	19,5	-48,05%				
20.01.2021	19,98	-106,16%				

Datos históricos pre-COVID FLUIDRA						
Fecha	**Último**	**Rentabilidad Simple**	Mín.	Máx.	Rentabilidad media histórica	Volatilidad
16.03.2020	8,97	-11,09%	-395,19%	255,00%	0,01%	0,50960
13.03.2020	9,02	255,00%				
12.03.2020	8	-395,19%				
11.03.2020	9,97	16,18%				
10.03.2020	9,89	-20,02%				
09.03.2020	9,99	-200,00%				
06.03.2020	11,1	-49,21%				
05.03.2020	11,38	-54,70%				
04.03.2020	11,7	-91,35%				
03.03.2020	12,26	23,10%				
02.03.2020	12,12	-57,69%				
28.02.2020	12,48	19,42%				
27.02.2020	12,36	-65,73%				
26.02.2020	12,78	-36,87%				
25.02.2020	13,02	-30,26%				
24.02.2020	13,22	-12,03%				
21.02.2020	13,3	-8,98%				
20.02.2020	13,36	6,01%				
19.02.2020	13,32	33,59%				
18.02.2020	13,1	-59,26%				
17.02.2020	13,5	122,64%				
14.02.2020	12,72	68,29%				
13.02.2020	12,3	-6,48%				
12.02.2020	12,34	49,83%				
11.02.2020	12,04	104,90%				
10.02.2020	11,44	-3,49%				
07.02.2020	11,46	68,59%				
06.02.2020	11,08	-14,34%				
05.02.2020	11,16	25,41%				
04.02.2020	11,02	-3,62%				
03.02.2020	11,04	-10,81%				
31.01.2020	11,1	-21,39%				
30.01.2020	11,22	-48,70%				
29.01.2020	11,5	14,01%				
28.01.2020	11,42	-13,91%				
27.01.2020	11,5	-47,54%				
24.01.2020	11,78	31,03%				
23.01.2020	11,6	-56,95%				
22.01.2020	11,94	-39,41%				

Figura A.1: Parte del *output* para la empresa Fluidra tras ejecutar las funciones 1 y 2. El *output* completo tiene 258 filas.

Empresa	Rent. Media histórica	Riesgo
ACS	-7,43%	0,45212
ACX	-2,63%	0,40721
AENA	-4,08%	0,36735
ALM	-3,39%	0,39274
AMA	-2,90%	0,40423
ANA	-0,39%	0,45198
BBVA	-5,07%	0,43583
BKT	-5,28%	0,43476
CABK	-4,15%	0,48838
CIEA	-4,07%	0,42947
CLNX	4,16%	0,41134
COL	-1,11%	0,34445
ELE	-2,65%	0,33376
ENAG	-3,17%	0,39470
FER	-0,18%	0,32896
FLUI	0,01%	0,50960
GRLS	0,45%	0,32164
IBE	1,08%	0,32148
ICAG	-5,22%	0,66708
IDR	-1,70%	0,46796
ITX	-1,72%	0,31649
MAP	-4,48%	0,33544
MEL	-6,95%	0,46110
MRL	-1,48%	0,27596
MTS	-6,54%	0,65607
NTGY	-3,69%	0,35186
PHMR	9,14%	0,98801
REE	-1,92%	0,31508
REP	-5,42%	0,39640
SABE	-5,18%	0,59591
SAN	-5,56%	0,44052
SGREN	-0,08%	0,51792
SLRS	2,51%	0,60825
TEF	-5,21%	0,33192
VIS	-1,09%	0,36974

Empresa	Rent. Media histórica	Riesgo
ACS	6,91%	0,74465
ACX	4,64%	0,49127
AENA	4,04%	0,61820
ALM	3,12%	0,43502
AMA	3,89%	0,67737
ANA	3,64%	0,48503
BBVA	5,20%	0,69159
BKT	5,16%	0,63833
CABK	4,04%	0,60686
CIEA	5,17%	0,58202
CLNX	1,95%	0,44875
COL	1,75%	0,59505
ELE	2,64%	0,31712
ENAG	0,59%	0,35914
FER	1,75%	0,48334
FLUI	7,89%	0,49003
GRLS	-1,57%	0,42030
IBE	1,82%	0,29012
ICAG	2,74%	1,08780
IDR	1,03%	0,54437
ITX	3,40%	0,48684
MAP	0,94%	0,49912
MEL	8,57%	0,98905
MRL	1,03%	0,59564
MTS	10,47%	0,75983
NTGY	2,71%	0,43590
PHMR	8,20%	0,86930
REE	0,01%	0,30132
REP	5,36%	0,68481
SABE	1,82%	0,89609
SAN	3,78%	0,66800
SGREN	6,59%	0,53037
SLRS	9,55%	0,72715
TEF	0,57%	0,55118
VIS	1,35%	0,31225

Figura A.2: Cuadro Resumen1 y Cuadro Resumen2, *outputs* tras ejecutar las funciones 1 y 2. El riesgo es medido mediante la volatilidad.

El cuadro de la izquierda son los resultados para el periodo pre-covid, mientras que el cuadro de la derecha son los resultados para el periodo definido como covid. Con estos datos, y usando las funciones necesarias implementadas en Microsoft Excel obtenemos el resto de medidas de riesgo para ambos periodos.

En concreto, para el cálculo del riesgo a través del coeficiente de variación se realiza el cociente entre la voltilidad y la rentabilidad media histórica para cada activo. En relación al *Value at Risk*, se usan la funciones **min(valor1,valor2)**, **abs(valor)** y **INV.NORM.ESTAND(α)**. La función min() proporciona el mínimo entre los dos valores fijados, la función abs() proporciona el valor absoluto del valor fijado y, la función INV.NORM.ESTAND() proporciona k_α para un α fijado y cumpliéndose $Pr(Z > k_\alpha) = \alpha$. Por último, para obtener el riesgo mediante la probabilidad de pérdida se debe emplear la función **DISTR.NORM.N(x, media, desviación estándar, acumulada)** donde,

- x, es el valor cuya distribución se desea obtener.
- Media, es la media aritmética de la distribución.
- Desviación estándar, es la desviación estándar de la distribución.
- Acumulado, es un valor lógico que determina la forma de la función. Si el valor acumulado es verdadero, obtendremos la función de distribución acumulativa; si es falso, devuelve la función de densidad de probabilidad. Así, para calcular $Pr(R_p \leq R^*) = Pr\left(Z_p \leq \frac{R^* - \mu_p}{\sigma_p}\right)$ se debe fijar verdadero.

Usando la opción de Análisis de Datos e introduciendo como *input* las rentabilidades históricas diarias de cada compañía, (*output* de la función 2), se obtienen las matrices de correlaciones adjuntas a continuación.

	ACS	ACX	AENA	ALM	AMA	ANA	BBVA	BKT	CABK	CIEA	CLNX	COL	ELE	ENAG	FER	FLUI	GRLS	IBE	ICAG	IDR	ITX	MAP	MEL	MRL	MTS	NTGY	PHMR	REE	REP	SABE	SAN	SGREN	SLRS	TEF	VIS
ACS	1,00	0,47	0,49	0,26	0,44	0,35	0,51	0,48	0,46	0,50	0,02	0,51	0,38	0,25	0,65	0,11	0,02	0,34	0,52	0,39	0,49	0,50	0,51	0,40	0,54	0,30	0,09	0,12	0,54	0,51	0,56	0,26	0,14	0,37	-0,03
ACX	0,47	1,00	0,39	0,22	0,56	0,34	0,59	0,54	0,56	0,47	-0,03	0,41	0,23	0,19	0,48	0,11	0,09	0,40	0,50	0,53	0,53	0,51	0,50	0,46	0,69	0,35	0,03	0,09	0,53	0,54	0,60	0,21	0,17	0,45	0,05
AENA	0,49	0,39	1,00	0,30	0,48	0,41	0,54	0,49	0,47	0,37	-0,02	0,57	0,37	0,35	0,55	0,11	0,03	0,29	0,61	0,41	0,54	0,48	0,50	0,49	0,48	0,41	-0,12	0,18	0,42	0,44	0,54	0,16	0,05	0,33	0,03
ALM	0,26	0,22	0,30	1,00	0,22	0,35	0,19	0,21	0,22	0,06	0,01	0,17	0,23	0,25	0,30	0,11	0,31	0,17	0,19	0,23	0,31	0,23	0,24	0,25	0,26	0,31	0,15	0,27	0,31	0,17	0,24	0,15	0,13	0,32	0,16
AMA	0,44	0,56	0,48	0,22	1,00	0,28	0,56	0,56	0,58	0,46	0,01	0,40	0,31	0,26	0,62	0,05	0,08	0,45	0,59	0,69	0,55	0,54	0,56	0,52	0,50	0,37	-0,03	0,17	0,51	0,53	0,61	0,16	0,09	0,43	-0,08
ANA	0,35	0,34	0,41	0,35	0,28	1,00	0,37	0,37	0,34	0,21	0,13	0,26	0,36	0,32	0,38	0,16	0,21	0,41	0,35	0,30	0,39	0,31	0,23	0,21	0,36	0,42	0,09	0,32	0,29	0,26	0,38	0,38	0,30	0,40	0,08
BBVA	0,51	0,59	0,54	0,19	0,56	0,37	1,00	0,71	0,77	0,51	-0,09	0,51	0,29	0,30	0,56	0,12	0,03	0,42	0,59	0,53	0,56	0,63	0,58	0,51	0,61	0,38	-0,12	0,12	0,61	0,75	0,87	0,20	0,10	0,56	-0,01
BKT	0,48	0,54	0,49	0,21	0,56	0,37	0,71	1,00	0,74	0,42	-0,20	0,42	0,22	0,31	0,54	0,13	-0,01	0,34	0,49	0,60	0,51	0,59	0,52	0,49	0,53	0,37	-0,13	0,11	0,54	0,69	0,73	0,12	0,08	0,51	-0,11
CABK	0,46	0,56	0,47	0,22	0,58	0,34	0,77	0,74	1,00	0,42	-0,18	0,40	0,21	0,35	0,50	0,06	0,08	0,35	0,53	0,65	0,49	0,65	0,54	0,48	0,52	0,41	-0,09	0,09	0,60	0,77	0,78	0,12	0,04	0,58	-0,09
CIEA	0,50	0,47	0,37	0,06	0,46	0,21	0,51	0,42	0,42	1,00	0,01	0,50	0,19	0,07	0,48	0,09	-0,17	0,26	0,54	0,29	0,41	0,46	0,52	0,34	0,56	0,16	-0,01	0,07	0,50	0,49	0,53	0,20	0,07	0,22	0,01
CLNX	0,02	-0,03	-0,02	0,01	0,01	0,13	-0,09	-0,20	-0,18	0,01	1,00	-0,07	0,28	0,15	0,08	0,04	0,06	0,32	-0,08	-0,09	0,09	-0,04	-0,12	-0,09	0,03	0,04	0,28	0,23	-0,06	-0,17	-0,09	0,34	0,31	-0,04	0,15
COL	0,51	0,41	0,57	0,17	0,40	0,26	0,51	0,42	0,40	0,50	-0,07	1,00	0,33	0,24	0,57	0,09	0,00	0,24	0,54	0,35	0,52	0,47	0,48	0,57	0,49	0,34	-0,06	0,20	0,50	0,41	0,49	0,10	0,03	0,30	0,09
ELE	0,38	0,23	0,37	0,23	0,31	0,36	0,29	0,22	0,21	0,19	0,28	0,33	1,00	0,51	0,45	0,16	0,14	0,58	0,25	0,34	0,39	0,30	0,14	0,21	0,30	0,39	0,14	0,59	0,30	0,15	0,24	0,31	0,25	0,24	0,22
ENAG	0,25	0,19	0,35	0,25	0,26	0,32	0,30	0,31	0,35	0,07	0,15	0,24	0,51	1,00	0,37	0,13	0,23	0,34	0,23	0,37	0,34	0,36	0,20	0,35	0,21	0,50	0,05	0,52	0,35	0,29	0,29	0,08	0,05	0,42	0,16
FER	0,65	0,48	0,55	0,30	0,62	0,38	0,56	0,54	0,50	0,48	0,08	0,57	0,45	0,37	1,00	0,12	0,06	0,43	0,56	0,54	0,63	0,55	0,56	0,50	0,54	0,40	-0,02	0,29	0,54	0,51	0,59	0,27	0,18	0,40	-0,02
FLUI	0,11	0,11	0,11	0,11	0,05	0,16	0,12	0,13	0,06	0,09	0,04	0,09	0,16	0,13	0,12	1,00	0,05	0,13	0,09	0,14	0,13	0,06	0,00	0,09	0,18	0,15	0,14	0,09	0,07	0,05	0,10	0,09	0,07	0,01	0,13
GRLS	0,02	0,09	0,03	0,31	0,08	0,21	0,03	-0,01	0,08	-0,17	0,06	0,00	0,14	0,23	0,06	0,05	1,00	0,07	-0,05	0,14	0,20	0,02	0,08	0,09	-0,01	0,20	0,19	0,24	0,04	0,02	0,05	0,07	0,22	0,20	0,13
IBE	0,34	0,40	0,29	0,17	0,45	0,41	0,42	0,34	0,35	0,26	0,32	0,24	0,58	0,34	0,43	0,13	0,07	1,00	0,27	0,41	0,44	0,36	0,22	0,25	0,40	0,42	0,18	0,38	0,31	0,27	0,40	0,47	0,33	0,35	0,12
ICAG	0,52	0,50	0,61	0,19	0,59	0,35	0,59	0,49	0,53	0,54	-0,08	0,54	0,25	0,23	0,56	0,09	-0,05	0,27	1,00	0,43	0,55	0,53	0,66	0,51	0,53	0,30	-0,14	0,07	0,58	0,58	0,61	0,14	0,04	0,37	0,04
IDR	0,39	0,53	0,41	0,23	0,69	0,30	0,53	0,60	0,65	0,29	-0,09	0,35	0,34	0,37	0,54	0,14	0,14	0,41	0,43	1,00	0,48	0,52	0,48	0,51	0,50	0,47	0,01	0,19	0,47	0,48	0,54	0,17	0,12	0,51	0,01
ITX	0,49	0,53	0,54	0,31	0,55	0,39	0,56	0,51	0,49	0,41	0,09	0,52	0,39	0,34	0,63	0,13	0,20	0,44	0,55	0,48	1,00	0,55	0,57	0,51	0,53	0,44	-0,06	0,24	0,56	0,47	0,58	0,27	0,17	0,46	0,06
MAP	0,50	0,51	0,48	0,23	0,54	0,31	0,63	0,59	0,65	0,46	-0,04	0,47	0,30	0,36	0,55	0,06	0,02	0,36	0,53	0,52	0,55	1,00	0,55	0,57	0,52	0,32	-0,02	0,24	0,58	0,66	0,71	0,14	0,06	0,57	0,11
MEL	0,51	0,50	0,50	0,24	0,56	0,23	0,58	0,52	0,54	0,52	-0,12	0,48	0,14	0,20	0,56	0,00	0,08	0,22	0,66	0,48	0,57	0,55	1,00	0,59	0,54	0,28	-0,08	0,02	0,59	0,60	0,62	0,17	0,05	0,42	-0,07
MRL	0,40	0,46	0,49	0,25	0,52	0,21	0,51	0,49	0,48	0,34	-0,09	0,57	0,21	0,35	0,50	0,09	0,09	0,25	0,51	0,51	0,51	0,57	0,59	1,00	0,44	0,34	-0,09	0,18	0,52	0,55	0,51	0,10	0,07	0,39	0,12
MTS	0,54	0,69	0,48	0,26	0,50	0,36	0,61	0,53	0,52	0,56	0,03	0,49	0,30	0,21	0,54	0,18	-0,01	0,40	0,53	0,50	0,53	0,52	0,54	0,44	1,00	0,33	0,06	0,06	0,59	0,54	0,64	0,30	0,20	0,35	0,03
NTGY	0,30	0,35	0,41	0,31	0,37	0,42	0,38	0,37	0,41	0,16	0,04	0,34	0,39	0,50	0,40	0,15	0,20	0,42	0,30	0,47	0,44	0,32	0,28	0,34	0,33	1,00	0,20	0,34	0,35	0,35	0,41	0,13	0,06	0,44	0,11
PHMR	0,09	0,03	-0,12	0,15	-0,03	0,09	-0,12	-0,13	-0,09	-0,01	0,28	-0,06	0,14	0,05	-0,02	0,14	0,19	0,18	-0,14	0,01	-0,06	-0,02	-0,08	-0,09	0,06	0,20	1,00	0,12	-0,05	-0,12	-0,05	0,15	0,16	0,01	0,13
REE	0,12	0,09	0,18	0,27	0,17	0,32	0,12	0,11	0,09	0,07	0,23	0,20	0,59	0,52	0,29	0,09	0,24	0,38	0,07	0,19	0,24	0,24	0,02	0,18	0,06	0,34	0,12	1,00	0,14	0,07	0,12	0,16	0,11	0,27	0,29
REP	0,54	0,53	0,42	0,31	0,51	0,29	0,61	0,54	0,60	0,50	-0,06	0,50	0,30	0,35	0,54	0,07	0,04	0,31	0,58	0,47	0,56	0,58	0,59	0,52	0,59	0,35	-0,05	0,14	1,00	0,60	0,69	0,18	0,08	0,54	0,00
SABE	0,51	0,54	0,44	0,17	0,53	0,26	0,75	0,69	0,77	0,49	-0,17	0,41	0,15	0,29	0,51	0,05	0,02	0,27	0,58	0,48	0,47	0,66	0,60	0,55	0,54	0,35	-0,12	0,07	0,60	1,00	0,76	0,10	0,01	0,53	-0,06
SAN	0,56	0,60	0,54	0,24	0,61	0,38	0,87	0,73	0,78	0,53	-0,09	0,49	0,24	0,29	0,59	0,10	0,05	0,40	0,61	0,54	0,58	0,71	0,62	0,51	0,64	0,41	-0,05	0,12	0,69	0,76	1,00	0,22	0,09	0,61	-0,02
SGREN	0,26	0,21	0,16	0,15	0,16	0,38	0,20	0,12	0,12	0,20	0,34	0,10	0,31	0,08	0,27	0,09	0,07	0,47	0,14	0,17	0,27	0,14	0,17	0,10	0,30	0,13	0,15	0,16	0,18	0,10	0,22	1,00	0,48	0,14	0,09
SLRS	0,14	0,17	0,05	0,13	0,09	0,30	0,10	0,08	0,04	0,07	0,31	0,03	0,25	0,05	0,18	0,07	0,22	0,33	0,04	0,12	0,17	0,06	0,05	0,07	0,20	0,06	0,16	0,11	0,08	0,01	0,09	0,48	1,00	0,09	0,08
TEF	0,37	0,45	0,33	0,32	0,43	0,40	0,56	0,51	0,58	0,22	-0,04	0,30	0,24	0,42	0,40	0,01	0,20	0,35	0,37	0,51	0,46	0,57	0,42	0,39	0,35	0,44	0,01	0,27	0,54	0,53	0,61	0,14	0,09	1,00	0,04
VIS	-0,03	0,05	0,03	0,16	-0,08	0,08	-0,01	-0,11	-0,09	0,01	0,15	0,09	0,22	0,16	-0,02	0,13	0,13	0,12	0,04	0,01	0,06	0,11	-0,07	0,12	0,03	0,11	0,13	0,29	0,00	-0,06	-0,02	0,09	0,08	0,04	1,00

Figura A.3: Matriz de correlaciones para el periodo covid.

	ACS	ACX	AENA	ALM	AMA	ANA	BBVA	BKT	CABK	CIEA	CLNX	COL	ELE	ENAG	FER	FLUI	GRLS	IBE	ICAG	IDR	ITX	MAP	MEL	MRL	MTS	NTGY	PHMR	REE	REP	SABE	SAN	SGREN	SLRS	TEF	VIS
ACS	1,00	0,59	0,71	0,38	0,62	0,57	0,69	0,64	0,54	0,56	0,39	0,65	0,64	0,51	0,66	0,48	0,46	0,53	0,57	0,53	0,58	0,67	0,67	0,59	0,63	0,60	0,35	0,43	0,72	0,58	0,70	0,43	0,43	0,10	0,34
ACX	0,59	1,00	0,49	0,26	0,58	0,40	0,69	0,64	0,67	0,66	0,22	0,38	0,42	0,43	0,49	0,43	0,33	0,40	0,48	0,54	0,51	0,64	0,60	0,41	0,81	0,46	0,37	0,33	0,67	0,62	0,70	0,45	0,38	-0,02	0,30
AENA	0,71	0,49	1,00	0,33	0,65	0,65	0,67	0,60	0,53	0,48	0,58	0,75	0,74	0,58	0,74	0,46	0,55	0,65	0,63	0,45	0,61	0,65	0,67	0,68	0,55	0,70	0,29	0,48	0,66	0,55	0,65	0,40	0,42	-0,02	0,30
ALM	0,38	0,26	0,33	1,00	0,34	0,19	0,31	0,29	0,22	0,23	0,31	0,30	0,37	0,26	0,37	0,17	0,27	0,31	0,21	0,23	0,29	0,35	0,30	0,26	0,27	0,32	0,23	0,29	0,35	0,22	0,34	0,27	0,21	0,11	0,24
AMA	0,62	0,58	0,65	0,34	1,00	0,63	0,53	0,44	0,46	0,55	0,50	0,51	0,57	0,56	0,63	0,52	0,52	0,53	0,51	0,61	0,62	0,53	0,62	0,59	0,56	0,61	0,46	0,48	0,61	0,50	0,54	0,49	0,44	-0,13	0,37
ANA	0,57	0,40	0,65	0,19	0,63	1,00	0,47	0,34	0,34	0,41	0,50	0,56	0,66	0,64	0,63	0,49	0,46	0,66	0,40	0,51	0,50	0,50	0,46	0,54	0,48	0,68	0,39	0,60	0,55	0,45	0,43	0,46	0,47	-0,10	0,27
BBVA	0,69	0,69	0,67	0,31	0,53	0,47	1,00	0,86	0,82	0,61	0,33	0,60	0,56	0,47	0,57	0,45	0,36	0,48	0,59	0,47	0,60	0,74	0,65	0,51	0,76	0,56	0,24	0,33	0,72	0,79	0,92	0,38	0,44	0,02	0,28
BKT	0,64	0,64	0,60	0,29	0,44	0,34	0,86	1,00	0,84	0,56	0,26	0,51	0,49	0,37	0,47	0,38	0,27	0,37	0,60	0,45	0,51	0,69	0,63	0,43	0,66	0,47	0,19	0,25	0,66	0,80	0,85	0,34	0,40	0,03	0,25
CABK	0,54	0,67	0,53	0,22	0,46	0,34	0,82	0,84	1,00	0,56	0,23	0,43	0,42	0,37	0,44	0,39	0,27	0,35	0,54	0,45	0,45	0,61	0,58	0,43	0,65	0,44	0,27	0,21	0,59	0,80	0,78	0,30	0,44	-0,03	0,26
CIEA	0,56	0,66	0,48	0,23	0,55	0,41	0,61	0,56	0,56	1,00	0,21	0,35	0,33	0,41	0,35	0,47	0,23	0,28	0,46	0,49	0,47	0,54	0,63	0,38	0,63	0,42	0,29	0,25	0,59	0,55	0,63	0,42	0,37	0,00	0,22
CLNX	0,39	0,22	0,58	0,31	0,50	0,50	0,33	0,26	0,23	0,21	1,00	0,51	0,57	0,48	0,58	0,33	0,47	0,52	0,29	0,29	0,39	0,39	0,34	0,50	0,25	0,58	0,39	0,48	0,44	0,31	0,27	0,32	0,27	-0,09	0,23
COL	0,65	0,38	0,75	0,30	0,51	0,56	0,60	0,51	0,43	0,35	0,51	1,00	0,75	0,54	0,68	0,35	0,43	0,62	0,52	0,36	0,55	0,53	0,59	0,72	0,41	0,64	0,21	0,46	0,57	0,42	0,56	0,31	0,43	0,09	0,25
ELE	0,64	0,42	0,74	0,37	0,57	0,66	0,56	0,49	0,42	0,33	0,57	0,75	1,00	0,73	0,76	0,39	0,55	0,82	0,50	0,37	0,58	0,55	0,51	0,66	0,41	0,81	0,27	0,67	0,60	0,43	0,53	0,38	0,47	0,06	0,31
ENAG	0,51	0,43	0,58	0,26	0,56	0,64	0,47	0,37	0,37	0,41	0,48	0,54	0,73	1,00	0,59	0,43	0,40	0,69	0,40	0,41	0,47	0,44	0,45	0,59	0,42	0,82	0,36	0,73	0,54	0,41	0,43	0,43	0,43	-0,08	0,31
FER	0,66	0,49	0,74	0,37	0,63	0,63	0,57	0,47	0,44	0,35	0,58	0,68	0,76	0,59	1,00	0,44	0,63	0,72	0,49	0,48	0,56	0,60	0,53	0,62	0,49	0,71	0,33	0,58	0,62	0,45	0,54	0,45	0,47	-0,04	0,36
FLUI	0,48	0,43	0,46	0,17	0,52	0,49	0,45	0,38	0,39	0,47	0,33	0,35	0,39	0,43	0,44	1,00	0,39	0,42	0,32	0,40	0,37	0,42	0,38	0,40	0,40	0,49	0,36	0,40	0,49	0,41	0,43	0,41	0,28	-0,09	0,27
GRLS	0,46	0,33	0,55	0,27	0,52	0,46	0,36	0,27	0,27	0,23	0,47	0,43	0,55	0,40	0,63	0,39	1,00	0,56	0,37	0,28	0,47	0,41	0,39	0,49	0,36	0,51	0,29	0,41	0,43	0,24	0,33	0,36	0,34	-0,07	0,24
IBE	0,53	0,40	0,65	0,31	0,53	0,66	0,48	0,37	0,35	0,28	0,52	0,62	0,82	0,69	0,72	0,42	0,56	1,00	0,37	0,31	0,52	0,44	0,35	0,62	0,38	0,79	0,27	0,71	0,54	0,40	0,48	0,39	0,40	-0,08	0,31
ICAG	0,57	0,48	0,63	0,21	0,51	0,40	0,59	0,60	0,54	0,46	0,29	0,52	0,50	0,40	0,49	0,32	0,37	0,37	1,00	0,45	0,48	0,58	0,64	0,51	0,49	0,45	0,25	0,22	0,53	0,51	0,60	0,34	0,35	-0,02	0,19
IDR	0,53	0,54	0,45	0,23	0,61	0,51	0,47	0,45	0,45	0,49	0,29	0,36	0,37	0,41	0,48	0,40	0,28	0,31	0,45	1,00	0,49	0,48	0,52	0,39	0,53	0,39	0,40	0,36	0,49	0,47	0,46	0,46	0,35	0,02	0,31
ITX	0,58	0,51	0,61	0,29	0,62	0,50	0,60	0,51	0,45	0,47	0,39	0,55	0,58	0,47	0,56	0,37	0,47	0,52	0,48	0,49	1,00	0,55	0,59	0,55	0,54	0,55	0,32	0,45	0,59	0,51	0,59	0,40	0,43	0,10	0,34
MAP	0,67	0,64	0,65	0,35	0,53	0,50	0,74	0,69	0,61	0,54	0,39	0,53	0,55	0,44	0,60	0,42	0,41	0,44	0,58	0,48	0,55	1,00	0,62	0,50	0,67	0,54	0,30	0,41	0,71	0,66	0,76	0,45	0,44	0,05	0,27
MEL	0,67	0,60	0,67	0,30	0,62	0,46	0,65	0,63	0,58	0,63	0,34	0,59	0,51	0,45	0,53	0,38	0,39	0,35	0,64	0,52	0,59	0,62	1,00	0,46	0,61	0,46	0,27	0,21	0,64	0,57	0,66	0,36	0,45	0,09	0,27
MRL	0,59	0,41	0,68	0,26	0,59	0,54	0,51	0,43	0,43	0,38	0,50	0,72	0,66	0,59	0,62	0,40	0,49	0,62	0,51	0,39	0,55	0,50	0,46	1,00	0,40	0,66	0,33	0,58	0,51	0,43	0,51	0,39	0,37	-0,03	0,30
MTS	0,63	0,81	0,55	0,27	0,56	0,48	0,76	0,66	0,65	0,63	0,25	0,41	0,41	0,42	0,49	0,40	0,36	0,38	0,49	0,53	0,54	0,67	0,61	0,40	1,00	0,43	0,33	0,30	0,70	0,65	0,76	0,46	0,43	-0,01	0,33
NTGY	0,60	0,46	0,70	0,32	0,61	0,68	0,56	0,47	0,44	0,42	0,58	0,64	0,81	0,82	0,71	0,49	0,51	0,79	0,45	0,39	0,55	0,54	0,46	0,66	0,43	1,00	0,40	0,76	0,63	0,51	0,54	0,44	0,48	-0,08	0,31
PHMR	0,35	0,37	0,29	0,23	0,46	0,39	0,24	0,19	0,27	0,29	0,39	0,21	0,27	0,36	0,33	0,36	0,29	0,27	0,25	0,40	0,32	0,30	0,27	0,33	0,33	0,40	1,00	0,36	0,34	0,34	0,24	0,40	0,34	-0,19	0,18
REE	0,43	0,33	0,48	0,29	0,48	0,60	0,33	0,25	0,21	0,25	0,48	0,46	0,67	0,73	0,58	0,40	0,41	0,71	0,22	0,36	0,45	0,41	0,21	0,58	0,30	0,76	0,36	1,00	0,44	0,32	0,34	0,43	0,38	-0,04	0,34
REP	0,72	0,67	0,66	0,35	0,61	0,55	0,72	0,66	0,59	0,59	0,44	0,57	0,60	0,54	0,62	0,49	0,43	0,54	0,53	0,49	0,59	0,71	0,64	0,51	0,70	0,63	0,34	0,44	1,00	0,60	0,72	0,47	0,46	0,00	0,31
SABE	0,58	0,62	0,55	0,22	0,50	0,45	0,79	0,80	0,80	0,55	0,31	0,42	0,43	0,41	0,45	0,41	0,24	0,40	0,51	0,47	0,51	0,66	0,57	0,43	0,65	0,51	0,34	0,32	0,60	1,00	0,78	0,32	0,37	-0,04	0,25
SAN	0,70	0,70	0,65	0,34	0,54	0,43	0,92	0,85	0,78	0,63	0,27	0,56	0,53	0,43	0,54	0,43	0,33	0,48	0,60	0,46	0,59	0,76	0,66	0,51	0,76	0,54	0,24	0,34	0,72	0,78	1,00	0,42	0,46	0,07	0,33
SGREN	0,43	0,45	0,40	0,27	0,49	0,46	0,38	0,34	0,30	0,42	0,32	0,31	0,38	0,43	0,45	0,41	0,36	0,39	0,34	0,46	0,40	0,45	0,36	0,39	0,46	0,44	0,40	0,43	0,47	0,32	0,42	1,00	0,35	-0,03	0,30
SLRS	0,43	0,38	0,42	0,21	0,44	0,47	0,44	0,40	0,44	0,37	0,27	0,43	0,47	0,43	0,47	0,28	0,34	0,40	0,35	0,35	0,43	0,44	0,45	0,37	0,43	0,48	0,34	0,38	0,46	0,37	0,46	0,35	1,00	0,01	0,22
TEF	0,10	-0,02	-0,02	0,11	-0,13	-0,10	0,02	0,03	-0,03	0,00	-0,09	0,09	0,06	-0,08	-0,04	-0,09	-0,07	-0,08	-0,02	0,02	0,10	0,05	0,09	-0,03	-0,01	-0,08	-0,19	-0,04	0,00	-0,04	0,07	-0,03	0,01	1,00	-0,07
VIS	0,34	0,30	0,30	0,24	0,37	0,27	0,28	0,25	0,26	0,22	0,23	0,25	0,31	0,31	0,36	0,27	0,24	0,31	0,19	0,31	0,34	0,27	0,27	0,30	0,33	0,31	0,18	0,34	0,31	0,25	0,33	0,30	0,22	-0,07	1,00

Figura A.4: Matriz de correlaciones para el periodo pre-covid.

Para el cálculo de las fronteras eficientes y la composición de carteras se ha usado la función creada 3, definida a continuación.

```
'Función 3.
'Se ejecutará la función sobre diferentes pestañas previamente diseñadas
'Los inputs son:
'1. Las rentabilidades históricas medias y las medidas de riesgo para cada activo
'2. Una columna de proporciones inicializadas para que Solver las manipule posteriormente
'3. La aportación de cada activo a la rentabilidad de la cartera
'4. El riesgo de la cartera (Solver manipulará dicho valor)
'5. La rentabilidad deseada de la cartera (condición para Solver)
'Imponiendo las condiciones de Markowitz, los outputs que obtendremos son:
'1. Los pesos de cada activo para obtener la rentabilidad deseada
'2. El riesgo de la cartera para dicha rentabilidad
'Transladaremos los outputs a otra pestaña para posteriormente graficarlos
Sub Frontera_Eficiente()
    max_pasos = 100
    rentabilidad_max = ThisWorkbook.Sheets("Resumen").Cells(2, 12).Value
    rentabilidad_min = ThisWorkbook.Sheets("Resumen").Cells(1, 12).Value
    tol = rentabilidad_max - rentabilidad_min
    tol = tol / max_pasos

    rentabilidad = rentabilidad_min
    i = 2
    pasos = 0
    While pasos < max_pasos + 1
        'Asignamos rentabilidad deseada
        ThisWorkbook.Sheets("Resumen").Cells(2, 8).Value = rentabilidad

        'Imponemos el problema a resolver
        SolverOk SetCell:="$I$6", MaxMinVal:=2, ValueOf:=0, ByChange:="$D$2:$D$36", _
            Engine:=1, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
        SolverOk SetCell:="$I$6", MaxMinVal:=2, ValueOf:=0, ByChange:="$D$2:$D$36", _
            Engine:=1, EngineDesc:="GRG Nonlinear"
        SolverSolve Userfinish:=True

        'Transpasamos los outputs obtenidos a la pestaña llamada Output
        'La primera fila de dicha pestaña contiene el nombre de las empresas
        'Por ese motivo, i = 2

        'Traspasamos el riesgo y rentabilidad de la cartera
        ThisWorkbook.Sheets("Output").Cells(i, 36).Value = ThisWorkbook.Sheets("Resumen").Cells(6, 9).Value
        ThisWorkbook.Sheets("Output").Cells(i, 37).Value = ThisWorkbook.Sheets("Resumen").Cells(2, 8).Value

        'Traspasamos los pesos de las diferentes carteras obtenidas
        j = 1
        While j < 36
            ThisWorkbook.Sheets("Output").Cells(i, j).Value = ThisWorkbook.Sheets("Resumen").Cells(j + 1, 4).Value
            j = j + 1
        Wend

        'Una vez terminado el transpaso
        'Actualizamos la nueva rentabilidad deseada
        rentabilidad = rentabilidad + tol

        pasos = pasos + 1
        i = i + 1
    Wend
End Sub
```

Aplicando dicha función a las diferentes pestañas Resumen, una por cada periodo y medida de riesgo, se obtiene 101 puntos de la frontera eficiente, además de sus respectivas proporciones dentro de la cartera. Estos *outputs* son los que han permitido la elaboración de la figura 5.7 hasta la figura 5.10 del capítulo 5 (Aplicación práctica).