Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

CORBES INVARIANTS EN SISTEMES FORÇATS QUASI-PERIÒDICAMENT

Autor: Antoni Moles Ferrer

Director: Dr. Àngel Jorba Monte
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de juny de 2021

Abstract

In this work, we prove the inverse function and implicit function theorems in functions between Banach spaces, firstly defining the concepts needed to prove the theorems. This allows us to study the continuity w.r.t. parameters of the invariant curves in a particular type of dynamical system.

A quasi-periodically forced one-dimensional dynamical system is a system that has neither fixed points nor periodic points. The simplest invariant objects that can be found are curves. We prove that a suficient condition for the continuation of an invariant curve w.r.t. a parameter is the atraction of this curve.

Atraction condition is deduced by the negative sign of the Lyapunov exponent of the curve, wich provides us whith information about the transfer operator spectrum. We also study the linear behaviour of the curves and the conditions needed to simplify their behaviour.

Resum

En aquest treball, demostrem els teoremes de la funció inversa i de la funció implicita en funcions entre espais de Banach, definint primer els conceptes necessàris per a fer-ho. Això ens serveix per a poder estudiar la continuïtat respecte paràmetres de les corves invariants d'un tipus de sitema dinàmic particular.

Un sistema dinàmic 1-dimensional forçat quasi periòdicament és un sistema que manca de punts fixos i òrbites periòdiques. Els objectes invariants més simples que podem trobar són corbes. Demostrem que una condició suficient per a que una corba invariant sigui contínua respecte un paràmetre és que la corba sigui atractora.

La condició d'atracció es dedueix, en última instància, del signe negatiu de l'exponent de Lyapunov de la corba, que ens aporta informació sobre l'espectre de l'operador de transferència. Estudiem també el comportament lineal de les corbes i les condicions necessàries per a poder simplificar el seu comportament.

2020 Mathematics Subject Classification. 37C05, 37C30, 37C55, 37E10, 46-00, 46B07.

Agraïments

Vull agrair a Àngel Jorba Monte tot el seguiment i els consells per tal de tirar endavant aquest projecte.

Vull agrair també a la meva família i amics que han estat en tot moment al meu costat.

Per últim agrair al meu pare tots els meus aprenentatges i les ganes de fer aquesta carrera.

Índex

1 Introducció

Dins l'àmbit dels sistemes dinàmics trobem molts fenòmens que es modelitzen a partir de funcions periòiques. El món està ple, de fet, de períodes (nit-dia, cicle lunar, poblacions,...) i aquesta regularitat i predictivilitat ens és de gran utilitat a l'hora d'estudiar aquests sistemes. Desafortunadament, al ser tan fàcil trobar fenòmens periòdics, fins i tot els sistems dinàmics més simples consten de més d'un d'aquests fenòmens i per tant el període es veu afectat. Posem per exemple que en un sistema dinàmic hi trobem dues funcions amb períodes P i $2P$ respectivament, és evident doncs que la unió de la dinàmica d'aquestes dues funcions és de peróde $2P$. Però, com és d'esperar, aquestes coincidències de períodes són molt poc freqüents i, generalment, la conglomeració de diferents fenòmens periòdics origina un fenòmen que no ho és. És aquí on ens interessa investigar ja que, tot i no obtenir un període, obtenim un quasi- període (omplint densament l'espai en el que apliquem la funció resultant).

Definició 1.1. *Direm que una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ és quasi periòdica si existeixen $d > 0$, $F : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^n$ i $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_d) \in \mathbb{T}^d$ irracional (i.e. $\langle k, \omega \rangle = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$) tals que*

$$f(t) = F(t\omega_1, \cdots, t\omega_d)$$

Aquesta definició ens col·loca en el context adient per a aquest treball. Dit amb paraules, una funció quasi periòdica és una funció que és periòdica amb qualsevol nivell de precisió, és a dir, f tal que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un quasi-període T complint $|f(t) - f(t + T)| < \varepsilon$.

L'objectiu d'aquest treball és estudiar un tipus de sistema dinàmic molt relacionat amb el concepte de quasi-periodicitat. Aquests sistemes dinàmics poden sorgir de modelitzar molts fenòmens amb períodes diferents com hem comentat anteriorment, però per tal d'exemplificar bé la procedència del nostre objecte d'estudi ens situarem en una tesssitura concreta amb el següent exemple.

Suposem que estem estudiant el següent sistema dinàmic

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x, \theta_1, \theta_2) \\ \theta_1' &= \omega_1 \\ \theta_2' &= \omega_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{amb } (\omega_1, \omega_2) \text{ irracional.}$$

Volem treballar amb l'aplicació de Poincaré i definim la secció transversal respecte el segon angle $\theta_2 = 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ amb punt de partida $(x_0, \theta_1, 0)$. L'aplicació, doncs, ens retorna, sobre la secció transversal, un punt de la forma $(y_0, \theta_1 + 2\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}, 0)$. Aquesta dinàmica es pot expressar en el sistema

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= g(x_0, \theta_1) \\ \overline{\theta_1} &= \theta_1 + \omega \end{aligned}\right\}$$

Com ω és quocient d'irracionals entre si, aquest sistema no és periòdic sinó quasi-periòdic i per tant, θ_1 omplirà el tor densament. A aquest tipus de sistema l'anomenem sistema dinàmic forçat quasi-periòdicament.

En aquest treball ens basarem en sistemes dinàmics unidimensionals forçats quasi-periodicament [3],

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= f_\mu(x, \theta) \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

On $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{R}$ és un paràmetre i f_μ és una funció suficientment suau. En quant a ω, volem que pertanyi al conjunt $(0, 2\pi)\backslash 2\pi\mathbb{Q}$ (direm que és un paràmetre de rotació irracional), així veiem que el sistema (1.1) no té ni punts fixos ni punts periòdics. Els objectes invariants més simples que podem estudiar, doncs, són les corbes invariants d'aquest sistema. L'objectiu d'aquest treball és estudiar sota quines condicions aquestes corbes invariants són contínues respecte petites perturbacions del paràmetre μ.

Treballarem en espais de Banach, més concretament espais de funcions. Dins d'un espai C^r utilitzarem la norma

$$||f||_{C^r} = \max\{||f||_\infty, ||f'||_\infty, ||f''||_\infty, \ \ldots, ||f^{r)}||_\infty\}$$

Cal remarcar, també, l'ús de certes expressions i/o paraules extretes i traduïdes d'atres idiomes, que no tenen una traducció exacte i acordada al català. Aquí deixem el significat d'aquestes:

- Quan parlem d'una funció suau, de l'anglès "*smooth*", ens referim a una funció suficientment diferenciable, i.e. una funció pertanyent a C^r per un cert r indicat per a poder treballar correctament amb ella.
- Al càpitol 4 introduirem els Sistemes lineals quasi-periòdics, aquests tipus de sistemes no tenen una nomenclatura definida dins el català o el castellà, però en anglès són els anomenats "*Linear skew-products*".
- Ens referirem, a vegades, a la dinàmica del sistema usant el terme cocicle, traducció directe de la paraula "*cocycle*".

El projecte

Sigui una funció f definida entre un producte de dos espais de Banach $E \times F$ i un altre espai de Banach G. Suposem que existeix $(a, b) \in E \times F$ tal que $f(a, b) = 0_G$. El teorema de la funció implícita, sota certes hipòtesis, ens assegura l'existència d'una funció g, definida en un entorn de a tal que $g(a) = b$ i per x dins d'aquest entorn es compleix $f(x, g(x)) = 0_G$.

En aquest treball estudiarem tots els conceptes relacionats amb aquest teorema per tal de poder-lo demostrar i entendre les bases d'anàlisi funcional que el fan possible. Al treballar amb espais de Banach, generalitzarem molt el teorema així com tots els conceptes previs, com la diferenciabilitat.

Podrem aplicar, doncs, aquest teorema a un cas concret, el de corves invariants depenents d'un paràmetre en sistemes dinàmics unidimensionals forçats quasi-periòdicament, arribant a la conclusió que l'atracció d'aquestes és una condició suficient per a que siguin contínues repecte el paràmetre.

Estudiarem també el comportament lineal d'aquestes corbes i el seu respectiu exponent de Lyapunov per a relacionar l'estabilitat amb l'espectre de l'operador de transferència, obtenit així un nexe entre l'estabilitat i la continuïtat respecte paràmetres.

Estructura de la Memòria

Aquesta mèmoria, restant la introducció i les conclusions, consta de 4 capítols: *Resultats d'anàlisi funcional, continuïtat de corbes respecte paràmetres, Sistemes lienals quasi-periòdics* i *Exponents de Lyapunov i operadors de transferència.*

Al primer capítol definirem, generalitzant a espais de Banach, els conceptes de tangència, diferenciabilitat i derivada d'una funció. Exposarem els teoremes més importants que involucren aquests conceptes per acabar demostrant el teorema de la funció inversa i el de la funció implícita.

Al següent capítol, introduirem les corbes invariants del nostre sistema, i buscarem una condició suficient per poder aplicar el teorema de la funció implícita, arribant així a un primer resultat rellevant.

El capítol 4, el més extens, es basa en entendre el comportament lineal de les corbes invariants. Introduirem el concepte de reduïbilitat i estudiarem quines condicions ha de complir una corba per a poder reduïr el seu comportament lineal. Per últim introduirem el concepte d'exponent de Lyapunov i veurem que és suau respecte paràmetres.

En el darrer capítol, relacionarem l'exponent de Lyapunov amb un operador que hem trobat al capítol 3, l'operador de transferència. Mitjançant aquesta relació acabarem veient que el signe de l'exponent de Lyapunov està relacionat amb l'espectre d'aquest operador i, per tant, ens pot indicar si la nostra funció és o no un isomorfisme. És a dir, ens permetrà saber si podem usar el teorema de la funció implícita o no.

2 Resultats d'anàlisi funcional

En aquest apartat s'exposen els resultats d'anàlisi funcional, i les seves respectives demostracions que es poden trobar a [1], que són necessàris per el posterior estudi del caràcter de les corbes invariants sota petites perturbacions. L'objectiu final d'aquest capítol és enunciar i demostrar el teorema de la funció implícita (Teorema 2.14), que és el que ens garantirà la continuitat d'aquestes corbes al variar el paràmetre μ. Per tal de poder enunciar aquest últim resultat hem de definir una sèrie de conceptes ja coneguts, però generalitzar-los dins d'espais de Banach ja que treballarem en espais de funcions. Per a, finalment, poder demostrar el teorema haurem d'enunciar altres proposicions i demostrar-ne algunes com el teorema de la funció inversa (Teorema 2.13).

2.1 Diferenciabilitat en espais de Banach

En aquesta secció considerem, si no diem res al respecte, dos espais de Banach E i F i un obert no buit $U \subset E$. Volem arribar a entendre el concepte de derivada d'una funció entre espais de Banach i, per tant, identificar la diferenciabilitat de funcions entre aquests espais. Tots els conceptes descrits a continuació son una generalització dels conceptes ja coneguts amb el mateix nom.

Definició 2.1. *Es diu que dues funcions $f_1, f_2 : U \to F$ són tangents en un punt $a \in U$ si el valor*

$$m(r) = \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f_1(x) - f_2(x)\|$$

satisfà la condició:

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} \frac{m(r)}{r} = 0,$$

condició que escriurem com

$$m(r) = o(r) \tag{2.1}$$

.

Observació 2.2. r ha de ser suficientment petit per tal d'estar ben definit el suprem, recordem que U és un obert.

Definició 2.3. *Es diu que f:$U \to F$ és diferenciable en $a \in U$ si es compleixen les dues condicions:*

- *f és contínua en el punt a.*
- *Existeix una aplicació lineal g:$E \to F$ tal que les aplicacions $x \mapsto f(x) - f(a)$ i $x \mapsto g(x-a)$ són tangents en el punt a.*

Aquesta aplicació lineal g és contínua i la representem com $f'(a)$, la derivada de f en a. La segona condició equival doncs a

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\| = o(\|x-a\|). \tag{2.2}$$

Definició 2.4. *Diem que f és diferenciable en U si ho és per tot punt de U. Aleshores tenim*

$$\begin{aligned} f' : & U \longrightarrow \mathscr{L}(E;F) \\ & a \longmapsto f'(a) \end{aligned}$$

Fins aquí, l'únic que canvia respecte funcions actuant sobre $\mathbb{R}^n$ és el concepte de tangència. És fàcil veure, però, que sobre $\mathbb{R}^n$ els dos conceptes de tangència són equivalents. Veiem, ara, el resultat que ens permet veure que la diferenciabilitat es comporta bé amb la composició d'aplicacions.

Teorema 2.5. *Siguin E, F i G tres espais de Banach, siguin U un obert de E i V un obert de F. Considerem dues aplicacions contínues*

$$f : U \to F, \qquad g : V \to G,$$

i un punt $a \in U$. Suposem ara que $b = f(a) \in F$ està, de fet, en V. Existeix, doncs, $U' = f^{-1}(V) \in U$ l'obert de E que contè a i on està definida l'aplicació composició

$$g \circ f : U' \to G.$$

Sota aquestes hipòtesis, si f és diferenciable en el punt a i g és diferenciable en el punt b= $f(a)$, aleshores $h = g \circ f$ és diferenciable en el punt a i es compleix

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a). \tag{2.3}$$

Demostració. Per hipòtesi tenim

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x-a) \tag{2.4}$$

on φ és una aplicació tangent a zero en l'origen, i.e.: $||\varphi(x-a)|| = o(||x-a||)$.

De la mateixa forma també tenim

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + \psi(y-b), \tag{2.5}$$

amb $||\psi(y-b)|| = o(||y-b||)$.

Calculem, ara, $h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a))$ aplicant (2.5) i substituint y per $f(x)$ i b per $f(a)$. Obtenim

$$h(x) - h(a) = g'(f(a)) \cdot (f(x) - f(a)) + \psi(f(x) - f(a)).$$

Ara, usant (2.4) i tenint en compte que $g'(f(a) : F \to G$ és aplicació lineal, obtenim

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) = & (g'(f(a)) \circ f'(a)) \cdot (x-a) \\ & + g'(f(a)) \cdot \varphi(x-a) \\ & + \psi(f(x) - f(a)). \end{aligned}$$

Per a demostrar que h és diferenciable en el punt a, i que té com a derivada $g'(f(a)) \circ f'(a)$ és suficient veure que el segon i el tercer mebre de la part de la dreta de la igualtat anterior són tangents a 0, i.e.:

$$||g'(f(a)) \cdot \varphi(x-a)|| = o(||x-a||), \tag{2.6}$$

$$||\psi(f(x)-f(a))|| = o(||x-a||). \tag{2.7}$$

Ja ho tenim, ja que, (2.6) és resultat del fet que

$$||g'(f(a))\cdot\varphi(x-a)|| \leq ||g'(f(a))||\cdot||\varphi(x-a)||$$

i obtenim (2.7) del fet que

$$||\psi(f(x)-f(a))|| = o(||f(x)-f(a)||)$$

i que, per (2.4), donat $M > ||f'(a)||$, la desigualtat

$$||f(x)-f(a)|| \leq M||x-a||$$

es verifica per a $||x-a||$ suficientment petit. □

Definició 2.6. *f:U→ F és estrictament tangent a zero en el punt a∈ U si es verifiquen les següents condicions:*

- *f(a)=0*
- *per tot L>0, existeix r>0 tal que f és L-lipschitz a* $\|x-a\| \leq r$

En aquest cas tenim que f és tangent a 0 en a:

$$\|f(x)\| = \|f(x)-f(a)\| \leq L\|x-a\|$$

Per tant, "f estrictament tangent a zero" implica "f tangent a zero", cosa que resulta coherent amb la terminologia triada.

Definició 2.7. *Dues funcions* f_1, f_2 *són estrictament tangents entre elles en a∈ U si* $f_1 - f_2$ *és estrictament tangent a zero en a.*

Definició 2.8. $f: U \to F$ *és estrictament diferenciable en* $a \in U$ *si existeix una aplicació lineal contínua g:E → F tal que les aplicacions*

$$x \longmapsto f(x)-f(a) \qquad i \qquad x \longmapsto g(x-a)$$

són estrictament tangents en a. En aquest cas, les dues funcions són tangents en a i per tant g és la derivada $f'(a)$.

El concepte d'estrictament diferenciable és, doncs, demanar més regularitat a la generalització de diferenciabilitat. De fet, es dedueix fàcilment de les definicions que per a que f sigui estrictament diferenciable en el punt a és suficient i necessàri que f sigui diferenciable en a i que, per tot $L > 0$ existeixi $r > 0$ tal que la funció

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

sigui L-lipschitz dins la bola $||x-a|| < r$.

Teorema 2.9. *Si* $f: U \to F$ *és diferenciable en U i l'aplicació* $f': U \to \mathscr{L}(E;F)$ *és contínua en el punt* a*, aleshores* f *és estrictament diferenciable en el punt* a.

Aquest teorema es demostra usant el teorema dels increments finits [1], contingut que no s'adecua a l'objectiu d'aquesta secció. Tot i així, és interessant i útil conèixer aquest resultat.

2.2 Teorema de la funció inversa

En aquesta secció demostrarem un dels resultats més rellevants d'aquest capítol, resultat que també usarem més tard dins l'estudi de corves invariants. Començarem demostrant un teorema una mica més simple i enunciant una proposició. Amb aquest teorema i aquesta proposició demostrats, el teorema de la funció inversa (Teorema 2.13) tansols s'haurà d'enunciar, ja que la demostració es deduirà dels resultats anteriors.

Teorema 2.10. *Sigui B(a,r) la bola oberta* $\|x-a\|<r$ *d'un espai de Banach E, i sigui*

$$f : B(a,r) \longrightarrow E$$

una aplicació contínua, tal que l'aplicació

$$\varphi(x) = x - f(x)$$

és contractiva amb constant k. Sigui f(a)=b. Llavors existeix un obert V, amb $a \in V \subset B(a,r)$*, tal que f és homeomorfisme de V en la bola oberta B(b, (1-k)r). a més, l'aplicació*

$$g := f^{-1} : B(b,(1-k)r) \longrightarrow B(a,r)$$

és $\frac{1}{1-k}$*-Lipschitz.*

Demostració. Siguin $x, x' \in B(a,r)$, tenim

$$f(x) - f(x') = (x - x') - (\varphi(x) - \varphi(x'))$$

d'on treiem

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\|$$

que, com φ és k-Lipschtitz, ens dona

$$\|f(x) - f(x')\| \geq (1-k)\|x - x'\|. \tag{2.8}$$

Per tal de seguir amb la demostració, primer enunciarem i demostrarem el següent lema:

Lema 2.11. *Per tot* $y \in B(b,(1-k)r)$*, existeix un únic* $x \in B(a,r)$ *tal que* $f(x) = y$*.*

Demostració. (Del lema)
Unicitat: Per la desigualtat (2.8), si tenim $f(x) = f(x')$, aleshores $x = x'$
Existència: Construim una successió de punts:

$$x_0 = a, \quad x_1 = y + \varphi(x_0), \quad \cdots \quad , x_{n+1} = y + \varphi(x_n), \quad \cdots \tag{2.9}$$

Anem a demostrar per inducció la següent desigualtat:

$$\|x_n - a\| \leq \frac{1-k^n}{1-k}\|y - b\|, \tag{2.10}$$

Com $\|y - b\| < (1-k)r$ i $k < 1$, tindrem $\|x_n - a\| < r$.
Per $n = 1$

$$x_1 - a = y + \varphi(a) - a = y - f(a) = y - b$$

Per tant es compleix (2.10)
Fem el pas d'inducció: De (2.9) obtenim:

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$$

Per tant,
$$\|x_{n+1}-x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq k^n\|x_1 - a\| = k^n\|y-b\| \tag{2.11}$$
Ara, per (2.11) i (2.10) tenim
$$\|x_{n+1}-a\| \leq \|x_n - a\| + \|x_{n+1}-x_n\| \leq$$
$$\leq \left(\frac{1-k^n}{1-k} + k^n\right)\|y-b\| = \frac{1-k^{n+1}}{1-k}\|y-b\|$$
Queda demostrat (2.10). Ara, com per (2.11) la successió $\{x_{n+1}-x_n\}$ convergeix a zero normalment, tenim que la successió $\{x_n\}$ és de Cauchy. Sigui, doncs, x el seu límit, obtenim:
$$\|x-a\| \leq \frac{1}{1-k}\|y-b\| < r$$
així com
$$x = y + \varphi(x)$$
és a dir $y = f(x)$. □

Seguim amb la demostració del teorema.
Introduim una notació: Per $y \in B(b,(1-k)r)$, representem per $g(y)$ l'únic $x \in B(a,r)$ tal que f(x)=y. Tenim, doncs, una aplicació
$$g : B(b,(1-k)r) \longrightarrow B(a,r)$$
tal que, per (2.8), si $y, y' \in B(b,(1-k)r)$ tenim
$$\|g(y)-g(y')\| \leq \frac{1}{1-k}\|y-y'\|.$$
Per tant, g és $\frac{1}{1-k}$-Lipschitz i , en particular, contínua. Sigui $V \subset B(a,r)$ la imatge de g, com és l'antiimatge fer una funció contínua d'un obert, es un obert, en particual obert de E. Queda clar també que f i g són bijectives i inverses l'una de l'altra. □

Proposició 2.12. *Siguin E i F espais de Banach, U ⊂ E un obert, i f:U→F aplicació contínua . Suposem que f és estrictament diferenciable en el punt* $a \in U$ *i que* $f'(a) \in$ *Isom(E, F). Aleshores existeixen V'⊂ U entorn obert de a i W'⊂ F entorn obert de b=f(a), tals que f és homeomorfisme de V' en W' .*

Demostració. Com $f'(a)$ és isomorfisme, tenim que $(f'(a))^{-1} : F \to E$ és contínua. Considerem ara la següent composició d'aplicacions:
$$f_1 := (f'(a))^{-1} \circ f \ : \ U \longrightarrow E$$
Es veu facilment que f_1 és estrictament diferenciable en a amb $f_1'(a) = 1_E$ (per el teorema 2.5). Com f_1 és estrictament diferenciable, podem associar a cada $k > 0$ un radi $r > 0$ tal que l'aplicació $\varphi(x) = x - f_1(x)$ sigui k-Lipschitz a $\|x-a\| \leq r$. Escollim $0 < k < 1$, per tal de tenir una aplicació contractiva.
Ara per el teorema 2.10, existeix un entorn obert de a, V' tal que f_1 és homeomorfisme de V' en un entorn obert W_1 de $b_1 = f_1(a)$. Com $f'(a)$ és un homeomorfisme de E en F, queda clar que
$$f = f'(a) \circ f_1$$
és un homeomorfisme de de V' en, el transformat de W_1 per $f'(a)$, W' obert de F contenint a $b = f(a)$. □

Teorema 2.13. ***(de la funció inversa).*** *Siguin E i F dos espais de Banach, U⊂E obert i f:U→F una aplicació de classe C^1. Suposem que, en un punt a∈U, tenim*

$$f'(a) \in Isom(E;F).$$

Aleshores existeixen un entor obert de a ,V∈U, i un entorn obert de b=f(a), W, tals que f és un C^1-difeomorfisme de V en W.

Demostració. Com f és de classe C^1, f és estrictament diferenciable en a. Per la proposició 2.12 queda demostrat el teorema, tenint en compte que $f'(a)$ és isomorfisme i, per tant, f és un C^1-difeomorfisme de V en W.

2.3 Teorema de la funció implícita

Acabem aquest càpitol enunciant i demostrant el teorema de la funció implícita, que era l'objectiu principal d'aquest. La diferència principal d'aquest teorema, a part dels conceptes de diferenciabilitat, amb la versió del teorema en $\mathbb{R}^n$ és que un espai de Banach no ha de ser, necessàriament, de dimensió finita i per tant no podem operar normalment amb la matriu diferencial.

Teorema 2.14. ***(de la funció implícita).*** *Siguin E, F i G tres espais de Banach, siguin U⊂E×F obert i*

$$f : U \longrightarrow G$$

una aplicació de classe C^1. f és, doncs, una funció en dues variables:

$$f(x,y) \in G, \quad x \in E, \quad y \in F, \quad (x,y) \in U.$$

Sigui $(a,b) \in U$, suposem $f(a,b) = 0$. Suposem, per últim, que la derivada parcial $f'_y(a,b) \in \mathscr{L}(F;G)$ és un isomorfisme de F en G.
Aleshores, existeixen $V \subset U$ entorn obert de (a,b), $W \subset E$ entorn obert de a i una aplicació de classe C^1 $g : W \to V$,
tals que la relació

$$(x,y) \in V \ \ i \ \ f(x,y) = 0 \tag{2.12}$$

és equivalent a la relació

$$x \in W \ \ i \ \ y = g(x). \tag{2.13}$$

Demostració. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f_1 : \ U \ &\longrightarrow \ E \times G \\ (x,y) &\longmapsto (x, f(x,y)) \end{aligned}$$

Veiem que f_1 és de classe $C^1(U)$, ja que les seves dues components ho són. La seva derivada $f_1'(a,b)$ ve definida per una matriu

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

On $\alpha \in \mathscr{L}(E;E)$, $\beta \in \mathscr{L}(F;E)$, $\gamma \in \mathscr{L}(E;G)$ i $\delta \in \mathscr{L}(F;G)$. De fet, el càlcul de les derivades parcials de f_1 prova que:

$$\begin{cases} \alpha = 1_E, & \beta = 0, \\ \\ \gamma = f'_x(a,b), & \delta = f'_y(a,b). \end{cases}$$

Per tant, $f_1'(a,b)$ és l'aplicació lineal

$$(h,k) \longmapsto (h, f_x'(a,b)\cdot h + f_y'(a,b)\cdot k) \tag{2.14}$$

Que va de $E \times F$ a $E \times G$. Com $f_y'(a,b) \in$Isom(a,b), queda clar que (2.14) també és isomorfisme, amb inversa donada per

$$(h',k') \longmapsto (h', (f_y')^{-1}\cdot k' - (f_y')^{-1}\circ f_x' \cdot h')$$

Ara podem aplicar a f_1, en l'entorn del punt (a,b), el teorema de la funció inversa (Teorema 2.13). Per tant:
Existeixen un entorn obert V de (a,b) contingut en U i un entorn obert W_1 de $(a,0) = f_1(a,b)$, tals que f_1 és un C^1-difeomorfisme de V a W_1.
Sigui g_1 el difeomorfisme invers, que té la forma

$$g_1(x,z) = (x, g(x,z)), \qquad (x,z) \in W_1$$

aquest ens defineix una funció

$$g : W_1 \longrightarrow F$$

de classe C^1. Com f_1 i g_1 són inversos l'un de l'altre, les següents afirmacions són equivalents:

- **(i)** $(x,y) \in V \quad \text{i} \quad f(x,y) = z$
- **(ii)** $(x,z) \in W_1 \quad \text{i} \quad g(x,z) = y$

Si ara prenem $z = 0$, clarament la primera relació es converteix en la (2.12). Anem a veure la segona relació.
Si ara identifiquem E com a subespai vectorial de $E \times F$, identificant $x \in E$ amb $(x,0) \in E \times F$, la relació $(x,0) \in W_1$ ens diu que $x \in W_1 \cap E$. Aquesta intersecció és un obert W de E i, com $(a,0) \in W_1$, $a \in W$. per últim escribim

$$g(x) := g(x,0)$$

Aquesta funció és de classe $C^1(W)$, llavors la segona relació per $z = 0$ s'escriu

$$x \in W \quad \text{i} \quad y = g(x)$$

que és exactament igual a (2.13). $\square$

3 Continuïtat de corbes invariants respecte paràmetres

Tornem al sistema dinàmic unidimensional (1.1). Aquest capítol es basa en trobar les condicions per aplicar el teorema de la funció implícita (Teorema 2.14) en sentit de l'estabilitat uniforme de la corba, és a dir a partir de la derivada en cada punt. Començarem definint el tipus de corba que volem estudiar i els passos per a trobar la funció a la qual aplicarem el teorema.

Definició 3.1. *Direm que (1.1) té una corba invariant si existex una funció* $u \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$*,* $r \geq 0$*, tal que*

$$u(\theta + \omega) = f_\mu(u(\theta), \theta), \qquad \forall \theta \in \mathbb{T}^1 \tag{3.1}$$

Anomenarem corba invariant de (1.1) a u*.*

Observació 3.2. Aquesta definició no és exactament la definició de corba invariant. Una corba u és invariant quan, si apliquem la dinàmica a un punt qualsevol de la corba, el punt resultant també és de la corba. La definició anterior conté una condició més forta que la que acabem de donar. La dinàmica sobre el tipus de corba invariant amb el que treballarem, el de la definició, ve determinada per la dinàmica del sistema sobre $\mathbb{T}^1$.

Ara, com ens interesa estudiar la continuïtat d'aquestes corbes invariants respecte el paràmetre μ, suposem que per un cert μ_0 el nostre sistema dinàmic, amb una constant de rotació fixada ω, té una corba invariant $x = u_{\mu_0}(\theta)$. És a dir

$$u_{\mu_0}(\theta + \omega) = f_{\mu_0}(u_{\mu_0}(\theta), \theta), \qquad \forall \theta \in \mathbb{T}^1$$

Podem prendre, sense pèrdua de generalitat $\mu_0 = 0$. Considerem la següent funció:

$$\begin{array}{rccl} F: & C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}) \\ & (u, \mu) & \longmapsto & F(u, \mu)(\theta) := f_\mu(u(\theta), \theta) - u(\theta + \omega) \end{array} \tag{3.2}$$

Tenim, clarament, que $F(u_0, 0) = 0$. Per estudiar la continuïtat respecte μ d'aquestes corbes el que volem és trobar una funció prou regular definida per $|\mu|$ suficient petit ($|\mu - \mu_0|$) de la forma

$$\mu \longmapsto u_\mu$$

que compleixi $F(u_\mu, \mu) = 0$.
Treballem, per tant, en l'espai de Banach $C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ dotat de la norma usual de C^r. Volem aplicar el teorema de la funció implícita (Teorema 2.14) a la nostra funció (3.2). Necessitem, doncs, que F sigui diferenciable respecte u i $D_u F(u_0, 0)$ sigui un isomorfisme (operador acotat invertible) sobre $C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$.

Podem expressar F de la següent forma:

$$F(u, \mu)(\theta) = f_\mu(u(\theta), \theta) - S(u)(\theta) \tag{3.3}$$

On S és l'operador shift: $u(\theta) \mapsto u(\theta + \omega)$ que clarament és un operador lineal acotat respecte u actuant sobre $C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$. Ara, com f_μ és una funció suficientment suau, ja tenim que F és diferenciable respecte u.

Ara, sigui $v \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ tal que $\|v\| = 1$, tenim

$$(D_u F(u, \mu)v)(\theta) = D_x f_\mu(u(\theta), \theta)v(\theta) - v(\theta + \omega)$$

Per tant, desenvolupant amb la norma usual a C^r $\|\cdot\|$:

$$\|D_uF(u,\mu)v\| = \|D_xf_\mu(u(\theta),\theta)v - Sv\| \leq \|D_xf_\mu(u(\theta),\theta)v\| + \|Sv\| \leq$$
$$\leq \|D_xf_\mu(u(\theta),\theta)\|\|v\| + \|v\| = \|D_xf_\mu(u(\theta),\theta)\| + 1.$$

Veiem que, per la diferenciabilitat de f_μ, $D_uF(u,\mu)$ és un operador lineal acotat per tot $(u,\mu) \in C^r(\mathbb{T}^1,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. A la següent secció discutirem quan aquest operador serà isomorfisme.

3.1 Bijectivitat a partir de la contractivitat

Com hem vist en la secció anterior, només ens cal veure si existeix la inversa de $D_uF(u_0,0)$. Si és així, per el teorema de la funció implícita (Teorema 2.14), obtindrem la continuitat de la nostra corba invariant sota petites perturbacions del paràmetre μ. L'objectiu d'aquesta secció és garantitzar la bijectivitat de $D_uF(u,\mu)$ si $D_xf_\mu(u(\theta),\theta)$ té norma estrictament menor a 1. Amb aquesta hipòtesi, és de suposar que usarem el teorema del punt fix de Banach.

Per tal de veure la bijectivitat de $D_uF(u,\mu)$ prenem $a \in C^r(\mathbb{T}^1,\mathbb{R})$. Hem de veure que existeix un únic $v \in C^r(\mathbb{T}^1,\mathbb{R})$ tal que $a(\theta) = (D_uF(u,\mu)v)(\theta)$, és a dir

$$a(\theta) = D_xf_\mu(u(\theta),\theta)v(\theta) - v(\theta+\omega) \tag{3.4}$$

Prenem ara el següent operador T_a actuant sobre $C^r(\mathbb{T}^1,\mathbb{R})$ definit per

$$(T_av)(\theta) = D_xf_\mu(u(\theta-\omega),\theta-\omega)v(\theta-\omega) - a(\theta-\omega) \tag{3.5}$$

Suposem $\|D_xf_\mu(u(\theta),\theta)\| < 1$, llavors (3.5) és un operador contractiu. En efecte, siguin $v_1, v_2 \in C^r(\mathbb{T}^1,\mathbb{R})$ i abusant del llenguatge per simplificar tenim

$$\|T_av_1 - T_av_2\| = \|D_xf_\mu v_1 - D_xf_\mu v_2\| = \|D_xf_\mu(v_1-v_2)\| \leq \|D_xf_\mu\|\|v_1-v_2\| < \|v_1-v_2\|$$

El teorema del punt fix de Banach ens assegura l'existència i unicitat de v tal que

$$v(\theta) = D_xf_\mu(u(\theta-\omega),\theta-\omega)v(\theta-\omega) - a(\theta-\omega)$$

que, fent el canvi $\theta \mapsto \theta+\omega$ dóna lloc a l'expressió (3.4). □

Acabem de veure, que si $\|D_xf_\mu(u(\theta),\theta)\| < 1$, el nostre operador $D_uF(u,\mu)$ és bijectiu, i per tant isomorfisme. Recapitulant, podem veure el primer resultat important d'aquest treball.

3.2 Continuïtat a partir de l'estabilitat

L'objectiu d'aquesta secció és unir tot els resultats anteriors en un de conctret, per tant, tots els procediments que precedeixen al resultat que aquí s'exposarà són la pròpia demostració d'aquest. Definirem per això un concepte que ens ajudarà a interpretar les condicions en sentit de l'estabilitat de la corba.

Definició 3.3. *Direm que una corba invariant u del nostre sistema (1.1) és uniformement atractora si, donat un punt de la corba $x_0 = u(\theta_0)$ i un punt prou proper x_1, és a dir, $|x_0 - x_1| = \epsilon$ amb $0 < \epsilon << 1$, es compleix*

$$|f(x_1,\theta_0) - u(\theta_0+\omega)| < \epsilon.$$

És a dir, la següent iteració de x_1 s'apropa al següent punt de la corba.

És important donar aquesta definició ja que més endavant, treballarem amb corbes atractores que no cal que compleixin aquesta condició. A l'hora, ens servirà per a poder traduir la condició obtinguada en termes d'estabilitat. Procedim, ara si, a enunciar el primer resultat d'aquest treball.

Proposició 3.4. ***(Primer resultat)*** *Considerem el següent sistema dinàmic forçat quasi-periodicament*

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= f_\mu(x,\theta) \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\}$$

amb $x, \mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}^1$ i ω irracional. Sigui f_μ una funció de classe C^r, amb $r \geq 1$. Suposem que existeix μ_0 tal que el sistema té una corba invariant uniformement atractora u_{μ_0}.

Aleshores, per valors de μ propers a μ_0, el sistema dinàmic conté una corba invariant u_μ propera a u_{μ_0}.

Demostració. Només ens cal veure que u és una corba uniformement atractora si, i només si, $\|D_x f(u(\theta),\theta)\| < 1$. La resta de la proposició ja esta demostrada anteriorment. Per això prenem un punt de la corba $x_0 = u(\theta_0)$. prenem també un valor $0 < \epsilon << 1$ (de forma anàl·loga prendríem $-1 << \epsilon < 0$). considerem el punt $x_1 = x_0 + \epsilon$ i estudiem la seva òrbita. Desenvolupant per Taylor tenim

$$f(x_1,\theta) = f(x_0,\theta) + D_x f(x_0,\theta)\epsilon + O(\epsilon^2) = u(\theta_0+\omega) + D_x f(x_0,\theta)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

En primer lloc, és evident que per valors de ϵ prou petits, la condició $\|D_x f(u(\theta),\theta)\| < 1$ implica l'atractivitat uniforme de la corba, ja que

$$|f(x_1,\theta_0) - u(\theta_0+\omega)| < \epsilon$$

Finalment, usant la primera implicació imposem que u sigui atractora de la forma següent:

$$|f(u(\theta_0)+\epsilon,\theta_0) - u(\theta_0+\omega)| < \epsilon$$

Desenvolupant igual que abans ens queda

$$|D_x f(u(\theta_0),\theta_0)\epsilon + O(\epsilon^2)| < \epsilon$$

És a dir

$$|D_x f(u(\theta_0),\theta_0) + O(\epsilon)|\epsilon < \epsilon$$

i pertant, quan $\epsilon \to 0$, el valor absolut de la derivada respecte la primera variable de f queda acotat per 1. □

Observació 3.5. Notem que en cap moment hem requerit de la "irracionalitat" de ω. Aquesta propietat queda escrita en la proposició ja que defineix l'objecte que estem estudiant, però podriem generalitzar-la a qualsevol valor de ω. En particular, si ω és "racional", les òrbites periodiques atractores també són contínues sota perturbacions del paràmetre.

És bastant notable la importància de la derivada parcial, la que ens indica l'estabilitat lineal del sistema (1.1). En el següent capítol, sense repetir el mateix procediment de la demostració anterior usarem aquesta propietat tant important per entendre el comportament lineal del nostre sistema.

4 Sistemes lineals quasi-periòdics

Com hem fet en el capítol anterior, ens interessa estudiar el comportament de la corba que ens ocupa. Definirem primerament el sistema que modelitza el comportament lineal de la corba, després intentarem simplificar aquest sistema, amb l'únic objectiu de poder estudiar-lo millor. Per últim definirem l'exponent de Lyapunov del sistema creat i demostrarem un resultat que ens garantitzarà el bon comportament d'aquest exponent respecte el paràmetre.

Sigui $x = u_0(\theta)$ una corba invariant de classe $C^r,\ r \geq 0$, de (1.1). Podem descriure el seu comportament normal linealitzat a partir del sistema lineal quasi-periodic següent:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= a(\theta)x \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

amb $a(\theta) = D_x f_0(u_0(\theta), \theta) \not\equiv 0$ de classe C^r amb r complint que f és de classe C^r també. $x \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{T}^1$.

4.1 Reduïbilitat

Aquesta secció es basa en reduïr el sistema que ens defineix el comportament de la corba. Cal remarcar que aquesta part del treball s'allunya de l'objectiu principal (poder aplicar el Teorema de la funció implícita), tot i així els resultats obtinguts en aquesta secció seran molt útils a la pràctica per estudiar fàcilment el comportament i la dinàmica d'una corba invariant concreta dins el nostre tipus de sistemes (1.1).

Definició 4.1. *Direm que el sistema (4.1) és reduïble si existeix un canvi de variables $x = c(\theta)y$ continu respecte θ tal que (4.1) passa a expressar-se com*

$$\left.\begin{aligned} \overline{y} &= by \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

on b no depén de θ.

Direm que una corba invariant és reduïble quan el seu comportament normal linealitzat és reduïble.

Proposició 4.2. *Sigui $u_\mu(\theta)$ una corba invariant de (1.1) i sigui $a(\theta) = D_x f_\mu(u_\mu(\theta), \theta)$. Si $a(\theta)$ val zero en algun punt llavors u_μ no és reduïble amb $b \neq 0$.*

Demostració. Ho demostrem per contrarecíproc. Suposem que u_μ és reduïble, alhores per definició:

$$x = c(\theta)y \longrightarrow \overline{c(\theta)y} = a(\theta)c(\theta)y \longrightarrow c(\theta+\omega)\overline{y} = a(\theta)c(\theta)y$$

D'on obtenim:

$$b = \frac{a(\theta)c(\theta)}{c(\theta+\omega)} \qquad \text{que no depén de } \theta$$

Per tant, si $b \neq 0$, a no s'anul·la en cap punt. □

Abans d'enunciar la proposició 4.4 hem de donar un sentit a una de les seves hipòtesis respecte la constant de rotació ω, la desigualtat diofàntica (que podem trobar a [6])

$$|q\omega - 2\pi p| \geq \frac{\gamma}{|q|^{\tau}}, \qquad (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \quad \gamma > 0, \tau \geq 1. \tag{4.3}$$

Veiem primer quina és la idea d'aquesta desigualtat. Si dividim per q a banda i banda queda mes clar que l'expressió

$$|\omega - 2\pi \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{|q|^{\tau+1}}$$

ens dóna una cota de com "s'apropa" el nostre valor irracional ω a un de racional i, per tant, l'expressió (4.3) ens acota la proximitat del nostre angle $\theta_q = \theta_0 + q\omega$ a l'angle inicial θ_0. és per això que aquesta desigualtat ens serà profitosa. Tot i així, com (4.3) serà una de les nostres hipòtesis, aquesta no ha de ser molt restrictiva. Donat un ω "irracional" necessitarem que compleixi la condició i això serà molt probable gràcies al següent resultat.

Proposició 4.3. *El conjunt de valors ω que no satisfan (4.3) té mesura de Lebesgue zero.*

Demostració. siguin $\gamma > 0, \tau \geq 1$ dos valors reals. Prenem tots els nombres racionals, que seran de la forma

$$k_{p,q} = 2\pi \frac{p}{q}, \qquad \frac{p}{q} \in (0,1]$$

prenem també els intervals següents

$$\delta_{p,q} = (k_{p,q} - \frac{\gamma}{|q|^{\tau+1}}, k_{p,q} + \frac{\gamma}{|q|^{\tau+1}})$$

existeixen $p, q \in \mathbb{Z}$ tals que $\omega \in \delta_{p,q}$ si, i només si, ω no compleix la desigualtat (4.3). La mesura de Lebesgue d'aquests intervals és $m_L(\delta_{p,q}) = \frac{2\gamma}{|q|^{\tau+1}}$. Ara, com

$$M = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q} \frac{2\gamma}{|q|^{\tau+1}} \;=\; \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2\gamma}{|q|^{\tau}} \;=\; 2\gamma \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{|q|^{\tau}}$$

En particular, per $\tau > 1$, M està ben definida. Per tant, com estem buscant la mesura dels intervals amb ω's que no compleixen (4.3) i en particular que no ho fan per qualsevol $\gamma > 0$, tenim que $M \to 0$. Per subaditivitat de la mesura concloem que la mesura del conjunt de tots els ω que no compleixen (4.3) és zero. □

Ara si, podem usar aquesta condició en la següent proposició, ja que no és molt restrictiva. Direm que un valor ω que compleix la condició diofàntica és un nombre diofàntic.

Proposició 4.4. *Donats dos sistemes lineals quasi-periòdics*

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= a(\theta)x \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{y} &= b(\theta)y \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

amb a i b dues funcions de classe C^∞. Suposem que existeixen $\gamma > 0$ i $\tau \geq 1$ tal que per tot $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ es compleix

$$|q\omega - 2\pi p| \geq \frac{\gamma}{|q|^\tau} \tag{4.6}$$

Aleshores, les condicions:

1. $\frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ *es pot extendre a una funció esrictament positiva de classe C^∞,*

2. $$\int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} d\theta = 0,$$

es compleixen si, i només si, existeix una funció c de classe C^∞ estrictament positiva tal que el canvi de variable $x = c(\theta)y$ transforma (4.3) en (4.4).

Demostració. Suposem les dues condicions certes. Sigui $c : \theta \in \mathbb{T}^1 \mapsto \mathbb{R}$ una funció estrictament positiva, el canvi $x = c(\theta)y$ transforma (4.3) en

$$\overline{y} = a(\theta)\frac{c(\theta)}{c(\theta + \omega)}y.$$

Imposem que aquest sigui el canvi a (4.4) i ens queda l'equació

$$\frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \frac{c(\theta + \omega)}{c(\theta)} \tag{4.7}$$

hem de veure que està ben definida i és de classe C^∞. Apliquem logaritmes per obtenir

$$\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)} = \ln c(\theta + \omega) - \ln c(\theta). \tag{4.8}$$

Si extenem aquestes funcions a sèries de Fourier veiem que estan ben definides. En efecte, si denotem per α_k i c_k els coeficients de Fourier de $\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ i $\ln c(\theta)$ respectivament, veiem que per $k = 0$ els coeficients de la dreta s'anul·len (fet que concorda amb la condició 2). per $k \neq 0$ ens queda

$$c_k = \frac{\alpha_k}{\exp(ik\omega) - 1}. \tag{4.9}$$

Ens interessa veure que $|c_k|$ decreixen a mesura que k creix. Comencem fitant superiorment α_k, com $\ln \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ és de classe C^∞ sabem que $\forall r \in \mathbb{N}$

$$|\alpha_k| < \frac{\gamma(r)}{k^r}, \qquad \gamma(r) > 0.$$

Per el denominador, fem cota superior usant (4.6)

$$|\exp(ik\omega) - 1| \geq |\sin k\omega| = |\sin(k\omega - 2\pi p)|, \quad p \in \mathbb{Z}$$

Sabem que per k prou gran, $sin(k\omega - 2\pi p) \approx k\omega - 2\pi p$, llavors

$$|\exp(ik\omega) - 1| \geq |k\omega - 2\pi p| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}.$$

Ja tenim, doncs el que ens interessava

$$|c_k| < \frac{\gamma_r}{k^{r-\tau}}, \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Podriem dir que perdem diferenciabilitat, però al ser per tot r, obtenim que c és de classe C^∞.

Ara suposem que existeix un canvi de variables C^∞ $x = c(\theta)y$ que transforma (4.4) en (4.5). Aleshores, la condició 1 es dedueix de (4.7) i la condició 2 es dedueix integrant sobre $(0, 2\pi)$ la igualtat (4.8). $\square$

Corol·lari 4.5. *Suposem que ω satisfà la condició diofàntica (4.6) i a és de classe C^∞. Aleshores, el sistema (4.1) definit com*

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= a(\theta)x \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\}$$

és reduïble si, i només si, a no s'anul·la en cap punt.

Demostració. Suposem que (4.1) és reduïble. Si a val zero en algun punt, llavors el sistema reduit (4.2) ha de complir $b = 0$, que implica $a \equiv 0$. això contradiu la nostra assumpció de a.

Suposem ara que a no s'anul·la en cap punt. Queda ben definit, doncs, el valor

$$b = \operatorname{sign}(a) \cdot \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)|d\theta\right] \neq 0.$$

Aleshores, és evident que les condicions 1 i 2 de la proposició 4.4 es compleixen. Per tant, el sistema (4.1) és reduïble al sistema (4.2) amb $b(\theta) \equiv b$. $\square$

Recordem que per (4.9) la diferenciabilitat de la transformació c pateix un decreixement, un fet molt poc inportant en els resultats anteriors ja que parlem de funcions de classe C^∞. Ara bé, veiem que aquest fet pren més importància si a i b són de classe C^r amb $r < -\infty$. En aquest cas, no es pot garantir que la transformació c sigui també de classe C^r respecte θ. A continuació veurem que és inevitable el fet de no poder garantir aquesta conservació de diferenciabilitat.

Proposició 4.6. *Existeix una funció estrictament positiva $a \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ tal que el sistema (4.1) no és reduïble en termes d'una transformació de classe C^r.*

Demostració. Sigui $a \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ una funció estrictament positiva. suposem que existeix una transformació $x = c(\theta)y$ que converteix (4.1) en (4.2). Aleshores, b ha de complir

$$\frac{c(\theta + \omega)}{c(\theta)} = \frac{a(\theta)}{b}.$$

Aplicant logaritmes

$$\ln c(\theta + \omega) - \ln c(\theta) = \ln a(\theta) - \ln b$$

Veiem que la part de l'esquerra té promig zero i per tant $\ln b$ ha de ser el promig de $\ln a(\theta)$, és a dir

$$\ln b = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln a(\theta)d\theta.$$

Per tant, podem dir que la transformació compleix, sent $d(\theta) = \ln c(\theta)$,

$$d(\theta + \omega) - d(\theta) = \beta(\theta)$$

amb $\beta \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ de promig zero. Tansols ens cal veure que existeixen funcions β d'aquests tipus tals que no existeix cap funció $d \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ complint $d(\theta + \omega) - d(\theta) = \beta(\theta)$.

Definim l'espai $C_0^r = \{\varphi \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}) \mid \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 0\}$ i denotem per T_ω l'automorfisme "*shift*"de C_0^r definit per $(T_\omega \varphi)(\theta) = \varphi(\theta + \omega)$. Com aquest operador és una isometria, $\mathrm{Spec}(T_\omega) \subset \mathbb{S}^1$. De fet, per $k \in \mathbb{Z}$ tenim

$$T_\omega(\exp(ik\theta)) = \exp(ik\omega) \cdot \exp(ik\theta)$$

Per tant, per $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $\exp(ik\omega)$ és un valor propi de T_ω. Concretament $\mathrm{Spec}(T_\omega) = \mathbb{S}^1$. La funció pròpia per $k = 0$ no pertany a l'espai C_0^r. Com 1, no és un valor propi, el rang de l'operador T_ω no és C_0^r i per tant existeixen funcions $\beta \in C_0^r$ tals que no hi ha funcions $d \in C_0^r$ amb $d(\theta + \omega) - d(\theta) = \beta(\theta)$. □

Proposició 4.7. *Suposem que ω satisfà la condició diofàntica (4.6) i que $a \in C^\infty$ amb un nombre finit de zeros, cadascun amb multiplicitat finita. Sigui n_0 el nombre total de zeros (multiplicitat inclosa), aleshores existeix un únic polinomi trigonomètric de grau n_0 tal que el sistema lineal quasi-periòdic (4.1) es pot transformar en*

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= p(\theta)x \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\}$$

on la transformació també és de classe C^∞.

Demostració. Sigui q un polinomi no nul de grau n_0 amb els mateixos zeros , comptant multiplicitat, que a. És evident que tots els polinomis que compleixin aquestes propietats són de la forma λq, amb $\lambda \neq 0$. Notem que q pot ser triat tal que $q(\theta)a(\theta) \geq 0$, per tot θ. Per tant, per tot $\lambda > 0$, el quocient

$$\frac{a(\theta)}{\lambda q(\theta)}$$

es pot extendre a una funció de classe C^∞ estrictament positiva i, per tant, es compleix la condició 1 de la proposició 4.4.

Notem per últim que el valor de λ per complir la condició 2 és

$$\lambda = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{a(\theta)}{q(\theta)} d\theta\right].$$

□

4.2 Formes normals i exponents de Lyapunov

En aquesta secció ens allunyarem, al principi, de la reduïbilitat per a començar definint l'exponent de Lyapunov del sistema lineal quasi-periòdic que ens indicarà l'estabilitat de la corba. Entrarà en joc, ara si, el paràmetre μ i veurem un resultat que ens grantitzarà el bon comportament de l'exponent de Lyapunov en funció de μ.

Abans de començar definirem, però no demostrarem, una de les formes del Teorema Ergòdic de Birkhoff [5] que ens serà útil a partir d'ara per a poder definir l'exponent de Lyapunov del nostre sistema quasi-periòdic mitjançant dues expressions diferents.

Teorema 4.8. ***(Ergòdic de Birkhoff)*** *Sigui $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ una transformació que preserva mesura sobre un espai de probabilitats. Sigui $\varphi \in L^1(X, \mu)$. Aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k(x)) =: \varphi_T(x)$$

(la mitjana temporal) existeix per a μ- quasi tot $x \in X$.

Definició 4.9. *Sigui $\theta \in \mathbb{T}^1$, definim l'exponent de Lyapunov de (4.1) en θ com*

$$\lambda(\theta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{j=0}^{n-1} a(\theta + j\omega) \right|. \tag{4.10}$$

Definim també l'exponent de Lyapunov del sistema lineal quasi-periòdic (4.1) com

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |a(\theta)| d\theta.$$

Si Λ és finit, el Teorema Ergòdic de Birkhoff (teorema 4.8)ens diu que per quasi tot $\theta \in \mathbb{T}^1$ (en sentit Lebesgue), el límit superior a (4.10) és, de fet, un límit i $\lambda(\theta) = \Lambda$. Si $a(\theta)$ no s'anul·la, el límit superior a (4.10) és també un límit i concideix amb Λ però, en aquest cas, per tot $\theta \in \mathbb{T}^1$. En aquest darrer cas, (4.10) convergeix uniformement [3].

Hem vist, a la proposició 4.4, que els zeros de a es conserven per canvis de variables lineals. Podem entendre'ls, doncs, com a invariants del cocicle. Ara suposarem que a depèn d'un paràmetre μ, i ens centrarem en la regularitat de l'exponent de Lyapunov Λ_μ respecte μ.

Teorema 4.10. *Considerem una família uni-paramètrica de sistemes lineals quasi-periòdics*

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= a(\theta, \mu)x, \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

on ω és diofàntic, μ pertany a un subconjunt obert de $\mathbb{R}$ i a és una funció de classe C^∞ de μ i θ. Suposem que

1. *per cada μ, $a(\cdot, \mu)$ té un nombre finit de zeros, tots simples exceptuant com a molt un de multiplicitat 2.*

   Anomenem M el conjunt obert dels valors de μ per els quals tots els zeros de $a(\cdot, \mu)$ són simples.

2. *Si $a(\cdot, \mu)$ té un zero de multiplicitat 2 a $\theta = \theta_0$ per a $\mu = \mu_0$, aleshores*

   $$\frac{\partial a}{\partial \mu}(\theta_0, \mu_0) \neq 0$$

   .

Aleshores, l'exponent de Lyapunov $\Lambda(\mu)$ de (4.11) és una funció contínua respecte μ tal que:

1. $\Lambda \in C^\infty(M)$.

2. Si $\mu_0 \notin M$*, aleshores*

(a) Si la funció "nombre de zeros de $a(\cdot,\mu)$*"és creixent en* μ_0*, llavors*

$$\lim_{\mu\to\mu_0^-} \Lambda'(\mu) = -\infty, \ \ i \ \lim_{\mu\to\mu_0^+} \Lambda' \ \textit{existeix i és finit.}$$

(b) Si la funció "nombre de zeros de $a(\cdot,\mu)$*"és decreixent en* μ_0*, llavors*

$$\lim_{\mu\to\mu_0^-} \Lambda' \ \textit{existeix i és finit, i} \ \lim_{\mu\to\mu_0^+} \Lambda'(\mu) = +\infty.$$

A més, per $\mu \to \mu_0^-$ *de (a) i per* $\mu \to \mu_0^+$ *de (b), tenim l'expressió assimptòtica*

$$\Lambda(\mu) = \Lambda(\mu_0) + A\sqrt{|\mu-\mu_0|} + O(|\mu-\mu_0|), \tag{4.12}$$

on $A > 0$.

La demostració d'aquest teorema es basa en transformar la funció a d'una forma adecuada. És per aquest motiu que, abans de demostrar el teorema, hem d'enunciar els lemes que venen a continuació.

Lema 4.11. *Suposem* $\mu_0 \in M$*. Aleshores, existeix* $\delta > 0$ *tal que, per tot* $|\mu-\mu_0| > \delta$*, es compleix*

$$a(\theta,\mu) = b(\theta,\mu)\prod_{j=1}^{n}[\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu)))],$$

on $2n$ *és el nombre total de zeros de* $a(\cdot,\mu_0)$ *i, si* $\mu \in (\mu_0-\delta, \mu_0+\delta)$*, aleshores*

1. les funcions ν_j *i* ϕ_j*,* $j = 1, ..., n$*, són de classe* C^∞*,*

2. $|\nu_j(\mu)| < 1$*,*

3. $b \in C^\infty$ *respecte* μ *i* $\theta \in \mathbb{T}^1$*,*

4. $b(\cdot,\mu)$ *no s'anul·la.*

Demostració. Notem que, per qualsevol parella de valors θ_1 i θ_2 diferents pertanyents a $\mathbb{T}^1$, existeixen valors ν_0, ϕ_0 tals que la funció $\nu_0 + cos(\theta - \phi_0)$ s'anul·la en θ_1 i θ_2. (De fet aquests valors són $\nu_0 = \cos(\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2))$, $\phi_0 = \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) - \pi$). Aquest fet ens mostra que si θ_1 i θ_2 depenen amb una certa diferenciabilitat d'un paràmetre, ν_0 i ϕ_0 també en depenen i amb la mateixa diferenciabilitat.

Ara, sigui $\delta > 0$ tal que $(\mu_0-\delta, \mu_0+\delta) \subset M$. Llavors, per cada valor μ pertanyent a aquest interval, el nombre de zeros de a ha de ser constant i parell (al ser periòdica), anomenem-lo $2n$. A més, aquests zeros son funcions C^∞ de μ. Emparellem (la forma no és important) aquests $2n$ zeros, on cada parella depen de μ de forma C^∞. Per a cada parella, doncs, podem obtenir els valors $\nu_j(\mu)$ i $\phi_j(\mu)$ de la mateixa manera que hem fet anteriorment. Això implica que la funció

$$d(\theta,\mu) = \prod_{j=1}^{n}[\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu)))]$$

té els mateixos zeros que a i és també C^∞ respecte μ. Si ara definim b de la forma

$$b(\theta, \mu) = \frac{a(\theta, \mu)}{d(\theta, \mu)},$$

queda clar que es compleixen tots els punts del lema. $\square$

Lema 4.12. *Suposem $\mu_0 \notin M$. Sota les hipòtesis del teorema 4.10, existeix $\delta > 0$ tal que, per $|\mu - \mu_0| < \delta$, es té*

$$a(\theta, \mu) = b(\theta, \mu)(\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))),$$

on, si $\mu \in (\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta)$, es satisfan:

1. *b és una funció de classe C^∞ de μ i θ amb zeros simples,*
2. *$\nu, \phi \in C^\infty$,*
3. *$\nu(\mu_0) = 1$, $\frac{\partial \nu}{\partial \mu}(\mu_0) \neq 0$.*

Demostració. Com $\mu_0 \notin M$, $a(\cdot, \mu_0)$ té un zero doble a un cert θ_0. Aleshores, pel teorema de preparació de Malgrange (Teorema 4.14), sabem que existeix una funció q de classe C^∞ en un entorn obert de (θ_0, μ_0) tal que $q(\theta_0, \mu_0) \neq 0$, i dues funcions d_0 i d_1 de classe C^∞ tals que $d_0(\mu_0) = d_1(\mu_0) = 0$ complint

$$a(\theta, \mu) = q(\theta, \mu)[d_0(\mu) + d_1(\mu)(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2].$$

Notem, que per a cada μ, la funció $q(\cdot, \mu)$ pot ser extesa trivialment a tot $\mathbb{T}^1$, però aquesta extensió no és periòdica en θ.

Si definim

$$\nu(\mu) = \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{d_1(\mu)^2 - 4d_0(\mu)}\right),$$

$$\phi(\mu) = -\frac{1}{2}d_1(\mu) - \pi,$$

És fàcil veure que, fixat un μ, la funció $\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))$ té els mateixos zeros que $d_0(\mu) + d_1(\mu)(\theta - \theta_0) + (\theta - \theta_0)^2$. També és fàcil comprovar que tant ν com ϕ són també de classe C^∞.

Aleshores, si definim

$$b(\theta, \mu) = \frac{a(\theta, \mu)}{\nu(\mu) + \cos(\theta - \phi(\mu))}$$

és evident que es compleixen els punts del lema. $\square$

Demostració. (del teorema 4.10) Sigui $\mu_0 \in M$. Pel lema 4.11 tenim que podem escriure a de la forma

$$a(\theta, \mu) = b(\theta, \mu) \prod_{j=1}^{n} [\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu)))]$$

per a μ prou propers a μ_0. L'exponent de Lyapunov del cocicle ve donat per

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta, \mu)| d\theta + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\nu_j(\mu) + \cos(\theta - \phi_j(\mu))| d\theta.$$

Notem que, per a qualsevol β, es té

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\alpha + \cos(\theta-\beta)|d\theta = \left\{\begin{array}{ll} -\ln 2 & \text{si } |\alpha|\leq 1, \\ -\ln 2 + \operatorname{arccosh}|\alpha| & \text{si } |\alpha|\geq 1. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Ara, com $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta,\mu)|d\theta$ depen suaument de μ (ja que $b(\theta,\mu)$ no s'anul·la), ja tenim demostrart el primer punt.

Sigui, ara, $\mu \notin M$. Per un valor μ prou proper a μ_0, el lema 4.12 implica que podem escriure l'exponent de Lyapunov de la forma

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|b(\theta,\mu)|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\nu(\mu)+\cos(\theta-\phi(\mu))|d\theta. \tag{4.14}$$

Com ja hem vist abans, el primer terme de la suma depén suaument de μ. Ara, com $|\nu(\mu)|$ creua el valor 1 quan μ passa per μ_0, per (4.13) sabem que Λ només és contínua en μ_0. De fet, $\frac{\partial}{\partial\nu}\Lambda$ tendeix a $+\infty$ quan ν s'apropa a 1 per sobre i a un valor finit quan ho fa per sota. Per últim, notem que $\Lambda' = \frac{d\Lambda}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}$ i que ν creix quan el nombre de zeros de a decreix a μ_0. L'expressió assimptòtica del teorema es dedueix trivialment de (4.13) i (4.14). □

Corol·lari 4.13. ***(Formes normals prop d'una pèrdua de reduïbilitat).*** *Considerem la família de sistemes lineals quasi-periòdics de la forma expressada a (4.11). Suposem que*

1. *$a(\cdot,\mu)$ és reduïble per $\mu < \mu_0$,*
2. *$a(\cdot,\mu)$ té un zero doble a θ_0 per $\mu = \mu_0$,*
3. *$\frac{d}{d\mu}a(\theta_0,\mu_0) \neq 0$.*

Aleshores, existeix un entorn de μ_0 i una C^∞-conjugació,

$$\begin{aligned} y &= c(\theta,\mu)x \\ \varphi &= \theta - \phi(\mu) \\ \nu &= \nu(\mu), \end{aligned}$$

complint $\nu(\mu_0) = 1$ i $\phi(\mu_0) = \theta_0$, tal que reescriu la família (4.11) de la froma

$$\left.\begin{aligned} \overline{y} &= h(\nu)(\nu+\cos\varphi)y, \\ \overline{\varphi} &= \varphi + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

on h és una funció suau que no s'anul·la.

Demostració. Per el lema 4.12, utilitzant la transformació $\theta = \varphi + \phi(\mu)$ el cocicle pren la forma

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= b(\varphi,\mu)(\nu(\mu)+\cos\varphi)x, \\ \overline{\varphi} &= \varphi + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

on la funció $b(\cdot,\mu)$ no s'anul·la per a valors de μ propers a μ_0. La tercera condició del lema 4.12 ens permet aplicar el teorema de la funció inversa (Teorema 2.13) i prendre ν com a paràmetre mitjançant la transformació $\nu = \nu(\mu)$ (recordem que $\nu(\mu_0) = 1$). Per últim, usant la proposició 4.4 per a transformar (4.16) en (4.15), amb

$$h(\nu) = \operatorname{sign}(b)\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|b(\varphi,\nu)|d\varphi\right].$$

La suavitat de h s'obté inmediatament de l'expressió anterior. La suavitat de la transformació que va de (4.16) a (4.15) és la mateixa que per a la proposició 4.4 però seguint el paràmetre ν.

Per últim, enunciarem una de les formes del Teorema de preparació de Malgrange [7], usat en la demostració del lema 4.18. Queda fora del contingut d'aquest treball demostrar-lo o enunciar-lo en la seva forma més general.

Teorema 4.14. ***(Preparació de Malgrange).*** *Suposem $f(t,x)$ una funció complexa suau amb $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ proper a l'origen. Sigui k l'enter més petit que compleix*

$$f(0,0) = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = 0\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(0,0) = 0\ ,\ \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0,0) \neq 0.$$

Aleshores, una de les formes del teorema estableix que en un entorn de l'origen, f es pot escriure com el producte d'una funció suau que no s'anul·la a l'origen i una funció suau que en funció de t pren forma de polinomi de grau k. És a dir

$$f(t,x) = c(t,x) \cdot (t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \ \cdots\ + a_0(x))$$

on les dues funcions són suaus i c diferent de zero a l'origen.

5 Exponents de Lyapunov i operadors de transferència

En aquest darrer capítol tindrem com a objectiu relacionar l'exponent de Lyapunov amb, en última instància, les hipotesis necessàries per aplicar el teorema de la funció implícita (Teorema 2.14) a les corbes invariants del nostre sistema dinàmic. Per això haurem d'introduir, primer, un operador. Aquest operador no serà res nou, ja ha aparegut al capítol 3 però aquí en farem un estudi més exhaustiu. Cal remarcar que en aquest capítol estem treballant amb el comportament lineal normalitzat de la corba i per tant el signe de l'exponent de Lyapunov ens indicarà l'estabilitat (general) d'aquesta.

5.1 Operador de trasferència

Definició 5.1. *Si $a \in C^r(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$, definim l'operador de transferència $\mathcal{L} : C^r \to C^r$ com*

$$(\mathcal{L}\psi)(\theta) = a(\theta - \omega)\psi(\theta - \omega) \qquad \forall\theta \in \mathbb{T}^1. \tag{5.1}$$

El motiu d'introduir aquest operador és la seva relació amb l'operador (3.4). En aquest punt hem de recapitular i recordar el sentit d'aquell operador. El nostre objectiu era veure la bijectivitat de

$$D_u F(u, \mu)v(\theta) = D_x f_\mu(u(\theta), \theta)v(\theta) - v(\theta + \omega). \tag{5.2}$$

Si ara prenem $a(\theta) = D_x f_0(u_0(\theta), \theta)$ és evident que 0 pertany a l'espectre de (5.2) si, i només si, 1 pertany a l'espectre de (5.1). Per tant, podrem aplicar el Teorema de la funció implícita (Teorema 2.14) si, i només si, $1 \notin \operatorname{Spec}(\mathcal{L})$.

Com a comentari, es coneix que l'espectre de l'operador de transferència és invariant per rotacions i que si λ és un valor propi de $\mathcal{L}$, aleshore per tot $k \in \mathbb{Z}$, $\exp(ik\omega)\lambda$ també ho és [2, 4, 8]. També és fàcil veure que l'espectre de l'operador de transferència és invariant per canvis $x = c(\theta)y$ dins dels sistemes quasi-periòdics.

Proposició 5.2. *Si existeix un interval tancat no trivial I tal que $a_{|I} \equiv 0$, aleshores 0 és un valor propi de $\mathcal{L}$ i $\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) = \{0\}$. Si 0 és un valor propi de $\mathcal{L}$, aleshores existeix un interval tancat no trivial I tal que $a_{|I} \equiv 0$ i, per tant, $\operatorname{Spec}(\mathcal{L}) = \{0\}$.*

Demostració. Suposem que a s'anul·la en un interval no trivial I. Si $\psi \in C^r$ és una funció no nul·la que val 0 fora de I, aleshores $\mathcal{L}\psi = 0$ i, per tant, ψ és funció pròpia de $\mathcal{L}$ amb valor propi 0. Per veure que l'espectre només conté aquest valor, és suficient amb comprovar que $\mathcal{L}$ és un operador nilpotent i per tant el seu radi espectral és 0. Ara, és evident la nilpotència de l'operador ja que a s'anul·la en I.

Suposem 0 valor propi de $\mathcal{L}$, sigui ψ la seva funció pròpia. Sigui ara I un interval tancat no trivial contingut dins el suport de ψ (és a dir, $\psi \neq 0$ en I). Aleshores, a s'anul·la en I. $\square$

Proposició 5.3. *Els següents enunciats són equivalents:*

1. *El sistema quasi-periòdic (4.1) és reduïble.*

2. *L'espectre de $\mathcal{L}$ no conté el 0 i coincideix amb l'adherència del conjunt dels valors propis.*

3. *$\mathcal{L}$ té un valor propi no nul.*

4. $\mathcal{L}$ té un valor propi real no nul.

Demostració. Provem primer 1.⇒2.. Suposem que (4.1) es pot reduir a (4.2), aleshores veiem que l'espectre de l'operador de transferència per a (4.2) és un cercle de radi $|b| > 0$, i que aquest és l'adherència del conjunt de valors propis. En efecte, com $b = a(\theta)c(\theta)/c(\theta+\omega)$,

$$(\mathcal{L}c)(\theta) = \frac{b \cdot c(\theta)}{c(\theta-\omega)} c(\theta-\omega) = b \cdot c(\theta).$$

Ara, com que l'espectre de $\mathcal{L}$ és invariant per canvis $x = c(\theta)y$ del cocicle, ja ho tenim.

La implicació 2.⇒3. és trivial. Provem, doncs, 3.⇒4.. Sigui $b_1 \in \mathbb{C}$ un valor propi amb funció pròpia $c_1(\theta)$ és trivial veure, per la fòrmula anterior, que $\operatorname{sign}(a)|b_1| \neq 0$ és també un valor propi amb funció pròpia $|c_1(\theta)|$.

Per últim provem 4.⇒1.. Suposem que existeix una parella $(b, c(\theta))$ amb $b \neq 0$ tal que $a(\theta-\omega)c(\theta-\omega) = bc(\theta)$. Queda clar, doncs que $c(\theta) \neq 0$ per tot θ. Per tant, $x = c(\theta)y$ és un canvi que redueix a (4.1) en (4.2). □

5.2 Exponents de Lyapunov i l'espectre dels operadors de transferència

En aquesta darrera secció relacionarem l'exponent de Lyapunov d'un sistema quasi-periòdic amb el radi espectral del seu operador de transferència. L'objectiu final serà veure que si l'exponent de Lyapunov és negatiu, es compleixen les hipòtesis del Teorema de la funció implícita. En aquesta secció seguirem prenent ω irracional però no serà necessari que compleixi la inequació diofàntica.

Notem que, si $\{\theta_n\}_n$ és una successió d'elements de $\mathbb{T}^1$ i $a \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ no s'anul·la, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta_n - j\omega)| \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)| d\theta.$$

Si no coneixem el nombre de zeros de la funció a disposem de la següent desigualtat.

Lema 5.4. *Sigui $\{\theta_n\}_n$ una successió d'elements de $\mathbb{T}^1$. Aleshores,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta_n - j\omega)| \; \leq \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)| d\theta.$$

Demostració. Definim, per $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln|a(\theta_n - j\omega)| \;, \qquad S_n^{(N)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \max\{\ln|a(\theta_n - j\omega)|, -N\}$$

i

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|a(\theta)| d\theta \;, \qquad \Lambda^{(N)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max\{\ln|a(\theta)|, -N\} d\theta.$$

Ara, com $\{\theta_n - j\omega\}_{1\leq j\leq n, n\geq 1}$ està uniformement distribuit i $\max\{\ln|a(\theta)|, -N\}$ és una funció contínua respecte θ, tenim

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} = \Lambda^{(N)} \qquad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Definim, ara,

$$M = \max_{\theta\in\mathbb{T}^1}\{\ln|a(\theta)|\}, \qquad F(\theta) = M - \ln|a(\theta)|, \qquad F_N(\theta) = M - \max\{\ln|a(\theta)|, -N\}.$$

Per a cada θ es compleix $F_N(\theta) \le 0$ i $F_N(\theta) \nearrow F(\theta)$. Aleshores, pel Teorema de la convergència monòtona de Lebesgue obtenim la igualtat

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi} F_N(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta,$$

que ens implica

$$\lim_{N\to\infty}\Lambda^{(N)} = \Lambda. \tag{5.4}$$

Separem dos casos, el cas en que $\Lambda = -\infty$ i en el que $\Lambda > -\infty$.

Si $\Lambda > -\infty$, les igualtats (5.3) i (5.4) ens impliquen que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$ tal que $\forall N \ge N_0$ es compleix

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} \le \Lambda + \varepsilon.$$

Fet que prova el lema en aquest cas.

Si $\Lambda = -\infty$, les igualtats (5.3) i (5.4) ens impliquen que $\forall E > 0$, $\exists N_0 > 0$ tal que $\forall N \ge N_0$ es compleix

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} S_n^{(N)} \le -E.$$

Fet que prova el lema en aquest cas. □

Teorema 5.5. *Siguin $a \in C^r$ i $\mathcal{L} : C^r \to C^r$ els respectiu operador de transferència, amb $0 \le r \le \infty$. Sigui, també, Λ l'exponent de Lyapunov de (4.1). Aleshores,*

$$\rho(\mathcal{L}) = \exp(\Lambda),$$

on $\rho(\mathcal{L})$ és el radi espectral de l'operador $\mathcal{L}$.

Demostració. Triat un valor s, amb $0 \le s \le r$, podem extendre l'operador de transferència $\mathcal{L}$ a actuar sobre l'espai C^s de forma natural: per a cada $\psi \in C^s$, $(\mathcal{L}\psi)(\theta) = a(\theta-\omega)\psi(\theta-\omega)$. Aleshores, sabem que l'espectre de l'operador no depén de s. En tenim suficient, doncs, demostrant el teorema per a $\mathcal{L}$ actuant sobre C^0.

Com $\rho(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty}||\mathcal{L}^n||_\infty^{\frac{1}{n}}$, tenim que

$$\rho(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty}\left(\max_{\theta\in\mathbb{T}^1}\prod_{j=1}^n |a(\theta - j\omega)|\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^n |a(\theta_n - j\omega)|\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{5.5}$$

on θ_n és un valor per el qual s'assoleix el màxim. Ara, aplicant el Lema 5.4 obtenim, per a tot $\theta \in \mathbb{T}^1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln|a(\theta - j\omega)| \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln|a(\theta_n - j\omega)| \le \Lambda.$$

Si $\Lambda = -\infty$, les anteriors desigualtats són igualtats i queda demostrat el teorema. Si $\Lambda > -\infty$, el Teorema Ergòdic de Birkhoff (Teorema 4.8) implica que existeix un conjunt de valors de θ amb mesura de Lebesgue total tal que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \ln|a(\theta - j\omega)| = \Lambda.$$

Per trant,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln|a(\theta_n - j\omega)| = \Lambda.$$

Aplicant exponencial a les dues bandes obtenim el resultat desitjat. □

Corol·lari 5.6. *Si* $\Lambda = -\infty$, *aleshores* $\mathrm{Spec}\mathcal{L} = \{0\}$. *A més, si a s'anul·la en un interval no degenerat, 0 és un valor propi de* $\mathcal{L}$*; contrariament 0 és un valor espectral però no un valor propi.*

Demostració. Trivial a partir de la Proposició 5.2 i el Teorema 5.5. □

Teorema 5.7. *Suposem que la funció a de (4.1) té zeros i que* $\mathcal{L}$ *actua sobre algun* C^r, $0 \le r < \infty$. *Aleshores,*

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| \le \exp(\Lambda)\}.$$

Demostració. Igual que a la demostració del Teorema 5.5, és suficient considerar que l'operador de tranferència actua sobre C^0. Suposem també $\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) \neq \{0\}$ (altrament el resultat és trivial). Com l'espectre és invariant per rotacions, podem considerar simplement resolvents de la forma $\mathcal{L} - \lambda\mathrm{Id}$ amb λ real i positiu.

Demostrarem per reducció a l'absurd. Fixem un valor $0 < \lambda < \exp(\Lambda)$ (el cas en que $\lambda = \exp(\Lambda)$ es dedueix inmediatament del teorema 5.5), i suposem $\lambda \notin \mathrm{Spec}(\mathcal{L})$. Pel Teorema de la funció oberta obtenim que l'operador $\mathcal{L} - \lambda\mathrm{Id}$, actuant sobre l'espai de les funcions contínues dotat de la norma del suprem, té operador invers acotat.

Sigui $A \subset \mathbb{T}^1$ el conjunt de valors de θ per els quals el Teorema Ergòdic de Birkhoff (Teorema 4.8) es compleix, és a dir,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln|a(\theta - j\omega)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|a(\theta)|d\theta = \Lambda, \qquad \forall\theta \in A.$$

En particular, els zeros de a no estan a A.

Sigui $b \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ tal que $||b|| \le 1$, definim $\psi_b = (\mathcal{L} - \lambda\mathrm{Id})^{-1}b$. Notem que $||\psi_b|| \le ||(\mathcal{L} - \lambda\mathrm{Id})^{-1}||$, que implica que ψ_b verifica l'equació

$$\psi_b(\theta + \omega) = \frac{1}{\lambda}(a(\theta)\psi_b(\theta) - b(\theta + \omega)), \qquad \forall\theta \in \mathbb{T}^1.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\psi_b(\theta + n\omega) \quad = \quad & \tfrac{1}{\lambda^n}a(\theta + (n-1)\omega)\cdots a(\theta)\psi_b(\theta) \\
& -\tfrac{1}{\lambda^n}a(\theta + (n-1)\omega)\cdots a(\theta+\omega)b(\theta+\omega) \\
& \vdots \\
& -\tfrac{1}{\lambda^2}a(\theta + (n-1)\omega)b(\theta + (n-1)\omega) - \tfrac{1}{\lambda}b(\theta + n\omega).
\end{aligned}$$

Per qualsevol $\theta \in A$, podem reescriure l'expressió anterior de la forma

$$\begin{aligned}
\psi_b(\theta) \quad = \quad & \tfrac{b(\theta+\omega)}{a(\theta)} + \lambda\tfrac{b(\theta+2\omega)}{a(\theta)a(\theta+\omega)} + \cdots + \lambda^{n-1}\tfrac{b(\theta+n\omega)}{a(\theta)\cdots a(\theta+(n-1)\omega)} \\
& +\lambda^n\tfrac{\psi_b(\theta+n\omega)}{a(\theta)\cdots a(\theta+(n-1)\omega)}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Notem que, per tot $\theta \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n}{a(\theta)\cdots a(\theta+(n-1)\omega)} = 0 \tag{5.7}$$

Sigui θ_* un zero de a. Sigui $\{\theta_k\}_k$ una successió d'elements de A que convergeix a θ_* tal que $|a(\theta_k)| < \frac{1}{k}$. Considerem, ara, (5.6) per a $\theta = \theta_k$ i, per a cada k, (5.7) implica que podem triar $n = n_k$ tal que

$$\frac{|a(\theta_k)\cdots a(\theta_k+(n_k-1)\omega)|}{\lambda^{n_k}} > ||(\mathcal{L}-\lambda\mathrm{Id})^{-1}||.$$

D'altra banda, per a cada k, prenem $b_k \in C^0(\mathbb{T}^1,\mathbb{R})$ tal que $||b|| = 1$ i aleshores es compleixen:

$$\begin{aligned}
b_k(\theta_k+\omega) &= \mathrm{sign}(a(\theta_k)),\\
b_k(\theta_k+2\omega) &= \mathrm{sign}(a(\theta_k)a(\theta_k+\omega)),\\
&\vdots\\
b_k(\theta_k+n_k\omega) &= \mathrm{sign}(a(\theta_k)a(\theta_k+\omega)\cdots a(\theta_k+(n_k-1)\omega)),
\end{aligned}$$

on $\mathrm{sign}(x)$ és 1 si $x > 0$ i -1 si $x < 0$. Cal notar que, tot i que la successió $\{b_k\}_k$ no necessàriament convergeix dins C^0, les funcions b_k existeixen. Observem que

$$\left|\frac{\lambda^{n_k}\psi_{b_k}(\theta+n_k\omega)}{a(\theta_k)\cdots a(\theta_k+(n_k-1)\omega)}\right| \leq 1.$$

Per (5.6), prenent $\theta = \theta_k$, obtenim

$$\frac{1}{|a(\theta_k)|} - 1 \;\leq\; |\psi_{b_k}(\theta_k)| \;\leq\; ||(\mathcal{L}-\lambda\mathrm{Id})^{-1}||.$$

Ara bé, per k suficientment gran, la desigualtat anterior ens implica que $||(\mathcal{L}-\lambda\mathrm{Id})^{-1}||$ no és acotat i, per tant, arribem a contradicció. $\square$

Observació 5.8. No podem obviar, en el Teorema 5.7, la hipòtesi de l'existència de zeros de la funció a, no podem canviar-la per la hipòtesi de no-reduïbilitat. Ja haviem provat, a la Proposició 4.6, l'existència de funcions sense zeros per els quals el seu sistema quasi-periòdic no és reduïble. En aquest cas es pot veure fàcilment que

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| = \exp(\Lambda)\}$$

i que no hi ha valors propis dins l'espectre.

6 Conclusions

La conclusió principal del treball és que si la corba u_{μ_0} és atractora, és contínua respecte μ. Podriem reenunciar el primer resultat canviant el concepte d'atracció uniforme per el d'atracció ja que, gràcies a l'exponent de Lyapunov, podem relaxar aquesta condició. Com a conclusió, doncs, tenim el següent enunciat:

Proposició 6.1. *Considerem el següent sistema dinàmic forçat quasi-periodicament*

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= f_\mu(x,\theta) \\ \overline{\theta} &= \theta + \omega \end{aligned}\right\}$$

amb $x, \mu \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}^1$ i ω irracional (en la notació usada en aquest treball). Sigui f_μ una funció de classe C^r, amb $r \geq 1$. Suposem que existeix μ_0 tal que el sistema té una corba invariant atractora u_{μ_0}.

Aleshores, per valors de μ propers a μ_0, el sistema dinàmic conté una corba invariant u_μ propera a u_{μ_0}.

Tot i que podriem deixar aquí les conclusions, també m'agradaria emfatitzar la importància dels càpitols 2 i 4. El càpitol 2 és indispensable per a entendre, directament, l'objectiu final del treball i per poder aplicar amb rigorositat els resultats que en ell s'exposen. El capítol 4 ens pot permetre simplificar el comportament de la corba a un sistema quasi-periòdic trival, en el millor dels casos, o a un de polinòmic o trigonomètric. Aquesta simplificació és molt útil, ja que podrem estudiar el comportament del sistema dinàmic d'una forma més simple.

Referències

[1] Cartan, H.: *Calculo diferencial*, Ediciones Omega (1972).

[2] Haro, À.; de la Llave, R.: *Spectral theory and dynamical systems*, Preprint, contingut al fitxer `ftp://ftp.ma.utexas.edu/pub/papers/llave/spectral.pdf,2007.`

[3] Jorba, À.; Tatjer, J. C.: A mechanism for the fractalization of invariant curves in quasi-periodically forced 1-D maps. *Discrete and continuous dynamical systems series B*, volume **10**, Number **2&3** (September & October 2008), 537-567.

[4] Jorba, À.; Numerical computation of the normal behaviour of invariant curves of n-dimensional maps, *Nonlinearity*, **14** (2001), 943-976.

[5] Katok, A.; Hasselblatt, B.: *Modern theory of dynamical systems*, Cambridge University press (1995).

[6] Lang, S.: *Introduction to Diophantine Approximations*, Springer (1995).

[7] Chow, S.N.; Hale, J.K.: *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, (1982).

[8] Mather, J. N.: Characterization of Anosov diffeomorphisms, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 71=Indag. Math.*, **30** (1968), 479-483.