Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Sèries de Taylor de zeros de polinomis d'exponents complexos

Autor: Guillem Quingles i Daví

Director: Dr. Carlos Antonio D'Andrea
Realitzat a: Facultat de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

## Abstract

We follow the work of DeFranco in [4] and [5] to prove a factorization formula for the Taylor series coefficients of a zero of a polynomial as a function of the polynomial's coefficients. This result extends to more general functions which we call complex exponent polynomials and also to the sum of a complex exponent polynomial and an holomorphic function with a simple zero. To prove this formula we need lemmas about Stirling numbers, multisets and partition sets. We also show that, when applied to polynomials, the formula recovers Sturmfels results in [11]. Finally, continuing the the work of DeFranco, we see that the formula, when applied to second degree polynomials, agrees with the known radical solutions and we prove an extension of a result about derivtions on commutative rings.

## Resum

Seguirem la feina de DeFranco a [4] i [5] per demostrar una fórmula de factorització per als coeficients de la sèrie de Taylor d'un zero d'un polinomi com a funció dels coeficients del polinomi. Aquest resultat s'extén a funcions més generals que anomenem polinomis d'exponents complexos i també a funcions suma d'un polinomi d'exponents complexos i una funció holomorfa amb un zero simple. Per provar la fórmula necessitarem lemes sobre els nombres d'Stirling, multiconjunts i conjunts partició. També veurem que aquesta fórmula aplicada a polinomis recobreix els resultats obtinguts per Sturmfels a [11]. Finalment, continuant la feina de DeFranco, veurem que la fórmula aplicada a polinomis de segon grau concorda amb les solucions per radicals conegudes i provarem una extensió d'una proposició sobre derivacions en anells commutatius.

2020 Mathematics Subject Classification. 05E40, 30-08, 32A05, 32A12

## Agraïments

M'agradaria agraïr molt especialment al Dr. Carlos d'Andrea tota la feina de seguiment i assessorament del treball i el recolzament que m'ha donat.

# Índex

# 1 Introducció

## 1.1 Objectiu i estructura del treball

Donada una $(n+1)$-tupla de nombres complexos, $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, un polinomi és una funció

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k. \end{aligned}$$

Si $a_n \neq 0$, aleshores $p(z)$ té grau $n$. Un zero (o arrel) de $p(z)$ és un nombre $\phi$ tal que $p(\phi) = 0$. Com que $\phi$ depèn dels coeficients $a_0, \dots, a_n$, podem pensar en $\phi$ com una funció respecte $a$, $\phi = \phi(a)$.

Descriure aquesta dependència en $a$ és un dels problemes més clàssics i importants de les matemàtiques. Per a polinomis de grau 1 fins a 4 existeixen fórmules que proporcionen tots els zeros de $p(z)$ a $\mathbb{C}$. Aquestes fórmules són conegudes com les solucions per radicals i expressen els zeros del polinomi en funció dels seus coeficients mitjançant l'aplicació finita de sumes, restes, productes, divisions i arrels $k$-èssimes, on $k$ és un enter positiu. D'altra banda, gràcies a Galois, Ruffini i Abel sabem que una solució per radicals no existeix per a polinomis de grau 5 o superior.

Tot i així, la funció $\phi(a)$ es pot descriure usant sèries infinites per a un polinomi de qualsevol grau. Molts autors han estudiat aquestes sèries formals i utilitzant diferents tècniques han donat expressions per a aquestes sèries.

Per exemple Sturmfels a [11] demostra que les arrels d'un polinomi de grau $n$ satisfan un sistema $\mathcal{A}$-hipergeomètric d'equacions diferencials. $\mathcal{A}$ denota la configuració de $n+1$ punts equidistants a la recta afí. Aleshores per cada una de les $2^{n-1}$ triangulacions de $\mathcal{A}$ Sturmfels construeix $n$ sèries solució diferents.

Considerem per exemple l'equació general de la quíntica,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 = 0. \tag{1.1}$$

Llavors per a la triangulació més fina, la que divideix $\mathcal{A}$ en cinc segments de longitud u, les cinc arrels de (1.1) són

$$\begin{aligned} &X_{1,-1} = -\left[\frac{a_0}{a_1}\right], \quad X_{2,-1} = -\left[\frac{a_1}{a_2}\right] + \left[\frac{a_0}{a_1}\right], \quad X_{3,-1} = -\left[\frac{a_2}{a_3}\right] + \left[\frac{a_1}{a_2}\right], \\ &X_{4,-1} = -\left[\frac{a_3}{a_4}\right] + \left[\frac{a_2}{a_3}\right], \quad X_{5,-1} = -\left[\frac{a_4}{a_5}\right] + \left[\frac{a_3}{a_4}\right], \end{aligned}$$

on cada bràquet representa una sèrie de potències. Per exemple:

$$\left[\frac{a_0}{a_1}\right] = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0^2 a_2}{a_1^3} - \frac{a_0^3 a_3}{a_1^4} + 2\frac{a_0^3 a_2^2}{a_1^5} + \frac{a_0^4 a_4}{a_1^5} - 5\frac{a_0^4 a_2 a_3}{a_1^6} - \frac{a_0^5 a_5}{a_1^6} + \dots$$

La definció explícita d'aquestes sèries es pot trobar a la Definició 5.5. En el cas de la darrera sèrie és

$$\left[\frac{a_0}{a_1}\right] = \sum_{i,j,k,l \geq 0} \frac{(-1)^{2i+3j+4k+5l}(2i+3j+4k+5l)!}{i!j!k!l!(i+2j+3k+4l+1)!} \frac{a_0^{i+2j+3k+4l+1} a_2^i a_3^j a_4^k a_5^l}{a_1^{2i+3j+4k+5l+1}}.$$

En el cas de prendre la triangulació més grollera, la que divideix $\mathcal{A}$ en un sol segment, les cinc solucions de (1.1) són

$$X_{5,\xi} = \xi \left[\frac{a_0^{1/5}}{a_5^{1/5}}\right] + \frac{1}{5}\left(\xi^2 \left[\frac{a_1}{a_0^{3/5}a_5^{2/5}}\right] + \xi^3 \left[\frac{a_2}{a_0^{2/5}a_5^{3/5}}\right] + \xi^4 \left[\frac{a_3}{a_0^{1/5}a_5^{4/5}}\right] - \left[\frac{a_4}{a_5}\right]\right),$$

una per cada $\xi$ solució de $\xi^5 = -1$. La fórmula general que dóna Sturmfels per les $n$ solucions de cada una de les triangulacions es pot trobar al capítol 5.

En aquest treball seguirem l'aproximació nova del problema que fa Mario DeFranco a [4] i [5]. El que farem serà calcular directament els coeficients de la sèrie de Taylor de $\phi(a)$ i en donarem una fórmula de factorització, que serà el teorema principal d'aquest treball, el Teorema 1.8, que provarem detalladament. Per demostrar-lo necessitarem uns resultats previs sobre els nombres d'Stirling de primera i segona espècie que provarem al capítol 2. Al capítol 3 demostrarem unes proposicions sobre conjunts partició i derivacions en anells commutatius que també utilitzarem en la demostració del teorema principal. Finalment al capítol 4 ja podrem provar la fórmula de factorització.

DeFranco presenta dues novetats a l'hora d'abordar el problema de descriure $\phi(a)$ usant sèries infinites. Una és la tècnica utilitzada: el càlcul directe de la sèrie de Taylor de $\phi(a)$ amb eines de la combinatòria. La segona i més important novetat és que el Teorema 1.8 també val per a un tipus més general de funcions, els polinomis d'exponents complexos. Aquestes funcions són com els polinomis però permetent que els exponents de la indeterminada siguin nombres complexos. Els definim a la Definició 1.3 del capítol 1. Per això recordarem abans breument com es defineix l'exponenciació complexa i què és la superfície de Riemann associada al logaritme complex. Això ho farem al capítol 1, on també enunciarem el resultat principal del treball, el Teorema 1.8.

Veiem a continuació un exemple que mostra la generalitat del Teorema 1.8. Considerem el polinomi d'exponents complexos

$$z + z^i + z^{-1} + z^{-i}, \tag{1.2}$$

on $i$ denota la unitat imaginària. Aleshores una de les sèries formals solució de (1.2) que proporciona el Teorema 1.8 és

$$\sum_{j,k\geq 0} \frac{-i^{1+i(j-k)}}{j!k!(2i)^{j+k}} \prod_{l=1}^{j+k-1} (-1 + 2l - j - k - i(j-k)).$$

Al capítol 5 veurem com quan apliquem el Teorema 1.8 a polinomis podem recobrir els resultats d'Sturmfels a [11] i obtenir les $n$ sèries solució de cada una de les triangulacions. Abans d'això, veurem breument com arriba Sturmfels als seus resultats, que ens portarà a estudiar què són els sistemes hipergeomètrics d'equacions diferencials.

Al capítol 6 veurem com la fórmula del teorema principal concorda amb la fórmula de les arrels dels polinomis de segon grau que coneixem:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.3}$$

En efecte, si desenvolupem fent Taylor l'arrel negativa de (1.3) al voltant del 0 respecte la variable $c$, la podem reexpressar com

$$\frac{-b}{a} - \frac{b}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n.$$

Veurem que aquesta sèrie també s'obté del Teorema 1.8. Igualment també n'obtindrem l'arrel positiva.

Al capítol 7 veurem una regla de transformació que relaciona les sèries de les arrels de dos polinomis d'exponents complexos i al capítol 8 enunciarem una extensió del Teorema 1.8. Aquesta dóna una fórmula de factorització pels coeficients de la sèrie de Taylor d'un zero d'una suma d'un polinomi d'exponents complexos i una funció holomorfa amb un zero simple. La demostració d'aquest resultat utilitza les mateixes tècniques que les utilitzades per provar el Teorema 1.8 i es pot trobar a [5].

Amb tot això quedarà cobert l'objectiu principal d'aquest treball: llegir i entendre la feina de DeFranco a [4] i [5] i reproduir-la de manera autocontinguda en aquest treball, així com estudiar tots aquells conceptes nous i necessaris per dur-ho a terme.

Un segon i més ambiciós objectiu és continuar la feina de DeFranco. Els articles [4] i [5] han estat publicats durant els primers mesos de 2021 i el propi Mario DeFranco planteja preguntes i nous camins a explorar que parteixen del seu treball. Una d'aquestes preguntes és obtenir les solucions per radicals dels polinomis de grau 1 fins a 4 a partir del teorema principal. Com hem dit, al capítol 6 provarem que efectivament es poden obtenir les solucions per radicals de les arrels d'un polinomi de segon grau.

Al capítol 9 respondrem una altra d'aquestes preguntes. Es tracta de generalitzar la Proposició 3.8, que dóna una fórmula sobre derivacions en anells commutatius:

$$\sum_{w\subset[1,M]} \delta^{|w^c|-1}(f_A^{(1)}\prod_{i\in w^c} f_i)\delta^{|w|}(f_B\prod_{i\in w} f_i) = \delta^M(f_Af_B\prod_{i=1}^{M} f_i),$$

on $\delta : R \longrightarrow R$ és una derivació a l'anell $R$ i $f_A, f_B, f_i \in R, 1 \leq i \leq M$, són elements de l'anell. La Proposició 9.2 generalitza aquesta fòrmula usant més elements $f_A, f_B, \ldots$.

Finalment tancarem el treball amb unes conclusions al capítol 10 . També hem inclòs un Apèndix on hi ha un recopilatori dels errors detectats a [4] i [5] així com també un llistat d'aquelles demostracions que he simplificat o que he hagut de provar jo.

## 1.2 Preliminars

Definirem un polinomi d'exponents complexos usant essencialment la mateixa definició que hem donat de polinomi però permetent que els exponents de $z$ siguin nombres complexos enlloc de nombres naturals. Recordem, doncs, com es definia l'exponenciació complexa. Com que es vol preservar les propietats conegudes dels logaritmes i dels exponents pels nombres reals i extendre-les als complexos, és natural definir l'exponenciació complexa com

$$z^w = e^{w\log z}.$$

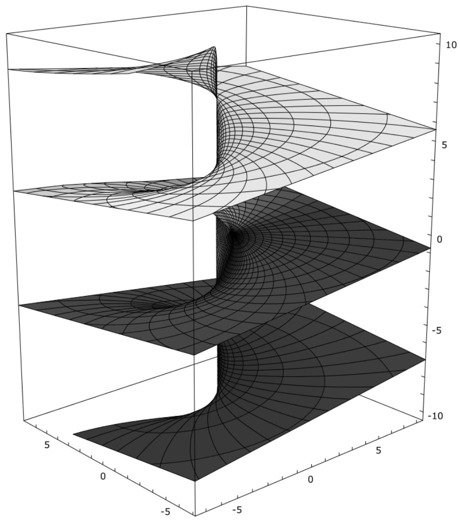
Per tant cal definir també el logaritme complex. El problema és que la funció exponencial no és injectiva:

$$e^{w+2\pi i} = e^w \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Per solucionar aquest problema podem restringir el domini de la funció exponencial a una regió que no contingui dos nombres que tinguin la mateixa imatge. Aleshores podrem definir el logaritme i obtindrem el que s'anomenen les branques del logaritme, definides en $\mathbb{C} \setminus \{r\}$, on $r$ és una semirecta amb origen al punt 0.

Aquestes branques no les podem "enganxar" per tenir una funció contínua $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ja que dues branques poden donar valors diferents a un punt on totes dues estan definides. Per exemple agafem la branca definida a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ amb part imaginària a $(-\pi, \pi)$, i la branca definida a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ amb part imaginària a $(0, 2\pi)$. Aquestes branques coincideixen al semiplà superior però no a l'inferior. Per tant té sentit enganxar els dominis d'aquestes branques però només la part corresponent al semiplà superior. Aleshores el nou domini està connectat però té dues còpies del semiplà inferior. Aquestes dues còpies es poden visualitzar com dos nivells d'un pàrquing de manera que un pot anar d'un nivell a l'altre pel semiplà superior. Es pot repetir el procés i enganxar les branques amb part imaginària a $(\pi, 3\pi), (2\pi, 4\pi)$, etc, i també a $(-2\pi, 0), (-3\pi, -\pi)$, etc. Al final queda una superfície connectada com l'espiral que connecta tots els pisos d'un pàrquing amb infinits nivells cap amunt i cap avall.

Diguem $L$ a la superfície que ens ha quedat. Un punt de $L$ és, doncs, un parell $(z, \theta)$, on $\theta$ és un dels possibles arguments de $z$. D'aquesta manera $L$ està ficat dins de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$.




Com que els dominis de les branques els hem enganxat per conjunts oberts on els valors d'aquestes coincidien, resulta que la funció $\log : L \longrightarrow \mathbb{C}$ que du el $(z, \theta) \in L$ a $\ln |z| + i\theta$ està ben definida i és contínua. Recordem a continuació les definicions de varietat complexa i superfície de Riemann i veiem que $L$ és la superfície de Riemann associada al logaritme complex.

**Definició 1.1.** *Una varietat complexa n-dimensional és un espai topològic $M$ que és Hausdorff, verifica el segon axioma de numerabilitat i tal que existeix un recobriment obert $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ de $M$ de manera que per tot $i \in I$, existeix una funció homeomorfa $\varphi_i : \Omega_i \longrightarrow \varphi_i(\Omega_i) \subset \mathbb{C}^n$, on $\varphi_i(\Omega_i)$ és un obert a $\mathbb{C}^n$, és a dir, tot punt de $M$ té un entorn homeomorf a $\mathbb{C}^n$. Diem que $\mathscr{A} = \{(\Omega_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ és un atles de $M$ i les parelles $(\Omega_i, \varphi_i)$ són les cartes de l'altles $\mathscr{A}$. A més, cal que donades dues cartes $(\Omega_1, \varphi_1)$, $(\Omega_2, \varphi_2)$ de l'atles tals que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ l'aplicació*

$$\varphi_1(\Omega_1 \cap \Omega_2) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} \Omega_1 \cap \Omega_2 \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

*i la seva inversa siguin holomorfes.*

**Definició 1.2.** *Una superfície de Riemann és una varietat complexa 1-dimensional i connexa.*

Observem que podem projectar $L$ a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ de manera que enviem $(z,\theta)\in L$ a $z$. Observem també que donat $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, si agafem tots els punts $(z,\theta)$ directament a sobre i sota de $z$ i calculem log obtenim tots els logaritmes de $z$. De fet, si $\Omega$ és un obert de $L$ projectat bijectivament a la seva imatge $U\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ aleshores la restricció de log al conjunt $\Omega$ correspon a una branca del logaritme complex definida en $U$. D'aquesta manera, totes les branques estan ficades dins de $L$.

Així, podem veure $L$ com una varietat complexa 1-dimensional on podem agafar el recobriment format per tots aquests oberts que es projecten bijectivament a un obert de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ i els homeomorfismes associats són justament la funció log que és contínua. Per obtenir la inversa només cal enviar $z$ al punt $(e^z,\mathrm{Im}z)\in L$, que també és contínua.

$$\begin{aligned} \Omega_i \xrightarrow{\varphi_i} \quad &\log\Omega_i \quad \xrightarrow{\varphi^{-1}} \Omega_i \\ (z,\theta)\longmapsto \ln&|z|+i\theta \longmapsto (e^{\ln|z|+i\theta},\theta)=(z,\theta) \end{aligned}$$

A més, si dos oberts $\Omega_1$ i $\Omega_2$ tenen intersecció no buida és clar que els seus logaritmes coincideixen allà on intersequen i per tant, tant $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ com $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ són la identitat que és holomorfa. Per tot plegat i com que $L$ és connexa, $L$ és una superfície de Riemann. Com que les funcions de les cartes són branques del logaritme (si pensem en la projecció de $\Omega_i$ a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$) diem que $L$ és la superfície de Riemann associada al logaritme.

De totes maneres no és necessari per a l'objectiu del treball aprofundir ni provar amb rigor els aspectes que hem explicat. Només volíem definir l'exponenciació complexa, i enlloc d'agafar les branques del logaritme, veurem el logaritme com una funció amb domini la superfiíce de Riemann $L$, on hi tenim totes les branques.

Observem que podem parametritzar $L$ com

$$L=\{(r,\theta,n): r\in\mathbb{R}^+,\theta\in(-\pi,\pi],n\in\mathbb{Z}\},$$

de manera que si $z=(r,\theta,n)\in L$ es defineix el logaritme de $z$ com

$$\log z=\ln r+i\theta+2\pi in,$$

i per tant

$$z^w=e^{w\ln r+iw\theta+2\pi inw}\in\mathbb{C}.$$

Ja podem definir, doncs, un polinomi d'exponents complexos.

**Definició 1.3.** *Siguin $a=(a_1,\dots,a_d)$ i $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_d)$ dos d-tuples de nombres complexos. Un polinomi d'exponents complexos $p(z;a,\gamma)$ és una funció*

$$\begin{aligned} p: L &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{k=1}^{d} a_k z^{\gamma_k}. \end{aligned}$$

Finalment per acabar els preliminars recordem què vol dir que una funció entre varietats complexes sigui diferenciable.

**Definició 1.4.** *Siguin $M, N$ varietats complexes i $F : M \longrightarrow N$ una aplicació. Donat $p \in M$ direm que $F$ és diferenciable en $p$ si existeixen cartes $(\Omega_m, \varphi_m)$ de $M$ i $(\Omega_n, \varphi_n)$ de $N$ tals que $p \in \Omega_m$, $F(\Omega_m) \subset \Omega_n$ i la composició*

$$\varphi_m(\Omega_m) \xrightarrow{\varphi_m^{-1}} \Omega_m \xrightarrow{F} \Omega_n \xrightarrow{\varphi_n} \varphi_n(\Omega_n)$$

*és holomorfa. Direm simplement que $F$ és diferenciable si ho és en tots els punts del seu domini.*

En el nostre cas tindrem una funció $\phi : U \subset \mathbb{C}^d \longrightarrow L$ diferenciable a l'origen, és a dir que existeix un entorn $V \subset U$ del 0 i un obert $\Omega_j \subset L$ (que es pot projectar bijectivament a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) de tal manera que $\phi(V) \subset \Omega_j$ i la composició

$$V \subset \mathbb{C}^d \xrightarrow{\phi} \Omega_j \xrightarrow{\log} \log \Omega_j \subset \mathbb{C}$$

és holomorfa, és a dir que ho sigui en cada una de les seves $d$ variables.

Recordem per últim que la condició que una funció $f$ sigui holomorfa és molt forta perquè implica que la funció és infinitament diferenciable i que coincideix localment amb el seu desenvolupament de Taylor, és a dir, implica que $f$ és una funció analítica.

## 1.3 Enunciat del teorema principal

Ara considerarem un polinomi d'exponents complexos $f(z)$ que serà una modificació d'un altre polinomi d'exponents complexos $g(z)$.

**Definició 1.5.** *Una funció base $g(z)$ és un polinomi d'exponents complexos de la forma*

$$g(z) = 1 + bz^\beta,$$

*on $b$ i $\beta$ són nombres complexos no nuls.*

**Definició 1.6.** *Siguin $a = (a_1, \ldots, a_d)$ i $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ dos d-tuples de nombres complexos i sigui $g$ una funció base. Aleshores definim $f(z; g, a, \gamma)$ com el polinomi d'exponents complexos*

$$\begin{aligned} p : L &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \quad g(z) + \sum_{k=1}^{d} a_k z^{\gamma_k}, \end{aligned}$$

*que abreviarem com f(z).*

**Proposició 1.7.** *Suposem que $b = r_0 e^{i\theta_0}$ per certs $r_0 > 0$ i $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$, i que $Re(\beta) = \beta_1$ i $Im(\beta) = \beta_2$. Aleshores per tot $m \in \mathbb{Z}$, $g(z) = 1 + bz^\beta$ té una arrel simple en $L$ al punt*

$$(r, \theta, n) = (e^{\frac{\beta_2((2m+1)\pi - \theta_0) - \beta_1 \ln r_0}{|\beta|^2}}, \frac{\beta_1((2m+1)\pi - \theta_0) + \beta_2 \ln r_0}{|\beta|^2} - 2\pi n, n),$$

*on $n$ s'escull tal que $\theta \in (-\pi, \pi]$.*

Que podem escollir $n$ com diu l'enunciat és òbvi. A més:

$$bz^\beta = r_0 e^{i\theta_0+\beta\ln r+i\beta\theta+2\pi i n\beta} =$$

$$= r_0 e^{i\theta_0+\beta\frac{\beta_2((2m+1)\pi-\theta_0)-\beta_1\ln r_0}{|\beta|^2}+i\beta\left(\frac{\beta_1((2m+1)\pi-\theta_0)+\beta_2\ln r_0}{|\beta|^2}-2\pi n\right)+2\pi i n\beta} =$$

$$= r_0 e^{i\theta_0+\frac{1}{|\beta|^2}(i\beta(\beta_1-i\beta_2)((2m+1)\pi-\theta_0)-\beta(\beta_1-i\beta_2)\ln r_0)} = r_0 e^{-\ln r_0+i((2m+1)\pi)} = -1.$$

Per tant $g(z) = 1 + bz^\beta = 0$. Finalment com que $b$ i $\beta$ són no nuls, $g'(z) = b\beta z^{\beta-1}$ només s'anul·la per $z = 0$ i per tant $(r, \theta, n)$ és un zero simple. □

Si $n = (n_1, \dots, n_d)$ és una $d$-tupla d'enters no negatius denotarem $\partial_n$ l'operador derivada parcial

$$\partial_n = \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial a_k}\right)^{n_k}$$

Enunciem el teorema principal del treball:

**Teorema 1.8.** *Sigui $g(z) = 1 + bz^\beta$ una funció base, $\alpha$ un dels seus zeros i $\gamma$ una d-tupla de complexos. Suposem que existeix un entorn $U$ del 0 a $\mathbb{C}^d$ i una funció*

$$\phi : U \longrightarrow L$$

*diferenciable en les variables $a_1, \dots, a_d$ al punt 0 tal que*

$$f(\phi(a); g, a, \gamma) = 0 \quad \forall\, a \in U \tag{1.4}$$

$$\phi(0) = \alpha. \tag{1.5}$$

*Si $n = (n_1, \dots, n_d)$ és una d-tupla d'enters i denotem*

$$|n| = \sum_{k=1}^{d} n_k,$$

*llavors per a tot $|n| \geq 1$ es compleix que*

$$\partial_n\phi(a)|_0 = -\frac{\alpha^{1+\sum_{k=1}^{d} n_k(\gamma_k-1)}}{g'(\alpha)^{|n|}} \prod_{j=1}^{|n|-1} (-1 + j\beta - \sum_{k=1}^{d} n_k\gamma_k).$$

Observem que a l'avaluar en el punt $a \in U$ la funció $\phi$ ens dóna un zero de $f(z; g, a, \gamma)$ i el teorema ens proporciona una fórmula per al càlcul de les derivades parcials d'ordre n de $\phi$ a l'origen, de manera que resulta immediat que el desenvolupament de Taylor de $\phi$ al voltant de l'origen és

$$\phi(a) = \alpha + \sum_{N\geq 1}\sum_{|n|=N} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\alpha^{1+\sum_{k=1}^{d} n_k(\gamma_k-1)}}{g'(\alpha)^N} \prod_{j=1}^{N-1}(-1 + j\beta - \sum_{k=1}^{d} n_k\gamma_k)\right) a^n,$$

on $n! = n_1! \cdots n_d!$ i $a^n = a_1^{n_1} \cdots a_d^{n_d}$.

# 2 Resultats sobre els nombres d'Stirling

En aquest capítol definirem i donarem algunes propietats i resultats sobre els nombres d'Stirling que farem servir en els lemes per demostrar el teorema principal. També definirem, abans, el factorial descendent aplicat a una indeterminada d'un anell polinomial que contingui $\mathbb{Z}$.

**Definició 2.1.** *Donat un enter $k \geq 0$ i una indeterminada $x$ d'un anell polinomial que contingui $\mathbb{Z}$, el factorial descendent $(x)_k$ és*

$$(x)_k = \prod_{j=1}^{k}(x - j + 1).$$

*Quan $k = 0$ definim $(x)_0 = 1$.*

**Observació 2.2.** Al $\mathbb{Z}$-mòdul de polinomis a coeficients enters de grau menor o igual que $d$, $\mathbb{Z}_d[x]$, el conjunt $\{(x)_0, \ldots, (x)_n\}$ n'és una base. Li direm la *base factorial descendent.* A la base habitual $\{1, x, \ldots, x^n\}$ li direm *base estàndard.*

**Definició 2.3.** *Donats enters $N, r \geq 0$, el nombre d'Stirling sense signe de primera espècie*

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}$$

*és $(-1)^{N-r}$ vegades el coeficient de $x^r$ quan $(x)_N$ està expressat en la base estàndard de $\mathbb{Z}_N[x]$. El nombre d'Stirling de segona espècie*

$$\begin{Bmatrix} N \\ r \end{Bmatrix}$$

*és el coeficient de $(x)_r$ quan $x^N$ està expressat en la base factorial descendent a $\mathbb{Z}_N[x]$. És a dir,*

$$(x)_N = \sum_{r=0}^{N}(-1)^{N-r}\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}x^r \quad i \quad x^N = \sum_{r=0}^{N}\begin{Bmatrix} N \\ r \end{Bmatrix}(x)_r.$$

**Proposició 2.4.** *Equivalentment podem definir els nombres d'Stirling amb les relacions recursives*

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} + N\begin{bmatrix} N \\ r+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+1 \\ r+1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ r \end{Bmatrix} + (r+1)\begin{Bmatrix} N \\ r+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N+1 \\ r+1 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

*i les condicions inicials*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \ \ \forall N > 0 \ \ i \ \ \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = 0 \ \ \forall r > 0 \tag{2.3}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1, \begin{Bmatrix} N \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \ \ \forall N > 0 \ \ i \ \ \begin{Bmatrix} 0 \\ r \end{Bmatrix} = 0 \ \ \forall r > 0. \tag{2.4}$$

DEMOSTRACIÓ: És clar que amb les relacions recursives i condicions donades els nombres

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} N \\ r \end{Bmatrix}$$

queden ben definits per tot $N, r \geq 0$. Per tant només cal provar que les defincions que hem donat abans satisfan les relacions i les condicions. Fem-ho només per als nombres d'Stirling sense signe de primera espècie ja que pels altres és semblant.

Si $N < r$ el coeficient de $x^r$ quan $(x)_N$ está expressat en la base habitual és 0. Si $r$ és 0 aleshores el coeficient de $x^r$ és el terme independent, però $(x)_N$ no té terme independent si $N > 0$. Finalment si $N = r = 0$ llavors el coeficient de $x^0$, és a dir el terme independent, de $(x)_0 = 1$ és 1. Per tant queden provades les condicions (2.3). Provem ara la relació (2.1): Com que $(x)_{N+1} = (x)_N(x - N)$, i per la Definició 2.3 dels nombres d'Stirling, es compleix que

$$\sum_{r=0}^{N+1} (-1)^{N-r+1} \begin{bmatrix} N+1 \\ r \end{bmatrix} x^r = \sum_{r=0}^{N} (-1)^{N-r} \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} x^{r+1} - \sum_{r=0}^{N} (-1)^{N-r} N \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} x^r.$$

Prenent el coeficient de $x^{r+1}$ de cada banda i igualant-los obtenim

$$(-1)^{N-r} \begin{bmatrix} N+1 \\ r+1 \end{bmatrix} = (-1)^{N-r} \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} + (-1)^{N-r} N \begin{bmatrix} N \\ r+1 \end{bmatrix}$$

Cancel·lant a cada banda $(-1)^{N-r}$ obtenim la igualtat desitjada (2.1). □

**Lema 2.5.** *Siguin $a, n \geq 0$ enters. Llavors*

$$\frac{1}{a!} \sum_{r=0}^{a} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} (r+1)^n = \begin{Bmatrix} n+1 \\ a+1 \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

DEMOSTRACIÓ: Diguem $F(n+1, a+1)$ al terme de l'esquerra de l'equació (2.5). Si provem que F satisfá les relacions de recursivitat i les condicions inicials dels nombres d'Stirling de segona espècie haurem acabat. Comencem veient que

$$(a+1)F(n+1, a+1) + F(n+1, a) = F(n+2, a+1) \ \forall \ a \geq 1, n \geq 0.$$

Fixat $r$, amb $0 \leq r \leq a$, provem que els coeficients de $(r+1)^n$ de cada banda de l'equació anterior coincideixen. En efecte, a l'esquerra, el coeficient de $(r+1)^n$ és

$$(a+1)\frac{1}{a!}(-1)^{a-r}\binom{a}{r} + \frac{1}{(a-1)!}(-1)^{a-1-r}\binom{a-1}{r},$$

mentre que el de la dreta és

$$\frac{1}{a!}(-1)^{a-r}\binom{a}{r}.$$

Es comprova fàcilment que són iguals i per tant queda provada la relació de recurrència. Finalment comprovem les condicions inicials. Hem de veure que $F(n+1, 1) = 1$ per tot $n \geq 0$ i que $F(1, a+1) = 0$ per tot $a > 0$. Les primera afirmació és immediata a partir de la definició. Per veure la segona notem que

$$F(1, a+1) = \frac{1}{a!} \sum_{r=0}^{a} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} = (1-1)^a = 0 \ \ \forall \ a > 0. \ \square$$

**Definició 2.6.** *Siguin $N$ i $r$ enters més grans o iguals que 0, i sigui $x$ una indeterminada. Definim*

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_x$$

*com el coeficient de $y^r$ quan $(y+x-1)_N$ està expressat en la base estàndard dels polinomis en l'indeterminada $y$ amb coeficients a $\mathbb{Z}[x]$. És a dir,*

$$(y+x-1)_N = \sum_{r=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_x y^r, \quad \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_x \in \mathbb{Z}[x].$$

**Observació 2.7.** Com que $(y)_{N+1} = y(y-1)_N$ el coeficient de $y^r$ en $(y-1)_N$ és igual al coeficient de $y^{r+1}$ en $(y)_{N+1}$. Això implica la primera igualtat. La segona és directa de les definicions.

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_0 = (-1)^{N-r} \begin{bmatrix} N+1 \\ r+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_1 = (-1)^{N-r} \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}$$

**Definició 2.8.** *Sigui $M \geq 1$ un enter. Denotarem per $[1, M]$ el conjunt $\{j \in \mathbb{Z} : 1 \leq j \leq M\}$.*

**Lema 2.9.** *Siguin $N \geq r \geq 0$ enters i $x$ i $y$ indeterminades. Aleshores*

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_{x+y} = \sum_{k=0}^{N-r} x^k \binom{r+k}{k} \begin{bmatrix} N \\ r+k \end{bmatrix}_y$$

DEMOSTRACIÓ: Per definició $\left[\begin{smallmatrix} N \\ r \end{smallmatrix}\right]_{x+y}$ és el coeficient de $z^r$ a $(z+x+y-1)_N$, és a dir,

$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_{x+y} = \sum_{w \subset [1,N], |w| = N-r} \prod_{k \in w} (x+y-k).$$

Ara, donat $w$ subconjunt de $[1, N]$ d'ordre $N-r$, el coeficient de $x^k$ del terme de la suma anterior corresponent a $w$ és

$$\sum_{w' \subset w, |w'| = N-r-k} \prod_{j \in w'} (y-j).$$

Observem que donat un conjunt qualsevol $v \subset [1, N]$ d'ordre $N-r-k$ hi ha exactament $\binom{r+k}{k}$ subconjunts de $[1, N]$ d'ordre $N-r$ que el contenen. Per tant,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_{x+y} &= \sum_{w \subset [1,N], |w| = N-r} \sum_{k=0}^{N-r} x^k \sum_{w' \subset w, |w'| = N-r-k} \prod_{j \in w'} (y-j) \\
&= \sum_{k=0}^{N-r} x^k \binom{r+k}{k} \sum_{v \subset [1,N], |v| = N-r-k} \prod_{j \in v} (y-j) \\
&= \sum_{k=0}^{N-r} x^k \binom{r+k}{k} \begin{bmatrix} N \\ r+k \end{bmatrix}_y . \ \square
\end{aligned}$$

**Lema 2.10.** *Donat un enter* $n \geq 0$ *es té la igualtat*

$$\frac{(-\ln(1-t))^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[{k \atop n}\right]}{k!} t^k. \tag{2.6}$$

*com a sèries formals de potències.*

DEMOSTRACIÓ: Ho provarem per inducció en $n$. El lema és cert quan $n = 0$ ja que tots dos membres de l'equació valen 1. Suposem ara que l'enunciat és cert per $n \geq 0$ i provem que llavors també ho és per $n+1$. Com que

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

multiplicant a cada banda de l'equació (2.6) obtenim

$$\frac{(-\ln(1-t))^n}{n!(1-t)} = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[{k \atop n}\right]}{k!} t^k.$$

Integrant a banda i banda obtenim llavors que

$$\frac{(-\ln(1-t))^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{\left[{k \atop n}\right]}{k!}.$$

Si provem que

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\left[{k \atop n}\right]}{k!} = \frac{\left[{m+1 \atop n+1}\right]}{m!}, \tag{2.7}$$

haurem acabat ja que llavors tindrem

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{\left[{k \atop n}\right]}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[{m+1 \atop n+1}\right]}{(m+1)!} t^{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[{m \atop n+1}\right]}{(m)!} t^m,$$

completant així l'etapa d'inducció. Per provar (2.7) només cal veure que per $k > 0$

$$\frac{\left[{k \atop n}\right]}{k!} = \frac{\left[{k+1 \atop n+1}\right]}{k!} - \frac{\left[{k \atop n+1}\right]}{(k-1)!},$$

on hem utilitzat la relació (2.1). Per tant al sumar des de $k = 0$ fins a $k = m$ queda el resultat desitjat. $\square$

**Lema 2.11.** *Siguin* $0 \leq r \leq k$ *enters. Aleshores,*

$$\sum_{j=r}^{k} \left\{{j \atop r}\right\} \binom{k}{j} = \left\{{k+1 \atop r+1}\right\} \tag{2.8}$$

DEMOSTRACIÓ: Denotem per $F(k+1, r+1)$ el membre de l'esquerra de (2.8). Si $r = 0$ llavors val la igualtat per tot $k \geq 0$ ja que tenim $1 = 1$. Fixem ara $r \geq 0$ i provem per inducció en $k$ que l'enunciat és cert per tot $k \geq r$. Si $k = r$ els dos membres de (2.8) valen

1 i val la igualtat. Assumim que el resultat és cert per $k \geq r$ i provem que també ho és per $k+1$. Utilitzant la identitat coneguda

$$\binom{k+1}{j} = \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}$$

es té que

$$\begin{aligned}
F(k+2, r+1) &= \sum_{j=r}^{k+1} \left\{ {j \atop r} \right\} \left( \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right) \\
&= \sum_{j=r}^{k+1} \left\{ {j \atop r} \right\} \binom{k}{j} + \sum_{j=r-1}^{k} \left\{ {j+1 \atop r} \right\} \binom{k}{j} \\
&= \sum_{j=r}^{k+1} \left\{ {j \atop r} \right\} \binom{k}{j} + \sum_{j=r}^{k+1} \left\{ {j+1 \atop r} \right\} \binom{k}{j} + \left\{ {r \atop r} \right\} \binom{k}{r-1} - \left\{ {k+2 \atop r} \right\} \binom{k}{k+1} \\
&= \sum_{j=r}^{k+1} \left( \left\{ {j \atop r} \right\} + \left\{ {j+1 \atop r} \right\} \right) \binom{k}{j} + \left\{ {r-1 \atop r-1} \right\} \binom{k}{r-1},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

on hem utilitzat que $\left\{ {r \atop r} \right\} = 1 = \left\{ {r-1 \atop r-1} \right\}$ i que $\binom{k}{k+1} = 0$. Restem-li ara a (2.9)

$$(r+1) \sum_{j=r}^{k} \left\{ {j \atop r} \right\} \binom{k}{j},$$

que per hipòtesi d'inducció sabem que equival a

$$(r+1) \left\{ {k+1 \atop r+1} \right\}.$$

Utilitzant la relació (2.2) i de nou la hipòtesi d'inducció resulta que

$$\begin{aligned}
F(k+2, r+1) - (r+1) \left\{ {k+1 \atop r+1} \right\} &= \sum_{j=r}^{k+1} \left( \left\{ {j \atop r} \right\} + \left\{ {j+1 \atop r} \right\} - (r+1) \left\{ {j \atop r} \right\} \right) \binom{k}{j} + \left\{ {r-1 \atop r-1} \right\} \binom{k}{r-1} \\
&= \sum_{j=r}^{k+1} \left\{ {j \atop r-1} \right\} \binom{k}{j} + \left\{ {r-1 \atop r-1} \right\} \binom{k}{r-1} \\
&= \sum_{j=r-1}^{k+1} \left\{ {j \atop r-1} \right\} \binom{k}{j} \\
&= \left\{ {k+1 \atop r} \right\},
\end{aligned}$$

Per tant utilitzant de nou (2.2) queda que

$$F(k+2, r+1) = (r+1) \left\{ {k+1 \atop r+1} \right\} + \left\{ {k+1 \atop r} \right\} = \left\{ {k+2 \atop r+1} \right\},$$

com volíem provar. □

# 3 Teoremes sobre conjunts partició i subconjunts

En aquest capítol usarem els resultats de l'anterior per demostrar uns teoremes sobre sumes sobre conjunts partició que ens serviran per demostrar el teorema principal que volem demostrar. Abans necessitem aclarar alguns aspectes de notació que farem servir. Definirem a continuació els multiconjunts, que són conjunts on els elements hi poden aparèixer repetits, i després definirem els multiconjunts partició. Recordem que $[1,d] = \{1,...,d\}$.

**Definició 3.1.** *Sigui $N$ un enter positiu. Un multiconjunt ordenat $I$ de $[1,d]$ és una $N$-tupla d'enters*

$$I = (I(1),...,I(N))$$

*on $1 \leq I(j) \leq d$. Parlarem simplement de multiconjunt. Direm que $I$ té ordre $|I| = N$. Direm que la multiplicitat de $n$ a $I$ és el nombre de vegades que apareix $n$ a $I$, i ho escriurem com $mult(I,n)$. Finalment denotarem per $MC(d)$ el conjunt de multiconjunts ordenats de $[1,d]$.*

**Definició 3.2.** *Sigui $k$ un enter positiu. Direm que $s$ és una partició de $[1,N]$ en $k$ parts si és una $k$-tupla $(s_1,...,s_k)$ on els $s_j$ són subconjunts disjunts dos a dos i no buits de $[1,N]$ tals que*

$$\bigcup_{j=1}^{k} s_j = [1,N]$$

*i, a més, $min(s_j) < min(s_l)$ si $j < l$. Escriurem $s_j$ com una $m$-tupla, $s_j = (s_j(1),...,s_j(m))$ on $|s_j| = m$ i $s_j(l) < s_j(r)$ si $l < r$. Denotarem per $S(N,k)$ el conjunt de particions de $[1,N]$ en $k$ parts. Si $H$ és un conjunt finit d'enters denotarem similarment $S(H,k)$ el conjunt de particions de $H$ en $k$ parts.*

**Definició 3.3.** *Sigui $I$ un multiconjunt de $[1,d]$ d'ordre $N$. Direm que $J$ és un multiconjunt partició de $I$ en $k$ parts si $J$ és una $k$-tupla $(J_1,...,J_k)$ i existeix $s \in S(N,k)$ de manera que per tot $j$, $J_j \in MC(d)$ i $J_j = (I(s_j(1)),...,I(s_j(m)))$, on $|s_j| = m$. Denotarem $Parts(I,k)$ el conjunt de multiconjunts partició de $I$ en $k$ parts.*

**Observació 3.4.** És clar, doncs, que el conjunt de multiconjunts partició de $I$ en $k$ parts, $Parts(I,k)$, està en bijecció amb el conjunt de particions de $[1,|I|]$ en $k$ parts, $S(|I|,k)$.

**Exemples 3.5.** Donats el multiconjunt $I$ = (1,1,2,3,6) i la partició de [1,5] en 3 parts $s$ = ((1,4),(2),(3,5)) obtenim el multiconjunt partició de I en 3 parts $J$ = ((1,3),(1),(2,6)).

Finalment aclarem alguns aspectes de notació.

**Definició 3.6.** *Denotarem $I(\hat{h})$ el multiconjunt I traient-li l'h-èssim element,*

$$I(\hat{h}) = I(I(1),...,I(h-1),I(h+1),...,I(N)).$$

*També usarem la notació*

$$\sum_{m\in I} \gamma_m = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{I(j)},$$

*on $N = |I|$. Finalment, si $w$ és un subconjunt de $[1,N]$ denotarem $w^c$ el complemenari de $w$ a $[1,N]$.*

Provem ara un resultat sobre derivacions en anells commutatius que usarem en el següent teorema.

**Definició 3.7.** *Sigui $R$ un anell commutatiu. Direm que $\delta$ és una derivació a $R$ si és un morfisme del grup additiu de $R$,*

$$\delta : R \longrightarrow R,$$

*tal que*

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y).$$

**Proposició 3.8.** *Sigui $R$ un anell commutatiu i $\delta : R \longrightarrow R$ una derivació a $R$. Sigui $M \geq 0$ un enter i $f_A, f_B, f_j \in R, 1 \leq j \leq M$, elements de l'anell. Aleshores*

$$\sum_{w\subset[1,M]} \delta^{|w^c|-1}(f_A^{(1)} \prod_{j\in w^c} f_j)\delta^{|w|}(f_B \prod_{j\in w} f_j) = \delta^M(f_A f_B \prod_{j=1}^{M} f_j), \tag{3.1}$$

*on $f_A^{(1)}$ denota $\delta f_A$ i en el cas que $w^c = \emptyset$, $\delta^{-1} f_A^{(1)}$ denota $f_A$.*

DEMOSTRACIÓ: Donat un element $f \in R$ i un enter $n \geq 0$, denotarem

$$nf = \sum_{j=1}^{n} f,$$

i direm que $n$ és el coeficient de $f$. També usarem la notació $f^{(n)} = \delta^n f$. Abans de procedir amb la demostració vegem que el coeficient de

$$\prod_{j=1}^{l} f_j^{(n_j)} \quad \text{a} \quad \delta^n(\prod_{j=1}^{l} f_j)$$

és

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{l} n_j!}, \tag{3.2}$$

on

$$n = \sum_{j=1}^{l} n_j.$$

En efecte, tal coeficient correspon a les maneres d'aplicar la derivació $n$ vegades de manera que al final l'haguem aplicat $n_j$ vegades a $f_j$. Així, es tracta de comptar quantes permutacions hi ha de $n$ elements en què l'element $j$-èssim es repeteix $n_j$ vegades, per $1 \leq j \leq l$. Per tant el coeficient serà la fòrmula (3.2). Provem ara per inducció en $M$ la proposició. Si $M = 0$ aleshores $w = \emptyset$ i totes dues bandes de la igualtat valen $f_A f_B$. Suposem ara que la igualtat val per tots els valors menors que una certa $M$ i provem que llavors també val per $M$. Observem que als membres d'esquerra i dreta de (3.1), tots els termes són de la forma

$$f_A^{(n_A)} f_B^{(n_B)} \prod_{j=1}^{M} f_j^{(n_j)},$$

on

$$M = n_A + n_B + \sum_{j=1}^{M} n_j. \tag{3.3}$$

Per demostrar la igualtat de (3.1), doncs, només cal veure que els coeficients de cada banda coincideixen per cada un d'aquests termes. Suposem que $n_j > 0$ per tot $1 \leq j \leq M$. Aleshores $n_A = n_B = 0$ i $n_j = 1$ per tot $j$. L'única manera d'obtenir aquest terme al membre de l'esquerra és quan $w = [1, M]$ i, utilitzant l'observació que hem fet al principi de la demostració, és clar que en aquest cas els coeficients a les dues bandes de (3.1) són $M!$. Suposem ara que almenys per alguna $j$, $n_j = 0$. Per simetria podem suposar que es tracta dels últims elements, és a dir, considerem un terme de la forma

$$f_A^{(n_A)} f_B^{(n_B)} \prod_{j=1}^{l} f_j^{(n_j)} \tag{3.4}$$

on $0 \leq l < M$, $n_A, n_B \geq 0$ i $n_j \geq 1$. Per aconseguir un terme així a l'esquerra de (3.1) cal que $w$ sigui un subconjunt de $[1, M]$ de manera que

$$|w| = n_B + \sum_{j \in w} n_j, \tag{3.5}$$

$$|w^c| = n_A + \sum_{j \in w^c} n_j.$$

Aplicant l'observació d'abans resulta doncs que, per a aquest $w$,

$$\begin{aligned}
&\delta^{|w^c|-1}(f_A^{(1)} \prod_{j \in w^c} f_j)\delta^{|w|}(f_B \prod_{j \in w} f_j) \\
&= \delta^{n_A - 1 + \sum_{j \in w^c} n_j}(f_A^{(1)} \prod_{j \in w^c} f_j)\delta^{n_B + \sum_{j \in w} n_j}(f_B \prod_{j \in w} f_j) \\
&= \frac{(n_A - 1 + \sum_{j \in w^c} n_j)!}{(n_A - 1)! \prod_{j \in w^c} n_j!} \frac{(n_B + \sum_{j \in w} n_j)!}{n_B! \prod_{j \in w} n_j!}.
\end{aligned}$$

Prenem la restricció $v$ de $w$ a $[1, l]$, és a dir, $v \subset [1, l]$, $v \subset w$ i $v^c \subset w^c$. Com que donat $v$ subconjunt de $[1, l]$, el nombre de subconjunts $w$ tals que contenen $v$ i no contenen $v^c$ és

$$\binom{M - l}{|w| - |v|},$$

i utilitzant (3.5),

$$|w| - |v| = n_B - |v| + \sum_{j \in w} n_j,$$

resulta finalment que el coeficient del terme (3.4) a l'esquerra de (3.1) és:

$$\sum_{v \subset [1,l]} \frac{(n_A - 1 + \sum_{j \in v^c} n_j)!}{(n_A - 1)! \prod_{j \in v^c} n_j!} \frac{(n_B + \sum_{j \in v} n_j)!}{n_B! \prod_{j \in v} n_j!} \binom{M - l}{n_B - |v| + \sum_{j \in v} n_j}. \tag{3.6}$$

De forma similar, el coeficient del terme (3.4) a la dreta de (3.1) és

$$\frac{(n_A + n_B + \sum_{j=1}^{l} n_j)!}{n_A! n_B! \prod_{j=1}^{l} n_j!}. \tag{3.7}$$

Igualem i simplifiquem les expressions (3.6) i (3.7). Queda

$$\sum_{v \subset [1,l]} n_A (n_A - 1 + \sum_{j \in v^c} n_j)!(n_B + \sum_{j \in v} n_j)! \binom{M - l}{n_B - |v| + \sum_{j \in v} n_j} = (n_A + n_B + \sum_{j=1}^{l} n_j)!$$

Ara, utilitzant (3.3), que $|v^c| = l - |v|$ i usant les definicions de nombre combinatori i factorial, la darrera equació és equivalent a

$$\sum_{v\subset[1,l]} n_A(n_A - 1 + \sum_{j\in v^c} n_j)_{|v^c|-1}(n_B + \sum_{j\in v} n_j)_{|v|} = (n_A + n_B + \sum_{j=1}^{l} n_j)_l, \tag{3.8}$$

on en el cas que $v^c$ sigui el conjunt buit

$$n_A(n_A - 1)_{-1} = 1.$$

Considerem l'anell de polinomis en la variable $t$, i sigui $\delta$ l'operador derivada respecte $t$, que és una derivació en aquest anell. Aleshores podem usar la hipòtesi d'inducció i sabem que posant $f_A = t^{n_A}, f_B = t^{n_B}, f_j = t^{n_j}$, llavors

$$\sum_{v\subset[1,l]} \delta^{|v^c|-1}(n_A t^{n_A-1} \prod_{j\in v^c} t^{n_j})\delta^{|v|}(t^{n_B} \prod_{j\in v} t^{n_j}) = \delta^l(t^{n_A} t^{n_B} \prod_{j=1}^{l} t^{n_j})$$

i per tant,

$$\sum_{v\subset[1,l]} \delta^{|v^c|-1}(n_A t^{n_A-1+\sum_{j\in v^c} n_j})\delta^{|v|}(t^{n_B+\sum_{j\in v} n_j}) = \delta^l(t^{n_A+n_B+\sum_{j=1}^{l} n_j}).$$

Derivant i avaluant en $t = 1$ queda l'equació (3.8), que per tant queda provada. Això completa la demostració. $\square$

**Teorema 3.9.** *Siguin $M \geq 0$, $a \geq 1$, $b \geq 0$ enters, i $x_s$, $1 \leq s \leq M$, indeterminades. Aleshores*

$$\sum_{w\subset[1,M]} \begin{bmatrix} |w^c| - 1 \\ a - 1 \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w^c} x_s} \begin{bmatrix} |w| \\ b \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w} x_s} = \binom{a+b}{a} \begin{bmatrix} M \\ a+b \end{bmatrix}_{\sum_{s=1}^{M} x_s}. \tag{3.9}$$

DEMOSTRACIÓ: De manera semblant a la proposició anterior, veurem que a esquerra i dreta de la igualtat, el coeficient del monomi

$$\prod_{s=1}^{l} x_s^{n_s} \tag{3.10}$$

és el mateix, on $l, n_s \geq 0$ són enters, $1 \leq s \leq l \leq M$. Comencem per l'esquerra. Fixem $w \subset [1, M]$ i sigui $v$ la restriccó de $w$ a $[1, l]$, és a dir sigui $v \subset [1, l]$ tal que $v \subset w$ i $v^c \subset w^c$. Per saber el coeficient del monomi (3.10) hem de calcular el coeficient de

$$\prod_{s\in v^c} x_s^{n_s} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} |w^c| - 1 \\ a - 1 \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w^c} x_s}, \tag{3.11}$$

i el coeficient de

$$\prod_{s\in v} x_s^{n_s} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} |w| \\ b \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w} x_s}. \tag{3.12}$$

Calculem (3.12). Suposem que $v = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Si apliquem el lema (2.9) resulta que

$$\begin{bmatrix} |w| \\ b \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w} x_s} = \sum_{j=0}^{|w|-b} x_{s_1}^j \binom{b+j}{b} \begin{bmatrix} |w| \\ b+j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in v, s\neq s_1} x_s}.$$

Per tant el coeficient de $x_{s_1}^{n_{s_1}}$ és

$$\binom{b+n_{s_1}}{b}\begin{bmatrix}|w|\\ b+n_{s_1}\end{bmatrix}_{\sum_{s\in w, s\neq s_1} x_s}.$$

Iterant aquest procediment, el coeficient (3.12) que busquem és el terme independent de

$$\begin{bmatrix}|w|\\ b+\sum_{j=1}^{r} n_{s_j}\end{bmatrix}_{\sum_{s\in w, s\notin v} x_s}\prod_{k=1}^{r}\binom{b+\sum_{j=1}^{k} n_{s_j}}{b+\sum_{j=1}^{k-1} n_{s_j}},$$

que és

$$\begin{bmatrix}|w|\\ b+\sum_{j=1}^{r} n_{s_j}\end{bmatrix}_{0}\prod_{k=1}^{r}\binom{b+\sum_{j=1}^{k} n_{s_j}}{b+\sum_{j=1}^{k-1} n_{s_j}} \tag{3.13}$$

Simplifiquem aquesta expressió. Utilitzant l'Observació 2.7 i simplificant els nombres combinatoris queda

$$(3.13)=(-1)^{|w|-b-\sum_{j=1}^{r} n_{s_j}}\begin{bmatrix}|w|+1\\ b+1+\sum_{j=1}^{r} n_{s_j}\end{bmatrix}\frac{\left(b+\sum_{j=1}^{r} n_{s_j}\right)!}{b!\prod_{j=1}^{r} n_{s_j}!}$$

que equival a

$$(-1)^{|w|-b-\sum_{s\in v} n_s}\begin{bmatrix}|w|+1\\ b+1+\sum_{s\in v} n_s\end{bmatrix}\binom{b+\sum_{s\in v} n_s}{b}\frac{\left(\sum_{s\in v} n_s\right)!}{\prod_{s\in v} n_s!}.$$

Anàlogament, el coeficient (3.11) queda

$$(-1)^{|w^c|-a-\sum_{s\in v^c} n_s}\begin{bmatrix}|w^c|\\ a+\sum_{s\in v^c} n_s\end{bmatrix}\binom{a-1+\sum_{s\in v^c} n_s}{a-1}\frac{\left(\sum_{s\in v^c} n_s\right)!}{\prod_{s\in v^c} n_s!}.$$

Per tant el coeficient de (3.10) al membre de l'esquerra de (3.9) és

$$\sum_{w\subset[1,M], v\subset[1,l], v\subset w, v^c\subset w^c}(-1)^{|w^c|-a-\sum_{s\in v^c} n_s}\begin{bmatrix}|w^c|\\ a+\sum_{s\in v^c} n_s\end{bmatrix}\binom{a-1+\sum_{s\in v^c} n_s}{a-1}\frac{\left(\sum_{s\in v^c} n_s\right)!}{\prod_{s\in v^c} n_s!}$$

$$\times(-1)^{|w|-b-\sum_{s\in v} n_s}\begin{bmatrix}|w|+1\\ b+1+\sum_{s\in v} n_s\end{bmatrix}\binom{b+\sum_{s\in v} n_s}{b}\frac{\left(\sum_{s\in v} n_s\right)!}{\prod_{s\in v} n_s!}. \tag{3.14}$$

Fixat $v\subset[1,l]$, el nombre de conjunts d'ordre $j$ que contenen $v$ és

$$\binom{M-l}{j-|v|}$$

per tant podem reescriure (3.14) com

$$\sum_{v\subset[1,l]}\sum_{j=0}^{M}(-1)^{M-j-a-\sum_{s\in v^c} n_s}\begin{bmatrix}M-j\\ a+\sum_{s\in v^c} n_s\end{bmatrix}\binom{a-1+\sum_{s\in v^c} n_s}{a-1}\frac{\left(\sum_{s\in v^c} n_s\right)!}{\prod_{s\in v^c} n_s!}\binom{M-l}{j-|v|}$$

$$\times(-1)^{j-b-\sum_{s\in v} n_s}\begin{bmatrix}j+1\\ b+1+\sum_{s\in v} n_s\end{bmatrix}\binom{b+\sum_{s\in v} n_s}{b}\frac{\left(\sum_{s\in v} n_s\right)!}{\prod_{s\in v} n_s!}. \tag{3.15}$$

Raonant de la mateix manera, el coeficient de (3.10) al membre de la dreta de (3.9) és

$$(-1)^{M-a-b-\sum_{s=1}^{l} n_s} \begin{bmatrix} M+1 \\ a+b+1+\sum_{s=1}^{l} n_s \end{bmatrix} \binom{a+b}{b} \binom{a+b+\sum_{s=1}^{l} n_s}{a+b} \frac{\left(\sum_{s=1}^{l} n_s\right)!}{\prod_{s=1}^{l} n_s!}. \tag{3.16}$$

Igualem i simplifiquem ara (3.15) i (3.16). Queda l'equació

$$\sum_{v\subset[1,l]} \sum_{j=0}^{M} a \frac{(a-1+\sum_{s\in v^c} n_s)!}{((M-j)-|v^c|)!} \begin{bmatrix} M-j \\ a+\sum_{s\in v^c} n_s \end{bmatrix} \frac{(b+\sum_{s\in v} n_s)!}{(j-|v|)!} \begin{bmatrix} j+1 \\ b+1+\sum_{s\in v} n_s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+\sum_{s=1}^{l} n_s)!}{(M-l)!} \begin{bmatrix} M+1 \\ a+b+1+\sum_{s=1}^{l} n_s \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

que volem provar que és certa. Provarem una cosa molt més forta. Posem $c_M$ a l'expressió de l'esquerra de (3.17) i $d_M$ a la de la dreta. Aleshores provarem la igualtat de sèries formals

$$\sum_{M\geq l} c_M t^{M-l} = \sum_{M\geq l} d_M t^{M-l} \tag{3.18}$$

que en particular prova l'equació (3.17). Vegem qui són aquestes sèries. Escrivim

$$C = a(a-1+\sum_{s\in v^c} n_s)!(b+\sum_{s\in v} n_s)!$$

per simplificar les expressions. Usant la definció del producte de sèries formals tenim la cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
\sum_{M\geq l} c_M t^{M-l} &= \sum_{v\subset[1,l]} C \sum_{M\geq l} \sum_{j=0}^{M} \frac{\begin{bmatrix} M-j \\ a+\sum_{s\in v^c} n_s \end{bmatrix}}{((M-j)-|v^c|)!} \frac{\begin{bmatrix} j+1 \\ b+1+\sum_{s\in v} n_s \end{bmatrix}}{(j-|v|)!} t^{M-l} \\
&= \sum_{v\subset[1,l]} C \left( \sum_{k\geq|v^c|} \frac{\begin{bmatrix} k \\ a+\sum_{s\in v^c} n_s \end{bmatrix}}{(k-|v^c|)!} t^{k-|v^c|} \right) \left( \sum_{k\geq|v|} \frac{\begin{bmatrix} k+1 \\ b+1+\sum_{s\in v} n_s \end{bmatrix}}{(k-|v|)!} t^{k-|v|} \right) \\
&= \sum_{v\subset[1,l]} C \left( \sum_{k\geq|v^c|} \frac{\begin{bmatrix} k \\ a+\sum_{s\in v^c} n_s \end{bmatrix}}{(k-|v^c|)!} t^{k-|v^c|} \right) \left( \sum_{k\geq|v|+1} \frac{\begin{bmatrix} k \\ b+1+\sum_{s\in v} n_s \end{bmatrix}}{(k-|v|-1)!} t^{k-|v|-1} \right) \\
&= \sum_{v\subset[1,l]} C \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v^c|} \left( \sum_{k\geq 0} \frac{\begin{bmatrix} k \\ a+\sum_{s\in v^c} n_s \end{bmatrix}}{k!} t^k \right) \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v|+1} \left( \sum_{k\geq 0} \frac{\begin{bmatrix} k \\ b+1+\sum_{s\in v} n_s \end{bmatrix}}{k!} t^k \right)
\end{aligned}$$

Utilitzant el Lema 2.10 la darrera expressió equival a

$$\sum_{v\subset[1,l]} C \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v^c|} \left( \frac{(-\ln(1-t))^{a+\sum_{s\in v^c} n_s)}}{(a+\sum_{s\in v^c} n_s)!} \right) \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v|+1} \left( \frac{(-\ln(1-t))^{b+1+\sum_{s\in v} n_s}}{(b+1+\sum_{s\in v} n_s)!} \right).$$

Finalment simplificant C i els denominadors resulta

$$\sum_{v\subset[1,l]} a \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v^c|} \left( \frac{(-\ln(1-t))^{a+\sum_{s\in v^c} n_s)}}{a+\sum_{s\in v^c} n_s} \right) \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v|+1} \left( \frac{(-\ln(1-t))^{b+1+\sum_{s\in v} n_s}}{b+1+\sum_{s\in v} n_s)} \right).$$

Similarment es té

$$\sum_{M\geq l} d_M t^{M-l} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{l+1} \left(\frac{(-\ln(1-t))^{a+b+1+\sum_{s=1}^{l} n_s)}}{a+b+1+\sum_{s=1}^{l} n_s}\right).$$

Aplicant una derivada a cada potència de $\frac{d}{dt}$, l'equació (3.18) esdevé

$$\sum_{v\subset[1,l]} \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v^c|-1} \left(\frac{a(-\ln(1-t))^{a-1+\sum_{s\in v^c} n_s)}}{1-t}\right) \left(\frac{d}{dt}\right)^{|v|} \left(\frac{(-\ln(1-t))^{b+\sum_{s\in v} n_s}}{1-t}\right)$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{l} \left(\frac{(-\ln(1-t))^{a+b+\sum_{s=1}^{l} n_s)}}{1-t}\right), \tag{3.19}$$

on en el cas que $v^c$ denoti el conjunt buit

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{a(-\ln(1-t))^{a-1}}{1-t}\right) = (-\ln(1-t))^a.$$

Finalment, l'equació (3.19) és consequència de la Proposició 3.8 que hem provat abans, on $R$ és l'anell de sèries formals de potències en $t$, $\delta$ és l'operador diferencial respecte $t$, i

$$f_A = (-\ln(1-t))^a$$
$$f_B = \frac{(-\ln(1-t))^b}{1-t}$$
$$f_j = (-\ln(1-t))^{n_j}.$$

Això completa la prova del teorema. □

Provem ara un teorema que utilitzarem després en la demostració del teorema principal i que utilitza el Teorema 3.9.

**Teorema 3.10.** *Siguin* $1 \leq k \leq N$ *enters,* $\nu$ *una indeterminada i* $x_s, 1 \leq s \leq N$, $N$ *indeterminades. Aleshores*

$$\frac{1}{(k-1)!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\binom{k-1}{r}((r+1)\nu - 1 + \sum_{s=1}^{N} x_s)_{N-1} \tag{3.20}$$

$$= \nu^{k-1} \sum_{p\in S(N,k)} \prod_{i=1}^{k}(\nu - 1 + \sum_{m\in p_i} x_m)_{|p_i|-1}. \tag{3.21}$$

DEMOSTRACIÓ: Ho provarem per inducció en $k$. Si $k=1$ és clar que totes dues bandes de la igualtat valen

$$(\nu - 1 + \sum_{s=1}^{N} x_s)_{N-1}.$$

Suposem ara que el teorema és cert per tots els valors menors que una certa $k$, on $2 \leq k \leq N$, i provem que llavors la la igualtat val per $k$. La clau serà expressar cada banda en potències de $\nu$ i $x_N$ i veure que els coeficients coincideixen.

Recordem que per definició,

$$(y+x-1)_N = \sum_{r=0}^{N} y^r \begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_x,$$

per tant (3.20) equival a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \nu^n \begin{bmatrix} N-1 \\ n \end{bmatrix}_{\sum_{s=1}^N x_s} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-1-r} \binom{k-1}{r} (r+1)^n.$$

I aplicant el Lema 2.5 queda

$$\sum_{n=k-1}^{N-1} \nu^n \begin{bmatrix} N-1 \\ n \end{bmatrix}_{\sum_{s=1}^N x_s} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{3.22}$$

Observem ara que el conjunt de particions de $[1,N]$ en $k$ trossos equival al conjunt de particions formades per un conjunt $w$ que conté $N$ i els conjunts d'una partició de $k-1$ trossos del complementari de $w$. De manera que utilitzant la hipòtesi d'inducció en la primera de les següents igualtats i utilitzant la definició de $\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix}_x$ en la segona, obtenim que

$$\begin{aligned}
(3.21) &= \nu \sum_{w\subset[1,N], N\in w} \left( \nu^{k-2} \sum_{p\in S(N-|w|,k-1)} \prod_{s=1}^{k-1} (\nu - 1 + \sum_{m\in p_i} x_m)_{|p_i|-1)} \right) (\nu - 1 + \sum_{s\in w} x_s)_{|w|-1} \\
&= \nu \sum_{w\subset[1,N], N\in w} \left( \sum_{n=k-2}^{N-|w|-1} \nu^n \begin{bmatrix} N-|w|-1 \\ n \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w^c} x_s} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right) (\nu - 1 + \sum_{s\in w} x_s)_{|w|-1} \\
&= \nu \sum_{w\subset[1,N], N\in w} \left( \sum_{n=k-2}^{N-|w|-1} \nu^n \begin{bmatrix} N-|w|-1 \\ n \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w^c} x_s} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right) \left( \sum_{n=0}^{|w|-1} \nu^n \begin{bmatrix} |w|-1 \\ n \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w} x_s} \right).
\end{aligned}$$

En la darrera expressió el coeficient de $\nu^{n_0}$ és

$$\sum_{w\subset[1,N], N\in w} \sum_{j=k-2}^{n_0-1} \begin{bmatrix} N-|w|-1 \\ j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w^c} x_s} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} |w|-1 \\ n_0-1-j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w} x_s}. \tag{3.23}$$

Com que volem el coeficient de $x_N^{m_0}\nu^{n_0}$ de (3.21) vegem qui és el coeficient de $x_N^{m_0}$ a (3.23). Aplicant el Lema 2.9 tenim que

$$\begin{bmatrix} |w|-1 \\ n_0-1-j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w} x_s} = \sum_{m_0=0}^{|w|-n_0+j} x_N^{m_0} \binom{n_0-1-j+m_0}{m_0} \begin{bmatrix} |w|-1 \\ n_0-1-j+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w, s\neq N} x_s}.$$

Per tant el coeficient de $x_N^{m_0}$ a (3.23) és

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k-2}^{n_0-1} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \binom{n_0-1-j+m_0}{m_0} \sum_{w\subset[1,N], N\in w} \begin{bmatrix} N-|w|-1 \\ j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w^c} x_s} \begin{bmatrix} |w|-1 \\ n_0-1-j+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s\in w, s\neq N} x_s} \\
&= \sum_{j=k-2}^{n_0-1} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \binom{n_0-1-j+m_0}{m_0} \sum_{v\subset[1,N-1]} \begin{bmatrix} |v^c|-1 \\ j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in v^c} x_s} \begin{bmatrix} |v| \\ n_0-1-j+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s\in v} x_s}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Volem provar que aquesta expressió és igual a la del coeficient de $x_N^{m_0}\nu^{n_0}$ de (3.22) que, aplicant el Lema 2.9 un altre cop, és

$$\left\{ \begin{matrix} n_0+1 \\ k \end{matrix} \right\} \binom{n_0+m_0}{m_0} \begin{bmatrix} N-1 \\ n_0+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s=1}^{N-1} x_s}. \tag{3.25}$$

Fem ús ara del Teorema 3.9. Posant $a = j+1$, $b = n_0 - j - 1 + m_0$ i $M = N-1$ ressulta que

$$\sum_{v \subset [1,N-1]} \begin{bmatrix} |v^c|-1 \\ j \end{bmatrix}_{\sum_{s\in v^c} x_s} \begin{bmatrix} |v| \\ n_0-1-j+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s\in v} x_s} = \binom{n_0+m_0}{j+1} \begin{bmatrix} N-1 \\ n_0+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s=1}^{N-1} x_s},$$

i per tant,

$$(3.24) = \sum_{j=k-2}^{n_0-1} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \binom{n_0-1-j+m_0}{m_0} \binom{n_0+m_0}{j+1} \begin{bmatrix} N-1 \\ n_0+m_0 \end{bmatrix}_{\sum_{s=1}^{N-1} x_s}. \tag{3.26}$$

Finalment igualant (3.25) i (3.26) i simplificant s'obté que són iguals si es compleix

$$\left\{ \begin{matrix} n_0+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{j=k-2}^{n_0-1} \left\{ \begin{matrix} j+1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \binom{n_0}{j+1},$$

que hem provat al lema 2.11 que és cert. $\square$

# 4 Demostració del teorema principal

En aquest capítol provarem finalment el Teorema 1.8 usant els lemes i teoremes de les seccions prèvies. Reformularem el teorema utilitzant la notació introduïda en la secció anterior. Demostrem abans, però, un últim lema que necessitarem.

**Lema 4.1.** *Sigui $F(x)$ un polinomi de grau $m$. Aleshores*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(x-1)_{k-1}}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-1-r} \binom{k-1}{r} F(r+1).$$

DEMOSTRACIÓ: La sèrie de Newton d'un polinomi $P(x)$ de grau $m$ és

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{x}{k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} P(r). \tag{4.1}$$

Provem aquesta fórmula. Totes dues bandes són polinomis en $x$ de grau $m$. Avaluem ara les dues expressions en $x$ un enter $c$, $0 \le c \le m$. Fixem $r$, $0 \le r \le m$. Aleshores el coeficient de $P(r)$ a la dreta de (4.1) és

$$\sum_{k=r}^{c} (-1)^{k-r} \binom{c}{k} \binom{k}{r}.$$

Aplicant la identitat

$$\binom{c}{k}\binom{k}{r} = \binom{c-r}{k-r}\binom{c}{r}$$

resulta que el coeficient de $P(r)$ és

$$\binom{c}{r}\sum_{k=r}^{c}(-1)^{k-r}\binom{c-r}{k-r}.$$

Ara, fent el canvi $u=k-r$,

$$\sum_{k=r}^{c}(-1)^{k-r}\binom{c-r}{k-r}=\sum_{u=0}^{c-r}(-1)^{u}\binom{c-r}{u}=(1-1)^{c-r},$$

que val 0 quan $c\neq r$ i val 1 quan $c=r$. Per tant és clar que en els $m+1$ punts enters $\{0,...,m\}$ totes dues bandes de (4.1) són iguals. Per tant són el mateix polinomi, ja que té grau $m$. Provem ara la fórmula del lema. Si posem $F(x+1)=P(x)$, i utilitzant que $\binom{x}{k}=\frac{(x)_k}{k!}$ llavors

$$F(x+1)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(x)_k}{k!}\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}F(r+1).$$

Substituint $x$ per $x-1$ i reindexant $k$ per $k-1$ queda la fórmula que volíem provar. □

**Teorema 4.2.** *Siguin $b,\beta$ complexos no nuls i $a=(a_1,\dots,a_d),\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_d)$ d-tuples de nombres complexos, $d\in\mathbb{N}$. Siguin $g(z)=1+bz^{\beta}$ una funció base, $\alpha$ un dels seus zeros, i $f(z;g,a,\gamma)$ el polinomi d'exponents complexos $\gamma$, coeficients $a$ i funció base $g$. Suposem que existeix un entorn $U$ del 0 a $\mathbb{C}^d$ i una funció*

$$\phi:U\longrightarrow L$$

*diferenciable en les variables $a_1,...,a_d$ al punt 0 tal que*

$$f(\phi(a);g,a,\gamma)=0\quad\forall\, a\in U \tag{4.2}$$

$$\phi(0)=\alpha. \tag{4.3}$$

*Sigui $I=(I(1),\dots,I(N))\in MC(d)$ un multiconjunt ordenat tal que $N\geq 1$. Denotem*

$$\partial_I=\prod_{m\in I}\frac{\partial}{\partial a_m},$$

$$\partial(\phi,I)=\partial_I\phi(a)_{|0}.$$

*Aleshores*

$$\partial(\phi,I)=-\frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}}{g'(\alpha)^N}(-\beta)^{N-1}(\beta^{-1}-1+\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m)_{N-1}.$$

DEMOSTRACIÓ: Sabem que $\forall\, a\in U$,

$$0=f(\phi(a))=g(\phi(a))+\sum_{s=1}^{d}a_s\phi(a)^{\gamma_s}. \tag{4.4}$$

Només cal que apliquem $\partial_I$ i avaluem en $a=0$, i llavors trobarem l'expressió que busquem per $\partial(\phi, I)$. Usarem inducció en $N$. Si $N=1$, $I=(s), 1 \leq s \leq d$, i $\partial_I$ és la derivada respecte $a_s$. Aplicant la regla de la cadena resulta

$$0 = g'(\phi(a))\partial_I \phi(a) + \sum_{j=1}^{d} a_j \gamma_j \phi(a)^{\gamma_j - 1} \partial_I \phi(a) + \phi(a)^{\gamma_s},$$

i per tant a l'avaluar en $a=0$ queda

$$0 = g'(\alpha)\partial(\phi, I) + \alpha^{\gamma_s}.$$

Per tant

$$\partial(\phi, I) = \frac{-\alpha^{\gamma_s}}{g'(\alpha)},$$

que és el que volíem provar. Sigui ara $I \in MC(d)$ tal que $N = |I| \geq 2$, i suposem que el teorema es compleix per tot $I' \in MC(d)$ amb $|I'| < N$. Vegem què val $\partial(f \circ \phi, I) = \partial(g \circ \phi, I) + \partial(p \circ \phi, I)$, on

$$p(z) = \sum_{k=1}^{d} a_k z^{\gamma_k}.$$

Provem primer per inducció que

$$\partial_I (g \circ \phi)(a) = \sum_{k=1}^{N} g^{(k)}(\phi(a)) \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial_{J_s}(\phi(a)). \tag{4.5}$$

Si $N=1$ llavors la fòrmula és clara. Suposem ara que es compleix fins a $N-1$ i provem que també ho fa per $N$. Aleshores utilitzant la hipòtesi d'inducció, la regla de la cadena i la regla del producte, es compleix

$$\begin{aligned}
\partial_I (g \circ \phi)(a) &= \frac{\partial}{\partial a_{I(N)}} \left( \sum_{k=1}^{N-1} g^{(k)}(\phi(a)) \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial_{J_s}(\phi(a)) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \left( g^{(k+1)}(\phi(a)) \frac{\partial \phi(a)}{\partial a_{I(N)}} \left( \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial_{J_s}(\phi(a)) \right) \right. \\
&\quad \left. + g^{(k)}(\phi(a)) \left( \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \sum_{s=1}^{k} \left( \prod_{j=1, j \neq s}^{k} \partial_{J_j}(\phi(a)) \right) \partial_{J_s \cup I(N)} \phi(a) \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} g^{(k)}(\phi(a)) \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial_{J_s}(\phi(a)).
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\partial(g \circ \phi, I) = \sum_{k=1}^{N} g^{(k)}(\alpha) \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial(\phi(a), J_s). \tag{4.6}$$

Provem ara que

$$\partial(p \circ \phi, I) = \sum_{h=1}^{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_{I(h)})_k \phi(0)^{\gamma_{I(h)} - k} \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j).$$

Observem que n'hi ha prou en veure que per tot $s \in \{1, ..., d\}$,

$$\partial(a_s \phi(a)^{\gamma_s}, I) = \sum_{h \in [1,N], I(h)=s} \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_s)_k \phi(0)^{\gamma_s - k} \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j), \tag{4.7}$$

on l'expressió val 0 si no existeix cap $h \in [1, N]$ tal que $I(h) = s$. Provem (4.7). Si per tot $h$, $I(h) \neq s$ llavors tant el membre de la dreta com el de l'esquerra de (4.7) són 0 i per tant val la igualtat. Suposem ara que almenys per alguna $h \in [1, N], I(h) = s$. Posem $m_s = \mathrm{mult}(I, s)$. Aplicant la linealitat de la derivada i la regla del producte és clar que

$$\frac{\partial^{m_s}}{\partial a_s^{m_s}}(a_s \phi(a)^{\gamma_s}) = \sum_{k=0}^{m_s} \binom{m_s}{k} \frac{\partial^k}{\partial a_s^k}(a_s) \frac{\partial^{m_s - k}}{\partial a_s^{m_s - k}}(\phi(a)^{\gamma_s}).$$

Per tant a l'avaluar en $a = 0$ només quedarà el terme amb $k = 1$,

$$m_s \frac{\partial^{m_s - 1}}{\partial a_s^{m_s - 1}}(\phi(a)^{\gamma_s}).$$

A (4.7) els sumands del membre de la dreta són iguals per tot $h$ i n'hi ha $m_s$, per tant (4.7) quedarà provat si veiem que

$$\left( \prod_{k \in [1,N], I(k) \neq s} \frac{\partial}{\partial a_{I(k)}} \right) \left( \frac{\partial^{m_s - 1}}{\partial a_s^{m_s - 1}}(\phi(a)^{\gamma_s}) \right)_{|0} = \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_s)_k \phi(0)^{\gamma_s - k} \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j),$$

on hem fixat una de les $h$ tals que $I(h) = s$. Ara, com que el membre de l'esquerra de la darrera igualtat és

$$\partial(\phi(a)^{\gamma_s}, I(\hat{h})),$$

hem de veure que

$$\partial(\phi(a)^{\gamma_s}, I(\hat{h})) = \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_s)_k \phi(0)^{\gamma_s - k} \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j).$$

Aquesta darrera igualtat és justament un cas particular del que hem provat a (4.6) posant

$$g(z) = z^{\gamma_s}.$$

Per tant hem demostrat que

$$\begin{aligned} \partial(f \circ \phi, I) = &\sum_{h=1}^{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_{I(h)})_k \alpha^{\gamma_{I(h)} - k} \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j) \\ &+ \sum_{k=1}^{N} g^{(k)}(\alpha) \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial(\phi(a), J_s). \end{aligned}$$

Com que $f(\phi(a))$ és zero, també ho serà $\partial(f \circ \phi, I)$, per tant obtenim

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{h=1}^{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_{I(h)})_k \alpha^{\gamma_{I(h)} - k} \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j) \\ &+ \sum_{k=2}^{N} g^{(k)}(\alpha) \sum_{J \in \mathrm{Parts}(I,k)} \prod_{s=1}^{k} \partial(\phi(a), J_s) \\ &+ g'(\alpha) \partial(\phi, I). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Apliquem ara l'hipòtesi d'inducció al primer terme de l'expressió de (4.8), que resulta

$$\sum_{h=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1}(\gamma_{I(h)})_k\alpha^{\gamma_{I(h)}-k}\sum_{J\in\mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)}\prod_{s=1}^{k}\frac{-\alpha^{1+\sum_{m\in J_s}(\gamma_m-1)}}{g'(\alpha)^{|J_s|}}(-\beta)^{|J_s|-1}(\beta^{-1}-1+\beta^{-1}\sum_{m\in J_s}\gamma_m)_{|J_s|-1}.$$

Observem que

$$\begin{aligned}
&\alpha^{\gamma_{I(h)}-k}\sum_{J\in\mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)}\prod_{s=1}^{k}\frac{-\alpha^{1+\sum_{m\in J_s}(\gamma_m-1)}}{g'(\alpha)^{|J_s|}}(-\beta)^{|J_s|-1}\\
&=\alpha^{\gamma_{I(h)}-k}\sum_{J\in\mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)}\frac{\alpha^{k+\sum_{m\in I(\hat{h})}(\gamma_m-1)}}{g'(\alpha)^{N-1}}(-\beta)^{N-1-k}(-1)^k\\
&=\frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}(-\beta)^{N-2}}{g'(\alpha)^{N-1}}-(\beta^{-1})^{k-1}\sum_{J\in\mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)}1
\end{aligned}$$

Per tant el primer terme de l'expressió (4.8) queda

$$\frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}(-\beta)^{N-2}}{g'(\alpha)^{N-1}}\sum_{h=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1}-(\gamma_{I(h)})_k(\beta^{-1})^{k-1}\sum_{J\in\mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)}\prod_{s=1}^{k}(\beta^{-1}-1+\beta^{-1}\sum_{m\in J_s}\gamma_m)_{|J_s|-1}$$

Apliquem ara el Teorema 3.10 a

$$(\beta^{-1})^{k-1}\sum_{J\in\mathrm{Parts}(I(\hat{h}),k)}\prod_{s=1}^{k}(\beta^{-1}-1+\beta^{-1}\sum_{m\in J_s}\gamma_m)_{|J_s|-1},\tag{4.9}$$

amb $\nu=\beta^{-1}$ i $x_s=\beta^{-1}\gamma_{I(\hat{h})(s)}$, on $1\le s\le|I(\hat{h})|=N-1$. Alehores (4.9) equival a $c_k$, on

$$c_k=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\binom{k-1}{r}(\beta^{-1}(r+1)-1+\beta^{-1}\sum_{m\in I(\hat{h})}\gamma_m)_{N-2}.$$

Ara, la suma

$$\sum_{k=1}^{N-1}-(\gamma_{I(h)})_kc_k$$

és igual a

$$-\gamma_{I(h)}\sum_{k=1}^{N-1}c_k(\gamma_{I(h)}-1)_{k-1}.\tag{4.10}$$

Posem

$$F(x)=(\beta^{-1}x-1+\beta^{-1}\sum_{m\in I(\hat{h})}\gamma_m)_{N-2},$$

que és un polinomi de grau $N-2$. Aleshores pel Lema 4.1 que hem provat a l'inici d'aquest capítol,

$$\begin{aligned}
F(x)&=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(x-1)_{k-1}}{(k-1)!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\binom{k-1}{r}(\beta^{-1}(r+1)-1+\beta^{-1}\sum_{m\in I(\hat{h})}\gamma_m)_{N-2}\\
&=\sum_{k=1}^{N-1}c_k(x-1)_{k-1}.
\end{aligned}$$

Per tant (4.10) equival a

$$F(\gamma_{I(h)}) = -\gamma_{I(h)}(\beta^{-1}\gamma_{I(h)} - 1 + \beta^{-1}\sum_{m\in I(\hat{h})}\gamma_m)_{N-2} = -\gamma_{I(h)}(\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m - 1)_{N-2}.$$

Per tant el primer terme de l'expressió (4.8) queda

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}(-\beta)^{N-2}}{g'(\alpha)^{N-1}}\sum_{h=1}^{N} -\gamma_{I(h)}(\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m - 1)_{N-2} \\
&= \frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}(-\beta)^{N-1}}{g'(\alpha)^{N-1}}(\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m - 1)_{N-2}\beta^{-1}\sum_{m\in I}(\gamma_m - 1) \qquad (4.11) \\
&= \frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}(-\beta)^{N-1}}{g'(\alpha)^{N-1}}(\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m)_{N-1}.
\end{aligned}$$

El raonament per simplificar el segon terme de (4.8) és pràcticament igual. Utilitzant altre cop la hipòtesi d'inducció, el Teorema 3.10 i que

$$g^{(k)}(\alpha) = b(\beta)_k\alpha^{\beta-k},$$

resulta que

$$\frac{-b\beta\alpha^{\beta}(-\beta)^{N-1}\alpha^{\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}}{g'(\alpha)^{|I|}}\sum_{k=2}^{N}\frac{(\beta-1)_{k-1}}{(k-1)!}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{k-1-r}\binom{k-1}{r}((r+1)\beta^{-1}-1+\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m).$$

Sumem i restem a la darrera expressió el terme corresponent a $k = 1$, que és

$$(\beta^{-1} - 1 + \beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m)_{N-1}.$$

La suma incloent $k = 1$ és una sèrie de Newton i com hem fet abans, aplicant el Lema 4.1 l'expressió queda

$$\frac{-b\beta\alpha^{\beta}(-\beta)^{N-1}\alpha^{\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}}{g'(\alpha)^{|I|}}\left((\beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m)_{N-1} - (\beta^{-1} - 1 + \beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m)_{N-1}\right).$$

Finalment, combinant aquesta expressó amb (4.11) i simplificant usant que

$$g'(\alpha) = b\beta\alpha^{\beta-1},$$

queda l'equació

$$0 = \frac{\alpha^{1+\sum_{m\in I}(\gamma_m-1)}(-\beta)^{N-1}}{g'(\alpha)^{N-1}}(\beta^{-1} - 1 + \beta^{-1}\sum_{m\in I}\gamma_m)_{N-1} + g'(\alpha)\partial(\phi, I).$$

Aïllant de la darrera expressió $\partial(\phi, I)$ es completa la prova. □

**Observació 4.3.** A la demostració del Teorema 4.2 hem usat el Teorema 3.10 prenent

$$\nu = \beta^{-1}.$$

Per tant si $\beta = 1$, per demostrar el teorema fonamental només caldria demostrar el Teorema 3.10 quan $\nu = 1$. DeFranco a [4] prova una demostració alternativa del Teorema 3.10 pel cas $\nu = 1$. És molt llarga i no la veurem en aquest treball. Es pot trobar a la secció 6 de [4].

## 5 Recobriment del resultat d'Sturmfels

En aquest capítol veurem com el teorema principal que hem provat recobreix part dels resultats obtinguts per Sturmfels a [11]. Exposem a continuació breument i sense demostrar-los aquests resultats i després veurem com els podem obtenir a partir del teorema que hem demostrat.

A [11], Sturmfels també tracta el problema clàssic de les matemàtiques de determinar fórmules per a les arrels de l'equació general de grau $n$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Cada arrel de $f(x)$ és una funció algebraica amb els coeficients de $f(x)$ com a indeterminades,

$$X = X(a_0, \ldots, a_n).$$

A diferència del que hem fet nosaltres, calcular directament la sèrie de Taylor de $X$, Sturmfels considera $X$ com una solució d'un sistema $\mathcal{A}$-hipergeomètric d'equacions diferencials. Aquest tipus de sistemes van ser introduïts i estudiats per Gel'fand, Kapranov i Zelevinsky a [8] i [9] i vénen donats per una matriu $\mathcal{A}$ de $k$ files i $K$ columnes

$$\mathcal{A} = (\chi_{i,j})_{1\le i\le k, 1\le j\le K},$$

on

$$\chi_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad \text{per tot} \quad 1 \le i \le k, 1 \le j \le K.$$

A més, la matriu $\mathcal{A}$ cal que verifiqui les següents propietats: *i*) les columnes

$$\chi_j = (\chi_{1j}, \ldots, \chi_{kj})$$

generen $\mathbb{Z}^k$ com a $\mathbb{Z}$-mòdul, i *ii*) existeixen enters $c_1, \ldots, c_k$ tals que per tot $1 \le j \le K$,

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{ij} = 1.$$

Geomètricament la darrera condició implica que la família formada pels vectors columna està continguda en un hiperplà afí. En aquest context, definim el reticle de la matriu $\mathcal{A}$ com el conjunt

$$\mathscr{L} = \{(r_1, \ldots, r_K) \in \mathbb{Z}^K : \sum_{j=1}^{K} r_j \chi_{ij} = 0, 1 \le i \le k\} \subset \mathbb{Z}^K.$$

Si ens mirem $\mathcal{A}$ com una aplicació lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{Q}^K &\longrightarrow \mathbb{Q}^k \\ r &\longmapsto \mathcal{A} r^T \end{aligned}$$

on $r^T$ denota el vector transposat de $r$, aleshores $\mathscr{L}$ és el nucli enter de $\mathcal{A}$, és a dir,

$$\mathscr{L} = Ker(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^K.$$

Ara, per cada $r = (r_1, \ldots, r_K) \in \mathscr{L}$, considerem l'operador diferencial

$$\Box_r = \prod_{r_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j}\right)^{r_j} - \prod_{r_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j}\right)^{-r_j}.$$

Fixem una col·lecció fixa de paràmetres $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ i definim també l'operador

$$Z_i = \left( \sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} a_j \frac{\partial}{\partial a_j} \right) - \beta_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Amb tota aquesta notació ja podem definir què és un sistema d'equacions diferencials hipergeomètric.

**Definició 5.1.** *El sistema hipergeomètric donat per la matriu $\mathcal{A} = (\chi_{ij})$ que verifica les condicions i) i ii), i una col·lecció de paràmetres $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{C}^k$ és el sistema que té per equacions*

$$\begin{cases} Z_i \phi = 0, & 1 \leq i \leq k \\ \Box_r \phi = 0, & r \in \mathscr{L}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Resulta, doncs, que el nombre d'equacions d'aquests sistemes és infinit, ja que el nucli enter $\mathscr{L}$ conté infinits elements. Tot i això com que els anells

$$\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_K], \quad \mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial a_K}\right]$$

són isomorfs i el primer sabem que és noetherià, sabem que el segon també ho és i per tant el sistema (5.1) estarà generat per finites equacions.

Hem dit abans que les arrels $X(a_0, \ldots, a_n)$ de l'equació general de grau $n$ són solució d'un sistema hipergeomètric. Descrivim explícitament aquest sistema i demostrem-ho.

Considerem $K = n + 1$, $k = 2$, el vector de paràmetres $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (-1, 0)$ i la matriu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores és clar que $\mathcal{A}$ satisfà les condicions *i)* i *ii)*. En efecte, prenent només les dues primeres columnes

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ja veiem que les columnes de $\mathcal{A}$ generen $\mathbb{Z}^2$ com a $\mathbb{Z}$-mòdul. Per altra banda, prenent

$$c_1 = 0, c_2 = 1,$$

aleshores per tot $0 \leq t \leq n$ el vector $\binom{t}{1}$ pertany a la recta afí

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1.$$

El reticle de la matriu $\mathcal{A}$ és per tant

$$\mathscr{L} = \{ v = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} v_i = 0, \sum_{i=0}^{n} i v_i = 0 \}.$$

Llavors, el sistema d'equacions diferencials (5.1) amb la matriu $\mathcal{A}$ i el vector de paràmetres $\beta$ que acabem de donar ve donat per les equacions

$$Z_1 \phi = \sum_{i=0}^{n} i a_i \frac{\partial \phi}{\partial a_i} + \phi = 0, \quad Z_2 \phi = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial \phi}{\partial a_i} = 0$$

i totes les equacions del conjunt

$$\{\Box_r\}_{r\in\mathscr{L}}.$$

Es pot provar que aquest sistema és equivalent al segënt sistema, que té un nombre finit d'equacions:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2\phi}{\partial a_k \partial a_l} & \text{si } i+j=k+l \\ \sum_{i=0}^n i a_i \frac{\partial\phi}{\partial a_i} = -\phi & \text{i} \quad \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial\phi}{\partial a_i} = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Aleshores Sturmfels a [11] demostra el següent resultat:

**Proposició 5.2.** *Les arrels $X = X(a_0, \ldots, a_n)$ de l'equació general de grau $n$ són solució del sistema hipergeomètric* (5.2).

DEMOSTRACIÓ: Les dues equacions de primer ordre són conseqüència de les següents homogeneïtats de $X$:

$$X(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) = X(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{5.3}$$

$$X(a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \ldots, \lambda^n a_n) = \frac{1}{\lambda} X(a_0, a_1, \ldots, a_n), \tag{5.4}$$

on $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La primera de les dues igualtats és evident ja que

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = 0 \iff \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \lambda a_2 X^2 + \cdots + \lambda a_n X^n = 0.$$

Per veure la segona n'hi ha prou en observar que

$$a_0 + a_1(\lambda X) + a_2(\lambda X)^2 + \cdots + a_n(\lambda X)^n = a_0 + \lambda a_1 X + \lambda^2 a_2 X^2 + \cdots + \lambda^n a_n X^n,$$

Ara, les equacions diferencials de primer ordre resulten del següent fet general: si tenim la igualtat

$$\phi(\lambda^{\omega_0} a_0, \lambda^{\omega_1} a_1, \ldots, \lambda^{\omega_n} a_n) = \lambda^{\omega} \phi(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

la podem pensar com una funció de $\lambda$, fixant $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Al derivar-la, usant la regla de la cadena, s'obté que

$$\sum_{j=0}^n \omega_j \lambda^{\omega_j - 1} a_j \frac{\partial\phi}{\partial a_j}$$

avaluat en

$$(\lambda^{\omega_0} a_0, \lambda^{\omega_1} a_1, \ldots, \lambda^{\omega_n} a_n)$$

equival a

$$\omega \lambda^{\omega - 1} \phi(a_0, a_i, \ldots, a_n).$$

Per tant, posant $\lambda = 1$ resulta

$$\sum_{j=0}^n \omega_j a_j \frac{\partial\phi}{\partial a_j} = \omega\phi.$$

Posant $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) = (1, 1, \ldots, 1)$ i $\omega = 1$ obtenim l'eqaució diferencial que es deriva de (5.3):

$$\sum_{j=0}^n a_j \frac{\partial X}{\partial a_j} = 0.$$

I si $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) = (0, 1, \ldots, n)$ i $\omega = -1$ obtenim l'eqaució diferencial que es deriva de (5.4):

$$\sum_{j=0}^{n} j a_j \frac{\partial X}{\partial a_j} = -X.$$

Vegem ara com obtenir les equacions de segon ordre. Fixats $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i enters $j, k$, on $1 \leq j, k \leq n$, diferenciem la igualtat

$$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = 0$$

respecte $a_j$:

$$X^j + f'(X) \frac{\partial X}{\partial a_j} = 0,$$

on

$$f'(X) = \sum_{l=1}^{n} l a_l X^{l-1}.$$

Si $f'(X) \neq 0$, aleshores

$$\frac{\partial X}{\partial a_j} = -\frac{X^j}{f'(X)}.$$

Al derivar respecte $a_k$ cada membre resulta

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_j \partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left( -\frac{X^j}{f'(X)} \right) = -f''(X) X^{j+k} f'(X)^{-3} + (j+k) X^{j+k-1} f'(X)^{-2}, \qquad (5.5)$$

on

$$f''(X) = \sum_{l=2}^{n} l(l-1) a_l X^{l-2}.$$

L'expressió (5.5) només depèn de $j + k$ i per tant demostra

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial a_k \partial a_l} \quad \text{si } i + j = k + l \qquad (5.6)$$

quan $X$ és una arrel simple de $f$. Per al cas general considerem la funció

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial}{\partial z} (\log f(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Es tracta d'una funció racional en $a_0, \ldots, a_n, z$. Diferenciem-la:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} \left( \frac{\partial}{\partial z} (\log f(z)) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k} (\log f(z)) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial a_k} \left( \frac{z^j}{f(z)} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{z^{j+k}}{f^2(z)} \right).
\end{aligned}$$

La darrera expressó només depèn de $j + k$. Per tant la funció $\frac{f'(z)}{f(z)}$ satisfà les equacions de segon ordre (5.6).

Si $X$ té multiplicitat $k$ com arrel de $f$ podem escriure

$$f(z) = (z - X)^k g(z),$$

on $g(X) \neq 0$. Derivant i simplificant obtenim llavors que

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z}{z - X} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Aleshores, com que $X$ és un pol simple,

$$Res(\frac{zf'(z)}{f(z)}, X) = \lim_{z \to X} (z - X) \frac{f'(z)z}{f(z)} = \lim_{z \to X} \left( z + \frac{g'(z)}{g(z)}(z - X) \right) = X.$$

Pel teorema dels residus obtenim, doncs,

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{zf'(z)}{f(z)} dz, \tag{5.7}$$

on $\Gamma$ és una corba al voltant de $X(a_0, \ldots, a_n)$ suficientment petita com per no contenir en el seu interior altres arrels de l'equació polinòmica de grau $n$ amb coeficients $a_0, \ldots, a_n$. Per veure que $X$ també satisfà les equacions (5.6) només cal diferenciar sota el signe integral la identitat (5.7). Això completa la demostració. □

A partir de solucions generals pels tipus de sistemes hipergeomètrics que estudien Gel'fand, Zelevinsky i Kapranov a [8] i [9] i utlitzant també els resultats de McDonald a [10], Sturmfels aconsegueix trobar unes fórmules explícites per a les arrels $X(a_0, \ldots, a_n)$. Introduïm primer algunes definicions i donem aquestes sèries.

**Definició 5.3.** *Siguin $v$ un enter i $u$ un racional. Definim*

$$\gamma(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v = 0 \\ (u)_{|v|} = u(u-1)(u-2)\cdots(u+v+1) & \text{si} \quad v < 0 \\ 0 & \text{si} \quad u \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad 0 > u \geq -v \\ \frac{1}{\prod_{j=1}^{v}(u+j)} & \text{altrament} \end{cases}$$

**Observació 5.4.** Si $\Gamma$ és la funció gamma habitual i $u$ no és un enter, observem que

$$\gamma(u, v) = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+v+1)}.$$

En efecte, si $v = 0$ llavors la igualtat és trivial. Si $v < 0$ llavors

$$\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+v+1)} = \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u+v+1)\Gamma(u+v+1)}{\Gamma(u+v+1)} = \gamma(u, v),$$

on hem usat la propietat coneguda $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ per tot $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, que podem aplicar perquè $u \notin \mathbb{Z}$. Si $v > 0$, com que $u$ no és enter estem en el quart cas. Utilitzant de nou la propietat de $\Gamma$ tenim que

$$\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+v+1)} = \frac{\Gamma(u+1)}{(u+v)(u+v-1)\cdots(u+1)\Gamma(u+1)} = \gamma(u, v).$$

**Definició 5.5.** *Sigui* $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ *una* $n+1$*-tupla de racionals. Definim la sèrie formal de potències*

$$[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}] = \sum_{(v_0,\ldots,v_n)\in\mathscr{L}} \prod_{i=0}^{n} (\gamma(u_i, v_i) a_i^{u_i+v_i}).$$

*Les anomenarem sèries de claudàtors.*

Una triangulació de $\{0, 1, \ldots, n\}$ és un conjunt finit de segments $[a, b], a, b \in \{0, \ldots, n\}$ de manera que la unió de tots els segments és $[0, n]$ i la intersecció de dos qualssevol d'ells és com a molt un punt. És clar, doncs, que hi ha $2^{n-1}$ triangulacions possibles per al conjunt $\{0, 1, \ldots, n\}$. Podem respresentar una triangulació amb un subconjunt $\{i_0, i_1, \ldots, i_r\}$ de manera que la triangulació està formada pels $r$ segments $[i_0, i_1], \ldots, [i_{r-1}, i_r]$, amb $i_0 = 0, i_r = n$.

Fixem una triangulació $\{i_0, i_1, \ldots, i_r\}$. Per a $j = 1, \ldots, r$ definim $d_j = i_j - i_{j-1}$ per a la longitud del segment $j$-èsim. És clar que $d_1 + \cdots + d_r = n$. Sigui $\xi = (-1)^{1/d_j}$ una arrel $d_j$-èssima de -1. Aleshores Sturmfels demostra el següent resultat: les $n$ sèries

$$X_{j,\xi} = \xi[a_{i_{j-1}}^{1/d_j} a_{i_j}^{-1/d_j}] + \frac{1}{d_j} \sum_{k=2}^{d_j} \xi^k [a_{i_{j-1}+k-1} a_{i_{j-1}}^{(k-d_j)/d_j} a_{i_j}^{-k/d_j}] + \frac{1}{d_j} [a_{i_{j-1}-1} a_{i_{j-1}}^{-1}]. \tag{5.8}$$

són arrels de l'equació general d'ordre $n$, és a dir, $f(X_{j,\xi}) = 0$. De fet, demostra més, Sturmfels dóna també una regió de convergència d'aquestes sèries formals, però d'això no ens en preocuparem. Per a una comprensió profunda del tema i veure com arriba Sturmfels a aquestes sèries a partir del treball de Gel'fand, Kapranov i Zelevinsky a [8] i [9] i McDonald a [10] es recomana llegir [3].

El que farem nosaltres ara és veure com el teorema principal que hem provat demostra aquest resultat d'Sturmfels. Fixem dos enters $0 \leq i_1 < i_2 \leq n$. Sigui $d = i_2 - i_1$. Usarem, a més de les definicions i notacions introduïdes en aquesta secció, la notació

$$\Sigma^* = \sum_{i\in\{0,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2\}} \quad \text{i} \quad \Pi^* = \prod_{i\in\{0,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2\}} .$$

**Lema 5.6.** *Suposem que* $(v_0, \ldots, v_n) \in Ker(\mathcal{A})$*. Aleshores*

$$v_{i_2} = -\frac{1}{d}\Sigma^*(i - i_1)v_i \tag{5.9}$$

$$v_{i_1} = -\frac{1}{d}\Sigma^*(i_2 - i)v_i = \frac{1}{d}\Sigma^*(i - i_1)v_i - \Sigma^* v_i \tag{5.10}$$

DEMOSTRACIÓ: Com que $(v_0, \ldots, v_n) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned} i_1 v_{i_1} + i_2 v_{i_2} &= -\Sigma^* i v_i \\ v_{i_1} + v_{i_2} &= -\Sigma^* v_i \end{aligned} \tag{5.11}$$

Aïllant d'aquestes dues equacions $v_{i_1}$ i $v_{i_2}$ s'obté (5.9) i la primera igualtat de (5.10). D'altra banda, utilitzant que $v_{i_1} = v_{i_1} + v_{i_2} - v_{i_2}$ i les equacions (5.9) i (5.11) s'obté la segona igualtat de (5.10). □

**Lema 5.7.** *Considerem la sèrie*

$$X_{i_1,i_2,\xi} = \xi[a_{i_1}^{1/d} a_{i_2}^{-1/d}] + \frac{1}{d} \sum_{k=2}^{d} \xi^k [a_{i_1}^{(k-d)/d} a_{i_1+k-1} a_{i_2}^{-k/d}] + \frac{1}{d} \left[a_{i_1-1} a_{i_1}^{-1}\right], \tag{5.12}$$

*on* $\left[a_{i_1-1}a_{i_1}^{-1}\right]$ *denota 0 si* $i_1 = 0$. *Aleshores,*

*a)* $X_{i_1,i_2,\xi}$ *és una sèrie de potències en les variables* $a_i, 0 \leq i \leq n, i \neq i_1, i_2$, *és a dir, els exponents d'aquestes variables són enters no negatius, i els seus coeficients depenen de* $a_{i_1}$ *i* $a_{i_2}$.

*b) El terme*

$$\Pi^* a_i^{n_i} \tag{5.13}$$

*pot aparèixer com a molt a una o dues sèries de claudàtors de la sèrie (5.12), en funció de si* $\Sigma^*(i - i_1)n_i$ *no és o és igual a* $-1$ *mod(d), respectivament.*

DEMOSTRACIÓ: Observem que cada $a_i, 0 \leq i \leq n, i \neq i_1, i_2$ apareix a les sèries de claudàtors de (5.12) amb exponent 0 o 1, per tant, per la definició d'aquestes, l'exponent de $a_i$ serà un enter en tots els termes. Vegem que no pot ser negatiu. Perquè ho fos s'hauria de donar o bé el cas $u_i = 0$ i $v_i < 0$ o bé el cas $u_i = 1$ i $v_i < -1$. Per la Definició 5.3 de $\gamma(u, v)$, en tots dos casos tindríem $\gamma(u, v) = 0$. Per tant els exponents de les variables $a_i, 0 \leq i \leq n, i \neq i_1, i_2$ a (5.12) són enters no negatius. Per tant $X_{i_1,i_2,\xi}$ és una sèrie en les indeterminades $a_i, 0 \leq i \leq n, i \neq i_1, i_2$ amb coeficients que depenen de $a_{i_1}, a_{i_2}$. Amb això tenim a).

Provem b). A la definició de $X_{i_1,i_2,\xi}$ hi ha $d+1$ sèries de claudàtors. Si $d = 1$ aleshores hi ha exactament dues sèries de claudàtors i b) es compleix trivialment. Suposem ara que $d \geq 2$. Direm $k$-èssima sèrie de claudàtors a la sèrie

$$[a_{i_1}^{(k-d)/d} a_{i_1+k-1} a_{i_2}^{-k/d}],$$

que apareix a $X_{i_1,i_2,\xi}$, amb $2 \leq k \leq n$, i 0-èssima i 1-èssima respectivament a les sèries

$$[a_{i_1-1} a_{i_1}^{-1}], [a_{i_1}^{1/d} a_{i_2}^{-1/d}].$$

Vegem quan pot ser que el terme (5.13) aparegui a la $k$-èssima sèrie de claudàtors, amb $0 \leq k \leq d$. Sigui $i \neq i_1, i_2$. Observem que a la $k$-èssima sèrie de claudàtors l'exponent $u_i$ de $a_i$ és 0 si $i \neq i_1 + k - 1$ i és 1 si val la igualtat. Per tant per la definició de les sèries de claudàtors, perquè aparegui el terme (5.13) cal que existeixi $v = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ de manera que per tot $i \neq i_1, i_2$,

$$\begin{cases} v_i = n_i & \text{si} \quad i \neq i_1 + k - 1 \\ v_i = n_i - 1 & \text{si} \quad i = i_1 + k - 1 \end{cases}$$

Observem que no pot ser que $i_1 + k - 1 = i_2$ ja que voldria dir que $k = d + 1$. Fixats aquests valors de $v_i$, $v_{i_1}$ i $v_{i_2}$ queden determinats per les relacions del lema anterior. Posem $C = \Sigma^*(i - i_1)n_i$. Queda:

$$\begin{aligned} v_{i_2} &= -\frac{1}{d}\Sigma^*(i - i_1)v_i = -\frac{1}{d}(C - k + 1) \\ v_{i_1} &= \frac{1}{d}\Sigma^*(i - i_1)v_i - \Sigma^* v_i = \frac{1}{d}(C - k + 1) + 1 - \Sigma^* n_i \end{aligned}$$

Com que $v \in \mathscr{L}$, cal que $v_{i_1}$ i $v_{i_2}$ siguin enters i per tant cal que $C \equiv k-1 \bmod(d)$. Així, si $C \equiv -1$ aleshores el terme (5.13) pot aparèixer com a molt a la 0-èssima i a la $d$-èssima sèries. Si $C \equiv k-1, k \in \{1, \ldots, d-1\}$ llavors el terme (5.13) pot aparèixer com a molt a la $k$-èssima sèrie. □

**Teorema 5.8.** *Siguin $n_i \geq 0, i \neq i_1, i_2$ enters no tots 0. Aleshores el coeficient del terme*

$$\Pi^* a_i^{n_i} \tag{5.14}$$

*a la sèrie $X_{i_1,i_2,\xi}$ és*

$$\frac{\xi^k}{d}(-1)^M \left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\right)^{(C+1)/d} \frac{\left(\frac{C+1}{d}-1\right)_{\Sigma^* n_i - 1}}{a_{i_1}^{\Sigma^* n_i} \Pi^* n_i!}, \tag{5.15}$$

*on*

$$C = \Sigma^*(i - i_1) n_i = k - 1 + Md,$$

*per a certs enters $M$ i $0 \leq k \leq d-1$.*

DEMOSTRACIÓ: Al Lema 5.7 hem provat que si $C \equiv k-1 \bmod(d)$ llavors el terme (5.14) pot aparèixer com a molt a la $k$-èssima sèrie. Estudiem per casos segons $k$ quan val el coeficient del terme (5.14) a la sèrie (5.12). Comencem pel cas $k \in \{2, \ldots, d-1\}$. Aleshores el terme (5.14) apareix a la sèrie

$$[a_{i_1}^{(k-d)/d} a_{i_1+k-1} a_{i_2}^{-k/d}],$$

en el sumand on per tot $i \neq i_1, i_2$,

$$\begin{cases} v_i = n_i & \text{si} \quad i \neq i_1 + k - 1 \\ v_i = n_i - 1 & \text{si} \quad i = i_1 + k - 1. \end{cases}$$

Aleshores, pel Lema 5.6 $v_{i_1}$ i $v_{i_2}$ queden totalment determinats:

$$\begin{aligned} v_{i_2} &= -\frac{1}{d}(C - k + 1) = -M \\ v_{i_1} &= \frac{1}{d}(C - k + 1) + 1 - \Sigma^* n_i = M + 1 - \Sigma^* n_i. \end{aligned}$$

Hem de calcular per a aquests $v_i$ i els corresponents $u_i$ el productori

$$\prod_{i=0}^{n} \gamma(u_i, v_i).$$

És clar que si $i \neq i_1, i_2, i_1 + k - 1$ llavors

$$\gamma(u_i, v_i) = \gamma(0, n_i) = \frac{1}{n_i!}$$

i si $i = i_1 + k - 1$ aleshores també

$$\gamma(u_i, v_i) = \gamma(1, n_i - 1) = \frac{1}{n_i!}.$$

Per altra banda, $u_{i_1} = \frac{k}{d} - 1$ i $u_{i_2} = \frac{-k}{d}$, per tant,

$$\begin{aligned} u_{i_2} + v_{i_2} &= -\frac{1}{d}(C+1) \\ u_{i_1} + v_{i_1} &= \frac{1}{d}(C+1) - \Sigma^* n_i. \end{aligned}$$

Com que $u_{i_1}$ i $u_{i_2}$ no són enters, usant l'Observació 5.4 i simplificant obtenim

$$\begin{aligned}\gamma_(u_{i_1}, v_{i_1})\gamma_(u_{i_2}, v_{i_2}) &= \frac{\Gamma(\frac{k}{d})}{\Gamma(\frac{k}{d}+M-\Sigma^* n_i+1)}\frac{\Gamma(\frac{-k}{d}+1)}{\Gamma(\frac{-k}{d}-M+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{k}{d})}{\Gamma(\frac{k}{d}+M)}\frac{\Gamma(1-\frac{k}{d})}{\Gamma(1-\frac{k}{d}-M)}(\frac{k}{d}+M-1)_{\Sigma^* n_i-1}\end{aligned} \tag{5.16}$$

Usant les propietats de la funció $\Gamma$ i $\sin(z)$

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \\ \sin(\pi(z+m)) &= \sin(\pi z)(-1)^m\end{aligned}$$

per tot $z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}$, podem continuar la cadena d'igualtats de (5.16) com

$$\begin{aligned}(5.16) &= \frac{\sin(\pi(\frac{k}{d}+M))}{\sin(\pi\frac{k}{d})}(\frac{k}{d}+M-1)_{\Sigma^* n_i-1} \\ &= (-1)^M(\frac{k}{d}+M-1)_{\Sigma^* n_i-1}.\end{aligned}$$

Per tot plegat el coeficient del terme (5.14) a la sèrie $X_{i_1,i_2,\xi}$ és igual a l'expressió (5.15). Això prova el teorema per al cas $k \in \{2,\ldots,d-1\}$.

Suposem ara que $k=1$, és a dir, $C = Md$, per algun enter $M$. Aleshores on apareixerà el terme (5.14) és a la sèrie de claudàtors

$$[a_{i_1}^{1/d}a_{i_2}^{-1/d}].$$

Ho farà quan $v_i = n_i$ per a tot $i \neq i_1, i_2$ i

$$\begin{aligned}v_{i_2} &= -\frac{C}{d} = -M \\ v_{i_1} &= \frac{C}{d} - \Sigma^* n_i = M - \Sigma^* n_i.\end{aligned}$$

Aleshores $u_{i_1} = \frac{1}{d}$ i $u_{i_2} = -\frac{1}{d}$ i per tant raonant de forma similar al cas anterior s'arriba a

$$\gamma_(u_{i_1}, v_{i_1})\gamma_(u_{i_2}, v_{i_2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{d})}{\Gamma(\frac{1}{d}+M-\Sigma^* n_i)}\frac{\Gamma(\frac{-1}{d})}{\Gamma(\frac{-1}{d}-M)} = \frac{(-1)^M}{d}(\frac{k}{d}-M+1)_{\Sigma^* n_i},$$

i per tant el coeficient del terme (5.14) a la sèrie $X_{i_1,i_2,\xi}$ és igual a l'expressió (5.15). Finalment queda el cas $k=0$, és a dir $C = -1+Md$, per algun enter $M$. En aquest cas el terme (5.14) pot aparèixer a les sèries

$$[a_{i_2-1}a_{i_2}^{-1}], [a_{i_1-1}a_{i_1}^{-1}]. \tag{5.17}$$

En la primera de les dues tenim que per tot $i \neq i_1, i_2, i_2-1$, $u_i = 0$ i per tant $v_i = n_i$. Observem que $i_2 - 1 \neq i_1$ ja que $d \geq 2$. I si $i = i_2 - 1$ llavors $u_i = 1$ i $v_i = n_i - 1$. En qualsevol cas tenim, com abans, $\gamma(u_i, v_i) = \frac{1}{n_i!}$. Els $v_{i_1}, v_{i_2}$ queden determinats com abans per

$$\begin{aligned}v_{i_2} &= -\frac{1}{d}(C-d+1) = -M+1 \\ v_{i_1} &= \frac{1}{d}(C-d+1)+1-\Sigma^* n_i = M - \Sigma^* n_i.\end{aligned}$$

Vegem ara què val $\gamma(u_{i_1}, v_{i_1})\gamma(u_{i_2}, v_{i_2})$. Separem el càlcul en dos casos. Si $M \leq 0$ llavors $\gamma(u_{i_2}, v_{i_2}) = 0$, ja que $u_{i_2} = -1$ i $0 > -1 \geq M - 1$. Si $M \geq 1$ aleshores

$$\begin{aligned}\gamma(u_{i_1}, v_{i_1})\gamma(u_{i_2}, v_{i_2}) &= \gamma(0, M - \Sigma^* n_i)\gamma(-1, -M + 1) \\ &= \frac{1}{(M - \Sigma^* n_i)!}(-1)(-2)\cdots(1 - M) \\ &= (-1)^{M-1}(M - 1)_{\Sigma^* n_i - 1}.\end{aligned}$$

Observem que si $i_1 = 0$ llavors $M \geq 1$, ja que $C > 0$. Estudiem ara la segona sèrie de claudàtors de (5.17). Aquest cas només passa si $i_1 > 0$. Per tot $i \neq i_1, i_2, i_1 - 1$, $u_i = 0$ i per tant $v_i = n_i$. I si $i = i_1 - 1$ llavors $u_i = 1$ i $v_i = n_i - 1$. Com abans, $\gamma(u_i, v_i) = \frac{1}{n_i!}$. Per altra banda

$$\begin{aligned}v_{i_2} &= -\frac{1}{d}(C + 1) = -M \\ v_{i_1} &= \frac{1}{d}(C + 1) + 1 - \Sigma^* n_i = M + 1 - \Sigma^* n_i.\end{aligned}$$

De forma similar al que hem fet en el cas anterior obtenim que si $M \leq 0$ aleshores

$$\begin{aligned}\gamma(u_{i_1}, v_{i_1})\gamma(u_{i_2}, v_{i_2}) &= \gamma(-1, M + 1 - \Sigma^* n_i)\gamma(0, -M) \\ &= \left((-1)^{|M| + \Sigma^* n_i - 1}(|M| + \Sigma^* n_i - 1)!\right)\left(\frac{1}{|M|!}\right) \\ &= (-1)^M (M - 1)_{\Sigma^* n_i - 1}.\end{aligned}$$

Per altra banda si $M \geq 1$ $\gamma(u_{i_1}, v_{i_1})\gamma(u_{i_2}, v_{i_2}) = 0$. Resulta, doncs, que tant si $M \geq 1$ com si $M \leq 0$, el terme (5.14) només apareix a una de les dues sèrie de (5.17) i té per coeficient l'expressió (5.15), com volíem provar.

Hem cobert tots els casos possibles i per tant queda provat el teorema quan $d \geq 2$. Pel cas $d = 1$ la sèrie $X_{i_1, i_2, \xi}$ té només dues sèries de claudàtors i la demostració és molt semblant al darrer dels casos que hem vist quan $d \geq 2$. $\square$

**Corol·lari 5.9.** *Suposem que $a_{i_1}, a_{i_2}$ són complexos no nuls i parametritzem $\mathbb{C}^{n-1}$ amb les coordenades variables $a_i, i \neq i_1, i_2$. Sigui*

$$g(z) = 1 + \frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} z^d$$

*una funció base i sigui $\widetilde{f}$ el polinomi d'exponents complexos amb funció base $g$, coeficients $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_2-1}, a_{i_2+1}, \ldots, a_n)$, i exponents $\gamma = (-i_1, 1 - i_1, \ldots, -1, 1, \ldots, d - 1, d + 1, \ldots, n - i_1)$, és a dir,*

$$\widetilde{f}(z) = f(z; g, a, \gamma) = g(z) + \Sigma^* a_i z^{i - i_1}.$$

*Sigui*

$$\alpha = \xi \frac{a_{i_1}^{1/d}}{a_{i_2}^{1/d}}$$

*un zero de $g$. Sigui $\phi(a) : U \longrightarrow L$ diferenciable a l'origen en les variables $a_i, i \neq i_1, i_2$, on $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ és un entorn del 0. Suposem que*

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\phi(a)) &= 0 \\ \phi(0) &= \alpha.\end{aligned}$$

*Denotem per*

$$\frac{a}{a_{i_1}} = \left(\frac{a_0}{a_{i_1}}, \frac{a_1}{a_{i_1}}, \ldots, \frac{a_{i_1-1}}{a_{i_1}}, \frac{a_{i_1+1}}{a_{i_1}}, \ldots, \frac{a_{i_2-1}}{a_{i_1}}, \frac{a_{i_2+1}}{a_{i_1}}, \ldots, \frac{a_n}{a_{i_1}}\right) \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

*Aleshores la sèrie de Taylor de* $\phi\left(\frac{a}{a_{i_1}}\right)$ *al voltant del 0 respecte les variables* $a_i, i \neq i_1, i_2$ *és igual a la sèrie* $X_{i_1,i_2,\xi}$.

DEMOSTRACIÓ: Si apliquem el Teorema 4.2 per trobar el coeficient de $\Pi^* a_i^{n_i}$ a la sèrie de Taylor de $\phi(a)$ obtenim que aquest val

$$-\frac{\left(\xi\frac{a_{i_1}^{1/d}}{a_{i_2}^{1/d}}\right)^{1+\Sigma^* n_i(i-i_1-1)}}{\left(\frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} d \left(\xi\frac{a_{i_1}^{1/d}}{a_{i_2}^{1/d}}\right)^{d-1}\right)^{\Sigma^* n_i}} (-d)^{\Sigma^* n_i - 1} (d^{-1} - 1 + d^{-1}\Sigma^* n_i (i - i_1))_{\Sigma^* n_i - 1} \frac{1}{\Pi^* n_i!},$$

on hem utilitzat que $g'(\alpha) = b\beta\alpha^{\beta-1}$, amb $b = \frac{a_{i_2}}{a_{i_1}}$ i $\beta = d$. Simplifiquem la darrera expressió utilitzant la notació $C = \Sigma^* n_i (i - i_1)$. Queda

$$\frac{\xi^{C+1-d\Sigma^* n_i}}{d} (-1)^{\Sigma^* n_i} \left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\right)^{\frac{C+1}{d}} \frac{(\frac{C+1}{d} - 1)_{\Sigma^* n_i - 1}}{\Pi^* n_i!}.$$

Posem $C = k - 1 + Md$ per a certs enters $M$ i $0 \leq k \leq d - 1$. Com que $\xi^d = -1$,

$$\xi^{C+1-d\Sigma^* n_i} (-1)^{\Sigma^* n_i} = \xi^{k+Md-d\Sigma^* n_i} (-1)^{\Sigma^* n_i} = \xi^k (-1)^M.$$

Per tant la sèrie de Taylor de $\phi\left(\frac{a}{a_{i_1}}\right)$ al voltant del 0 té per coeficient de $\Pi^* a_i^{n_i}$ a

$$\frac{\xi^k}{d} (-1)^M \left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\right)^{(C+1)/d} \frac{\left(\frac{C+1}{d} - 1\right)_{\Sigma^* n_i - 1}}{a_{i_1}^{\Sigma^* n_i} \Pi^* n_i!},$$

que coincideix amb (5.15). Això val quan no tots els $n_i$ són 0. Per completar la demostració hem de veure que quan tots els $n_i$ són 0 llavors el coeficient de $\Pi^* a_i^{n_i}$ a la sèrie $X_{i_1,i_2,\xi}$ és $\alpha$. Tenim que com $\Sigma^* a_i^{n_i} = 0 = k - 1$ quan $k = 1$, i per tant, pel Lema 5.7, el terme $\Pi^* a_i^{n_i}$ només apareixerà com a molt a la sèrie de claudàtors

$$[a_{i_1}^{1/d} a_{i_2}^{-1/d}].$$

Aleshores tindrem: per tot $i \neq i_1, i_2$, $u_i = v_i = 0$, $u_{i_1} = 1/d$, $u_{i_2} = -1/d$ i usant el Lema 5.6, $v_{i_1} = 0$, $v_{i_2}$, i per tant

$$\prod_{i=0}^{n} \gamma(u_i, v_i) a_i^{u_i+v_i} = \frac{a_{i_1}^{1/d}}{a_{i_2}^{1/d}}.$$

El coeficient del terme $\Pi^* a_i^{n_i}$ a $X_{i_1,i_2,\xi}$ queda llavors

$$\xi \frac{a_{i_1}^{1/d}}{a_{i_2}^{1/d}} = \alpha,$$

com volíem provar. □

Finalment vegem com el darrer corol·lari recobreix el resultat d'Sturmfels.

**Corołari 5.10.** *Sigui* $\{i_0, \ldots, i_r\}$ *una triangulació de* $[0, n]$*. Posem* $d_j = i_j - i_{j-1}$*,* $j = 1, \ldots, r$*, i sigui* $\xi = (-1)^{1/d_j}$ *una arrel* $d_j$*-èssima de* $-1$*. Aleshores per a cada* $j$ *i cada* $\xi$ *la sèrie* $X_{j,\xi}$ *és arrel de l'equació general de grau* $n$*,* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$*, és a dir,* $f(X_{j,\xi}) = 0$*.*

DEMOSTRACIÓ: Fixem-nos que la sèrie $X_{i_{j-1}, i_j, \xi}$ que hem definit a (5.12) equival a $X_{j,\xi}$ que hem definit a (5.8). Si apliquem el corol·lari anterior amb $i_1 = i_{j-1}$ i $i_2 = i_j$ sabem que la sèrie de Taylor de $\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})$ al voltant del 0 respecte les variables $a_i, i \neq i_{j-1}, i_j$ és igual a $X_{j,\xi}$, i que $\widetilde{f}(\phi(a)) = f(\phi(a), g, a, \gamma) = 0$. Per tant $f(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}}), g, \frac{a}{a_{ij-1}}, \gamma) = 0$. Ara,

$$f(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}}), g, \frac{a}{a_{i_{j-1}}}, \gamma) = 1 + \frac{a_{i_j}}{a_{i_{j-1}}} \left(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})\right)^d + \Sigma^* \frac{a_i}{a_{i_{j-1}}} \left(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})\right)^{i - i_{j-1}},$$

on $d = d_j = i_j - i_{j-1}$. Per tant la darrera expressió equival a

$$\frac{a_{i_{j-1}} \phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})^{i_{j-1}} + a_{i_j} \left(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})\right)^{i_j} + \Sigma^* a_i \left(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})\right)^i}{a_{i_{j-1}} \phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})^{i_{j-1}}} = \frac{f(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}}))}{a_{i_{j-1}} \phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})^{i_{j-1}}},$$

i sabem que és zero. Per tant obtenim que $f(\phi(\frac{a}{a_{i_{j-1}}})) = 0$, és a dir, $f(X_{j,\xi}) = 0$, com volíem demostrar. $\square$

# 6 Fórmula de segon grau

L'objectiu d'aquest capítol és veure que la fórmula per radicals

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6.1}$$

de les arrels d'un polinomi de segon grau $az^2 + bz + c$ que coneixem concorda amb el desenvolupament de Taylor de les arrels que hem donat en aquest treball. Observem abans una propietat del doble factorial que necessitarem.

**Definició 6.1.** *Donat un natural* $n$ *definim el seu doble factorial com*

$$n!! = \prod_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} (n - 2k) = n(n-2)(n-4)\cdots$$

*és a dir* $n!! = n(n-2)\cdots 2$ *si* $n$ *és parell i* $n!! = n(n-1)\cdots 1$ *si* $n$ *és senar.*

**Observació 6.2.** El factorial d'un nombre positiu $n$ el podem escriure com un producte de dos dobles factorials:

$$n! = n!!(n-1)!!$$

A més si $n = 2k$ amb $k \geq 1$ és clar que

$$n!! = 2^k k!$$

Prenenm ara l'arrel de (6.1) amb signe negatiu. Observem que la derivada $n$-èssima de $\sqrt{1-x}$ és

$$(-1)^n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}.$$

Per tant el desenvolupament de Taylor de $\sqrt{1-x}$ al voltant del 0 és

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}x^n,$$

i per tant

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-b\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}}{2a} = \frac{-b}{a} - \frac{b}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n. \tag{6.2}$$

Vegem com podem obtenir aquest desenvolupament de Taylor a partir del teorema principal d'aquest treball. Considerem el nostre polinomi dividit entre $az^2$,

$$1+\frac{b}{a}z^{-1}+\frac{c}{a}z^{-2}. \tag{6.3}$$

La funció base $g(z)$ serà $1+\frac{b}{a}z^{-1}$ i prendrem l'arrel de $g$, $\alpha = \frac{-b}{a}$. Aleshores

$$g'(z) = \frac{-b}{az^2}, \quad g'(\alpha) = \frac{-a}{b}.$$

En aquesta situació, la fórmula que proporciona el Teorema 1.8 per al desenvolupament de Taylor al voltant de l'origen d'una arrel $\phi(\frac{c}{a})$ de (6.3) és

$$\frac{-b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)\frac{(\frac{-b}{a})^{1-3n}}{(\frac{-a}{b})^n}\prod_{j=1}^{n-1}(-1-j+2n)\left(\frac{c}{a}\right)^n \tag{6.4}$$

Volem veure que (6.2) i (6.4) coincideixen. Agafem el coeficient de $c^n$, $n>0$, de cada una de les expressions i igualem-los. Podem simplificar el factorial de $n$, les potències de $a$ i $b$, i el $(-1)$, per tant queda per provar la següent igualtat:

$$(-1)^n \frac{4^n}{2}(\frac{1}{2})_n = -\prod_{j=1}^{n-1}(-1-j+2n). \tag{6.5}$$

L'expressió de la dreta la podem expressar com

$$-\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

Per altra banda a l'esquerra tenim

$$(-1)^n \frac{4^n}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-2n+3}{2} = -2^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3) = -2^{n-1}(2n-3)!!$$

Per tant per provar (6.5) n'hi ha prou en veure que

$$2^{n-1}(2n-3)!! = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$$

i això és clar ja que

$$2^{n-1}(n-1)!(2n-3)!! = (2n-2)!!(2n-3)!! = (2n-2)!$$

on hem usat les propietat de l'Observació 6.2.

Prenem ara l'arrel amb signe positiu de (6.1). Aquesta vegada el $\frac{-b}{2a}$ es cancel·la amb el primer terme de la suma infinita i queda

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n. \tag{6.6}$$

Observem que aquesta expressió la podem veure com el desenvolupament de Taylor al voltant del 0 respecte la variable $a$ i que quan $a=0$ val $\frac{-c}{b}$. Per tant per trobar aquesta sèrie en el Teorema 1.8, dividim ara el polinomi entre $c$,

$$\frac{a}{c}z^2 + \frac{b}{c}z + 1 = 0.$$

La funció $g(z)$ serà $1+\frac{b}{c}z$, $\alpha = \frac{-c}{b}$, i $g'(\alpha) = \frac{b}{c}$. Per tant la fórmula que ens proporciona el Teorema 1.8 és

$$\frac{-c}{b} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)\frac{(\frac{-c}{b})^{1+n}}{(\frac{b}{c})^n}\prod_{j=1}^{n-1}(-1+j-2n)\left(\frac{a}{c}\right)^n \tag{6.7}$$

Agafem com abans els coeficients de $a^n$ de (6.6) i (6.7) i igualem-los. Podem simplificar els factorials i les potències de $b, c$. Queda per provar, doncs, la igualtat

$$-\frac{1}{2}4^{n+1}\frac{(\frac{1}{2})_{n+1}}{n+1} = \prod_{j=1}^{n-1}(-1+j-2n). \tag{6.8}$$

L'expressió de la dreta la podem reescriure com

$$(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(n+1)!},$$

i la de l'esquerra com

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\frac{(2n-1)!!}{n+1}.$$

Per tant per demostrar (6.8) n'hi ha prou en veure que

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(2n-1)!!,$$

que és cert per les propietats de l'Observació 6.2.

# 7 Regla de transformació

En aquest capítol enunciarem una regla de transformació que relaciona la sèrie de Taylor del zero que proporciona el Teorema 1.8 de cada un dels següents polinomis d'exponents complexos:

$$f(z; g_1, a, \gamma), \quad f(z; g_2, a, \beta_2\gamma), \tag{7.1}$$

on

$$g_1(z) = 1 + bz^{\beta_1} \quad \text{i} \quad g_2(z) = 1 + bz^{\beta_1\beta_2}.$$

La demostració d'aquesta regla de transformació utilitza una extensió del teorema binomial de Newton:

**Teorema 7.1.** *Sigui $w$ un nombre complex qualsevol. Aleshores si $|z| < 1$,*

$$(1+z)^w = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{w}{k} z^k,$$

*on $\binom{w}{k}$ són una generalització dels coeficients binomials:*

$$\binom{w}{k} = \frac{w(w-1)\cdots(w-k+1)}{k!} = \frac{(w)_k}{k!}.$$

La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [2].

Anomenem $\alpha_1$ al zero de $g_1(z)$ i denotem

$$\phi(a; \gamma, b, \beta_1)$$

el corresponent zero de la primera funció de (7.1) que ens proporciona el Teorema 1.8. Observem llavors que si posem

$$\alpha_2 = \alpha_1^{\frac{1}{\beta_2}},$$

$\alpha_2$ és un zero simple de $g_2(z)$. Denotarem també

$$\phi(a; \beta_2\gamma, b, \beta_1\beta_2)$$

el corresponent zero de la segona funció de (7.1) que ens proporciona el Teorema 1.8.

La regla de transformació és la següent:

**Teorema 7.2.** *En la notació anterior tenim la següent igualtat de les sèries de Taylor al voltant de $a = 0$*

$$\phi(a; \gamma, b, \beta_1)^{\frac{1}{\beta_2}} = \phi(a; \beta_2\gamma, b, \beta_1\beta_2). \tag{7.2}$$

La demostració d'aquest resultat és semblant a altres que hem vist en el treball. Es tracta de comprovar que el coeficient de

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{a_j^{m_i}}{m_j!}$$

coincideix a cadascuna de les sèries de (7.2). La demostració, a més d'aplicar el teorema fonamental d'aquest treball, també fa ús del Teorema 7.1 i alguns dels lemes que hem provat en els capítols 2 i 3. Es pot trobar a [5].

# 8 Extensió del teorema principal

En aquest capítol enunciarem una generalització del Teorema 1.8 que dóna Mario DeFranco a [5]. No la demostrarem perquè la demostració és llarga i semblant a la demostració del Teorema 4.2. Es pot trobar a [5].

La generalització ve de que aquesta vegada la funció base no serà de la forma $1 + bz^\beta$ sinó una funció holomorfa qualsevol.

**Definició 8.1.** *Una funció base $g(z)$ serà en aquest capítol un funció holomorfa $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Assumirem que $g(z)$ té un zero simple $\alpha$ i per tant podem escriure $g(z)$ com una sèrie de potències localment al voltant de $\alpha$,*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k, \tag{8.1}$$

*per a certs $c_k \in \mathbb{C}$, amb $c_1 \neq 0$.*

Fixem d'ara en endavant una funció base $g(z)$ i un zero $\alpha$ i fixem també un element de la superfície de Riemann $L$ que es correspongui amb $\alpha$, és a dir que la seva projecció a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sigui $\alpha$, i denotem-lo també $\alpha$. Aleshores $g(z)$ determina una funció amb domini un entorn $V$ de $\alpha$ a $L$ via la projecció a $\mathbb{C}$, és a dir,

$$\begin{array}{ccccc} V & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = (r, \theta, n) & \longmapsto & z^1 & \longmapsto & g(z) \end{array}$$

**Definició 8.2.** *Fixem un enter $d \geq 1$ i sigui $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{C}^d$ una $d$-tupla de complexos. Per $a \in \mathbb{C}^d$ definim la funció*

$$\begin{aligned} f(z, a, \gamma, g) :& L \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longmapsto g(z) + \sum_{i=1}^{d} a_i z^{\gamma_i}. \end{aligned}$$

**Definició 8.3.** *Sigui $\mu$ una successió infinita $(\mu_i)_{i=1}^{\infty}$ d'enters no negatius $\mu_i$ tals que $\mu_i = 0$ per $i$ prou gran. Sigui $r \geq 1$ un enter i $C(r)$ el conjunt de totes les successions $\mu$ tals que*

$$\sum_{i \geq 1} \mu_i = r.$$

**Observació 8.4.** $C(r)$ es coneix com el conjunt de composicions de l'enter $r$ amb parts no negatives.

**Definició 8.5.** *Siguin $x \in \mathbb{C}$, i $r \geq 0$, $a \geq 1$ enters. Aleshores definim*

$$\begin{aligned} F(x, r, a) = \frac{-\alpha^x}{(a-1)!} \sum_{\mu \in C(r)} (-1)^{\mu_1} \binom{x}{r - \sum_{i \geq 2}(i-1)\mu_i - (a-1)} \times \\ \times (r + \sum_{i \geq 2} \mu_i)! \frac{\alpha^{-(r - \sum_{i \geq 2}(i-1)\mu_i - (a-1))}}{c_1^{r+1+\sum_{i \geq 2} \mu_2}} \prod_{i \geq 2} \frac{c_i^{\mu_i}}{\mu_i}, \end{aligned}$$

*i també definim*

$$F(x, -1, a) = 0.$$

Recordem que donada una funció

$$\psi : U \longmapsto \mathbb{C}$$

i un multiconjunt $I \in MC(d)$, denotem

$$\partial(\psi, I) = \left( \prod_{i=1}^{|I|} \frac{\partial}{\partial a_{I(i)}} \right) \psi(a)|_0.$$

Aleshores l'extensió del Teorema 1.5 és la següent:

**Teorema 8.6.** *Sigui $f$ una funció com la de la Definició 8.2. Suposem que en un entorn $U \subset \mathbb{C}^d$ al voltant de l'origen existeix una funció diferenciable*

$$\begin{aligned} \phi(a;\gamma,g,\alpha) : U &\longrightarrow L \\ a &\longmapsto \phi(a,\gamma,g,\alpha) \end{aligned}$$

*que satisfà que per tot $a \in U$*

$$\begin{aligned} &f((\phi(a;\gamma,g,\alpha);a,\gamma,g)) = 0 \\ &\phi(0;\gamma,g,\alpha) = 0. \end{aligned}$$

*Sigui $I \in MC(d)$ un multiconjunt amb $|I| \geq 1$. Aleshores*

$$\partial(\phi, I) = F(\sum_{m\in I} \gamma_m, |I|-1, 1)$$

**Observació 8.7.** Fins a aquest capítol, per nosaltres la funció base era una funció del tipus:

$$g(z) = 1 + bz^{\beta}, \tag{8.2}$$

amb $b, \beta$ complexos no nuls. Aquesta funció és holomorfa i per tant el Teorema 8.6 generalitza el Teorema 1.8. De fet, la derivada $k$-éssima de (8.2) és

$$b(\beta)_k z^{\beta-k},$$

de manera que (8.2) és un cas particular de (8.1) quan

$$c_k = b\frac{(\beta)_k}{k!}\alpha^{\beta-k}.$$

Així doncs, quan $g(z)$ és de la forma (8.2) els Teoremes 1.8 i 8.6 donen dues fórmules diferents per a $\partial(\phi, n)$ que sabem que valen el mateix. DeFranco proposa com a objectiu trobar una prova directa d'aquesta igualtat.

# 9 Extensió de la Proposició 3.8

En aquest capítol respondrem a una de les preguntes que proposa Mario DeFranco a [4]. Es tracta de generalitzar la Proposició 3.8 utilitzant més elements $f_A, f_B, f_C, \ldots$.
Aclarem primer una notació que usarem en la proposició i la demostració.

**Definició 9.1.** *Sigui $k$ un enter positiu. Direm que $s$ és una partició ordenada de $[1, M]$ en $k$ parts si és una $k$-tupla ordenada $(s_1, \ldots, s_k)$ on els $s_i$ són subconjunts disjunts dos a dos de $[1, N]$ tals que*

$$\bigcup_{i=1}^{k} s_i = [1, M].$$

*Denotarem $P(M, k)$ el conjunt de $k$-tuples ordenades de $[1, M]$ en $k$ parts.*

L'enunciat de la generalització de la Proposició 3.8 és el següent:

**Proposició 9.2.** *Sigui $R$ un anell commutatiu i $\delta : R \longrightarrow R$ una derivació a $R$. Siguin $M \geq 0$, $k \geq 2$ enters i $f_i, g_j, 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq k$, elements d'un anell. Aleshores*

$$\sum_{s \in P(M,k)} \delta^{|s_k|}(g_k \prod_{i \in s_k} f_i) \prod_{j=1}^{k-1} \delta^{|s_j|-1}(g_j^{(1)} \prod_{i \in s_j} f_i) = \delta^M(\prod_{j=1}^{k} g_j \prod_{i=1}^{M} f_i),$$

*on $g_j^{(1)}$ denota $\delta g_j$ i en el cas que $s_j = \emptyset$, $\delta^{-1} g_j^{(1)}$ denota $g_j$.*

Vegem primer que això generalitza la proposició 3.8. En efecte, quan $k = 2$ els elements $s \in P(M,k)$ són parelles ordenades $(s_1, s_2)$ de manera que $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ i $s_1 \cup s_2 = [1, M]$, per tant $s_2^c = s_1$. Si renombrem $g_1 = f_A, g_2 = f_B$ aleshores la fòrmula de la proposició queda

$$\sum_{s \in P(M,2)} \delta^{|s_2|}(g_B \prod_{i \in s_2} f_i) \delta^{|s_2^c|-1}(g_A^{(1)} \prod_{i \in s_2^c} f_i) = \delta^M(g_A g_B \prod_{i=1}^{M} f_i).$$

Per tant per per provar que aquesta fòrmula coincideix amb la (3.1) de la Proposició 3.8 n'hi ha prou en veure que per cada $w \in [1, M]$ existeix un i només un $s \in P(M, 2)$ de manera que $w = s_2$. Això és clar ja que per cada $w \in [1, M]$ tenim la partició ordenada $(w^c, w) \in P(M, 2)$ i recíprocament per cada partició ordenada $s = (s_1, s_2)$ podem prendre el conjunt $w = s_2$.

Fem ara la demostració de la Proposició 9.2 que consistirà en generalitzar aquesta idea i utilitzar la mateixa Proposició 3.8.

DEMOSTRACIÓ: Definim $w_0 = [1, M]$ per simplificar la notació. Provem primer que sumar sobre

$$\sum_{w_1 \subset w_0, w_2 \subset w_1, \cdots, w_{k-1} \subset w_{k-2}} \tag{9.1}$$

i sumar sobre

$$\sum_{s \in P(M,k)}$$

és equivalent, és a dir que per cada partició ordenada $s = (s_1, \ldots, s_k)$ existeix un i només un sumand de (9.1) tal que

$$(s_1, \ldots, s_k) = (w_1^c, \ldots, w_{k-1}^c, w_{k-1}), \tag{9.2}$$

on $w_i^c$ denota el complementari respecte $w_{i-1}$, és a dir, $w_i^c = w_{i-1} \backslash w_i$, per tot $1 \leq i \leq k-1$.

En efecte, donada la partició $s = (s_1, \ldots, s_k)$, si per tot $1 \leq i \leq k-1$ prenem

$$w_i = \bigcup_{i=i+1}^{k} s_i,$$

aleshores és clar que $w_{k-1} = s_k$ i com que $w_i \setminus w_{i+1} = s_{i+1}$ resulta que per tot $1 \leq i \leq k-1$, $s_i = w_i^c$. A més, l'elecció dels $w_i$ de manera que es compleixi (9.2) només podia ser aquesta: sigui $(v_1, \ldots, v_k)$ tal que $(v_1^c, \ldots, v_{k-1}^c, v_{k-1}) = (w_1^c, \ldots, w_{k-1}^c, w_{k-1})$. Llavors $v_{k-1} = w_{k-1}$. Ara, suposem que hem provat la igualtat $v_i = w_i$ per un cert $1 < i < k$. Llavors com que $v_{i-1} \subset v_i$ i anàlogament per a $w$, és clar que de la igualtat $v_{i-1} \setminus v_i = w_{i-1} \setminus w_i$ en resulta la igualtat $v_{i-1} = w_{i-1}$ i per tant inductivament tenim que per tot $1 \leq i \leq k$, $v_i = w_i$, com volíem veure.

Així doncs, la fòrmula que volem provar és equivalent a

$$\sum_{w_1\subset w_0, w_2\subset w_1,\ldots,w_{k-1}\subset w_{k-2}} \delta^{|w_{k-1}|}(g_k \prod_{i\in w_{k-1}} f_i) \prod_{j=1}^{k-1} \delta^{|w_j^c|-1}(g_j^{(1)} \prod_{i\in w_j^c} f_i) = \delta^M(\prod_{j=1}^{k} g_j \prod_{i=1}^{M} f_i), \tag{9.3}$$

El membre de l'esquerra de (9.3) el podem reexpressar com

$$\sum_{w_1\subset w_0, w_2\subset w_1,\ldots,w_{k-2}\subset w_{k-3}} \left(\prod_{j=1}^{k-2} \delta^{|w_j^c|-1}(g_j^{(1)} \prod_{i\in w_j^c} f_i)\right) \times$$

$$\times \sum_{w_{k-1}\subset w_{k-2}} \delta^{|w_{k-1}^c|-1}(g_{k-1}^{(1)} \prod_{i\in w_{k-1}^c} f_i) \delta^{|w_{k-1}|}(g_k \prod_{i\in w_{k-1}} f_i). \tag{9.4}$$

Podem aplicar ara la Proposició 3.8 al factor (9.4) i obtenim

$$(9.4) = \delta^{|w_{k-2}|}(g_{k-1}g_k \prod_{i\in w_{k-2}} f_i).$$

Per tant el membre de l'esquerra de (9.3) equival a

$$\sum_{w_1\subset w_0, w_2\subset w_1,\ldots,w_{k-2}\subset w_{k-3}} \delta^{|w_{k-2}|}(g_{k-1}g_k \prod_{i\in w_{k-2}} f_i) \prod_{j=1}^{k-2} \delta^{|w_j^c|-1}(g_j^{(1)} \prod_{i\in w_j^c} f_i)$$

Fixem-nos que estem en la mateixa situació que (9.3) però com si la $k$ hagués disminuït en una unitat i $g_{k-1} := g_{k-1}g_k$. Aleshores podem iterar aquest procés que prova la igualtat per qualsevol $1 \le r \le k-1$ de les expressions

$$\sum_{w_1\subset w_0, w_2\subset w_1,\ldots,w_r\subset w_{r-1}} \delta^{|w_r|}(\prod_{j=r+1}^{k} g_j \prod_{i\in w_r} f_i) \prod_{j=1}^{r} \delta^{|w_j^c|-1}(g_j^{(1)} \prod_{i\in w_j^c} f_i).$$

Quan $r$ val 1 aquesta expressió és

$$\sum_{w_1\subset w_0} \delta^{|w_1|}(\prod_{j=2}^{k} g_j \prod_{i\in w_1} f_i) \delta^{|w_1^c|-1}(g_1^{(1)} \prod_{i\in w_1^c} f_i)$$

que aplicant de nou la Proposició 3.8 esdevé

$$\delta^M(\prod_{j=1}^{k} g_j \prod_{i=1}^{M} f_i),$$

i això completa la demostració. □

# 10 Conclusions

Determinar els zeros d'un polinomi qualsevol és un dels objectius fonamentals tant de les matemàtiques pures com de les aplicades. Malgrat que no existeixen solucions generals per radicals per a polinomis de grau més gran o igual que cinc, sí que es poden considerar sèries formals que de manera unificada proporcionen els zeros d'un polinomi general de qualsevol grau. És, doncs, un resultat molt important i que ja s'havia estudiat anteriorment per molts autors.

En aquest treball hem seguit els articles [4] i [5] de Mario DeFranco, publicats aquest mateix 2021, on es calcula directament una factorització dels coeficients de la sèrie de Taylor d'un zero d'un polinomi qualsevol. Les novetats que presenten aquests articles respecte el que s'havia fet fins ara són dues: d'una banda la tècnica utilitzada, calcular directament la sèrie de Taylor usant resultats de combinatòria; i per altra banda el fet que el teorema de factorització val per funcions molt més generals que els polinomis, els polinomis d'exponents complexos. Aquestes funcions són com els polinomis però els exponents de la indeterminada poden ser complexos, i no només enters positius.

Així doncs, l'objectiu principal d'aquest treball ha sigut llegir, entendre i escriure la feina feta per DeFranco, així com també estudiar tots aquells conceptes nous i necessaris per demostrar el teorema principal. Per tant el treball també ha servit per conèixer alguns conceptes i aprendre algunes de les tècniques habituals de la branca de les matemàtiques de combinatòria.

Els articles objecte d'estudi d'aquest treball, [4] i [5], han estat publicats al gener i març d'aquest 2021, respectivament. Per tant, una qüestió no menor per acomplir els objectius del treball ha sigut revisar amb deteniment tota la feina feta per DeFranco. He corregit, doncs, alguns errors, i també simplificat alguna demostració. També m'he trobat sovint en situacions en què s'ometien passos i es donaven per trivials algunes afirmacions, i per tant una altra feina que he hagut de fer ha sigut veure que, efectivament, totes aquestes afirmacions són certes i demostrar-les. A l'Apèndix hi ha un recopilatori de tots aquests errors comesos per DeFranco així com també un llistat d'aquelles demostracions que he simplificat o que he hagut de provar.

Finalment, el darrer objectiu del treball ha sigut intentar continuar la feina de DeFranco. Al final de cada un dels articles [4] i [5], DeFranco proposa camins i planteja preguntes naturals que sorgeixen de la feina feta. Comentem a continuació algunes d'aquestes preguntes.

La pregunta més natural i òbvia un cop demostrat el Teorema 1.8 és si aquesta fórmula concorda i quina relació té amb els resultats coneguts fins ara. El mateix DeFranco a [4] prova que el Teorema 1.8 recobreix els resultats de Sturmfels a [11], com hem vist també en aquest treball al capítol 5. Una pregunta que planteja DeFranco és, doncs, provar que del Teorema 1.8 surten les solucions per radicals conegudes per a polinomis de grau 1 fins a 4. En aquest treball hem respost part d'aquesta pregunta: hem vist com podem obtenir les solucions de l'equació de grau dos amb la fórmula que ens proporciona el teorema principal. En aquest cas és força directe fer-ho ja que calcular l'expansió de Taylor al voltant d'un dels coeficients de les solucions de l'equació de segon grau és senzill. Si el grau del polinomi és tres o quatre aleshores es complica més perquè calcular l'expansió de Taylor de les arrels ja no és fàcil. Una altra qüestió relacionada és veure si a partir de les sèries del teorema principal es pot demostrar que és impossible obtenir solucions per radicals dels polinomis de grau més gran o igual a cinc.

Una altra de les preguntes que planteja DeFranco és generalitzar la Proposició 3.8 d'aquest treball, que dóna una fórmula sobre derivacions en anells commutatius. Es tracta de donar una fórmula quan enlloc de tenir dos elements en tens un nombre arbitrari $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Aquesta pregunta també queda resposta en aquest treball, al capítol 9. Aquesta nova proposició podria fer-nos pensar de simplificar les demostracions dels teoremes 3.9 i 3.10.

Altres qüestions que he intentat demostrar i no me n'he sortit són les següents:

- Provar directament la factorització dels coeficients que dóna el Teorema 1.8 a partir de l'extensió, el Teorema 8.6.
- Generalitzar la regla de transformació per a polinomis d'exponents complexos amb funció base $g(z)$ amb múltiples termes.

## Referències


[1] Aigner, M.: *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[2] Coolidge, J.L.: The Story of the Binomial Theorem, The American Mathematical Monthly, 147-157, 1949.

[3] D'Andrea, Carlos: Funciones Algebraicas y Sistemas Hipergeométricos de Ecuaciones Diferenciables, Tesis de la Universidad de Buenos Aires, Departamento de Matematicas, març de 1997.

[4] DeFranco, Mario: On Taylor Series of zeros of complex-exponent polynomials, `arXiv:2101.01833v1 [math.CV]`, gener de 2021.

[5] DeFranco, Mario: On Taylor Series of zeros with general base function, `arXiv:2103.07831v1 [math.CV]`, març de 2021.

[6] Farkas, H.M.; Kra, I.: *Riemann Surfaces*, 2a edició Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] Gamelin, Theodore W.: *Complex Analysis*, Springer, Los Angeles, 2000.

[8] Gel'fand, I.M.; Zelevinsky, A.V.; Kapranov, M.M.; *Hypergeometric Functions and Toral Manifolds*, Functional Analysis and Applications 23, 94-106, 1989.

[9] Gel'fand, I.M.; Zelevinsky, A.V.; Kapranov, M.M.; *Generalized Euler integrals and $\mathcal{A}$-hypergeometric functions*, Advances in Mathematics 84, 255-271, 1990.

[10] McDonald, J.: Fiber Polytopes and fractional power series, Journal of Pure and Applied Algebra, 104, 213-233, 1995.

[11] Sturmfels, B.: Solving algebraic equations in terms of $\mathcal{A}$-hypergeometric series, Discrete Maths 210, 171-181, 2000.

[12] Weisstein, Eric W.: Binomial Theorem, *MathWorld*.

# Apèndix

En aquesta secció donarem un llistat d'aquells errors detectats als articles [4] i [5], objecte principal d'estudi d'aquest treball. També inclourem al llistat les demostracions que he simplificat o que he provat jo mateix.

Comencem veient una llista de les errades de [4] i [5]:

- Al capítol 2, així com també fa DeFranco a la secció 3 de [4], donem dues definicions equivalents dels nombres d'Stirling de primera i segona espècie. La segona definició que dóna DeFranco dels nombres d'Stirling de primera espècie ve donada per la relació
$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} N \\ r+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+1 \\ r+1 \end{bmatrix},$$
i les condicions inicials
$$\begin{bmatrix} N \\ N \end{bmatrix} = 1, \quad \text{per tot} \quad N \geq 1,$$
$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} = 0 \quad \text{per tot} \quad N < r.$$
Aquesta definició no és bona perquè només permet determinar el valor de
$$\begin{bmatrix} N \\ r \end{bmatrix} \quad \text{per} \quad N \leq r.$$
La definició que hem donat en aquest treball sí que és correcte i equivalent a la primera definició i, a més, necessita menys condicions inicials. La definició per recurrència dels nombres d'Stirling de segona espècie de [4] sí que es correcte però es deixa els nombres
$$\begin{Bmatrix} N \\ r \end{Bmatrix} \quad \text{quan} \quad r = 0,$$
i també es pot donar amb menys condicions inicials. Això és important perquè permet simplificar la demostració del Lema 2.5, com hem fet en aquest treball.

- En la demostració del Teorema 3.9, DeFranco calcula malament el coeficient de
$$\prod_{i=1}^{l} x_i^{n_i} \tag{10.1}$$
de cada una de les expressions de la igualtat
$$\sum_{w \subset [1,M]} \begin{bmatrix} |w^c| - 1 \\ a-1 \end{bmatrix}_{\sum_{i \in w^c} x_i} \begin{bmatrix} |w| \\ b \end{bmatrix}_{\sum_{i \in w} x_i} = \binom{a+b}{a} \begin{bmatrix} M \\ a+b \end{bmatrix}_{\sum_{i=1}^{M} x_i}. \tag{10.2}$$
Tot i així arriba a la conclusió correcte, la igualtat dels dos coeficients, ja que fa el mateix error a banda i banda.

- A la secció 5 de [4] s'observa que la funció $\gamma$ (la Definició 5.1 d'aquest treball) satisfà la propietat que si $u$ no és un enter negatiu aleshores
$$\gamma(u, v) = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+v+1)}. \tag{10.3}$$
Això no és cert: si $u$ és un enter positiu i $u + v + 1 \leq 0$ llavors (10.3) no està ben definit ja que la funció $\Gamma$ no està definida en els enters no positius.

Finalment enumerem aquelles demostracions del treball que he fet jo mateix o que he simplificat.

- La demostració de la Proposició 1.7 on es prova l'existència d'un zero $\alpha$ de la funció base $g(z)$
- La demostració 2.4 on es prova l'equivalència entre les dues definicions dels nombres d'Stirling.
- La demostració del Lema 2.5 està simplificada respecte la que dóna DeFranco.
- A la demostració del Teorema 3.9, el càlcul del coeficient de (3.10) de les expressions de (3.9).
- La prova de la fòrmula

$$\partial(f \circ \phi, I) = \sum_{h=1}^{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\gamma_{I(h)})_k \alpha^{\gamma_{I(h)}-k} \sum_{J \in \text{Parts}(I(\hat{h}),k)} \prod_{j=1}^{k} \partial(\phi, J_j)$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} g^{(k)}(\alpha) \sum_{J \in \text{Parts}(I,k)} \prod_{i=1}^{k} \partial(\phi(a), J_i).$$

  en la demostració del Teorema 4.2.
- El Cor·lari 5.10.

Finalment, els capítols 6 i 9 també són de producció pròpia.