Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS Y ADE

Trabajo final de grado

PROBLEMAS DE BANCARROTA

Autor: JORDI PALLARÉS LORENZO

Tutor: Dr. Josep María Izquierdo
Dr. Josep Vives

Barcelona, 20 de junio de 2021

Abstract

Bankruptcy problems appears when a company goes to bankrupt and with his assets can not cope with the demands of creditors. In this essay we will focus on study how to distribute the assets among the plaintiffs. We will mention the main distribution rules and we will focus on study the implementation of the Talmudic rule proposed by Tsay and Yeh (2019) and the alternative version suggested by Moreno-Ternero et al. (2020). We will see the differences between both implementations and we will demonstrate that using backward induction the rules proposed by both correspond to the payout of the Talmudic rule. Finally, we'll briefly mention that it is also possible do the implementation for the whole family of the Talmudic rule.

Resumen

Los problemas de bancarrota surgen cuando una empresa va a la quiebra y con sus bienes no puede hacer frente a las demandas de los acreedores. En el trabajo nos centraremos en estudiar como repartir los bienes entre los demandantes. Mencionaremos las principales reglas de reparto y nos centraremos en estudiar la implementación de la regla Talmúdica que propone Tsay y Yeh (2019) y la versión alternativa que sugiere Moreno-Ternero et al. (2020). Veremos que diferencias hay entre ambas implementaciones y demostraremos que utilizando la inducción hacia atrás las reglas propuestas por ambos corresponden a los pagos de la regla Talmúdica. Finalmente mencionaremos brevemente que también es posible realizar la implementación para toda la familia de la regla Talmúdica.

2010 Mathematics Subject Classification. 11G05, 11G10, 14G10

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda y el ánimo de mis tutores, Dr. Josep María Izquierdo y Dr. Josep María Vives. Es por eso que les quiero agradecer su dedicación y su tiempo durante estos meses. También quiero agradecer a mi familia por estar siempre que los necesito y darme apoyo durante toda la etapa académica que esta a punto de acabar. Por último y no menos importante a mi pareja, Esther que ha estado siempre en los buenos y malos momentos. Muchas gracias!

Índice general

Introducción

En economía, uno de los principales objetivos es la asignación eficiente de los recursos escasos. Una de las disciplinas que estudia el reparto eficiente es la Teoría de Juegos, que utiliza la matemática aplicada como una herramienta para entender el comportamiento de la economía.

Uno de los modelos económicos más simples, aunque interesantes, es el del racionamiento. Un conjunto de agentes demandan una cantidad de un recurso escaso de forma que la cuantía a repartir no es suficiente para satisfacer todas las demandas. Los problemas de bancarrota son un ejemplo de ello. Centrándonos en este tipo de modelos, los problemas surgen cuando una empresa va a la quiebra y el valor que se tiene que repartir es inferior a la reclamación de sus acreedores.

Hay dos tradiciones que sustentan las reglas de reparto: la regla proporcional de tradición Aristotélica y la regla de reparto igualitario. Dentro de este grupo vamos a estudiar las 4 reglas de reparto más importantes, que son: la regla proporcional, la regla de ganancias igualitarias (CEA), la regla de pérdidas igualitarias (CEL) y la regla Talmúdica. Además, para la regla Talmúdica existe un caso particular, la regla *contested garment* (conceder y dividir) que se usa en el caso de dos agentes.

Por otra parte durante muchos años se han estudiado problemas de reparto, y una muestra de ello se encuentra en el libro del Talmud, que recoge el siguiente ejemplo:

Un hombre, que tiene deudas por 100, 200 y 300 (en alguna unidad), muere y lo que deja como herencia no es suficiente para pagar el total de sus deudas.

Asimismo, el propio libro indica cómo se debe pagar a los acreedores para tres casos posibles: cuando la herencia es 100, 200 y 300. Vemos la solución ilustrada en el siguiente cuadro.

Herencia /Demanda	100	200	300
E=100	100/3	100/3	100/3
E=200	50	75	75
E=300	50	100	150

Cuadro 1: Libro Talmud

En el cuadro 1, la primera fila nos muestra las deudas que tiene el difunto con sus acreedores. La segunda fila nos indica como se realizan los pagos cuando la herencia es 100, (E=100). La tercera fila nos muestra para una herencia de 200 los pagos a cada acreedor. La última fila nos muestra los pagos cuando E=300. Aunque en el libro no se diera ningúna explicación se puede intuir que en el caso E=100 se asignan los pagos de forma igualitaria y en el caso E= 300 se reparte de manera proporcional. En el caso E=200 no parece corresponder con ningún criterio de asignación y de hecho esta incógnita se mantuvo durante 2000 años hasta que Aumann y Maschler, (1985) publicaron su artículo dando respuestas a las preguntas que generaba este caso.

Esencialmente descubrieron que los tres casos seguían un mismo patrón, que es el siguiente: si el presupuesto (E) no supera la mitad de las demandas se aplica el reparto en igual ganancia (CEA) y si el presupuesto es mayor que la mitad de las demandas se aplica el reparto de igual pérdida (CEL). Este patrón es la regla Talmúdica, un híbrido de ambas reglas.

En el trabajo nos centramos en analizar la implementación de la regla Talmúdica. Vamos a definir que quiere decir implementar y daremos un ejemplo explicativo. La implementación consiste en definir una serie de reglas en un juego no cooperativo de forma que aunque los jugadores tengan sus propias estrategias, en equilibrio el resultado es el propuesto por la regla. Para entender mejor este concepto vamos a explicar con un ejemplo que es implementar una regla.

Ejemplo 0.0.1. Una madre hace un pastel a sus dos hijos y su intención es repartirlo en partes iguales. Pero la madre no quiere imponer la solución y les propone a sus hijos el siguiente juego. Tirando una moneda se elige cual de sus hijos escoge primero el trozo de pastel que este prefiera, pero el otro hijo es el que corta el pastel. Por tanto tenemos que el primero elige que trozo quiere, mientras que el segundo es el que decide como reparte el pastel. La solución se intuye rápidamente ya que el segundo hijo corta el pastel en partes iguales para así asegurarse la mitad. El resultado es un medio del pastel para cada jugador.

Para tener una idea de como funciona cada una de las reglas de reparto que utilizaremos en el trabajo vemos en la siguiente figura la manera de repartir el presupuesto en el caso de dos agentes (Thomson, 2015).

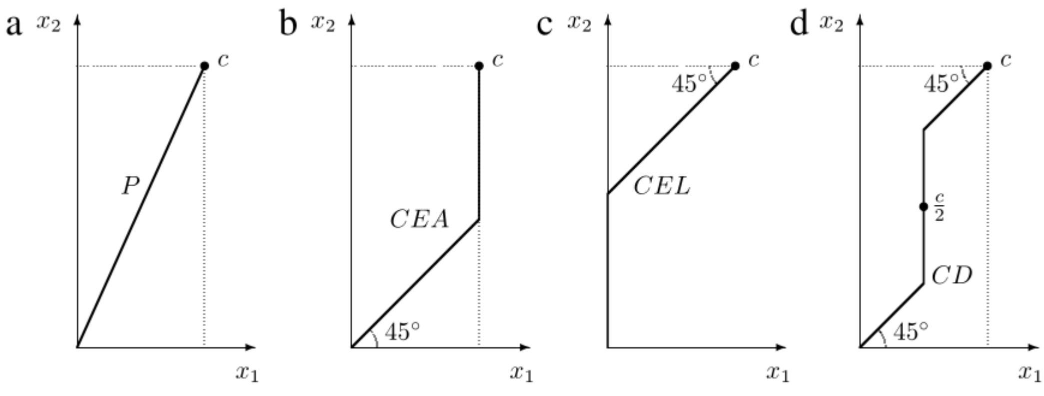

Figura 1: Gráfica

En la primera gráfica se encuentra el método de pago de la regla proporcional, que reparte proporcionalmente, como su propio nombre indica. La segunda gráfica, corresponde a la regla CEA, la cual reparte el presupuesto entre los dos agentes de la misma manera (45 grados), hasta que el que tiene la demanda más pequeña reciba toda su petición y si quedara presupuesto lo recibiría íntegro el otro agente. Finalmente, comentaremos la tercera gráfica y la cuarta, que son la CEL y la CD. La CEL funciona de forma inversa a la CEA y la CD (la regla *contested garment*) se comporta como la CEA hasta la mitad de las reclamaciones y como la CEL en la otra mitad.

Para acabar, realizaremos un breve resumen acerca de que consiste cada sección, por tanto, la estructura de la memoria será la siguiente:

- En primer lugar, introduciremos el modelo de los problemas de bancarrota y definiremos que es un problema de bancarrota.
- A continuación, explicaremos brevemente las principales reglas de reparto y definiremos las ocho principales propiedades de dichas reglas.
- Más adelante, analizaremos la implementación de la regla Talmúdica que hace Tsay y Yeh, (2019) en el caso de dos agentes, y demostraremos que el juego propuesto por Tsay y Yeh, (2019) da en equilibrio los pagos correspondientes a la regla Talmúdica. También analizaremos la implementación alternativa que realiza Moreno-Ternero et al.(2020) en el caso de dos agentes. Demostraremos por inducción hacia atrás que el juego propuesto por Moreno Ternero et al. (2020) da en equilibrio los pagos correspondientes a la regla Talmúdica. Finalmente realizaremos una breve comparación entre los dos modelos.
- Llegados a este punto, nos centraremos en la implementación de la regla Talmúdica para problemas de más de tres agentes de Moreno-Ternero et, al. (2020).
- Finalmente, explicaremos la familia de la regla Talmúdica.

Capítulo 1

Modelo

Existe un conjunto infinito de posibles acreedores ordenado por el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Sea $\mathscr{N}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. En cada problema de Bancarrota tendremos un conjunto finito de acreedores involucrados, y lo representaremos por $\mathbf{N}$=$\{1, 2, ..., n\}$. Dado $\mathbf{N} \in \mathscr{N}$, llamaremos E al presupuesto o valor de liquidación de una empresa en quiebra. El presupuesto tiene que ser estrictamente positivo, $E > 0$ y perfectamente divisible para que pueda repartirse entre sus acreedores $\mathbf{N}$ en cualquier forma.

Cada acreedor tiene el derecho a pedir su respectiva demanda. Denotaremos con $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ al vector donde $c_i > 0$, para $i \in \mathbf{N}$, es la reclamación del acreedor i-ésimo y C representa la reclamación agregada que es el sumatorio del vector $(c_i)_{i\in N}$, $C := \sum_{i\in N} c_i$.

Un problema de bancarrota se da cuando la demanda agregada es superior al valor de liquidación, es decir, $C > E$, y llamaremos L a las pérdidas, que es la diferencia entre la demanda agregada y el presupuesto, $L = C - E > 0$.

Un problemas de bancarrota para $\mathbf{N}$ es un par (E,c)$\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n_+$ tal que $\sum_{i\in N} c_i > E$. Denominaremos $\mathcal{B}^N$ a la clase de todos los problemas de bancarrota con conjunto de agentes N.

El reparto de E lo representaremos mediante un vector de premios que llamaremos, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ donde, para todo $i \in N$, x_i es la cantidad que percibe el i-ésimo acreedor. Para cada problema de bancarrota $(E, c) \in \mathcal{B}^N$, el vector $x \in \mathbb{R}^n$ tiene que cumplir: $0 \leq x_i \leq c_i$ para todo $i \in \mathbf{N}$ y $\sum_{i\in N} x_i = E$.

Definiremos $X(E, c)$ como el conjunto de todos los posibles repartos tales que $0 \leqslant x_i \leqslant c_i$ y $\sum_{i\in N} x_i = E$.

Definición 1.0.1. *Una regla de reparto F es una función definida en $\bigcup_{\mathbf{N}\in\mathscr{N}} \mathcal{B}^N$ que asocia a cada $\mathbf{N} \in \mathscr{N}$ y cada $(E, c) \in \mathcal{B}^N$ un vector en $X(E, c)$, es decir $F(E, c) = x \in X(E, c)$.*

Ejemplo 1.0.2. Una empresa de ropa tiene que repartir 90 $u.m$ entre sus 3 socios: Esther, Inés y Jordi. Cada socio tiene su propia reclamación: Esther reclama 150 $u.m.$, Inés reclama 50 $u.m.$ y Jordi reclama 100 $u.m.$ Vamos a ver como quedan los pagos usando las siguientes reglas de reparto.

Si aplicamos la regla proporcional da unos pagos:

$$P(90, (150, 50, 100)) = (45, 30, 15).$$

Es fácil ver que al aplicar la regla proporcional los pagos son $\lambda = \frac{90}{300} = 30\,\%$ de cada demanda.

Si utilizamos la regla de igual ganancias CEA obtienen unos pagos:

$$CEA(90, ((150, 50, 100)) = (30, 30, 30).$$

La CEA reparte el presupuesto de manera igualitaria entre todos los agentes, con la condición de que ningún agente puede tener un pago mayor a su reclamación.

Estas reglas las veremos definidas en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Las reglas de reparto y sus propiedades

En este capítulo veremos con detalle las 5 reglas de bancarrota más importantes y explicaremos las principales propiedades que pueden cumplir cada una de estas reglas.

2.1. Propiedades de las reglas de reparto

En la literatura se han analizado extensamente, las propiedades de las diferentes reglas de reparto. Explicaremos las ocho propiedades más comunes.

- **Igualdad de trato**: Esta propiedad nos asegura que todos los acreedores con idénticas reclamaciones deben recibir el mismo trato y, por tanto, las mismas cantidades.

  Para todo $\mathbf{N} \in \mathscr{N}$, para cada $(E, c) \in \mathcal{B}^N$, y para todo $i, j \in \mathbf{N}$ con $c_i = c_j$ se cumple que:

  $$F_i(E, c) = F_j(E, c).$$

- **Invariancia de escalar**: Nos dice que el reparto no depende de ningún tipo de unidad.

  $$F(\lambda E, \lambda c) = \lambda F(E, c), \text{con } \lambda > 0.$$

- **Dualidad**: Diremos que la regla F es dual de F^* si F^* divide lo que esta disponible (E) de la misma manera que F divide lo que falta (L).

  $$\text{Para todo } \mathbf{N} \in \mathscr{N}, \text{ para cada } (E, c) \in \mathcal{B}^N, F^*(E, c) = c - F(L, c).$$

  Una regla es autodual si $F^* = F$. Es decir,

  $$F(E, c) = c - F(L, c).$$

- **Composición e independencia de camino**: Ante una variación del presupuesto E los pagos asignados son los mismos tanto si se reparte el nuevo presupuesto E' directamente, como si se reparte primero el presupuesto inicial y más adelante la variación $(E' - E)$. Esta variación puede ser una devaluación o una inflación del presupuesto inicial. En el caso de inflación del presupuesto tenemos:

  Composición : Si $E' > E,$ entonces $F(E', c) = F(E, c) + F(E' - E, c - F(E, c))$.

  En el caso de devaluación del presupuesto tenemos:

  Independencia del camino: Si $E' < E,$ entonces $F(E', c) = F(E', F(E, c))$.

- **Consistencia**: Una regla es consistente si propone un reparto de forma que al eliminar cualquier subconjunto de agentes con su pago correspondiente, y redistribuir lo que queda entre el resto, el reparto original no cambia.

  $$\text{Para todo } \mathbf{N} \in \mathscr{N}, \forall S \subset \mathbf{N}, \text{para cada } (E, c) \in \mathcal{B}^N \text{ y } \forall i \in S:$$
  $$F_i(E, c) = F_i[\sum_{i \in S} F_i(E, c), c_S],$$

  donde $c_S \in \mathbb{R}^s$ es la restricción del vector $c \in \mathbb{R}^n$ a los agentes de S.

- **Exclusión**: Si la reclamación de un agente es más pequeña que la pérdida media, $c_i \leq L/n$, la ignoramos y dejamos el pago a 0.

  $$\text{Para todo } \mathbf{N} \in \mathscr{N}, \text{para cada } (E, c) \in \mathcal{B}^N, F_i(E, c) = 0 \text{ cuando } c_i \leq L/n.$$

- **Exención**: Si la reclamación es suficientemente pequeña, $c_i \leq E/n$, se paga toda la reclamación.

  $$\text{Para todo } \mathbf{N} \in \mathscr{N}, \text{para cada } (E, c) \in \mathcal{B}^N, \text{ si } c_i \leq E/n \text{ entonces } F_i(E, c) = c_i.$$

2.2. Las reglas de reparto

Presentaremos las cinco principales reglas de reparto que son: la regla proporcional (P), la regla de igual ganancias (CEA), la regla de igual pérdida (CEL), la regla *contested garment* (CG) y la regla Talmúdica (T).

2.2.1. Regla proporcional

La regla proporcional P es la más conocida y conceptualmente la más intuitiva. Consiste en distribuir el presupuesto proporcionalmente a las reclamaciones de cada acreedor.

Formalmente: $\forall \mathbf{N} \in \mathscr{N}$ y para cada $(E, c) \in \mathcal{B}^N$,

$$F(E, c) = \lambda c,$$

donde $\lambda = E/C$.

La regla proporcional P es la única regla de bancarrota que satisface: la igualdad de trato, la composición y la auto dualidad (ver teorema 3 en Young P., 1988).

También es la única regla de bancarrota que satisface: la igualdad de trato, la independencia de camino y la auto dualidad (ver Teorema 4* en Herrero y Villar, 2001).

2.2.2. Regla de igual ganancias, CEA

Con esta regla pretenderemos que todos los acreedores reciban la misma cuantía siempre y cuando esta no supere a la cantidad reclamada por el acreedor.

Formalmente: $\forall \mathbf{N} \in \mathscr{N}$ y para cada (E,c)$\in \mathcal{B}^N$:

$$CEA_i(E,c) = min\{\lambda, c_i\},$$

siendo λ la solución única de $\sum_{i \in N}$ min $\{\lambda, c_i\}$ = E.

La CEA es la única regla de bancarrota que satisface: la independencia de camino, consistencia y exención (ver Teorema 2, Herrero y Villar, 2001).

En particular, es immediato probar que la CEA es consistente.

Proposición 2.2.1. *La CEA es consistente.*

Demostración: Por definición

$$E = min\{\lambda, c_1\} + min\{\lambda, c_2\} + ... + min\{\lambda, c_n\}.$$

Si escogemos cualquier subgrupo $S \subseteq N$, su valor de liquidación pasa a ser

$$E' = \sum_{i \in S} min\{\lambda, c_i\}.$$

Entonces, si aplicamos la CEA al subgrupo S, $CEA[E', c_S] = (\text{mín}\{\lambda, c_i\})_{i \in S}$, se cumple que $E' = \sum_{i \in S} \text{mín}\{\lambda', c_i\}$. Es trivial observar que $\lambda' = \lambda$ y por tanto tenemos que

$$CEA[E', c_S] = CEA(E, c)_S,$$

y que por tanto la CEA es consistente. □

El siguiente ejemplo ilustra esta propiedad de consistencia.

Ejemplo 2.2.2. Una empresa de ropa cae en quiebra debido a la crisis causada por el covid-19 y su liquidez, una vez vendido todo, es de 50 *um* . Cantidad que es insuficiente para hacer frente a la totalidad de las deudas contraídas con los siguientes acreedores:

1. Una empresa que suministra ropa: 60 *um*

2. Una empresa de limpieza del local: 10 *um*

3. Una empresa que suministra maniquíes: 30 *um*

Con estos datos tenemos que nuestro vector de reclamaciones es c=(60, 10, 30) y la demanda agregada C= 100. Si repartimos de forma igualitaria las 50 *um* entre los 3 acreedores, cada uno obtendría $\frac{50}{3} = 16{,}66$ *um*, pero una de las condiciones de la CEA es que el premio o devolución no puede superar la reclamación. Entonces el segundo acreedor obtiene las 10 *um* y los otros dos se reparten el resto en partes iguales, es decir $\lambda = 20$ *um*.

De esta forma queda:

$$CEA(E, c) = (20, 10, 20).$$

Suponemos que el 1 se va con su pago 20 y que el 2 y el 3 se redistribuyen lo que queda, es decir 30. Si aplicamos la $CEA(30, (10, 30))$ observaremos que los pagos resultantes son 10 y 20 respectivamente. Observamos que el reparto no ha cambiado respecto a los pagos iniciales. Por tanto podemos decir que la CEA es una regla consistente.

2.2.3. Regla de igual pérdidas, CEL

Esta regla propone distribuir de manera equitativa el deficit (L) entre los acreedores, con la restricción de que ningún agente puede terminar con saldo negativo, ya que no se puede perder una cantidad mayor a la reclamada.

Formalmente, $\forall \mathbf{N} \in \mathscr{N}$ y para cada $(E, c) \in \mathcal{B}^N$,

$$CEL_i(E, c) = max\{c_i - \lambda, 0\},$$

siendo λ solución de $\sum_{i \in N} \max \{c_i - \lambda, 0\} = E$.

La CEL es la única regla de bancarrota que satisface: la composición , la consistencia y la exclusión (ver Teorema 2*, Herrero y Villar, 2001).

Una vez definidas la CEA y CEL se puede comprobar fácilmente que estas reglas son duales entre si: CEA=CEL* (Herrero y Villar, 2001).

Como CEL y la CEA son duales entre sí, es inmediato comprobar que la CEL también es consistente.

2.2.4. La regla *contested garment*

Es una de las reglas más antiguas y también está recogida en el Talmud. Se utiliza para problemas con dos agentes ($n = 2$) donde se le asigna a cada acreedor la diferencia que hay entre el presupuesto y la reclamación del otro acreedor o 0 si es negativo, $max\{E - c_j, 0\}$, más el residuo $(E - max\{E - c_j, 0\} - max\{E - c_i, 0\})$ que se divide entre los dos agentes a partes iguales.

Así pues, para todo $\mathbf{N} = \{i, j\}$ y $\forall (E, c) \in \mathcal{B}^N$, la regla contested garment (CG) se define como:

$$\mathbf{CG}_i(E, c) = max\{E - c_j, 0\} + \frac{1}{2}\{E - max\{E - c_i, 0\} - max\{E - c_j, 0\}\}, \text{ y}$$

$$\mathbf{CG}_j(E, c) = max\{E - c_i, 0\} + \frac{1}{2}\{E - max\{E - c_i, 0\} - max\{E - c_j, 0\}\}.$$

La regla *contested garment* es la única regla que cumple las siguientes propiedades: igualdad de trato, auto-dualidad, la independencia de camino y la composición (Herrero y Villar, 2001).

A continuación queremos probar que si tenemos un mayor presupuesto, $E' > E$ los pagos de la regla *contested garment* son mayores.

Lema 2.2.3. *Supongamos que $N = \{1, 2\}$ y $E' \geq E$ entonces*

$$CG_1(E, c) \leq CG_1(E', c) \text{ y } CG_2(E, c) \leq CG_2(E', c).$$

Demostración:

Para $E \leq E'$ veamos que se cumple $CG(E, (c_1, c_2)) \leq CG(E', (c_1, c_2))$. Analizamos el caso del agente 1.

$$\begin{aligned} x_1 = CG_1(E, (c_1, c_2)) &= max\{E - c_2, 0\} + \frac{1}{2}(E - max\{E - c_2, 0\} - max\{E - c_1, 0\}) \\ &= \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}max\{E - c_2, 0\} - \frac{1}{2}max\{E - c_1, 0\}. \end{aligned}$$

Ahora distinguimos entre dos casos.

- $E \geq c_1$: Tendremos que $max\{E - c_1, 0\} \geq 0$ y nos queda que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}max\{E - c_2, 0\} - \frac{1}{2}max\{E - c_1\} \\ &= \frac{1}{2}[max\{2E - c_2, E\} - \{E - c_1\}] = \frac{1}{2}max\{E - c_2 + c_1, c_1\}. \end{aligned}$$

  Por tanto los pagos x_1 son monótonamente crecientes respecto a E.

- $E - c_1 < 0$: Tendremos que $max\{E - c_1, 0\} = 0$ y nos queda que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}max\{E - c_2, 0\} \\ &= \frac{1}{2}[max\{2E - c_2, E\}]. \end{aligned}$$

  Observamos que es una función monótonamente creciente respecto a E

  Por tanto, si tenemos $E' \geq E$ los pagos x'_1 son siempre mayores a los de x_1.

  El caso para el agente 2 es análogo al caso del agente 1. Así pues, vemos que efectivamente se cumple que $CG(E, (c_1, c_2)) \leq CG(E', (c_1, c_2))$. □

2.2.5. Regla Talmúdica

La regla Talmúdica (T) se basa en en un principio psicológico que afirma que los acreedores se fijan en sus ganancias cuando el presupuesto es pequeño y reparan en sus pérdidas cuando el presupuesto es grande. Así pues la regla Talmúdica sigue la CEA para presupuestos pequeños cuando la $E < \frac{1}{2}C$ y sigue la CEL para presupuestos mayores.

$$\mathbf{T}_i(E, c) = \begin{cases} min\{\frac{1}{2}c_i, \lambda\} & si \ \sum_{i \in \mathbf{N}} \frac{1}{2}c_i \leq E \\ \\ \frac{1}{2}c_i + max\{\frac{c_i}{2} - \lambda, 0\} & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_+$ es la única solución de $\sum_{i \in N} \mathbf{T}_i(E, c) = E$.

A continuación demostramos la consistencia de la regla Talmúdica.

Proposición 2.2.4. *La regla Talmúdica es consistente.*

Demostración: La consistencia es inmediata a partir de la consistencia de la CEA y de la CEL. □

Ahora vamos a ver que para el caso de dos agentes la regla Talmúdica coincide con la regla *contested garment*.

Proposición 2.2.5. *Para situaciones de bancarrota con dos agentes,*

$$T(E,c) = CG(E,c).$$

Demostración: Para demostrar la igualdad tenemos que distinguir tres casos y supondremos, sin pérdida de generalidad, que $c_1 \leq c_2$.

1. $E \leq c_1$: La $CG_1(E,(c_1,c_2))$ tiene unos pagos

   $$x_1 = 0 + \frac{1}{2}[E - 0 - 0] = \frac{1}{2}E.$$

   Para la regla Talmúdica $T_1(E,(c_1,c_2))$ como $E < \frac{1}{2}(c_1+c_2)$ la regla Talmúdica sigue la CEA y tiene unos pagos $y_1 = \frac{1}{2}E$, y por tanto coinciden.

2. $c_1 < E \leq c_2$. La $CG_1(E,(c_1,c_2))$ tiene unos pagos

   $$x_1 = 0 + \frac{1}{2}[E - (E - c_1)] = \frac{1}{2}c_1$$

   Para ver $T_1(E,(c_1,c_2))$ distinguimos en dos casos.

   - Para el caso $E \leq \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ la regla Talmúdica sigue la CEA y por tanto el pago $y_1 = \frac{1}{2}c_1$.
   - Para el caso $E > \frac{1}{2}(c_1+c_2)$ la regla Talmúdica sigue la CEA hasta $E = \frac{1}{2}[c_1+c_2]$ y por eso los jugadores se aseguran los pagos de la mitad de su reclamación y el resto sigue la regla CEL. Nos queda

     $$CEL(E,(\frac{1}{2}c_1,\frac{1}{2}c_2)) = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}L$$

     y como las pérdidas son $L = c_1 + (c_2 - E) = c_1 + \epsilon$. Vemos que $L > c_1$, así pues el jugador 1 no obtiene más pagos y su premio final es $y_1 = \frac{1}{2}c_1$.

3. $c_2 \leq E$ La $CG_1(E,(c_1,c_2))$ tiene unos pagos

   $$x_1 = (E - c_2) + \frac{1}{2}[E - (E - c_2) - (E - c_1)] = (E - c_2) + \frac{1}{2}[-E + c_1 + c_2]$$
   $$= \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}(E - c_2).$$

Como $E > \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ la regla Talmúdica sigue la CEA hasta $E = \frac{1}{2}[c_1 + c_2]$ y por eso los acreedores se aseguran el pago de la mitad de su reclamación y la parte restante se reparte mediante la CEL donde:

$$CEL(E, (\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_2)) = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}[c_1 + c_2 - E] = \frac{1}{2}[E - c_2].$$

Si unimos las dos partes vemos que $T_1(E, (c_1, c_2))$ tiene unos pagos:

$$y_1 = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}[E - c_2].$$

Es análogo para el caso c_2. Podemos apreciar que en cada uno de los caso el resultado de aplicar ambas reglas coinciden. Así pues $T(E, d) = CG(E, d)$. □

Teorema 2.2.6. *La única regla de reparto consistente con la regla contested garment es la regla Talmúdica.*

Demostración: Primero probaremos que como máximo existe solo una regla consistente con la regla CG . Supongamos que hay dos reglas diferentes, F y G y ambas son consistentes con la CGR, de forma que existe un problema $(E, C) \in \mathcal{B}^N$ tal que la regla F propone un reparto $(f_1, f_2, ..., f_n)$ y la regla G propone un reparto diferente $(g_1, g_2, ..., g_n)$. Como los repartos son diferentes pero ambos suman E, seguro que existe un par de jugadores i y j, tales que

$$f_i > g_i \text{ y } f_j < g_j. \tag{2.2.1}$$

Como F y G son consistentes con la CGR tenemos que

$$(f_i, f_j) = CG(f_i + f_j, (c_i, c_j)) \text{ y}$$

$$(g_i, g_j) = CG(g_i + g_j, (c_i, c_j)).$$

Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f_i + f_j \leq g_i + g_j$, y por tanto,

$$(f_i, f_j) = CG(f_i + f_j, (c_i, c_j)) \leq CG(g_i + g_j, (c_i, c_j)) = (g_i, g_j),$$

donde la desigualdad se da por el Lema 2.2.3. Pero entonces, si $f_i \leq g_i$ y $f_j \leq g_j$, llegamos a una contradicción con (2.2.1). Queda demostrado pues que no existen dos reglas diferentes consistentes con la CGR.

Que la regla Talmúdica es consistente con la CGR es inmediato a partir de las Proposiciones 2.2.4 y 2.2.5.

□

La regla Talmúdica es la única regla de bancarrota que satisface: la consistencia y la auto dualidad (Moreno-Ternero y Villar, 2004).

Una vez vistas las principales propiedades que pueden cumplir las reglas de reparto, nos disponemos a observar el Cuadro 2.1. En este, observamos en la primera columna las propiedades de las reglas de reparto y en las adyacentes mostramos cada regla indicando si cumple o no dicha propiedad. Además observamos como cada regla es única en el cumplimiento de unas determinadas propiedades, así lo vemos en los recuadros remarcados en negrita.

	Proporcional	CEA	CEL	TALMUD
Igualdad de trato	**Si**	Si	Si	Si
Invariancia de escalar	Si	Si	Si	Si
Composición	**Si**	Si	**Si**	No
Independencia de camino	**Si**	**Si**	Si	No
Consistencia	Si	**Si**	**Si**	**Si**
Exención	No	**Si**	No	No
Exclusión	No	No	**Si**	No
Autodualidad	**Si**	No	No	**Si**

Cuadro 2.1: Axiomatización reglas reparto

Capítulo 3

La implementación de la regla Talmúdica para n=2

En primer lugar recordaremos que quiere decir implementar una regla. Se trata de definir un juego no cooperativo de forma que en equilibrio los pagos a los jugadores sean los determinados por la regla. En particular nos centraremos en determinar el equilibrio perfecto en subjuegos; para ello buscaremos la solución por inducción hacia atrás del juego.

A continuación nos centramos en la implementación propuesta por Tsay y Yeh (2019) y veremos como realizando la inducción hacia atrás llegamos a la regla Talmúdica. También veremos la implementación que hace Moreno-Ternero et al. (2020) y veremos que utilizando la inducción hacia atrás del juego también llegamos a la regla Talmúdica.

3.1. La implementación de la regla Talmúdica según Tsay y Yeh (n=2)

Tsay y Yeh (2019) proponen un juego que se basa en el concepto de mínima concesión: MCF (concesión mínima primero) que se utiliza tanto para la adjudicación mínima de ganancias como para la adjudicación mínima de pérdidas . En el caso de asignar ganancias la adjudicación mínima es la diferencia entre el presupuesto y la reclamación del otro jugador o 0 si la diferencia es negativa, $\eta_i = max(E - c_j, 0)$. En el caso de pérdidas la adjudicación mínima de pérdidas es el mismo proceso pero aplicado a las pérdidas L es decir $\xi_i = max\{L - c_j\}$.

Observación 3.1.1. Notemos que la regla *contested garment* se basa en el concepto MCF. Si aplicamos CG para las ganancias nos queda:

$$\begin{aligned} CG_1(E, c) &= max\{E - c_2, 0\} + \frac{1}{2}(E - max\{E - c_2, 0\} - max\{E - c_1, 0\}) \\ &= \eta_1 + \frac{1}{2}[E - \eta_1 - \eta_2]. \end{aligned}$$

Es trivial ver que la CG se basa en el mismo principio que MCf. Es análogo para CG_j.

La regla *contested garment* es una regla autodual y por tanto se obtiene el mismo resultado aplicando el presupuesto E o aplicando las pérdidas L.

Veamos que en el caso de repartir pérdidas. La GC es:

$$\begin{aligned} CG_1(L,c) &= max\{L-c_2,0\}+\frac{1}{2}(L-max\{L-c_2,0\}-max\{L-c_1,0\}) \\ &= \xi_1+\frac{1}{2}[L-\xi_1-\xi_2]. \end{aligned}$$

Es fácil ver que en el caso de pérdidas la regla *contested garment* también sigue el concepto MCF sin embargo, apreciamos que sigue la adjudicación mínima de pérdidas. Ahora observamos que cuando aplicamos MCF los pagos son los mismos tanto si aplicamos ganancias como pérdidas. Esto sucede debido a que la regla *contested garment* es autodual, $F(E,c)=c-F(L,c)$. Y por tanto:

$$\eta_1+\frac{1}{2}[E-\eta_1-\eta_2]=c_i-[\xi_1+\frac{1}{2}[L-\xi_1-\xi_2]].$$

Así pues podemos decir que cuando apliquemos la MCF lo que estamos haciendo es usar la regla *contested garment* y como ya hemos demostrado en la Proposición 2.2.5, que la $CG(E,c)=T(E,c)$, tenemos que también sigue la regla Talmúdica.

Una vez visto este concepto ya podemos explicar el juego.

Dado un problema (E,c) denotaremos este juego secuencial como $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(E,c)$. El juego empieza de la siguiente manera. Al jugador que inicia el juego le llamamos "*selector*" (s) y al otro jugador le llamamos "*divisor*" (d). La naturaleza escoge al "*selector*" entre uno de los dos acreedores, $s\in\{1,2\}$. Supondremos que s es el 1. Una vez seleccionado el orden de los jugadores, el "*selector*" elige si la repartición se realiza a partir de las ganancias E o por lo contrario si se reparten las pérdidas L, es decir escoge $u\in\{G,L\}$.

Una vez se sabe la elección del "*selector*", el otro jugador ("*divisor*") debe optar entre utilizar la fórmula MCF o no, es decir si en lo sucesivo el reparto se va a basar en dicha fórmula o no. Si escoge no utilizar MCF, debe hacer una propuesta, $D\equiv\{a,b\}$ donde $a,b\in\mathbb{R}_+$ y:

$$a+b=\begin{cases} E & si\ u=G \\ \\ L & si\ u=L. \end{cases}$$

Una vez hecha la propuesta, el "*selector*" elige una de las dos opciones $x_s\in D$. Por tanto la solución para S es:

$$w_s=\begin{cases} x_s & si\ u=G \\ \\ c_s-x_s & si\ u=L. \end{cases}$$

En el caso de que el "*selector*" opta por $u=G$, el pago es: x_s, mientras que en el caso $u=L$, x_s convierte en la pérdida del jugador, y el pago es: c_s-x_s.

Si el "*divisor*" elige utilizar MCF primero, se realiza una preasignación que consiste en otorgar la adjudicación mínima de ganancias en el caso en el que se este repartiendo ganancias, η_i y la adjudicación mínima de pérdidas en el caso que se este repartiendo las pérdidas, ξ_i. Después el "*divisor*" realiza la propuesta donde se divide el residuo, $D \equiv \{a, b\}$ en el cual $a, b \in \mathbb{R}_+$ y:

$$a + b = \begin{cases} E - (\eta_1 + \eta_2) & si\ u = G \\ \\ L - (\xi_1 + \xi_2) & si\ u = L. \end{cases}$$

Una vez hecha la propuesta, el "*selector*" elige una de las dos opciones $x_s \in D$. Por tanto la solución para S es:

$$w_s = \begin{cases} \eta_s + x_s & si\ u = G \\ \\ c_s - \xi_s - x_s & si\ u = L. \end{cases}$$

En el caso $u = G$ al utilizar MCF el "*selector*" obtiene la parte de aplicar la fórmula, η_s más la parte del residuo que ha escogido, x_s.

Para $u = L$ estamos repartiendo pérdidas. Al aplicar MCF el "*selector*" tiene como pérdida la parte correspondiente a la fórmula, ξ_s más la elección que realiza de la parte del residuo, x_s. Así pues su pago es: $c_s - \xi_s - x_s$.

El pago que recibe el "*divisor*" es el residuo,

$$w_d = E - w_s.$$

En la Figura (3.1) que tenemos a continuación se puede ver una descripción gráfica del juego.

Proposición 3.1.2. *Sea* $(E, c) \in \mathcal{B}^N$ *con* $\mathbf{N} = \{1, 2\}$ *un juego de bancarrota con dos agentes. La solución por inducción hacia atrás aplicada en el juego* $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(E, c)$ *da como pago a los jugadores la regla Talmúdica.*

Demostración:

Una vez visto como es el juego de Tsay y Yeh (2019), ver Figura (3.1), suponemos sin pérdida de generalidad que $c_1 \leq c_2$.

La demostración se divide en dos casos. Cuando el "*selector*" es el agente 1 y cuando el "*selector*" es el agente 2.

- Primero suponemos que $s = 1$ y $d = 2$.

  Empezaremos ahora la inducción hacia atrás.

  En los nodos finales el "*selector*" escoge siempre el número mayor en el caso de ganancias G y el número menor en el caso de pérdidas L.

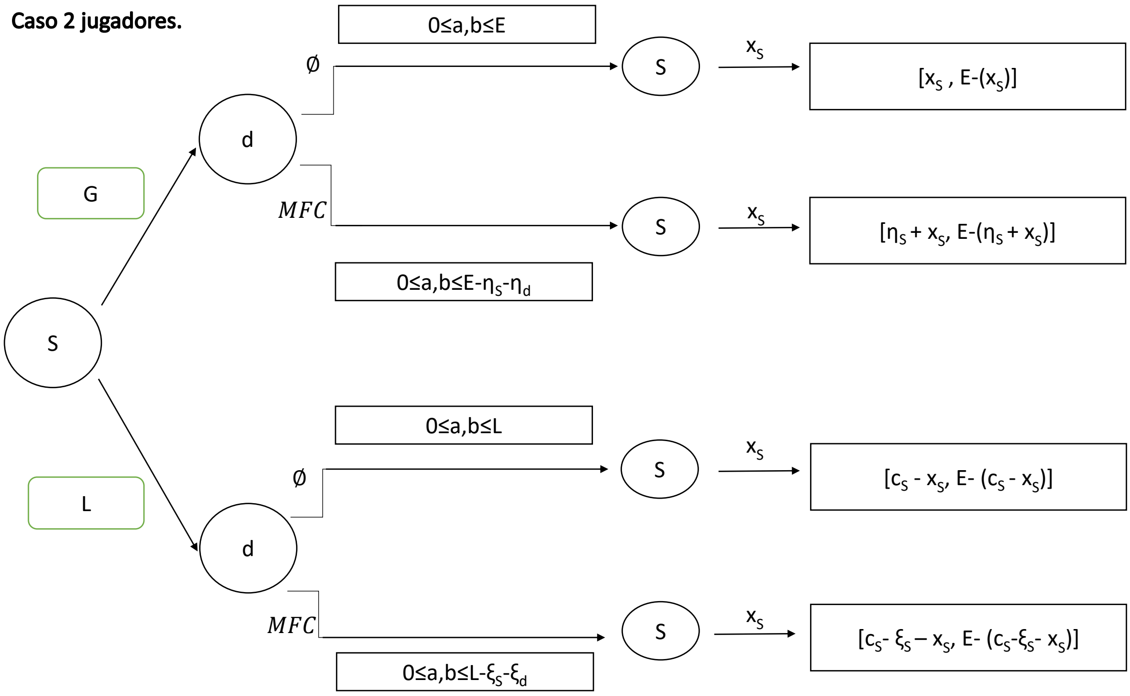

Figura 3.1: Juego Tsay and Yeh

Si "*selector*" elige $u = G$ lo mejor que puede hacer el "*divisor*" es proponer un $a = b = \frac{1}{2}E$ si escoge Ø o proponer un medio del residuo, $a = b = \frac{1}{2}[E - \eta_1 - \eta_2]$ en el caso de escoger MCF. Es fácil ver que esa es su mejor respuesta ya que si hace una división diferente el "*selector*" escoge el mayor número de los dos si $u = G$ o el número menor si $u = L$.

Una vez visto como hace el reparto del "*divisor*", falta saber cuál de los dos caminos le interesa elegir, si Ø o MCF. Nos ayudaremos de la Figura (3.2) para ver cual es el mejor camino.

Al "*divisor*" le interesa estar lo más arriba de la gráfica posible para así tener un pago mayor. Mientras que al "*selector*" le interesa estar lo más a la derecha posible. Observando la Figura (3.2) y sabiendo que si elige la MCF sigue la regla Talmúdica (línea azul) y que si elige Ø sigue $\frac{1}{2}E$ (línea verde) es fácil ver que el "*divisor*" escoge siempre la regla Talmúdica ya que esta por encima de $\frac{1}{2}E$ y por tanto recibe unos pagos mayores.

Si el "*selector*" elige L y sabiendo que este siempre elige el mínimo de la propuesta del "*divisor*", lo mejor que puede hacer el "*divisor*" es proponer $a = b = \frac{1}{2}L$ en el caso de Ø o ofrecer un medio del residuo, $a = b = \frac{1}{2}[E - \xi_1 - \xi_2]$ en el caso MCF.

Siguiendo el razonamiento anterior, al "*divisor*" le interesa estar lo más arriba posible y al "*selector*" lo más a la derecha posible. Sabemos que al escoger MCF el "*divisor*" esta eligiendo la regla Talmúdica (linea azul) y si este escoge Ø sigue $\frac{1}{2}L$ (línea naranja). Si miramos la gráfica de la Figura (3.2) vemos que al "*divisor*" le interesa escoger la linea naranja ya que está por encima de la línea azul y por tanto se asegura unos pagos mayores.

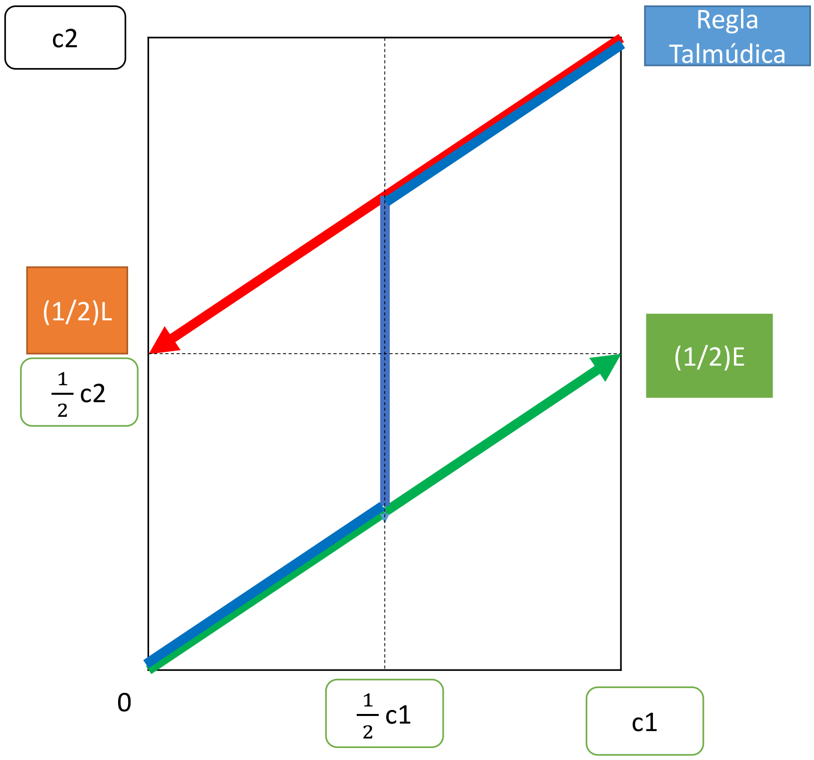

Figura 3.2: Gráfica

Así pues, solo nos queda por determinar cuál es la mejor decisión del "*selector*". Si escoge ganancias y por tanto los pagos siguen la regla Talmúdica o elige pérdidas y los pagos siguen $c_1 - \frac{1}{2}L$. Volviendo a la Figura (3.2) se aprecia fácilmente que la mejor elección para el "*selector*" es optar por ganancias (G) y por tanto selecciona la regla Talmúdica.

- Ahora suponemos que el "*selector*" es el agente 2, $S = 2$, y el "*divisor*" es el agente 1, $d = 1$.

  Empezaremos ahora la inducción hacia atrás.

  En los nodos finales el "*selector*" escoge siempre el número mayor en el caso de ganancias G y el número menor en el caso de pérdidas L.

  Si S elige $u = G$ lo mejor que puede hacer d es proponer un $a = b = \frac{1}{2}E$ si escoge $\emptyset$ o proponer un medio del residuo, $a = b = \frac{1}{2}[E - \eta_1 - \eta_2]$ en el caso de optar por MCF. Es fácil ver que proponer la mitad es su mejor respuesta ya que si hace una división diferente, S siempre escogerá el mayor número de los dos si $u = G$ o el menor si $u = L$.

  Una vez vista como hace el reparto el "*divisor*", falta saber cual de los dos caminos le interesa elegir, si $\emptyset$ o MCF. Nos ayudaremos de la Figura (3.2) para ver el mejor camino.

Al "*divisor*" le interesa estar lo más a la derecha de la gráfica posible para así tener un pago mayor. Mientras que el "*selector*" lo que busca es estar lo más arriba posible. Observando la Figura (3.2) y sabiendo que si elige la MCF sigue la regla Talmúdica (línea azul) y que si elige Ø sigue $\frac{1}{2}E$ (línea verde) es fácil ver que el "*divisor*" escoge $\frac{1}{2}E$ ya que obtiene mayor pago escogiendo la regla Talmúdica .

Si el "*selector*" elige $u = L$ y sabiendo que este siempre elige el mínimo de la propuesta del "*divisor*", lo mejor que puede hacer el "*divisor*" es proponer $a = b = \frac{1}{2}L$ en el caso de Ø o por lo contrario, sugerir un medio del residuo, $a = b = \frac{1}{2}[E - \xi_1 - \xi_2]$ en el caso MCF.

Siguiendo el razonamiento anterior, al "*divisor*" le interesa estar lo más a la derecha posible y al "*selector*" lo más arriba posible. Sabemos que al escoger MCF el "*divisor*" esta escogiendo la regla Talmúdica y si el "*divisor*" escoge Ø sigue $\frac{1}{2}L$ (línea naranja). Si miramos la gráfica de la Figura (3.2) vemos que al "*divisor*" le interesa la regla Talmúdica ya que le asegura unos pagos mayores.

Así pues, solo nos queda por determinar cuál es la mejor decisión del "*selector*". Si elegir ganancias y por tanto los pagos siguen $\frac{1}{2}E$ o elegir pérdidas y los pagos siguen la regla Talmúdica . Volviendo a la Figura (3.2) se aprecia fácilmente que la mejor elección para el "*selector*" es elegir pérdidas $u = L$ ya que la regla Talmúdica se encuentra por encima que $\frac{1}{2}E$ y por tanto escoge la dicha regla. □

Observamos que a partir de aquí se puede definir el siguiente equilibrio perfecto en subjuegos(SPE).

Suponemos que $c_1 \leq c_2$.

1. Si la naturaleza elige al 1 como "*selector*". La estrategia del "*selector*"(s) es:

   Escoger $u = G$ y luego optar entre:

$$max\{a, b\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

$$min\{a, b\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del "*divisor*" es elegir:

$$MCF \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}[E - \eta_1 - \eta_2] \text{ o}$$

$$\text{Ø si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}[L].$$

2. La naturaleza elige al 2 como "*selector*". La estrategia del "*selector*" es:

Escoger $u = L$ y luego optar entre:

$$max\{a, b\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

$$min\{a, b\} \text{ si } u = L.$$

La estrategia del "*divisor*" es elegir:

$$\text{Ø si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}[E] \text{ o}$$

$$MCF \text{ si } u = L \;\text{ y proponer } \frac{1}{2}[-\xi_1 - \xi_2].$$

Ahora suponemos que $c_2 \leq c_1$.

3. La naturaleza elige al 1 como "*selector*". La estrategia del "*selector*" es:

   Escoger $u = L$ y luego optar entre:

   $$max\{a, b\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{a, b\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del "*divisor*" es elegir:

   $$\emptyset \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}[E] \text{ o}$$

   $$MCF \text{ si } u = L \;\text{ y proponer } \frac{1}{2}[-\xi_1 - \xi_2].$$

4. Si la naturaleza elige al 2 como "*selector*". La estrategia del "*selector*"(s) es:

   Escoger $u = G$ y luego optar entre:

   $$max\{a, b\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{a, b\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del "*divisor*" es elegir:

   $$MCF \text{ si } u = G \;\text{ y proponer } \frac{1}{2}[E - \eta_1 - \eta_2] \text{ o}$$

   $$\emptyset \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}[L].$$

Es evidente que a partir de la Proposición 3.1.2 resulta inmediato que si los jugadores utilizan estas estrategias, los pagos a los que llegaremos serán los correspondientes a la regla Talmúdica.

3.2. La implementación de Moreno-Ternero, Tsay y Yeh (n=2)

En primer lugar, la siguiente proposición (Moreno-Ternero et al. 2020) muestra una fórmula alternativa para la regla Talmúdica en el caso n=2. Esta fórmula jugará un papel determinante en la implementación que veremos posteriormente.

Proposición 3.2.1. *Para cada* $\mathbf{N} = \{i, j\} \in \mathcal{N}$, $i \neq j$, *y cada* $(E, c) \in \mathcal{B}^N$ *con* $c_i \leq c_j$.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i(E, c) &= max\{\tfrac{1}{2}min\{c_i, E\},\; c_i - \tfrac{1}{2}min\{c_i, L\} - (L - min\{c_i, L\}\} \; y \\ \mathbf{T}_j(E, c) &= E - \mathbf{T}_i(E, c). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Demostración:

Sea $\mathbf{N} = \{i, j\}$ y $(E, c) \in \mathcal{B}^N$ con $c_i \leq c_j$. Como la suma de los pagos de la regla Talmúdica $\mathbf{T}_i(E, c) + \mathbf{T}_j(E, c) = E$, es suficiente con demostrar que la Proposición 3.2.1 cumple dicha regla para uno de los dos jugadores. Suponemos que escogemos i=1 y j=2. Consideramos 3 casos.

Caso 1: $E \leq c_1$. En este caso la regla Talmúdica nos da $\mathbf{T}_1(E, c) = \mathbf{T}_2(E, c) = \frac{1}{2}E$. Tenemos que $min\{c_1, E\} = E$ y $min\{c_1, L\} = c_1$ por lo tanto la parte derecha de la Proposición 3.2.1 no da un pago $\mathbf{T}_1(E, c) = \frac{1}{2}E$ mientras que el resultado del lado izquierdo es:

$$c_1 - \frac{1}{2}min\{c_1, L\} - (L - min\{c_1, L\} = \frac{1}{2}c_1 - (L - c_1) = \frac{1}{2}c_1 - (c_2 - E) \leq \frac{1}{2}E.$$

Así pues, como escogemos el máximo pago de la Proposición 3.2.1, vemos que el mayor es el lado derecho $\frac{1}{2}E$ y que coincide con $\mathbf{T}_1(E, c) = E$ la regla Talmúdica.

Caso 2: $c_1 < E \leq c_2$. Tenemos que $\mathbf{T}_1(E, c) = \frac{1}{2}c_1$ y $\mathbf{T}_2(E, c) = E - \frac{1}{2}c_1$. Como $min\{c_1, E\} = c_1$ y $min\{c_1, L\} = c_1$ resulta que:

$$c_1 - \frac{1}{2}min\{c_1, L\} - (L - min\{c_1, L\} = \frac{1}{2}c_1 - (L - c_1) = \frac{1}{2}c_1 - (c_2 - E) \leq \frac{1}{2}c_1.$$

Por lo tanto el lado derecho de la Proposición 3.2.1 es $\frac{1}{2}c_1$ que coincide con $\mathbf{T}_1(E, c) = \frac{1}{2}c_1$ los pagos de la regla Talmúdica.

Caso 3: $E \geq c_2$. Tenemos que $\mathbf{T}_1(E, c) = c_1 - \frac{1}{2}L$ y $\mathbf{T}_2(E, c) = E - \frac{1}{2}L$. Como $min\{c_1, E\} = c_1$ y $min\{c_1, L\} = L$ resulta que:

$$c_1 - \frac{1}{2}min\{c_1, L\} - (L - min\{c_1, L\}) = c_1 - \frac{1}{2}L \geq \frac{1}{2}c_1.$$

Así pues como escogemos el mayor pago de la Proposición 3.2.1. Vemos que el mayor es $c_1 - \frac{1}{2}L$ y que coincide con la regla Talmúdica $\mathbf{T}_1(E, c) = c_1 - \frac{1}{2}L$.

Observamos que para todos los casos la Proposición 3.2.1 es equivalente a la regla Talmúdica. □

Una vez visto que efectivamente la fórmula propuesta por Moreno-Ternero et al.(2020) es equivalente a la regla Talmúdica, ahora definimos el juego $\bar{\mathbf{G}}(E, c)$.

Este juego consiste en una negociación bilateral en el que los dos acreedores negocian como repartir el presupuesto (E).

Definiremos el juego $\bar{\mathbf{G}}(E, c)$ de la siguiente forma. Para empezar y evitar un trato discriminatorio hacia cualquiera de los acreedores, la Naturaleza (el azar) empieza por elegir cual de los dos es el I-acreedor (el acreedor inicial) que denominaremos por $i \in \{1, 2\}$, siendo $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ (el otro). El I-acreedor escoge un camino $u \in \{ganancias(G), pérdidas(L)\}$.

Si el I-acreedor elige, $u = G$, el jugador j tiene que escoger una cantidad entre la reclamación más pequeña y el presupuesto, $q \in \{min\{c_i, c_j\}E\}$, una vez seleccionada la cantidad q, el jugador j divide q como le resulte más beneficiosa, $D^q = \{a, q - a\}$, tal que $a \in \mathbb{R}_+$. Una vez hecha la división el I-acreedor elegirá cual de las dos partes se adjudica como su pago, $x_i \in D^q$, y el jugador j recibe el residuo: $x_j = E - x_i$.

Si el I-acreedor elige pérdidas, $u = L$, el jugador j debe escoger una cantidad $q \in \{min\{c_i, c_j\}, L\}$ y propone una partición $D^q = \{b, q-b\}$ tal que $b \in \mathbb{R}_+$. Una vez hecha la propuesta, el I-acreedor elige una de las dos posibilidades $x_i \in D^q$, ya sea b o $q-b$. Una vez seleccionado x_i, el jugador j tomará la parte que se rechaza $(q - x_i)$ como su pérdida y por consiguiente, su solución es: $c_j - (q - x_i)$. Finalmente el jugador i obtiene el residuo: $c_j - (L - (q - x_i))$.

Una vez vista las reglas del juego demostraremos por inducción hacia atrás que la solución de este juego no cooperativo nos lleva al pago determinado por la regla Talmúdica $\mathbf{T}_i(E, c)$.

En la Figura (3.3) se puede ver una descripción gráfica del juego.

Proposición 3.2.2. *Sea* $(E, c) \in \mathcal{B}^N$ *con* $\mathbf{N} = \{1, 2\}$ *un juego de bancarrota con dos agentes. La solución por inducción hacia atrás aplicada en el juego* $\bar{\mathbf{G}}(E, c)$ *definido anteriormente da como pago a los jugadores la regla Talmúdica.*

Demostración:

Notación básica para la demostración: $c_{min} = min\{c_i, c_j\}$

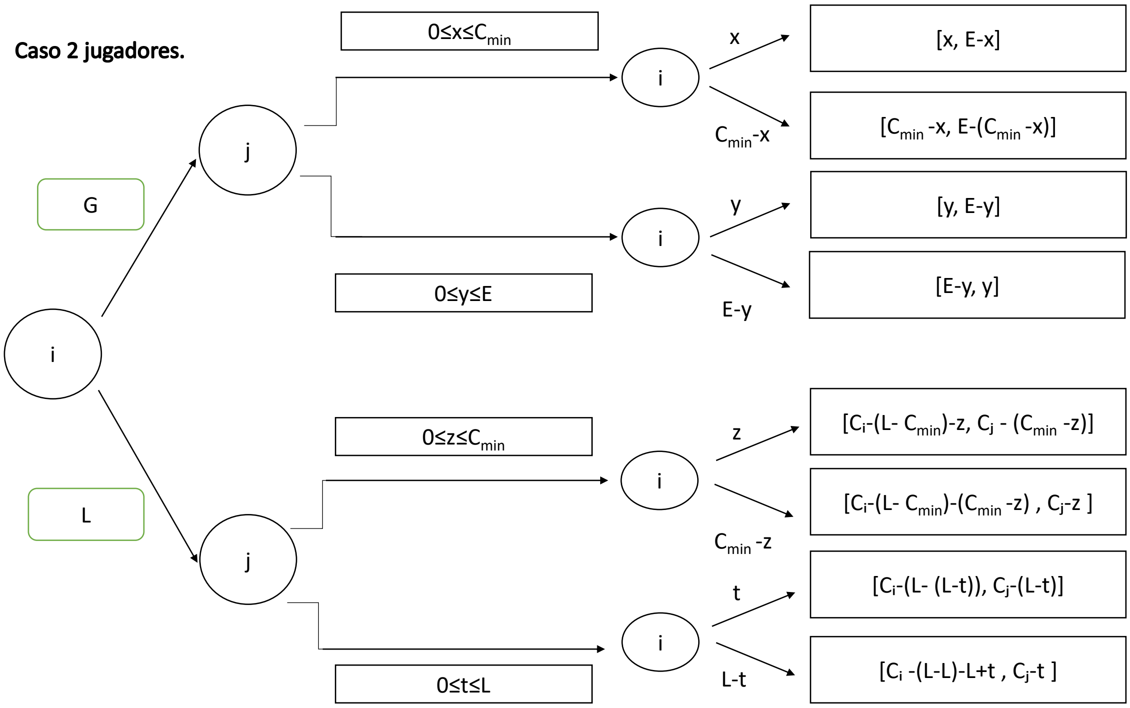

Figura 3.3: Juego Moreno-Ternero

En este juego no cooperativo, cada individuo del juego es libre para elegir la opción que él considere mejor para sus intereses. Demostramos que siguiendo las reglas del juego llegamos a la regla Talmúdica.

La demostración consta de dos partes, el camino de ganancias y el camino de pérdidas.

1. Camino de ganancias $(u = G)$

   Vemos que en el nodo final el I-acreedor siempre elige el número mayor de la división propuesta por el jugador j.

El jugador j sabe que si hace la división de manera asimétrica, el I-acreedor elegirá el camino donde se encuentre el número mayor. Como hacer una división desigual repercute en una pérdida para el jugador j, es fácil ver que la mejor elección para el jugador j es proponer un reparto en partes iguales, es decir $\frac{1}{2}c_{min}$ cuando $c_{min} < E$ o $\frac{1}{2}E$ en caso contrario.

El jugador j sabe que la mitad de su propuesta es del I-acreedor y el resto es suyo y por ese motivo el jugador j siempre escoge el camino que tenga un presupuesto más bajo, $\min\{c_{min}, E\}$, de lo contrario irá en contra de sus intereses.

Sabiendo ya la elección tanto del jugador j como del I-acreedor podemos observar que los pagos que obtiene el I-acreedor cuando escoge el camino de ganancias son:

$$x_i = \frac{1}{2} min\{E, c_{min}\}. \tag{3.2.2}$$

2. Camino de pérdidas ($u = L$)

En el camino de pérdidas $u = L$, en los nodos finales el I-acreedor escoge siempre la opción más pequeña propuesta por el jugador j ya que la parte restante, $(c_{min} - z)$, se convierte en las pérdidas del jugador j. Por este motivo y para reducir al máximo sus pérdidas, el jugador j divide siempre en partes iguales independientemente el camino elegido.Una vez se sabe la propuesta que hace el jugador j ahora nos queda saber cual es el camino que más le interesa. Como el objetivo del jugador j es obtener el mayor pago o lo que es lo mismo una pérdida mínima, el jugador j elige el camino del valor más pequeño, $min(c_{min}, L)$ y juntando las dos condiciones obtenemos que la propuesta final del jugador j es: $\frac{1}{2}min(c_{min}, L)$.

Separamos los dos opciones que puede elegir el jugador j con el fin de ver que independientemente de su elección se llega a los pagos de la regla Talmúdica.

Si el jugador j elige c_{min} y el I-acreedor ha elegido $x_i \in D^q$ sabemos que el jugador j recibe $c_j - (c_{min} - x_i)$ y el I-acreedor recibe el resto: $E - (c_j - (c_{min} - x_i))$. Si desarrollamos el residuo obtenemos:

$$\begin{aligned} E - (c_j - (c_{min} - x_i)) &= E - c_j - c_i + c_i + (c_{min} - x_i) \\ &= c_i - L + (c_{min} - x_i) = c_i - (L - c_{min}) - x. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Si el jugador j elige c_1 y el I-acreedor ya ha elegido $c_{min} - x_i \in D^q$ sabemos que el jugador j recibe $c_j - (x_i)$ y el I-acreedor recibe el resto: $E - (c_j - (x_i))$. Si desarrollamos el residuo obtenemos:

$$\begin{aligned} E - (c_j - (x_i)) &= E - c_j - c_i + c_i + x_i = c_i - L + x_i \\ &= c_i - L + c_{min} - c_{min} + x_i = c_i - (L - c_{min}) - (c_{min} - x_i), \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

dado que el jugador j divide en partes iguales, $c_1 - x_1 = \frac{1}{2}c_1$, vemos la Fórmula (3.2.3) y la Fórmula (3.2.4) son equivalentes. Esto nos dice que da igual el camino que elige el I-acreedor en el nodo final ya que la propuesta que realiza el jugador j es la misma para ambos caminos.

Veamos ahora si el jugador j elige L y el I-acreedor elige $x_i \in D^q$ sabemos que el jugador j recibe $c_j - (L - x_i)$ y el I-acreedor recibe el residuo: $E - (c_j - (L - x_i))$. Si desarrollamos el residuo obtenemos:

$$\begin{aligned} E - (c_j - (L - x_i)) &= E - c_j - c_i + c_i + (L - x_i) = c_i - L + (L - x_i) \\ &= c_i - (L - L) - x_i. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Veamos ahora que si el I-acreedor elige $L - x_i \in D^q$ sabemos que el jugador j recibe $c_j - (x_i)$ y el I-acreedor recibe el residuo: $E - (c_j - x_i)$. Si desarrollamos el residuo obtenemos :

$$\begin{aligned} E - (c_j - x_i) &= E - c_j - c_i + c_i + x_i = c_i - L + x_i \\ &= c_i - L - L + L + x_i = c_i - (L - L) - (L - x_1), \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

dado que el jugador j divide en partes iguales, $(L - x_1 = \frac{1}{2}L)$, vemos la Fórmula (3.2.5) y la Fórmula (3.2.6) son equivalentes.

Vemos que la diferencia entre las dos Fórmulas (3.2.3) y (3.2.5) está en la elección del camino del jugador j. Pero como sabemos el jugador j elige el $min(c_{min}, L)$ el I-acreedor sabe que si escoge $u = L$ obtiene unos pagos:

$$x_i = c_i - (L - min(c_{min}, L) - \frac{1}{2}min(c_{min}, L). \tag{3.2.7}$$

Por lo tanto tenemos que si el I-acreedor decide $u = G$ obtiene los pagos de la Fórmula (3.2.2) y que cuando elige $u = L$ obtiene los pagos de la Fórmula (3.2.7). Solo falta saber que opción elige el I-acreedor. Como su objetivo es recibir el mayor pago posible, elegirá la opción con mayor pago. Por tanto los pagos del I-acreedor son:

$$x_i = max\{\frac{1}{2}min\{c_{min}, E\}, c_i - (L - min(c_{min}, L) - \frac{1}{2}min(c_{min}, L)\}. \tag{3.2.8}$$

Acabamos de ver la inducción hacia atrás para cualquier $i \in \{1, 2\}$, es decir, es funciona tanto si i es el agente con mayor reclamos como si es el agente con menos reclamo. Ahora tenemos que ver que para los dos caso los pagos siguen la regla Talmúdica. Suponemos sin pérdida de generalidad que $c_1 \leq c_2$.

- Caso 1: Suponemos que el I-acreedor es el que tiene la reclamación más pequeña, $(i = 1)$, y el $j = 2$. Vemos que aplicando la inducción hacia atrás se llega a la Fórmula (3.2.1),

$$x_1 = max\{\frac{1}{2}min\{c_1, E\}, c_1 - (L - min(c_1, L) - \frac{1}{2}min(c_1, L)\}.$$

  Como hemos demostrado en la Proposición 3.2.1 los pagos corresponden a los propuestos por la regla Talmúdica.

- Caso 2: Ahora suponemos que el I-acreedor es el agente con mayor reclamo, $(i = 2)$ y el $j = 1$. Para demostrarlo distinguimos en 3 casos.

  1. $E < c_1$: El jugador 2 es el I-acreedor y haciendo la inducción hacia atrás tenemos los siguientes pagos:

  $$\begin{aligned} x_2 &= max\{\frac{1}{2}min\{c_1, E\}, c_2 - (L - min(c_1, L) - \frac{1}{2}min(c_2, L)\} \\ &= max\{\frac{1}{2}E, c_2 - (L - c_1) - \frac{1}{2}(c_1)\} = max\{\frac{1}{2}E, E - \frac{1}{2}(c_1)\}. \end{aligned}$$

     Por tanto escoge el camino de ganancias, $u = G$ y el pago

  $$x_2 = \frac{1}{2}E$$

y el jugador j tiene un pago

$$x_j = E - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}E.$$

Podemos apreciar que es análogo al caso en el que I-acreedor es el jugador 1 (el pequeño) como podemos ver en la demostración de la Proposición 3.2.1. Como obtenemos los mismo pagos y sabemos que los pagos corresponden a la Fórmula (3.2.1), efectivamente los pagos siguen la regla Talmúdica.

2. $c_1 \leq E \leq c_2$:
El I-acreedor es el jugador 2 sabemos que $min\{c_1, E\} = c_1$ y $min\{c_1, L\} = c_1$ y aplicando la inducción hacia atrás nos da unos pagos:

$$x_2 = max\{\frac{1}{2}c_1, c_2 - (L - c_1) - \frac{1}{2}c_1\} = max\{\frac{1}{2}c_1, E - \frac{1}{2}c_1)\}.$$

Como $E > c_1$ el I-acreedor escoge el camino de pérdidas, $u = L$. Y el pago del I-acreedor

$$x_2 = E - \frac{1}{2}c_1,$$

y el pago del jugador j es:

$$x_1 = E - (E - \frac{1}{2}c_1) = \frac{1}{2}c_1.$$

Es fácil ver que los pagos siguen la regla Talmúdica. Una manera de ver que los pagos corresponden a dicha regla, es ver que los pagos propuestos en el caso de i=2 coinciden con los pagos en el caso en el que el I-acreedor es el jugador 1. Si aplicamos la inducción hacia atrás cuando el I-acreedor es el jugador 1, $i = c_1$. El I-acreedor tiene un pago:

$$x_1 = max\{\frac{1}{2}c_1, c_1 - (L - c_1) - \frac{1}{2}c_1\} = max\{\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_1 - (E - c_2)\}.$$

Como $E < c_2$ el jugador 1 escoge el camino de ganancias, $u = G$ y su pago es:

$$x_1 = \frac{1}{2}c_1,$$

y el pago del jugador j es:

$$x_2 = E - \frac{1}{2}c_1.$$

Vemos que efectivamente coinciden y por la Proposición 3.2.1 los pagos corresponden a la regla Talmúdica.

3. $E \geq c_2$: El jugador 2 es el I-acreedor y haciendo la inducción hacia atrás, obtenemos el siguiente pago:

$$x_2 = max\{\frac{1}{2}c_1, c_2 - \frac{1}{2}L\}.$$

Teniendo en cuenta $E > c_2$ implica $L < c_1$, entonces el $min\{c_1, L\} = L$, la elección del I-acreedor es elegir pérdidas $(u = L)$ y el pago es:

$$x_2 = c_2 - \frac{1}{2}L,$$

y el pago del jugador j es:

$$x_1 = E - (c_2 - \frac{1}{2}L) = E - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}E = c_1 - \frac{1}{2}L.$$

Para $E > c - 2$ la estrategia de los dos agentes son análogas, ya que logran el mismo pago, y por la Proposición 3.2.1 los pagos coinciden con los propuestos por la regla Talmúdica.

Acabamos de probar que para todos los casos la Proposición 3.2.2 es equivalente a la regla Talmúdica. □

Observamos que a partir de aquí se puede definir el siguiente equilibrio perfecto en subjuegos(SPE).

Veremos que la estrategia del jugador j siempre es la misma.

Suponemos que $c_1 \leq c_2$.

1. Si $E \leq c_1$:

   Si la naturaleza elige al 1 como I-acreedor. La estrategia del I-acreedor(i) es:

   Escoger $u = G$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_1, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_1, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_1, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, E\},$$

   $$min\{c_1, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, L\}.$$

   Si la naturaleza elige al 2 como I-acreedor. La estrategia del I-acreedor(i) es:

   Escoger $u = G$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_1, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_1, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_1, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, E\},$$

   $$min\{c_1, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, L\}.$$

   Tenemos la misma estrategia.

2. Si $c_1 \leq E \leq c_2$:

   a) La naturaleza elige al 1 como I-acreedor (i). La estrategia del I-acreedor(i) es: Escoger $u = G$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_1, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_1, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_1, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, E\},$$
   $$min\{c_1, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, L\}.$$

   b) La naturaleza elige al 2 como I-acreedor (i). La estrategia del I-acreedor(i) es: Escoger $u = L$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_1, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_1, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_1, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, E\},$$
   $$min\{c_1, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, L\}.$$

3. $E \geq c_2$:
   Si la naturaleza elige al 1 como I-acreedor. La estrategia del I-acreedor(i) es: Escoger $u = L$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_1, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_1, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_1, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, E\},$$
   $$min\{c_1, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, L\}.$$

   Si la naturaleza elige al 2 como I-acreedor. La estrategia del I-acreedor(i) es: Escoger $u = L$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_1, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_1, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

La estrategia del jugador j es elegir:

$$min\{c_1, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, E\},$$

$$min\{c_1, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_1, L\}.$$

Volvemos a tener la misma estrategia para los dos casos.

Ahora suponemos que $c_1 \geq c_2$:

1. Si $E \leq c_2$ Es análogo al caso anterior.
2. Si $c_2 \leq E \leq c_1$:

   a) La naturaleza elige al 2 como I-acreedor (i). La estrategia del I-acreedor(i) es: Escoger $u = G$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_2, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_2, L\} - y\} \text{ si } u = L.$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_2, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_2, E\},$$

   $$min\{c_2, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_2, L\}.$$

   b) La naturaleza elige al 1 como I-acreedor (i). La estrategia del I-acreedor(i) es: Escoger $u = L$ y luego optar entre:

   $$max\{x, min\{c_2, E\} - x\} \text{ si } u = G \text{ o}$$

   $$min\{y, min\{c_2, L\} - y\} \text{ si } u = L$$

   La estrategia del jugador j es elegir:

   $$min\{c_2, E\} \text{ si } u = G \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_2, E\},$$

   $$min\{c_2, L\} \text{ si } u = L \text{ y proponer } \frac{1}{2}min\{c_2, L\}.$$

3. $E \geq c_2$: Es análogo al caso anterior.

Es evidente que a partir de la Proposición 3.2.1 resulta inmediato que si los jugadores utilizan estas estrategias, los pagos a los que llegaremos serán los correspondientes a la regla Talmúdica.

3.3. Comparación ambos modelos para n=2

Una de las diferencias más evidentes es que (Tsay and Yeh, 2019) introduce en el juego una fórmula que los jugadores aplican para llegar al equilibrio mientras que (Moreno-Ternero et al.,2020) no utiliza ningúna fórmula en el juego.

Otra diferencia que se aprecia fácilmente es la manera de hacer la inducción hacia atrás. En Tsay y Yeh no importa el presupuesto para saber que estrategia selecciona cada jugador, mientras que en Moreno-Ternero la estrategia varía dependiendo del presupuesto.

Capítulo 4

Implementación de la regla Talmúdica para n≥3

Antes de empezar vamos a introducir que es un equilibrio de Nash y un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Para poder definirlos, primero explicaremos un par de conceptos.

Sea $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n = \Phi$, el perfil de las estrategias donde σ_i es la estrategia que escoge el jugador i. Sea $u_i : \Phi \to \mathbb{R}$ denotaremos los pagos del jugador i según las estrategias elegida por todos los jugadores, es decir $u_i = u_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Una vez definidos estos conceptos ya podemos entrar a explicar el equilibrio de Nash. Este fue introducido por John F. Nash (1951) como una solución generalizada para un juego de n jugadores.

De manera informal, el perfil de una estrategia $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ y sus pagos correspondientes representan un equilibrio de Nash si ningún jugador puede ver incrementado su pago cambiando de estrategia, siempre que los otros jugadores no cambien sus estrategias. Es decir, si ningún jugador tiene el incentivo de desviarse de la estrategia elegida. Formalmente, el equilibrio de Nash se define de la siguiente manera.

Definición 4.0.1. *Sea un juego $\mathbf{G}(E, c)$, un perfil de estrategia $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*) \in \Phi_1 \times \cdots \times \Phi_n$ es un equilibrio de Nash del juego $\mathbf{G}$ si para cada jugador $i \in \mathbf{N}$,*

$$u_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \cdots, \sigma_n^*) \geq u_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \cdots, \sigma_n^*),$$

para todo $\sigma_i \in \Phi_i$

La idea que hay detrás de esta definición es la siguiente: Un equilibrio de Nash en un juego en forma estrategica es un perfil de estrategias en el cual ningún agente sale ganando si se desvıa unilateralmente y cambia de estrategia.

Un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es un equilibrio de Nash en el que el comportamiento especificado en cada subjuego es un equilibrio de Nash para el subjuego.

Una vez explicado que es un equilibrio de Nash. ya podemos definir el juego de (Moreno-Ternero et al. 2020) para $n \geq 3$.

El juego consta de 3 etapas.

- Etapa 1: Cada acreedor (k)$\in \mathbf{N}$ anuncia un vector de premios y^k y una permutación π^k tal que $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$. Sea $\pi \equiv \pi^1$o $\cdots$ o π^n la composición de todas las permutaciones, entonces hay un $\pi(1) = p \in \mathbf{N}$ que se convierte en el **P**-acreedor. Si para cada $k \in \mathbf{N}\backslash\{\text{p}\}$ anuncian el mismo vector de resultados entonces la propuesta de reparto de los pagos pasa a ser y^*, de lo contrario será $y = y^p$.

- Etapa 2: El **P**-acreedor puede decidir si acepta la propuesta y cada acreedor recibe sus correspondiente pagos o la rechaza. Si decide rechazar elige a un acreedor $l \in \mathbf{N}\backslash\{\text{p}\}$ para negociar sus pagos en la siguiente etapa. Los otros acreedores, $k \in \mathbf{N} \setminus \{p, l\}$ recibe los pagos que les corresponde de la propuesta y^k.

- Etapa 3: Los acreedores p y l se reparten los pagos a través del juego para dos jugadores $\bar{\mathbf{G}}((y_p + y_l, (c_p, c_l))$ definido anteriormente.

Teorema 4.0.2. *Sea* $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$ *y* $(E, c) \in \mathcal{B}^N$*. Hay un equilibrio de Nash (*NE*) en el juego* $\mathbf{G}(E, c)$*, cuyo resultado es* $\mathbf{T}(E, c)$*.*

Demostración Existencia: Como el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos ($SPNE$) es un equilibrio de Nash (NE), es suficiente con demostrar que hay un $SPNE$ en el juego $\mathbf{G}(E, c)$ con el resultado $\mathbf{T}(E, c)$. Para verlo, primero veremos el siguiente lema.

Lema 4.0.3. *Sea* $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$ *y* $(E, c) \in \mathcal{B}^N$*. Suponemos que ya tenemos la propuesta de la Etapa 1 del juego* $\mathbf{G}(E, c)$ *y* $p \in \mathbf{N}$ *es el P-acreedor. Para cada* $l \in \mathbf{N} \setminus p$*, si p escoge rechazar la propuesta y elige un* $l \in \mathbf{N}\backslash\{p\}$ *(R,l) en la Etapa 2 del juego* $\mathbf{G}(E, c)$*, entonces* $(y_{\mathbf{N}\backslash\{p,l\}}, \mathbf{T}(y_p+y_l, (c_p, c_l))$ *es el resultado* $SPNE$ *del subjuego* $\bar{\mathbf{G}}((y_p+y_l, (c_p, c_l))$ *definido anteriormente.*

Demostración: Sea $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$ y $(E, c) \in \mathcal{B}^N$. Sea $\mathbf{y}$ la propuesta de la Etapa 1 y $p \in \mathbf{N}$. Suponemos que p escoge un $l \in \mathbf{N} \setminus \{p\}$ para la Etapa 3. Suponemos sin pérdida de generalidad que $c_p \leq c_l$. Veremos que la estrategia $\bar{\sigma}$ constituye un $SPNE$ para el juego $\bar{\mathbf{G}}(y_p + y_l, (c_p, c_l))$ con el resultado $(\mathbf{y}_{\mathbf{N}\backslash\{p,l\}}, \mathrm{T}(\mathrm{y}_p + y_l, (c_p, c_l))$.

Es inmediato por la Proposición 3.2.2 ya que el resultado de la inducción hacia atrás proporciona los pagos de la regla Talmúdica.

Sea $\mathbf{N} \in \mathscr{N}$ y $(E, c) \in \mathcal{B}^N$. Demostramos, con la ayuda del Lema 4.0.3, que la siguiente estrategia $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ establece un $SPNE$ con el resultado $\mathbf{T}(E, c)$.

- Etapa 1: Cada acreedor $k \in \mathbf{N}$ propone un par $(y^{k*}, \pi^{k*}) = (\mathbf{T}(\mathbf{E}, \mathbf{c}), \pi^{\mathbf{Id}})$, donde $\pi^{Id} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ es la permutación identidad.

- Etapa 2: Suponemos que $\pi(1) = i$ y $\mathbf{y}$ la propuesta de la etapa 1. El acreedor i acepta la propuesta $\mathbf{y}$ si $\mathbf{y_i} \geq max_{k\in N\backslash\{i\}}\mathbf{T}_i(y_i + y_k, (c_i, c_k))$, de lo contrario i rechaza $\mathbf{y}$, entonces escoge un acreedor $j \in \mathbf{N}\backslash\{i\}$ donde $j \in argmax_{k\in N\backslash\{i\}}\mathbf{T}_i(y_i+y_k, (c_i, c_k))$.

- Etapa 3: Suponemos que $\mathbf{y}$ es la propuesta de la Etapa 1, i es el P-acreedor y elije en la Etapa 2 un $j \neq i$. Los acreedores i y j siguen la estrategia $\bar{\sigma}$ definida en el Lema 4.0.3 con $p = i$ y $l = j$ si $i \leq j$ o viceversa.

No es difícil ver que la estrategia σ^* garantiza que el juego acabe con el resultado $\mathbf{T}(E, c)$, ya que si todos siguen la estrategia σ^*, la permutación es la identidad y la propuesta (y) es $\mathbf{T}(E, c)$. Si el jugador 1 en la Etapa 2 acepta la propuesta todos obtienen el pago correspondiente a la regla Talmúdica y si rechaza escoge a un $j \neq 1$ y como la regla Talmúdica es consistente también obtendrán los pagos correspondientes a la regla. Vemos que σ^* es un $SPNE$ del juego $\mathbf{G}(\mathbf{E}, \mathbf{c})$. Para demostrarlo tenemos que ver que ningún jugador está mejor si decide desviarse. Suponemos que la propuesta de la Etapa 1 es $\mathbf{y}$, y i es el P-acreedor y elige $j \neq i$ en la Etapa 2. Por el Lema 4.0.3 esta claro que σ^* es un $SPNE$ del subjuego $\bar{\mathbf{G}}(y_p + y_l, (c_p, c_l)$. En la Etapa 2 por definición siempre escoge la mejor opción así que evidentemente nunca se desvía. Solo nos queda ver que la Etapa 1 lo mejor para los jugadores es seguir la regla. Vamos a suponer que el acreedor i se desvía de la regla y propine (y^i, π^i). Consideramos dos casos.

- El acreedor i es el I-acreedor (ha elegido ser el primero). Tenemos que para cada $k \in \mathbf{N} \setminus \{i\}$, su propuesta es $y^k = \mathbf{T}(E, c)$ y por tanto la propuesta de la Etapa 1 es $y = \mathbf{T}(E, c)$. Por la consistencia bilateral de la regla Talmúdica, para cada $j \in \mathbf{N} \setminus \{i\}$ los pagos de i para $\forall j$ que escoga son: $\mathbf{T}_i(E, c) = \mathbf{T}_i(\mathbf{T_i(E, c)} + \mathbf{T_j(E, c)}, (c_i, c_j))$. Vemos que son los mismo pagos que obtiene si no se desvía así que no esta mejor si se desvía de la propuesta.

- El acreedor $k \in \mathbf{N} \setminus \{i\}$ es el I-acreedor (el acreedor i ha elegido no ser el primero). Suponemos que $y^i = \mathbf{T}(E, c)$. Entonces la propuesta $y = \mathbf{T}(E, c)$ y por la consistencia bilateral de la regla Talmúdica y el subjuego perfecto, Suponemos ahora i se ha desviado al hacer la propuesta $y^i \neq \mathbf{T}(E, c)$. Entonces la propuesta es la del jugador k, es decir $y = y^k = \mathbf{T}(E, c)$ y por la consistencia bilateral de la regla Talmúdica y el subjuego perfecto, i recibe el pago $\mathbf{T}_i(E, c)$ por tanto no está mejor al desviarse ya que recibe lo mismo. □

Acabamos de demostrar la existencia de un equilibrio de Nash en el juego.

Para finalizar el trabajo pensamos si la implementación propuesta por Moreno-Ternero et al. (2020) también funcionara para toda la familia de la regla Talmúdica. Ahora vamos a definir como es la regla de para toda familia Talmúdica.

Definición 4.0.4. *La familia de la reglas Talmúdicas,* $\{\mathbf{T}^\theta \mid \theta \in [0, 1]\}$*: para cada* $\theta \in [0, 1]$*, cada* $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$*, cada* $(E, c) \in \mathcal{B}^N$ *y cada* $i \in \mathbf{N}$*,*

$$\mathbf{T}_i^\theta(E, c) = \begin{cases} min\{\theta c_i, \lambda\} & si \ \sum_{i \in \mathbf{N}} \theta c_i \leq E \\ \\ \theta c_i + max\{(1-\theta)c_i - \lambda, 0\} & de\ lo\ contrario \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *es la única solución de* $\sum_{i \in N} \mathbf{T}_i^\theta(E, c) = E$*.*

Una vez planteado este problema nos dimos cuenta que (Moreno-Ternero et al., 2021) publicó un articulo dando respuesta a esta pregunta. En el articulo se puede ver como efectivamente la implementación también es posible para $\forall \theta \in [0, 1]$, es decir para toda la familia Talmúdica.

Bibliografía

[1] Aumann R.J., Maschler M. (1985) Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud,Journal of Economic Theory, 36 : 195—213.

[2] Herrero C, Villar A (2001) The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems, Mathematical Social Sciences, 42 : 307-328.

[3] Moreno-Ternero JD, Tsay MH y Yeh CH (2020) A strategic justification of the Talmud rule based on lower and upper bounds. International Journal of Game Theory, 49, 12 2020.

[4] Nash, J. (1951). Non-cooperative games. The Annals of Mathematics, Second Series,Vol. 54, No. 2, (Sep., 1951), pp. 286–295.

[5] Moreno-Ternero JD, Villar A (2004) The Talmud rule and the securement of creditors' awards. Mathematical Social Sciences 47:245–257.

[6] Thomson W (2015) Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: An update. Mathematical Social Sciences 74, 41-59.

[7] Tsay M H, Yeh C H (2019) Relations between the central rules in bankruptcy problems: a strategic justification perspective. Games and Economic Behavior 113:515–532.

[8] Young P, (1988) Distributive justice in taxation. Journal of Economic Theory 43, 321–335.