UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Algorismes i aplicacions d'aparellaments maximals en grafs

Autor: Lluís Sabater Rojas

Director: Dr. Antoni Benseny Ardiaca
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

The aim of the project is the study of maximal matchings in graphs, both in unweighted graphs and in weighted graphs. For the case of the graphs that are not weighted, we will see how Edmonds' algorithm works, which will allows us to find a maximum cardinality matching. After studying the case without weights, we will introduce a few concepts of linear programming in order to be able to solve the weighted case, where we will look for maximum weight matchings. Finally, we will see the applications of these results when finding approximations (one upper bound and one lower bound) in polynomial time for the Travelling Salesman Problem, we will use Christofides' algorithm to find an upper bound.

Resum

L'objectiu del treball és l'estudi dels aparellaments maximals en grafs, tant en el cas de grafs no ponderats com en el de grafs ponderats. Per al cas no ponderat, veurem el funcionament de l'Algorisme d'Edmonds, el qual ens permet trobar aparellaments de cardinalitat màxima. Un cop estudiat el cas sense pesos, introduirem alguns conceptes de programació lineal per tal de poder resoldre el cas ponderat, on buscarem aparellaments de pes màxim. Finalment, veurem les aplicacions d'aquests resultats a l'hora de trobar aproximacions (una fita superior i una fita inferior) en temps polinòmic per al Problema del viatjant, utilitzarem l'Algorisme de Christofides per trobar una fita superior.

2020 Mathematics Subject Classification. 68W40, 05C85, 90C35

Agraïments

Vull agrair al Dr. Antoni Benseny el temps i la supervisió que m'ha ofert durant l'elaboració d'aquest treball. La seva dedicació ha estat, no només com a tutor del Treball de Final de Grau sinó també com a professor de l'assignatura de grafs, clau en el meu interès per la branca de les matemàtiques que representa la teoria de grafs.

Vull destacar també el suport que he rebut sempre per part de la meva família, sense el qual res hagués estat possible. El seu esforç ha estat, i és, un exemple a seguir.

Índex

1 Introducció

Els aparellaments en grafs

Determinar on comença una àrea de les matemàtiques no sol ser quelcom fàcil. I, encara que formi part de teoria de grafs, l'inici de la qual és bastant conegut (el Problema dels ponts de Konigsberg resolt per Euler), per a la teoria d'aparellaments en grafs no en tenim un origen clar. No obstant això, sembla prou raonable situar el començament de l'estudi dels aparellaments en grafs entre finals del segle XIX i principis del segle XX, amb els treballs de Petersen i König sobre grafs regulars i grafs bipartits respectivament.

En aquesta primera etapa, podem destacar, per exemple, la demostració del Teorema de König-Egerváry (1931) que relaciona el problema de la cobertura de vèrtexs mínima[2] d'un graf bipartit amb el el problema d'aparellament de cardinalitat màxima d'aquest, el nombre d'arestes en un aparellament de màxima cardinalitat és igual al nombre de vèrtexs en una cobriment de vèrtexs mínim. Paral·lelament, a principis del segle XX, també podem trobar alguns resultats sobre factorització de grafs on s'utilitzen aparellaments.

Un impuls més significatiu a la teoria d'aparellaments en grafs però, arribà a la segona meitat del segle XX. De fet, la majoria dels resultats que es presentaran al llarg del treball se situen en aquesta època. Això no és casualitat, ja que, és precisament a mitjans de segle quan és desenvolupen les tècniques de programació lineal que, com veurem al tercer capítol del treball, estan estretament relacionades amb l'optimització d'aparellaments en grafs.

Per tal d'il·lustrar aquest lligam entre els problemes de programació lineal, així com d'alguns resultats importants de teoria de grafs, i els aparellaments en grafs només cal veure algunes de les aplicacions d'aquests.

Seguint amb els grafs bipartits, un altre resultat que cal destacar és el Teorema del matrimoni de Hall (1935) el qual ens dona una condició necessària i suficient per a trobar un aparellament que cobreixi un dels dos conjunts de vèrtexs d'un graf bipartit. Com podem veure per l'enunciat del teorema, aquest està estretament relacionat amb el Teorema de König-Egerváry (a partir d'un es pot demostrar l'altre) i té aplicacions en problemes d'assignació. Un exemple d'aplicació d'aquest resultat podria ser el següent: donat un conjunt de treballadors i un conjunt d'empreses, de forma que els treballadors han assistit a entrevistes amb un subconjunt de les empreses, determinar si podem trobar feina per a cada treballador, considerant que si un treballador ha anat al procés de selecció de l'empresa vol dir que tant el treballador com l'empresa acceptarien.

De forma similar, si considerem que els conjunts de treballadors i empreses són de la mateixa cardinalitat i permetem ordenar les preferències del treballador i les empreses, obtenim un exemple del Problema del matrimoni estable. Aquest, consisteix a trobar un aparellament que assigni a cada treballador una empresa de forma que no hi hagi cap empresa E_i que preferís contractar un treballador que està treballant en una empresa E_j situada per sota de E_i en la seva llista de preferències. L'any 1962, Gale i Shapley [9] varen demostrar que per a un graf bipartit amb dos conjunts de vèrtexs de la mateixa cardinalitat es pot resoldre el problema mitjançant un algoritme. L'any 2012, Shapley guanyà el premi Nobel d'economia "per la teoria d'assignacions estables i la pràctica del disseny de mercat".

A part de les aplicacions dels aparellaments en problemes d'assignacions, podem considerar també problemes de fluxos de xarxes. En aquest tipus de problema tenim un node que representa la font des d'on s'origina el flux i un altre node que és el punt al que cal fer arribar aquest flux, per fer-ho tenim una xarxa de "canonades"(amb diferents capacitats) que ens permeten anar de la font al punt d'arribada. L'esquema es pot traduir en un graf bipartit amb arestes de diferents capacitats per on hem de fer passar el flux màxim possible. Així, tenim un graf amb un node (l'origen) connectat a tot un conjunt de vèrtexs del nostre graf bipartit, i un altre (el vèrtex d'arribada) connectat a l'altre conjunt de vèrtexs del graf bipartit. Llavors, resolent el problema de trobar un flux màxim, trobarem un aparellament de pes màxim al graf bipartit.

[2] La cardinalitat del conjunt de vèrtexs més petit tal que qualsevol aresta del graf sigui incident a un vèrtex del conjunt.

Si bé fins ara hem vist les aplicacions dels aparellaments en grafs bipartits, al llarg del treball tractarem el cas general (tant en grafs ponderats com en no ponderats). Així doncs, podem veure també algunes aplicacions més enllà dels grafs bipartits.

Continuant amb els exemples d'aplicacions en els problemes d'assignacions, podem modificar el Problema del matrimoni estable de la forma següent: en lloc de considerar dos conjunts diferents (empreses i treballadors) suposem que tenim un únic conjunt (treballadors) i que cal fer-ne parelles de forma que compleixin la condició d'estabilitat. Volem, doncs, que cadascun dels treballadors ordeni els altres per preferència i, amb la informació donada, obtenir un aparellament on no hi hagi dos treballadors x i y cadascun dels quals prefereixi l'altre que al company assignat per l'aparellament. Aquest problema es coneix com el Problema dels companys d'habitació, per al qual tenim un algorisme "eficient"(temps polinòmic) des de 1985.

Un problema semblant al dels companys d'habitació podria ser, en lloc d'ordenar els treballadors per preferències, considerar la productivitat que tindrien cada parella possible de treballadors (suposem que un treballadors x és més productiu amb y que amb z). Llavors cada parella (x, y) es podria interpretar com una aresta i la seva productivitat conjunta com el pes de l'aresta. D'aquesta forma, si volguéssim obtenir la màxima productivitat és evident que buscaríem un aparellament de pes màxim.

A banda d'aquests problemes on la presència d'aparellaments s'intueix pràcticament de l'enunciat (excepte el Problema dels fluxos), l'ús d'aparellaments també el podem trobar en la resolució de problemes que a priori no sembla que tinguin relació amb ells. Un exemple d'això podria ser una situació on tenim dos ordinadors que han de fer diverses tasques parcialment ordenades (de forma que si $J_i \leq J_k$ no podem començar J_k si no hem realitzat J_i). Aquest problema de programació (cal programar l'ordre en que es realitzaran les tasques) es pot plantejar creant un graf on els vèrtexs són les diverses tasques i cada aresta uneix tasques que es poden realitzar de forma simultània. Llavors, si trobem un aparellament de cardinalitat màxima obtindrem un programa que fa servir el màxim temps possible els dos ordinadors en paral·lel. En cas que les tasques tinguessin durades diferents podríem plantejar el problema de forma que el resultat fos trobar un aparellament de pes màxim.

Per últim, els aparellaments en grafs poden ser útils per abordar problemes tan complexos com poden ser el Problema del carter xinès o el Problema del viatjant. El primer consisteix a, donat un graf amb pesos (on cada aresta representa un carrer pel qual ha de passar el carter i el pes la seva llargària), trobar una ruta per tal de recórrer totes les arestes amb la menor distància possible. Pel que fa al Problema del viatjant, podem considerar un graf ponderat on els vèrtexs són ciutats i les arestes les carreteres entre elles (on el pes és la distància entre ciutats). L'objectiu, doncs, serà recórrer tots els vèrtexs (ciutats) amb la menor distància possible. Aquest problema el veurem més detalladament a l'últim capítol del treball.

Estructura de la Memòria

Com hem esmentat abans, aquest treball se centra en problemes d'aparellaments maximals en grafs. Així doncs, al llarg dels tres capítols tractarem el problema d'aparellaments de cardinalitat màxima (el cas de grafs no ponderats), els aparellaments de pes màxim (per a grafs ponderats) i per últim l'aplicació d'aquest en les aproximacions a solucions del Problema del viatjant.

Al primer capítol doncs, començarem recordant que és un aparellament així com que és un aparellament perfecte i donant una caracterització dels grafs que admeten un aparellament perfecte (Teorema de Tutte). Per a la resta de grafs, introduirem el Lema de Berge que ens permetrà saber si un aparellament és maximal. D'aquest lema obtenim que l'aparellament no serà maximal si podem trobar-ne un camí incremental. Per tant, la forma amb què intentarem trobar aparellaments de cardinalitat màxima serà fent una cerca en forma d'arbre de camins incrementals, augmentant la cardinalitat de l'aparellament fins que sigui maximal. Així doncs, l'algorisme que presentarem per tal de resoldre el problema per a grafs no ponderats, l'algorisme d'Edmonds, consistirà en una cerca en forma d'arbre modificada, per tal de tractar els cicles senars, col·lapsant-los en vèrtexs artificials i més tard expandint-los un cop feta la cerca. Aquest tractament dels cicles senars serà clau també en el cas de grafs ponderats.

Al capítol següent, on es tracta el problema de trobar aparellaments de pes màxim, es comença introduint algunes nocions de programació lineal. Això és degut a que a diferència del cas anterior no tenim només un tipus de camí incremental (determinat pel nombre d'arestes) sinó que podem tenir camins incrementals amb un nombre d'arestes igual o inferior. Aquest fet fa que no es pugui aplicar l'algorisme que solucionava el cas del primer capítol directament.

El fet de convertir la cerca d'un aparellament de màxim pes en un problema de programació lineal ens donarà com a resultat un seguit de condicions que caldrà que la solució òptima compleixi. Prenent aquestes condicions, i utilitzant les variables duals obtingudes, podem adaptar l'algorisme d'Edmonds per tal de trobar els camins incrementals en grafs ponderats. Realitzarem la mateixa cerca en arbre que al cas no ponderat però només en el conjunt d'arestes que compleixin un certa condició (que ens permetrà assegurar que els camins cercats són incrementals). Pel que fa al tractament dels cicles senars, la principal diferència amb el cas anterior és que no seran expandits a cada cerca sinó que caldrà que compleixin la condició corresponent.

Al final de cadascun dels capítols il·lustrarem l'algorisme obtingut amb exemples on es podrà veure amb detall el seu funcionament.

Finalment, un cop tenim l'algorisme per tal de trobar un aparellament de màxim pes, tractarem el Problema del viatjant. Per tal d'entendre la dificultat del problema, veurem algunes de les variants que admet així com la complexitat de tractar-lo utilitzant únicament utilitzant combinatòria i/o programació lineal. Un cop comentada la impossibilitat de trobar-ne una solució exacta en un temps polinòmic veurem com el càlcul d'aparellaments de pes màxim ens permet trobar una fita superior i una fita inferior.

2 Aparellaments de grafs

Definició 2.1. *Un aparellament d'un graf $G(V, E)$ és un conjunt d'arestes $M \subset E$ tal que $\forall\ v \in V$ v és incident a una aresta de M com a màxim.*
De forma equivalent es pot definir un aparellament com qualsevol conjunt $M \subset E$ tal que cap parell d'arestes de M són arestes incidents l'una de l'altra.

De la definició es pot deduir fàcilment que poden haver-hi diferents aparellaments per a un mateix graf. Ni tan sols cal que siguin de la mateixa cardinalitat (en particular, qualsevol subconjunt d'un aparellament és un aparellament).

La cardinalitat d'aquest dependrà del nombre d'arestes que formen l'aparellament. Equivalentment, si considerem que cada aresta uneix dos vèrtexs, també podem definir la cardinalitat pel nombre de vèrtexs que queden coberts per arestes incidents que formen part de l'aparellament.

2.1 Aparellaments perfectes i propietats

Una primera qüestió que se'n pot derivar de forma natural és si podem trobar un aparellament que cobreixi tots els vèrtexs del graf. Per a aquest tipus d'aparellaments específics podem introduir una definició en concret:

Definició 2.2. *Un aparellament perfecte d'un graf $G(V, E)$ és un aparellament on tot vèrtex $v \in V$ té alguna aresta incident $e \in M$.*

Aquesta propietat, però, no la trobem a tots els grafs. Un exemple clar en són els grafs que tenen un nombre senar de vèrtexs: si cada aresta conté dos vèrtexs, un aparellament en deixarà com a mínim 1 sense cobrir[3]. A part d'aquests casos, també podem aportar un resultat que dona una condició necessària i suficient perquè un graf G tingui un aparellament perfecte: el Teorema de Tutte.

El nom del teorema fa referència al matemàtic W. T. Tutte, el qual en va aportar la primera demostració al 1947. No obstant això, la demostració de 1947 no és la més senzilla possible. De fet, pocs anys més tard, el mateix Tutte va presentar una demostració més simple (sense utilitzar Pfaffians) basada en resultats de combinatòria. A partir de 1947, a part de les ja esmentades, podem trobar diverses demostracions per al teorema de Tutte. La que presentarem a continuació és similar a la aportada per László Lovász [3], que data de 1975.

Un avantatge d'aquesta demostració és que les idees que utilitza (trobar camins alternants) són similars a les que farem servir més endavant a l'hora de demostrar altres resultats.

Teorema 2.3. ***(Teorema de Tutte, 1947).*** *$G(V, E)$ té un aparellament perfecte si i només si*

$$\phi(G - V') \leq |V'| \quad \forall\ V' \subset V$$

on $\phi(G - V')$ denota el nombre de components del graf $(G - V')$ que contenen un nombre senar de vèrtexs.

Demostració. Per començar, és fàcil comprovar que, si G no tingués un nombre de vèrtexs parell, seria impossible trobar un aparellament perfecte ja que $\phi(G - V') = \phi(G) > 0$ i $|V'| = 0$ si considerem V' el conjunt buit.

Vist això, procedim a demostrar primer una implicació i després la recíproca.

A la primera implicació tenim $G(V, E)$ un graf amb un aparellament perfecte M. Si prenem un conjunt de vèrtexs V', el graf $(G - V')$ és el graf sense els vèrtexs de V' i les seves arestes incidents. Així doncs, a $(G - V')$ es mantindran tots els aparellaments[4] que no utilitzin cap dels vèrtexs de V'.

[3] la propietat de l'existència d'un aparellament perfecte tampoc és compleix per a tots els grafs amb un nombre parell de vèrtexs.

[4] Considerem aparellament a cada aresta $e \in M$. No confondre-ho amb un altre aparellament.

Un cop tenim $(G - V')$ podria ser que hagués quedat partit en diferents components connexes. Així podem anar anomenant les diferents components connexes amb un nombre imparell de vèrtexs com $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Cada component G_i, al ser senar, tindrà com a mínim 1 vèrtex u_i no aparellat. D'altra banda, els vèrtexs que no queden coberts per l'aparellament perfecte de G han de ser vèrtexs que estaven aparellats amb vèrtexs $v_j \in V'$ i a cada vèrtex v_j només li pot correspondre un vèrtex u_i ja que, per a cada v_j, només hi ha una aresta de M.

Per tant, si prenem un vèrtex u_i no aparellat per a cada component G_i, tenim

$$\phi(G - V') = |\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}| = k = |\{u_1, \ldots, u_k\}| \leq |V'|$$

com volíem veure.

Pel que fa al recíproc, tenim un graf que compleix la desigualtat $\phi(G - V') \leq |V'|$ per a qualsevol subconjunt V' de V. Farem la demostració suposant que G no té un aparellament perfecte i arribarem a contradicció.

Abans, però, comprovem que la desigualtat no es veu afectada encara que afegim arestes al graf G. Suposem que afegíssim una aresta nova. Llavors, tindríem una de les situacions següents:

- L'aresta uneix dos vèrtexs de la mateixa component. Aleshores no canvia res.
- L'aresta uneix una component senar amb una de parella. La nova component és senar i, per tant, es manté el nombre de components senars.
- L'aresta uneix dues components senars. El nombre de components senars es redueix i, per tant, es segueix complint la desigualtat.
- L'aresta uneix dues components parelles. No afecta al nombre de components senars.

D'aquesta forma podem afegir tantes arestes com vulguem sense incomplir la desigualtat donada.

Amb aquest resultat podem afegir arestes a G fins que afegir-ne una més fes possible un aparellament perfecte. Aquest tipus de grafs, tals que si afegim una aresta fem possible que tinguin un aparellament perfecte, s'anomenen grafs saturats no factoritzables.

Anomenem $G^*(V, E^*)$ a aquest nou graf. Com que G és un subgraf de G^* tenim:

$$\phi(G^* - V') \leq \phi(G - V') \leq |V'|$$

Considerem ara el conjunt V_0 de tots els vèrtexs de G^* que tenen grau $|V| - 1$, que són aquells que queden units a tots els altres vèrtexs després d'haver afegit totes les arestes possibles. Sabem que, per a qualsevol graf complet amb un nombre parell de vèrtexs, existeix un aparellament perfecte[5]. Per tant, queda descartat el cas $V_0 = V$.

Per a completar la demostració utilitzarem dos resultats més:

Lema 2.4. *Si $G^* = G^*(V, E^*)$ és un graf saturat no factoritzable i V_0 el conjunt de vèrtexs de G^* de grau $|V| - 1$, llavors les components de $G - V_0$ són grafs complets.*

Demostració. Considerem dues arestes (a, b) i (b, c) del graf $G^* - V_0$ que són adjacents. Ens cal demostrar que l'aresta (a, c) també forma part de G^*. Suposem que no fos així.

Com que $b \in G^* - V_0$, podem afirmar que existeix un vèrtex d tal que $(b, d) \notin G^*$ (en cas contrari, b seria adjacent a tots els vèrtexs de G^* i, per tant, de V_0).

Per tant, tenint en compte que G^* és saturat no factoritzable, $G^* + (a, c)$ té un aparellament perfecte, el denotarem per M_{ac}. Si en lloc de (a, c) afegim (b, d) també hem d'obtenir un aparellament perfecte per a $G^* + (b, d)$, l'anomenarem M_{bd}. Llavors, podem definir el conjunt d'arestes $(M_{ac} \oplus M_{bd})$ del graf $G{*}\cup\{(a, c), (b, d)\}$ com les arestes que són només d'un dels dos aparellaments

[5] Per exemple per a K_n tenim $M = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), \ldots, (n - 1, n)\}$.

anteriors. Observem que (a, c) és d'aquest conjunt, ja que l'aresta (a, c) no és de $G^* + (b, d)$ i sí que forma part de $G^* + (a, c)$. Si tinguéssim un aparellament perfecte per a $G^* + (a, c)$ que no utilitzés (a, c), aquest aparellament el podríem fer servir també per a G^*.

Així doncs, tenim $(a, c) \in M_{ac}$ i $(a, c) \notin M_{bd}$ i, anàlogament, $(b, d) \in M_{bd}$ i $(b, d) \notin M_{bd}$, fent que tant (a, c) com (b, d) siguin de $M_{ac} \oplus M_{bd}$. A més a més, podem observar que el conjunt d'arestes $(M_{ac} \oplus M_{bd})$ formarà camins que aniran alternant una aresta de M_{ac} i una aresta de M_{bd} fins a tancar cicles parells[6]. Cada vèrtex que formi part del subgraf $G = G(V, M_{a,c} \oplus M_{bd})$ tindrà com arestes adjacents una de M_{ac} i una altra de M_{bd}. D'aquesta forma, podem considerar els cicles parells C_{ac} i C_{bd} que contenen (ac) i (b, d) respectivament. D'aquest fet en podem distingir dos casos:

Cas $C_{ac} \neq C_{bd}$: si les arestes (a, c) i (b, d) són a cicles diferents, podem prendre l'aparellament $M' = M_{ac} \oplus E(C_{ac})$ on $E(C_{ac})$ són les arestes del cicle C_{ac}. Observem que M' té les arestes de M_{ac} que no formen part del cicle C_{ac} i les arestes de M_{bd} que són al cicle C_{ac} cobrint així tots els vèrtex de G^* sense utilitzar l'aresta (a, c) ja que aquesta és del cicle C_{ac} però no de M_{bd}. Hem arribat a contradicció al trobar un aparellament perfecte per a G^*.

Cas $C_{ac} = C_{bd}$: llavors tenim un cicle parell que conté tant (a, c) com (b, d) i que alterna arestes de M_{ac} i M_{bd}. A partir d'això, podem recórrer aquest C_{ac} des de b, prenent l'aresta (b, d), fins arribar a a o c (és indiferent, suposem que arribem a a). L'última aresta d'aquest camí P que va de b a a via C_{ac} ha de ser de M_{bd} ja que (a, c) és de M_{ac}. Per tant, si prenem (a, b) podem tancar un cicle alternant $P + (a, b)$ que cobreix b, d i a sense necessitat de l'aresta (c, a). Així doncs, si definim $M' = M_{bd} \oplus P + (a, b)$ tindrem un aparellament perfecte de G^* que no utilitza (a, c) (recordem que M_{bd} no té aquesta aresta). Contradicció amb $G^* + (a, c)$ té un aparellament perfecte.

Els dos casos possibles ens porten a contradicció amb el fet que la component que conté a, b i c no sigui un graf complet. Per tant, hem demostrat que totes les components de $G^* - V_0$ seran grafs complets.

Utilitzant el lema anterior sabem que totes les components de $G^* - V_0$ són completes. Si una component és parella, al ser completa, en podrem aparellar tots els vèrtexs sense necessitar altres vèrtexs de fora la component.

Pel que fa a les components senars, al ser completes, podrem aparellar tots els vèrtexs excepte un utilitzant només els vèrtexs de la mateixa component. D'altra banda, com a hipòtesi, sabem que es compleix $\phi(G - V') \leq |V'|$ per a tot V' i abans hem vist com això ens permet considerar també $\phi(G^* - V') \leq |V'|$ per a tot V'. En particular la desigualtat es manté per a el conjunt V_0 i, per tant, tenim com a màxim $|V_0|$ components senars, fet que ens permet aparellar cada vèrtex lliure de les components senars amb un vèrtex qualsevol de V_0. Com que G^* té un nombre parell de vèrtexs, els vèrtexs de V_0 que ens queden per aparellar són també un nombre parell i al ser V_0 complet podem trobar un aparellament que utilitzi només les vèrtexs restants.

Llavors, al contrari del que havíem suposat, G^* té un aparellament perfecte. Per tant, hem demostrat el que volíem: G té un aparellament perfecte.

$\square$

Si bé, com es pot deduir del *teorema de Tutte*, no podem assegurar l'existència d'un aparellament perfecte per a qualsevol graf, el que sí que podem afirmar és que hi haurà almenys un aparellament amb un nombre màxim d'arestes. Recordem que poden haver-hi aparellaments diferents que tinguin la mateixa cardinalitat. Això ens porta a la definició següent:

Definició 2.5. *Un aparellament maximal (o aparellament de cardinalitat màxima) és aquell que conté el màxim nombre d'arestes.*

[6] El resultat que ens permet afirmar això es veurà més endavant quan introduïm les definicions de camins alternants i camins incrementals.

Equivalentment, podem donar la definició utilitzant el nombre de vèrtexs de l'aparellament en lloc del nombre d'arestes (ja que cada aresta ha de ser incident de dos vèrtex diferents). D'aquí podem deduir que qualsevol aparellament perfecte (que cobreix tots els vèrtexs) M serà un aparellament maximal, ja que un cop coberts tots els vèrtexs no podem afegir més arestes a M sense que M deixi de ser un aparellament.

Com s'ha vist abans, el recíproc no és cert, l'aparellament (o aparellaments) maximal d'un graf pot no ser perfecte. Algunes qüestions que podem considerar a partir d'això i de les definicions presentades prèviament són: per a un graf G, quina és la cardinalitat d'un aparellament maximal? Com podem trobar un aparellament maximal?

2.2 Aparellament de màxima cardinalitat

La qüestió anterior és pot anomenar *Problema de l'aparellament de màxima cardinalitat.* Per resoldre'l podríem abordar-lo com un problema de programació lineal, aquesta solució però la presentarem en un problema més general amb grafs amb pesos.

La resolució del problema per a grafs sense pesos la podem realitzar de forma més senzilla. Abans però, ens cal presentar alguns resultats i definicions prèvies.

Definició 2.6. *Un vèrtex lliure és aquell que no és incident a cap aresta aparellada. Els vèrtexs que són incidents a arestes aparellades els anomenem aparellats.*

Definició 2.7. *Donat un aparellament M en un graf G, un camí alternant és un camí que comença en un vèrtex lliure i que alterna arestes no aparellades i aparellades. (Les arestes es van alternant entre $(E - M)$ i M).*

Definició 2.8. *Un camí incremental és un camí alternant que comença i acaba en vèrtexs no aparellats (lliures).*

Un cop fetes aquestes definicions podem presentar el resultat en el qual es basa la solució del problema [5]:

Teorema 2.9. ***(Lema de Berge, 1957).*** *Un aparellament M és de màxima cardinalitat $\iff$ M no té un camí incremental.*

Demostració. Separem les dues implicacions:

La primera implicació es pot reescriure com: si M té un camí incremental $\Rightarrow$ M no és un aparellament de màxima cardinalitat.

De la definició anterior tenim que un camí incremental és un camí alternant que connecta dos vèrtexs no aparellats. Per tant, el nombre d'arestes no aparellades en aquest camí serà $M_1 + 1$ on M_1 és el nombre d'arestes aparellades al camí. Si invertim els papers de les arestes del camí, fent que les arestes no aparellades passin a ser arestes aparellades i viceversa, tindrem un nou aparellament que tindrà una aresta més que l'original.

I haurem construït un aparellament amb una aresta més que l'original. Per tant, M no pot ser maximal.

En el cas del recíproc tenim un aparellament M que no té cap camí incremental. Dels possibles aparellaments maximals del graf podem considerar el que tingui més arestes en comú amb M. El denotem per M^*, és clar que $|M| \leq |M^*|$. Amb aquests dos aparellaments podem construir un graf $G' = G'(V, M \oplus M*)$, el graf que té les arestes que pertanyin a un sol dels aparellaments M i M^*.

De la forma que hem construït aquest nou graf G' sabem que té més arestes de M^* que de M i també podem assegurar que cap vèrtex v de G' tindrà més de grau 2. Si més de dues arestes fossin incidents, tindríem que més d'una aresta incident a v és de M o M^* (contradicció amb M i M^* aparellaments). Així doncs, G' està format per vèrtexs de grau menor o igual que 2 i, per tant, cada component connexa d'aquest graf serà un camí o bé un cicle.

En cas que fos un cicle, aquest pot ser parell o senar. Si fos un cicle imparell tindríem una component on un dels vèrtexs seria incident a dues arestes del mateix aparellament arribant a contradicció. D'altra banda, una component que fos un cicle parell alternaria arestes de M i M^*, i, al ser parell, tindríem el mateix nombre d'arestes de cada aparellament en el cicle. Així doncs, si a l'aparellament M^* invertíssim el paper de les arestes que formen part del cicle parell tindríem un nou aparellament M_2^* de la mateixa cardinalitat que M^* però amb més arestes en comú amb M. Tornem a arribar a una contradicció amb M^* l'aparellament maximal que té més arestes en comú amb M.

Amb aquestes consideracions, només ens queda l'opció que totes les components de G' siguin camins. Si ens fixem en els extrems d'aquests camins hi ha 3 possibilitats: els dos extrems són de M, els dos extrems són de M^* o tenim un extrem de cada. Només ens queda veure que no poden ser cap d'aquestes opcions. Comencem pels casos en què els vèrtexs dels extrems pertanyen al mateix aparellament.

- si els dos vèrtex són de M podríem construir un camí incremental per a M^*, arribant a una contradicció amb que M^* fos un aparellament maximal.
- si els dos vèrtexs són de M^* podríem construir un camí incremental per a M, arribant a una contradicció amb el fet que M no té camins incrementals.

Així doncs, les components connexes de G' només poden ser camins amb un extrem de cada aparellament i, per tant, amb el mateix nombre d'arestes de M i de M^*. Com que $|M| = |M^*|$ i M^* és de màxima cardinalitat tenim que M també ho ha de ser.

□

La solució que proposem no buscarà un aparellament maximal sinó que trobarà un aparellament M que no tingui més camins incrementals i, amb el resultat obtingut, podrem afirmar que M serà maximal. Per a fer-ho, es pot partir de qualsevol aparellament i implementar un algorisme que acabi donant el resultat esperat.

Aquest algorisme es basa en prendre un vèrtex arrel i construir a partir d'ell un arbre alternant:

Definició 2.10. *Un arbre alternant és un arbre que té com arrel un vèrtex lliure tal que els camins des de l'arrel als altres vèrtexs de l'arbre són camins alternants.*

Els vèrtexs d'un arbre alternant, poden ser de dos tipus:

Definició 2.11. *Si l'última aresta del camí que va de l'arrel a v és una aresta aparellada, etiquetem v com a vèrtex exterior.*

Definició 2.12. *Si l'última aresta del camí que va de l'arrel a v no és una aresta aparellada etiquetem v com a vèrtex interior.*

L'arrel també la considerarem un vèrtex exterior. Aquests noms ens resultaran especialment útils a l'hora de crear un arbre alternant.

Algorisme 2.13. *Algorisme d'arbre incremental.* Creació d'un arbre alternant a partir d'un graf i un aparellament.

Sigui G un graf amb un aparellament M, l'algorisme següent permet crear un arbre alternant on trobar un camí incremental posteriorment:

1. *(Inici).* Prenem v un vèrtex lliure en l'aparellament M, utilitzarem v com l'arrel de l'arbre, per tant, podem etiquetar-lo com a exterior. Considerarem tots els altres vèrtexs com a no etiquetats i les arestes com a no marcades.
2. *(Expansió de l'arbre).* Seleccionem qualsevol aresta no marcada (x, y) incident a algun vèrtex exterior. (Si no tenim cap aresta que compleixi aquestes característiques passem directament al *punt 4*). Un cop seleccionada l'aresta (x, y) tenim 3 escenaris possibles:

(a) el vèrtex y és un vèrtex interior: marquem (x, y) com a fora del arbre, tornem al *punt 2*.

(b) el vèrtex y és un vèrtex exterior: marquem (x, y) a l'arbre i passem al *punt 3*.

(c) el vèrtex y no està etiquetat: marquem (x, y) a l'arbre. Depenent de y fem un dels passos següents:

i. si y és un vèrtex lliure finalitzem l'algorisme, hem trobat un camí incremental de v a y.

ii. si y està aparellat per M aleshores marquem l'única aresta (y, z) de M que és incident a y com aresta de l'arbre. Etiquetem y com a interior i z com a exterior. Tornem al *punt 2*.

3. *(Cicle senar)*. Si s'ha arribat a aquest punt, l'última aresta seleccionada ha estat una aresta (x, y) tal que tant x com y estan etiquetades com a vèrtexs exteriors. Com que els dos vèrtexs estaven etiquetats i, per tant, tenim arestes del arbre que arriben fins a ells, l'aresta (x, y) tancarà un cicle a l'arbre. A més a més podem afirmar que aquest cicle serà senar ja que tindrà 2 vèrtexs exteriors seguits, mentre que en un cicle parell els vèrtexs s'alternarien entre interiors i exteriors sense repetir-se. Aturem l'algorisme ja que hem trobat un cicle imparell.

4. *(Arbre hongarès)*. Només s'arriba a aquest punt si al *punt 2* no podem seleccionar cap aresta més. Com que no hem trobat cap camí incremental ni cap cicle imparell, l'arbre generat és un arbre hongarès (un arbre alternant sense camins incrementals des de l'arrel).

El fet que tinguem una aturada als cicles imparells és degut a que, a diferència dels cicles parells on tots els vèrtexs queden aparellats, en els cicles senars un vèrtex queda lliure. El vèrtex lliure només queda determinat depenent d'on haguem iniciat l'algorisme amb el que pot generar ambigüitats. Si seguíssim l'algorisme sense aturar-nos al trobar un cicle imparell el resultat final podria no ser el correcte. Aquest fet tindrà importància a l'algorisme per trobar un aparellament de cardinalitat màxima.

2.3 Algorisme aparellament de cardinalitat màxima

Un cop resolt el problema de crear arbres alternants a partir d'un vèrtex i un aparellament, la solució del problema de trobar aparellaments maximals es pot fer de la forma següent:

Inicialment tenim un graf G amb un aparellament M i, com en el problema anterior, l'algorisme selecciona un vèrtex lliure. A partir d'aquest s'implementa la creació d'un arbre alternant.

Aquest pas pot derivar a un dels 3 resultats comentats:

- si la creació d'un arbre alternant troba un camí incremental, es canvien els papers de les arestes d'aquest camí creant un nou aparellament amb 1 aresta més que l'anterior i amb el vèrtex arrel aparellat.
- si el resultat és un arbre hongarès, no podem crear cap camí incremental des de l'arrel.
- quan el resultat és un cicle senar, podem col·lapsar aquest cicle en un dels seus vèrtexs i continuar l'algorisme en aquest nou graf.

Aquest algorisme és molt semblant al que hem fet servir per a trobar arbres incrementals, però soluciona el problema que teníem amb els cicles imparells. La idea que utilitzem és el fet que al cicle hi haurà un únic vèrtex lliure. La resta dels vèrtexs queden aparellats al mateix cicle i, per tant, de totes les arestes incidents al cicle només una pot ser aparellada. La solució que s'implementa és comprimir els vèrtexs del cicle senar en un nou vèrtex artificial que serà lliure i tindrà totes les arestes incidents al cicle com arestes incidents. Aquest procediment és equivalent a que tinguéssim tots els vèrtexs ja que, igualment, només en podem seleccionar una aresta.

Així doncs, la conseqüència de fer aquestes compressions és que deixem obertes totes les opcions de vèrtex lliure que hi ha al cicle senar i la decisió de quin vèrtex serà lliure ja no serà arbitrària sinó que garantirà una solució correcta.

Aquest tractament dels cicles imparells és idea del matemàtic Jack Edmonds que la va utilitzar en el seu algorisme per a trobar aparellaments de cardinalitat màxima, l'any 1965 [6]. Si bé posteriorment han aparegut altres algorismes, segueixen utilitzant aquest procediment.

Algorisme 2.14. *Algorisme d'aparellament de cardinalitat màxima*

Comencem anomenant el graf original G com a G_0 i l'aparellament inicial M com a M_0. A més a més, tots els vèrtex lliures de G_0 els marcarem com a no-examinats. Al mateix temps, creem una variable $i = 0$ que ens permetrà anar enumerant una sèrie de grafs G_i i aparellaments M_i.

1. *(Examinació d'un vèrtex lliure).* Si tots els vèrtexs són incidents a una aresta del aparellament no podem afegir-n'hi més i, per tant, s'acaba l'algorisme. Igualment, si G_0 només té un vèrtex lliure, com que una nova aresta necessitaria 2 vèrtexs no aparellats, podem anar directament al *punt 6*.

   Si no és cap d'aquests dos casos, seleccionem un dels vèrtexs lliures no-examinats (que anomenarem v). Fent servir l'algorisme descrit en el problema anterior, podem crear un arbre alternant que té com a arrel v. Com en el problema anterior, l'arbre generat pot donar 3 resultats diferents:

   (a) Si trobem un camí incremental, passem al *punt 2*.

   (b) Si l'algorisme de l'arbre alternant acaba en un cicle imparell, passem al *punt 3*.

   (c) Per últim, si l'algorisme acaba generant un arbre hongarès, passem al *punt 4*.

2. *(Camí incremental).* Un cop l'algorisme de l'arbre incremental troba un camí incremental simplement invertim els papers de l'aparellament M_i, la qual cosa augmenta la seva cardinalitat en un i converteix el vèrtex lliure v en un vèrtex aparellat. Després d'això continuem al *punt 5*.

3. *(Cicle imparell).* Només podem arribar a aquest punt si l'algorisme de l'arbre alternant del *punt 2* dona com a resultat un cicle imparell. En aquest punt realitzem els passos següents:

   Reanomenem $i = i + 1$ i definim el cicle trobat com a C_i. Al mateix temps, comprimim en un nou vèrtex a_i (quan comprimim un conjunt de vèrtexs en un de nou, les arestes que eren incidents als vèrtex comprimits són ara arestes incidents al nou vèrtex). Anomenem a aquest nou graf G_i.

   Pel que fa al l'aparellament d'aquest graf M_i, prenem les arestes que teníem a M_{i-1} i que segueixen existint a G_i.

   Si bé podríem pensar que aquesta definició pot trencar les condicions necessàries perquè M_i fos un aparellament (ja que el nou vèrtex té arestes incidents que abans eren incidents a altres vèrtexs), al ser C_i un cicle senar podem afirmar que tots els vèrtexs excepte 1 estan aparellats per les arestes del cicle. Així doncs, podem tractar a_i com un vèrtex qualsevol.

   Un cop fet tot això tornem al *punt 1* aplicant-ho al graf G_i i al mateix vèrtex v que havíem seleccionat.

4. *(Arbre hongarès).* Quan l'algorisme de l'arbre alternant dona com a resultat un arbre hongarès, podem donar v com a examinat ja que no hi ha més canvis possibles en l'arbre alternant arrelat a v. Només ens cal passar al *punt 5*.

5. *(Expansió dels cicles imparells col·lapsats).* A cada aplicació de l'algorisme de l'arbre alternant, cada cop que el resultat era un cicle imparell, l'algorisme enumerava aquest cicle i el comprimia en un nou vèrtex, generant un graf G_i diferent al graf original i n'adaptava els aparellaments. Com que l'aparellament que ens interessa és el de G_0, ens cal revertir aquests canvis. Ho podem fer de la forma següent (suposem que tenim una seqüència $G_1, G_2, \ldots, G_t$ de grafs, amb vèrtexs artificials $a_1, a_2, \ldots, a_t$ i aparellaments $M_1, M_2, \ldots, M_t$):

Comencem definint $M_t^* = M_t$. Com abans es van crear els aparellaments M_i a partir de M_{i-1}, per a desfer aquests canvis podem anar definint M_{i-1} a partir de M_i.

Així doncs, per a cada $j = t, t-1, \ldots, 1$, prenem M_j^* i generem M_{j-1}^* amb les consideracions següents:

(a) Si el vèrtex a_j està aparellat a M_j^*, llavors M_{j-1}^* és l'aparellament que consta de tots els vèrtex de M_j i el conjunt d'arestes de C_i que aparellen tots els vèrtex que en expandir el cicle havien quedat lliures. Tornem al *punt 2.*

(b) Si el vèrtex a_j és lliure a l'aparellament M_j^*, llavors M_{j-1}^* són totes les arestes de M_j^* més un conjunt qualsevol d'arestes de C_i que cobreixen tots els vèrtexs de C_i menys 1 que quedarà lliure. Tornem al *punt 1.*

6. *(Final).* Si arribem a aquest punt és que hem trobat un aparellament M_0^* de cardinalitat màxima per al graf original G_0.

Demostració. Seguidament donarem una justificació que la solució que trobem amb l'algorisme presentat és correcta.

Com que en l'algorisme d'aparellament de cardinalitat màxima que hem definit "esquiva"els cicles senars, quan no tornem al primer pas (crear arbres alternants) és perquè hem trobat un camí incremental o un arbre hongarès. En cas que el resultat fos un cicle imparell es continuaria en un nou graf amb el cicle col·lapsat.

Això en assegura que quan acaben les cerques d'arbres incrementals ens trobem en el *punt 5* i tenim un cert aparellament M_i que serà resultat de haver trobat un camí incremental o un arbre hongarès. Veiem les implicacions de cada cas:

Si hem trobat un camí incremental per al vèrtex lliure seleccionat l'únic que hem de comprovar és que l'aparellament M_i de G_i tindrà una aresta més no només a G_i sinó que també funcionarà quan expandim els cicles que s'hagin pogut formar, això és clar ja que, de la forma amb que hem definit els *punts 4 i 5*, cada cop que comprimim o expandim un cicle imparell no n'alterem les arestes fora d'aquest i per tant, com que l'aresta que afegirem amb M_i és de fora d'un cicle imparell, aquesta no es veurà afectada pels canvis.

Pel que fa al cas que el resultat que haguem obtingut sigui un arbre hongarès, hem de comprovar que, si en examinar un vèrtex v acabem trobant un arbre hongarès, realment no tindrem cap camí incremental des de v en l'aparellament final.

Per la definició d'arbre hongarès tenim que no existeix cap camí incremental des de v fins a qualsevol vèrtex lliure un cop examinat v. A més a més, podem afirmar que en les iteracions següents del algorisme aquest no podrà fer servir cap aresta de l'arbre hongarès per a crear un camí incremental ja que, si fos així, podríem haver utilitzar part d'aquest camí per a crear un camí incremental fins a v. De forma similar, com que no podem prendre arestes de l'arbre, els canvis que fem en les iteracions següents no afectaran l'arbre.

Amb aquestes consideracions només hem de comprovar que, si trobem un arbre hongarès en un cert M_v (l'aparellament on s'ha seleccionat v), aquest es manté al fer les expansions dels cicles senars (el *punt 6*).

Suposem doncs, que tenim un aparellament M_v (que és resultat de trobar un arbre hongarès per a v) i que, desfent alguns cicles, arribem a un graf G_t on existeix un camí incremental C des de v fins a un vèrtex w, tots dos vèrtexs lliures. Prenem (x, y) la primera aresta del camí C que no pertany a l'arbre hongarès, sabem que existeix una resta de C que no és de l'arbre ja que en cas contrari tindríem un camí incremental de v a w, contradicció amb que sigui un arbre hongarès.

A més a més, podem afirmar que el vèrtex x de l'aresta (el vèrtex que pertany a l'arbre) és etiquetat com a exterior. Si fos interior l'aresta (x, y) hauria de ser de aparellada ja que l'última aresta del camí de v a x no ho seria però això faria que x tingués o bé dues arestes del aparellament incidents, fet que impediria la creació del camí incremental de v a w, o bé existiria un camí incremental de v a y (i per tant no seria un arbre hongarès).

Per últim, el vèrtex y pot ser d'un dels 4 tipus següents: lliure, no etiquetat però aparellat, etiquetat exterior, etiquetat interior. Veiem però les diverses contradiccions que suposa cada tipus,

- Si fos un vèrtex lliure, haguéssim trobat un camí incremental de v a y enlloc de un arbre hongarès.
- De la mateixa forma, si y fos un vèrtex aparellat però no etiquetat mentre es creava l'arbre hongarès, haguéssim etiquetat y com a interior.
- Si y fos un vèrtex exterior al examinar-la, l'aresta (x, y) tancaria un cicle imparell abans d'acabar de construir l'arbre hongarès.
- Si el vèrtex y fos interior tindríem, un camí alternant de v fins a y (que formaria part del arbre) i podríem considerar un nou camí C' format pel camí alternant de l'arbre que aniria de v a y i el fragment de C que va de y fins a w.

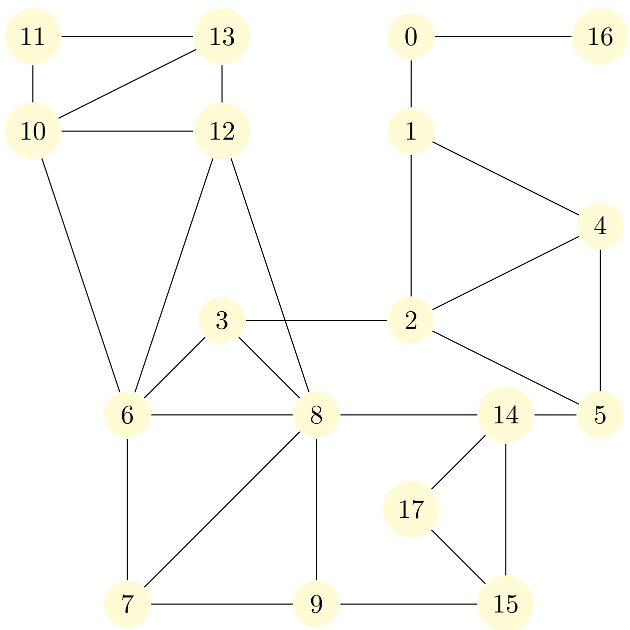
Si repetim el procediment canviant C per C' (realment la primera aresta no inclosa a l'arbre no pot ser incident a y però potser que algunes arestes més endavant tornem a trobar un vèrtex exterior, el primer tros del fragment de y a w encara estaria dins de l'arbre hongarès), podem arribar o bé a una de les contradiccions dels 3 primers casos o bé a un nou camí C'' cada cop amb menys arestes fora del arbre.

Per tant, al final o bé arribarem a una contradicció o trobarem un camí incremental que entrarà en contradicció amb haver construït un arbre hongarès.

Aquests fets doncs, demostren que el nostre algorisme no arriba a contradiccions o aparellaments impossibles al comprimir i expandir cicles imparells, el que juntament amb la creació d'arbres alternants ens assegura que el resultat serà un aparellament de cardinalitat màxima.

2.3.1 Exemple del funcionament de l'algorisme

Exemple 2.15. Per últim, com a exemple, veiem com actuaria l'algorisme en el graf següent:

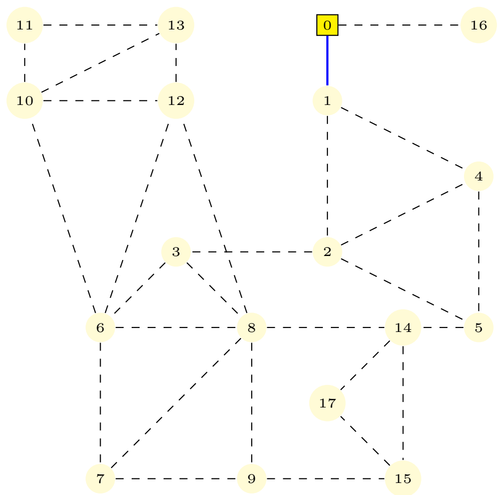


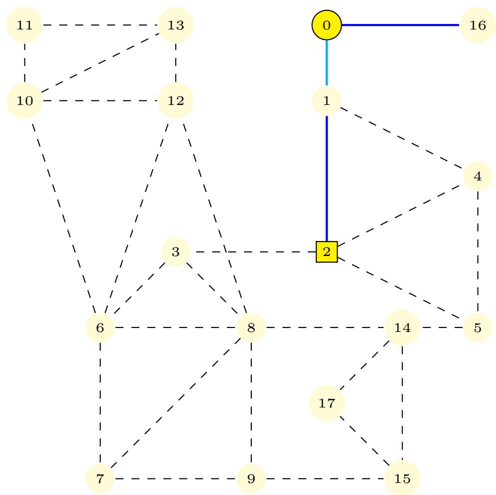
Per tal d'il·lustrar els passos (considerarem que l'algorisme realitza una iteració cada cop que arriba al *punt 5*) que es fan, utilitzarem un seguit de colors, així doncs, abans de començar cal definir la llegenda que utilitzarem a cada pas:

- Arestes:
  - Les arestes verdes i cian són les arestes que formen part de l'aparellament al començar la subrutina de l'arbre alternant.
  - Les arestes blaves (i cian) són aquelles que ha cercat l'arbre alternant.
  - Si l'aresta blava és discontínua vol dir que al cercar aquella aresta no l'hem pogut afegir a l'arbre.
  - Les arestes vermelles són arestes que han acabat formant un cicle.
- Vèrtexs:
  - El vèrtex quadrat és el vèrtex que ens servirà d'arrel en aquell pas.
  - Els vèrtexs foscos són aquells que quedaran examinats un cop feta la iteració.
  - Els vèrtexs que durant la cerca de l'arbre alternant quedin etiquetats com a exteriors tindran la vora remarcada (són els vèrtexs des d'on podem cercar noves arestes).

En el cas que del graf que estudiarem no hem considerat cap aparellament inicial i, per tant, tots els vèrtexs són lliures i cap d'ells està examinat. Podem prendre doncs, qualsevol vèrtex com a vèrtex arrel.

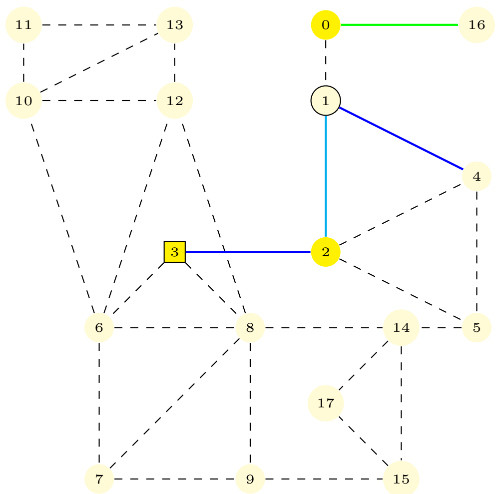
A la primera imatge podem escollir el 0 com a vèrtex arrel (qualsevol vèrtex hagués servit). Llavors aquest queda etiquetat com a exterior i busquem alguna aresta incident per afegir a l'arbre. Triem l'aresta $(0,1)$, el vèrtex 1 era un vèrtex no etiquetat i lliure, per tant hem trobat un camí incremental.
L'aresta blava $(0,1)$ que no era de l'aparellament i que hem afegit a l'arbre alternant que construíem des de l'arrel 0 passarà a formar part de l'aparellament $M = \{(0,1)\}$.

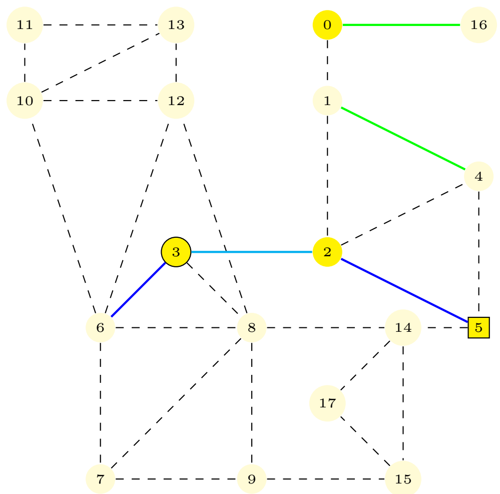




En la segona iteració, que comença amb l'aparellament $M = \{(0,1)\}$, el vèrtex arrel que escollirem no pot ser ni 0 ni 1 ja que estan aparellats, a part, el vèrtex 0 ja ha estat examinat. Una possible selecció seria el vèrtex 2. Des d'aquesta arrel, podem començar a construir l'arbre alternant prenent l'aresta $(1,2)$. Llavors, veiem que l'altre vèrtex de l'aresta, el vèrtex 1, és aparellat a M i per tant l'etiquetarem com a interior i l'altre vèrtex de l'aresta de l'aparellament incident a 1 (el vèrtex 0) quedarà etiquetat com a exterior.
De moment l'arbre alternant A està format per les arestes $(1,2)$ i $(0,1)$. Escollim, doncs, un del dos vèrtex exteriors, 0 o 2, per a seguir construint l'arbre alternant. En el nostre cas seleccionem 0 i prenem l'aresta que ens queda per explorar $(0,16)$. Com que el 16 és un vèrtex no etiquetat i lliure, podem afirmar que hem trobat un camí incremental de 2 a 16. Només ens queda revertir els papers de les arestes d'aparellades a no aparellades i viceversa. Un cop fet això tenim $M = \{(1,2),(0,16)\}$.

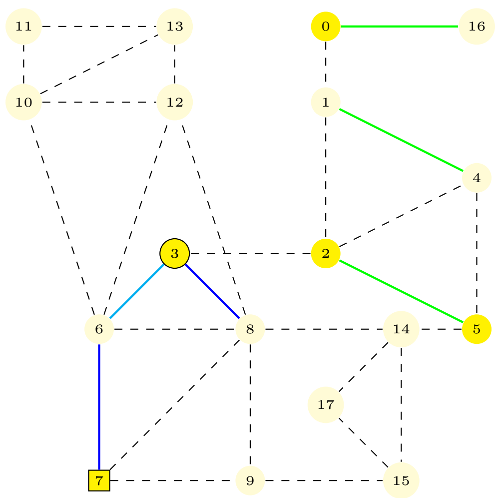
Al començar la tercera iteració haurem examinat els vèrtexs 0 i 2 i tindrem aparellats els vèrtexs: 0, 1, 2 i 16. Prenem com a vèrtex arrel el 3. Aplicant l'algorisme d'arbre alternant, si escollim l'aresta $(2,3)$, d'entre les incidents a 3, haurem d'etiquetar el vèrtex 2 com a interior i 1 com a exterior. Això és degut a que l'aparellament al començament de la iteració era $M = \{(1,2),(0,16)\}$ i per tant 2 era un vèrtex no etiquetat però aparellat.
Escollint un dels vèrtex exteriors, en el nostre cas 1, podem trobar una aresta incident que uneix 1 a un vèrtex lliure 4, arribant al camí incremental $C = (3,2,1,4)$.
Per últim, capgirant els papers de les arestes del camí incremental, les arestes $(2,3)$ i $(1,4)$ passen a ser de l'aparellament i $(1,2)$ deixa de formar-ne part. Veiem que l'aresta $(0,16)$ que no ha estat explorada per l'arbre incremental, però era de l'aparellament, seguirà essent de l'aparellament M

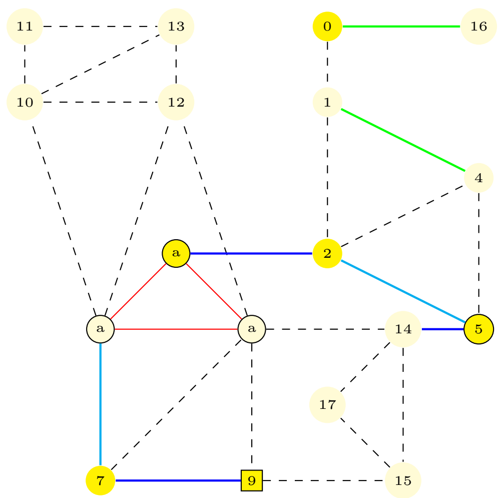




Un cop examinats els vèrtexs 0, 2 i 3, i tenint com aparellament $M = \{(1,4),(2,3),(0,16)\}$, podem escollir 5 com a vèrtex arrel. De forma similar a passos anteriors, aplicant l'algorisme d'arbre incremental podem arribar a un camí incremental $C = (5,2,3,6)$ i en invertir els papers de les arestes obtenim l'aparellament $M = \{(2,5),(3,6),(1,4),(0,16)\}$.

De forma similar, al pas següent podem considerar el 7 com a vèrtex arrel i crear l'arbre alternant $A = \{(6,7),(3,6),(3,8)\}$ obtenint un camí incremental de 7 a 8. Aquesta construcció ens dona com a resultat l'aparellament $M = \{(6,7),(3,8),(2,5),(1,4),(0,16)\}$.

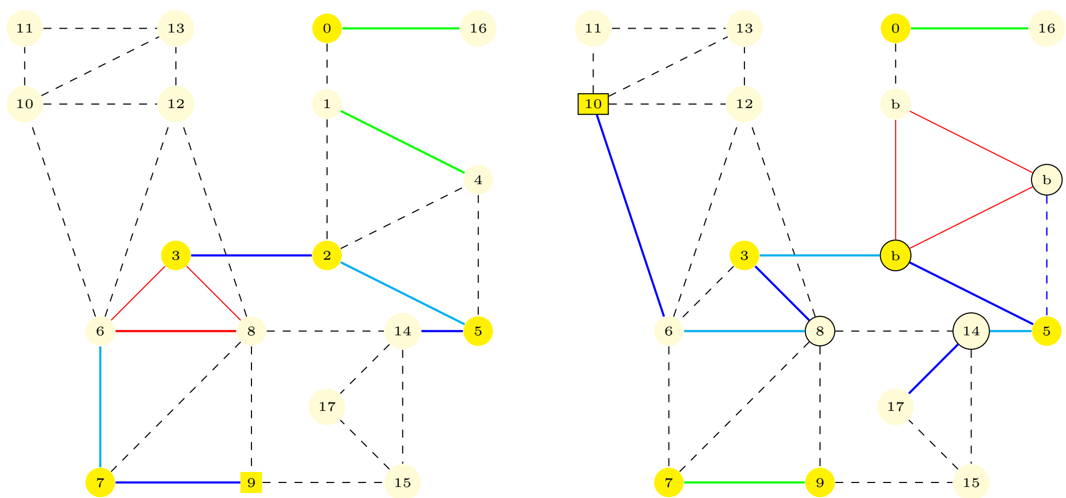




Un dels possibles resultats de l'algorisme d'arbre alternant (2.13) és trobar un cicle senar. Veiem, doncs, com actuaria l'algorisme en aquest cas.

En aquest punt de l'algorisme d'aparellament de cardinalitat màxima, tenim com a vèrtexs examinats 0, 2, 3, 5 i 7, i l'aparellament és $M = \{(0,16),(1,4),(2,5),(3,8),(6,7)\}$. Per tant una possible elecció com a vèrtex arrel és el 9. A partir d'aquest, com en els passos anteriors, construïm l'arbre alternant seleccionant-ne una aresta incident, per exemple $(7,9)$. Llavors com que 7 és un vèrtex aparellat per M ens queda seleccionada també l'aresta $(6,7)$ i 6 és etiquetat com a vèrtex exterior. Seguint l'arbre alterant a partir del vèrtex, si seleccionem l'aresta $(3,6)$ l'arbre afegirà les arestes $(3,6)$ i $(3,8)$ etiquetant el 3 com a vèrtex interior i el 8 com a vèrtex exterior.
A partir del vèrtex exterior 8 podem seleccionar l'aresta $(6,8)$. Fent-ho però ens trobem que 6 ja estava etiquetat com a vèrtex exterior. Per tant, amb l'algorisme (2.13) podem afirmar que hem trobat un cicle $a = (6,3,8)$.
Quan això succeeix, l'algorisme genera un nou graf que consisteix en el graf original però amb els vèrtexs del cicle senar col·lapsats en un nou vèrtex a i torna a començar la examinació de 9 en aquest nou graf G_1 (realment podem fer servir l'arbre alternant que havíem fet fins a tancar el cicle senar i seguir a partir del vèrtex exterior que ara és a).
Així doncs, podem examinar qualsevol de les arestes incidents a a (que són les arestes incidents a 3, 6 i 8). Prenem, per exemple, l'aresta $(a,2)$ que unirà el vèrtex exterior a amb un vèrtex no etiquetat però aparellat 2. Amb això també afegirem l'aresta $(2,5)$ i etiquetarem el 2 com a vèrtex interior i el 5 com a vèrtex exterior. Per últim, si afegim l'aresta $(5,14)$, haurem trobat un camí incremental $C = \{9,7,a,2,5,14\}$.

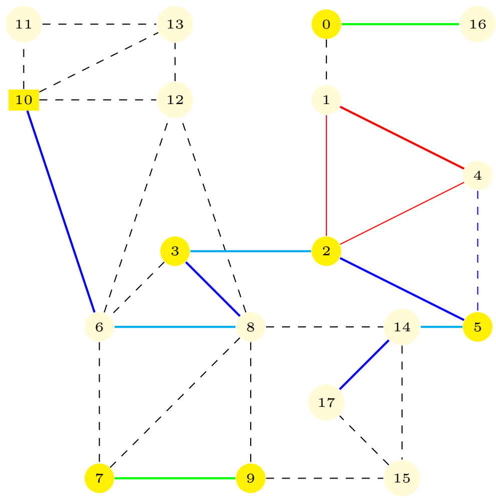
Un cop fets els canvis de papers de les arestes del camí incremental, encara ens queda expandir el cicle senar que havíem col·lapsat. Per a fer-ho hem de tenir en compte que només una aresta de l'aparellament nou és incident a un dels vèrtexs, el 3 en el nostre cas, que forma part del cicle. Així doncs, podem fer un aparellament amb arestes de C de forma que només quedi lliure el vèrtex que ja és aparellat, escollint l'aresta $(6,8)$. Per tant, en expandir el cicle, l'aparellament final serà el que haurem trobat a G_1 juntament amb el que hem trobat per C, obtenint $M = \{(0,16),(1,4),(2,3),(5,14),(6,8),(7,9)\}$.

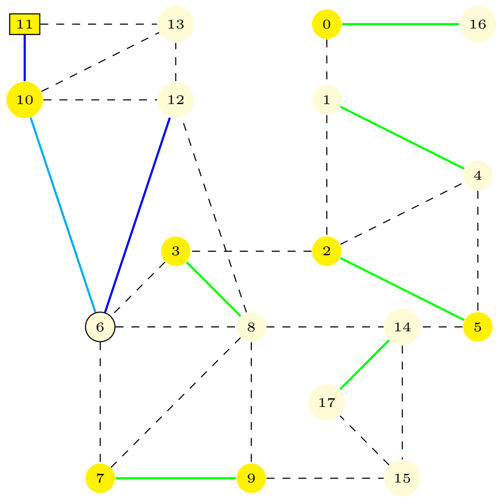


Quan intentem afegir una aresta a l'arbre alternant des d'un vèrtex que hem etiquetat com exterior a un vèrtex que ja havíem etiquetat prèviament com interior, l'algorisme no ens permet afegir-la i donem l'aresta com explorada. Aquest fet és el que apareix en la vuitena iteració.

Abans de començar la iteració tenim com a vèrtexs explorats: 0, 2, 3, 5, 7, 9. I l'aparellament és $M = \{(0,16),(1,4),(2,3),(5,14),(6,8),(7,9)\}$. Així doncs, prenem com a vèrtex arrel el 10 i utilitzant (2.13) anem afegint arestes fins a obtenir l'arbre $A = \{(6,10),(6,8),(3,8),(2,3),(2,5),(5,14)\}$, al mateix temps els vèrtexs es van etiquetat entre exteriors i interiors, els vèrtexs exteriors són $O = \{10,8,2,14\}$, mentre que els interiors són $I = \{6,3,5\}$. En aquest punt, l'aresta següent de l'arbre la podem seleccionar entre totes les arestes incidents a un vèrtex exterior, suposem que escollim l'aresta $(1,2)$, llavors com que el vèrtex 1 és un vèrtex aparellat però no etiquetat l'etiquetarem com a interior i afegirem l'aresta $(1,4)$ etiquetant 4 com a exterior. Imaginem però que intentem seguir afegint arestes des del vèrtex 4, al provar d'afegir l'aresta $(4,5)$, com que 5 ja està etiquetat com a interior, l'algorisme (2.13) no ens permet afegir-la a l'arbre (llavors la marcarem de color blau ja que ha estat examinada, però discontinua). Si intentem l'altra aresta que ens queda per examinar de les incidents a 4 tancarem un cicle senar $a = (4,2,1)$. Com en el pas anterior considerem un nou graf G_1 igual que el graf original però amb el cicle senar col·lapsat i seguim buscant un camí incremental amb l'algorisme d'arbre alternant.

Aquest camí incremental el podem trobar afegint l'aresta $(14,17)$. Llavors, només ens queda intercanviar els papers de les arestes del camí incremental i expandir el cicle senar. Al ser el 2 el vèrtex aparellat l'aparellament del cicle que afegirem serà l'aresta $(1,4)$. Aconseguint com aparellament $M = \{(0,16),(1,4),(2,5),(3,8),(6,10),(7,9),(14,17)\}$.

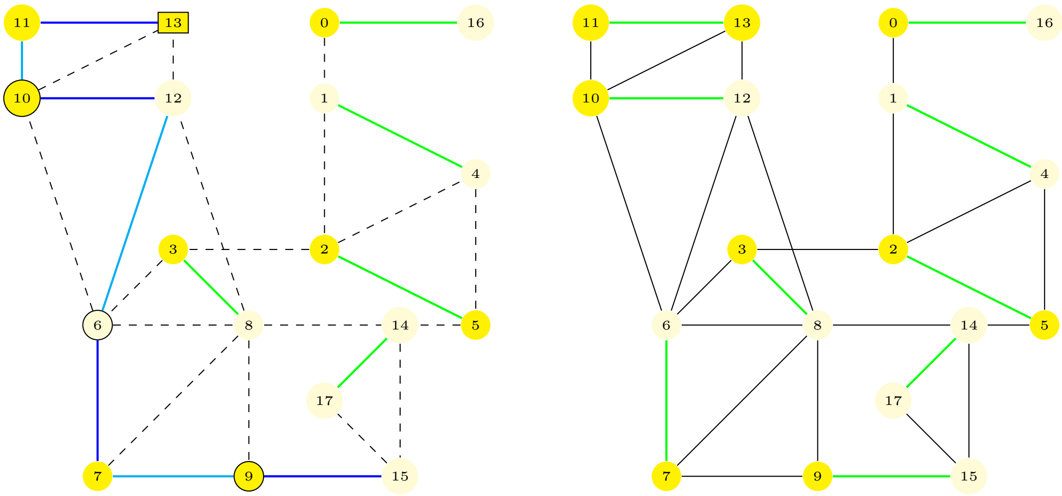




És fàcil veure que a cada iteració que fem (si no arribem a un arbre hongarès) augmentem en 1 el nombre d'arestes aparellant el vèrtex examinat. Per tant, amb 7 vèrtexs explorats, havent començat des d'un aparellament nul, tindrem un aparellament de 7 arestes, en concret $M = \{(0,16),(1,4),(2,5),(3,8),(7,9),(6,10),(14,17)\}$.

Els vèrtexs que ens queden per examinar i que no estan aparellats són: 11, 12, 13 i 15. Prenem l'11 com a vèrtex arrel per a la iteració i l'etiquetem com a exterior. Si escollim l'aresta $(10,11)$ al ser 11 un vèrtex aparellat però no etiquetat afegirem també l'aresta $(6,10)$ i ens quedarà el 10 com a vèrtex interior i el 6 com a exterior. Llavors, afegint l'aresta $(6,12)$ haurem trobat un camí incremental. Per tant, eliminem d'M l'aresta $(6,10)$ i hi afegim $(10,11)$ i $(6,12)$. Donem per examinat el vèrtex 10.

En haver aparellat 12 en l'últim pas, només ens queden 13 i 15 com a vèrtexs lliures no examinats. A més a més, com que cada camí incremental uneix vèrtexs no aparellats podem preveure que, si existeix, el camí incremental que trobarem anirà del 13 al 15. Per a trobar aquest camí podem utilitzar l'algorisme d'arbre alternant com en els passos anteriors. Un possible camí és $C = \{(11,13),(10,11),(10,12),(6,12),(6,7),(7,9),(9,15)\}$. Intercanviant els papers del camí incremental C haurem augmentat en 1 la cardinalitat de l'aparellament.



Així, l'aparellament que tenim és $M = \{(0{,}16), (1{,}4), (2{,}5), (3{,}8), (6{,}7), (9{,}15), (10{,}12), (11{,}13), (14{,}17)\}$. No ens queda cap vèrtex lliure. Per tant, podem concloure que hem arribat a un aparellament perfecte. Com es veu a l'última figura, no ha estat necessari examinar tots els vèrtexs, de fet, si no trobem arbres hongaresos (com en aquest exemple) examinant la meitat dels vèrtexs n'hi ha suficient ja que a cada pas aconseguirem unir 2 vèrtexs més a l'aparellament.

D'altra banda, havent trobat un aparellament perfecte sabem que el graf complirà el *Teorema de Tutte* (2.3). No obstant, comprovar que es compleix la condició del teorema per a tots els conjunts de vèrtexs possibles cas per cas no és quelcom que es pugui fer a mà (d'un conjunt de 18 elements diferents en podem fer 2^{18} subconjunts, tot i que en podríem descartar alguns fàcilment).

3 Aparellaments de grafs amb pesos

Si bé a la secció anterior hem pogut mostrar un algorisme que troba un aparellament maximal, adaptar-lo perquè cerqui solucions òptimes també per a grafs ponderats (amb pesos) no és una tasca senzilla. D'altra banda, com hem dit abans, tant el problema que presentarem a continuació com el que hem solucionat abans (un graf no ponderat és un cas especial de graf ponderat) es poden resoldre pensant-los com a problemes de programació lineal.

Abans de continuar però, pot ser convenient veure com són en general els problemes de programació lineal:

3.1 Introducció a un problema d'optimització

Problema 3.1. Plantejament general d'un problema de programació lineal.

Els problemes de programació lineal consisteixen a maximitzar (o minimitzar) una funció objectiu lineal, restringida a algunes condicions lineals. Així, un problema de programació lineal general podria ser semblant al següent:

$$\text{maximitzar} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{3.1}$$

restringint x amb unes condicions lineals d'igualtat i desigualtat:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i &= b_j\,, \quad 1 \le j \le k \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i &\le b_j\,, \quad k+1 \le j \le m \end{aligned} \tag{3.2}$$

i unes restriccions de no-negativitat:

$$x_i \ge 0, \quad l+1 \le i \le n \tag{3.3}$$

En les diverses equacions, a_{ij}, c_i i b_j són constants, mentre que les úniques variables són les x_i (les variables x_i amb $i < l+1$ no tenen restriccions de signe).

A més a més, és fàcil veure que, encara que un problema de programació lineal no estigui presentat exactament d'aquesta forma, es pot adaptar amb un seguit de canvis perquè ens quedi amb el plantejament anterior. Un exemple d'això en són els canvis següents:

$$\text{minimitzar} \sum_{i}^{n} c_i x_i \;=\; \text{maximitzar} \sum_{i}^{n} (-c_i) x_i$$

$$\sum_{i}^{n} a_{ji} x_i \le b_j \quad \text{és equivalent a} \quad \sum_{i}^{n} (-a_{ij}) x_i \ge (-b_j)$$

D'aquesta forma, podem considerar el problema anterior com un problema general que consta de 3 parts: (3.1) una funció objectiu, (3.2) les condicions i (3.3) les restriccions de no-negativitat.

A part dels canvis que podem fer per a reescriure el problema a la forma "estàndard" que hem presentat, cada problema de programació lineal té associat un problema dual de la forma següent:

$$\text{minimitzar} \sum_{j=1}^{m} b_j y_j \tag{3.4}$$

restringint y amb les condicions lineals duals d'igualtat i desigualtat:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j = c_i \,, \quad 1 \le i \le l \\ &\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \ge c_i \,, \quad l+1 \le j \le n \end{aligned} \tag{3.5}$$

i unes condicions de no-negativitat:

$$y_j \ge 0, \quad k+1 \le j \le m \tag{3.6}$$

les a_{ij}, b_i, c_i són les mateixes constants que al problema original, mentre que els canvis els trobem en el nombre de condicions i variables, i en com les construïm. Més detalladament, el problema queda determinat per les relacions següents:

El nombre de variables que teníem al problema original serà el nombre de equacions "condicions"que tindrem al problema dual. A més a més, aquestes condicions seran una igualtat en el cas que la variable x_i original no tingui restricció de no-negativitat i una desigualtat (de signe contrari a les que teníem) en cas que si tinguessin restricció de no-negativitat.
A part del nombre de condicions lineals, si les escrivíssim de forma matricial, la matriu que tenia components a_{ij} es convertiria en la matriu transposada en el problema dual. Per últim, els termes independents de les n condicions no són les b_j sinó les c_i que teníem a la funció objectiu.

Pel que fa a la funció objectiu del problema dual, si en el problema original era una funció a maximitzar en el problema dual consistirà en minimitzar la nova funció objectiu. Del fet esmentat abans sobre com quedaria una matriu amb les equacions de les condicions al problema dual podem veure també que el nombre de variables que tindrà el problema dual serà igual al nombre de condicions que tenia el problema original, així doncs la funció objectiu consistirà a minimitzar la suma de m variables (que representen les condicions del problema original) cadascuna d'elles multiplicada per la constant b_j corresponent a la condició del problema original. Les restriccions de no-negativitat del problema dual s'aplicaran a les variables que corresponguin a les equacions que eren desigualtats al problema original.

Un cop vist com podem estructurar un problema de programació lineal de forma estàndard i com construir el problema dual a partir d'aquesta, es poden abordar els mecanismes per a trobar solucions a aquests tipus de problemes. Abans però ens calen un parell de definicions:

Definició 3.2. *Una solució factible és aquella que compleix les condicions del problema de programació lineal així com les restriccions de no-negativitat (les parts (3.2) i (3.3) del problema original o les (3.5) i (3.6) del problema dual).*

Definició 3.3. *Una solució òptima és una solució factible que, a més a més, optimitza la funció objectiu.*

Definició 3.4. *El valor que la funció objectiu assoleix en les solucions òptimes s'anomena valor del programa lineal.*

Donades aquestes definicions i coneixent l'estructura del problema, una primera observació que podem fer és que, a priori (si el nombre de condicions i variables és gran), pot ser difícil comprovar que una solució factible sigui una solució òptima [7]. De la mateixa manera, intentar trobar de forma directa una solució òptima per a un problema de programació lineal també pot ser costós. Aquest fet és important ja que al problema de programació lineal que plantejarem més endavant per tal de trobar un aparellament maximal per a un graf amb pesos qualsevol pot tenir un nombre elevat de variables i condicions (dependrà del nombre d'arestes que tinguem).

[7] Si el problema de programació lineal conté moltes condicions en forma d'igualtat, trobar una solució factible pot passar per haver de resoldre un sistema d'equacions. En el nostre cas però, la solució bàsica (totes les variables iguals a 0) sempre serà una solució factible.

Com que trobar una solució de forma directa no és possible, les estratègies a seguir per a resoldre aquests tipus de problemes de programació lineal. I en concret el problema que plantejarem per als grafs, s'hauran de basar en algorismes que a partir d'una solució factible la vagin millorant fins a trobar una solució òptima. Aquests algorismes però, segueixen tenint la dificultat de saber si una solució factible és una solució òptima. Com hem dit abans, aquest fet no és evident mirant únicament el problema de programació lineal.

D'altra banda, tenint en compte també el problema dual, una propietat que si podem extreure de les solucions factibles és la següent:

Si tenim dos conjunts $\{x_i\}$ i $\{y_j\}$ que són solucions factibles del problema original i del problema dual, sabent que compleixen (3.2) i (3.5) respectivament, tenim

$$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \geq \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \geq \sum_{i=1}^{n} x_i c_i$$

Aquest resultat ens mostra que el valor del programa lineal dual serà més gran que el valor del programa lineal original. Per tant, el màxim que podrem assolir per a la funció objectiu del problema original serà aquell valor que iguali el valor del problema dual. Així doncs, tenim una característica pròpia de les solucions òptimes: són aquelles que igualen el valor de les funcions objectiu tant del problema original com del dual.

Observem que demanar que una solució sigui òptima és el mateix que imposar les condicions següents:

$$\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) y_j = 0, \quad 1 \leq j \leq m$$

i, de forma anàloga,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j - c_i\right) x_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

El nombre de condicions que això representa és $m + n$, però no cal comprovar-les totes. Si $x_i = 0$ o $y_j = 0$ la condició es compleix de forma immediata. Per tant, podem reescriure les condicions anteriors com:

$$\begin{aligned} y_j \neq 0 \;\Rightarrow\;\; b_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad 1 \leq j \leq m \\ x_i \neq 0 \;\Rightarrow\;\; c_i &= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{3.7}$$

Denotarem aquestes condicions com condicions complementàries de relaxació.

Un cop definit això tenim una forma de comprovar si una solució factible és una solució òptima (si compleix totes les condicions complementàries de relaxació). Per tant, els mètodes que havíem considerat abans ja no tenen l'impediment de no saber quan una solució és òptima.

3.2 Generalització de l'aparellament maximal als grafs ponderats

Presentat un problema de programació lineal de forma general i una idea de com podem arribar a obtenir una solució òptima, podem tornar al nostre cas concret dels grafs ponderats. Si bé caldrà utilitzar programació lineal per a resoldre el problema, la base d'aquest és similar a la del problema per a grafs sense ponderar quan buscàvem un aparellament de cardinalitat màxima.

Per als grafs sense pesos vàrem definir un aparellament de cardinalitat màxima com un aparellament que no té camins incrementals. En el cas dels grafs ponderats ens cal, però, definir què és un camí incremental ponderat (o camí incremental amb pesos). Mantenint la definició de camí alternant, podem adaptar les altres definicions per tal que concordin amb les de els grafs no ponderats. Així doncs, tenim:

Definició 3.5. *Un camí incremental ponderat és un camí alternant on la suma dels pesos de les arestes de l'aparellament és menor que el pes de les arestes del camí alternant que no són del aparellament. A més a més, si alguna de les arestes dels extrems no és aparellada cal que el vèrtex d'aquell extrem sigui lliure.*

La nova condició que hem imposat sobre els vèrtexs dels extrems ens assegura que podrem canviar els papers de les arestes del camí sense trencar un aparellament. A diferència del cas dels grafs no ponderats, la característica que considerem és la suma dels pesos i no la cardinalitat dels conjunts d'arestes [8]. Depenent del nombre d'arestes que tenim al camí incremental que no són de l'aparellament tenim tres tipus diferents de camins incrementals:

(a) camí incremental dèbil: conté més arestes de M que de fora de M.

(b) camí incremental neutre: conté el mateix nombre d'arestes fora de M que de M.

(c) camí incremental fort: conté més arestes de fora de M que de M.

Pel que fa al resultat en el qual hem basat la solució del cas de grafs no ponderats, un cop donada la definició de camí incremental ponderat, poder adaptar-lo al resultat següent:

Teorema 3.6. *Un aparellament M és de màxim pes $\iff$ M no té un camí incremental ponderat.*

Demostració. Separem les dues implicacions.

Com en el cas de grafs no ponderats, podem reescriure la primera implicació com: si M té un camí incremental ponderat $\Rightarrow$ M no és un aparellament de màxim pes.

Aquesta implicació és senzilla ja que, si M té un camí incremental C, podem construir un aparellament M' que sigui M canviant les arestes de C de aparellades a no aparellades i viceversa. Llavors, aquest nou aparellament M' seria de més pes que M (degut a que C és un camí incremental), fet que implica que M no era un aparellament de màxim pes.

El recíproc és equivalent a: si M no és un aparellament de màxim pes $\Rightarrow$ M té un camí incremental ponderat.

Com que M no és un aparellament de pes màxim podem prendre M' un aparellament que si que ho sigui. Considerem doncs, el conjunt d'arestes que són només d'un dels aparellaments M o M'. Recordant la demostració del teorema 2.9, podem afirmar que les components connexes del graf amb el conjunt d'arestes resultant seran camins o cicles parells i, per tant, cada component formarà un camí alternant.

Tenint en compte la que M no és de pes màxim sabem que hi haurà alguna component on les arestes de M' pesaran més que les de M i, per tant, tindrem un camí incremental ponderat per a M.

□

Havent comprovat que els resultats que havíem fet servir en el cas de grafs sense pesos es poden adaptar de forma més general al cas que estem considerant. Per tant, només ens queda afegir el plantejament del problema de programació lineal per a grafs amb pesos. Abans però ens és útil presentar una propietat dels aparellaments en grafs que utilitzarem després com a condicions al programa lineal.

Considerem el conjunt $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_z\}$ on cada V_i és un subconjunt de vèrtexs amb cardinalitat imparella (V és el conjunt que conté tots aquests subconjunts). Llavors, definim T_m com el conjunt de totes les arestes que "connecten" vèrtexs del subconjunt V_m. Com que cada V_m defineix un T_m també podem considerar $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_z\}$. Així doncs, si denotem el nombre de vèrtexs de V_m com $2n_m + 1$, cap aparellament pot tenir més de n_m arestes del conjunt d'arestes T_m.

[8] La definició per a grafs ponderats també és aplicable per a grafs sense pesos considerant que cada aresta té un pes igual a 1

La demostració del resultat és senzilla: com que estem considerant un aparellament, si una aresta toca un vèrtex aquest no pot ser incident a cap altra, aresta. Així doncs, cada aresta de T_m ocuparà 2 vèrtexs de V_m i, per tant, serà impossible que hi hagi més de n_m arestes de T_m en un aparellament.

Vista aquesta propietat ja podem definir el problema de programació lineal per a trobar un aparellament de màxim pes per a grafs ponderats.

3.2.1 Programa lineal per a trobar un aparellament de màxim pes

Com és natural, la funció objectiu del programa ha de ser maximitzar el pes total de l'aparellament. Per escriure-la però, ens cal primer definir els termes següents:

- Anomenem $a(i,j)$ el pes de l'aresta (i,j).
- Definim les variables $x(i,j)$ de la forma següent:

$$x(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in M \\ 0 & \text{si } (i,j) \notin M \end{cases}$$

Amb aquesta notació, la funció a maximitzar per a un graf $G = G(V,E)$ ens queda determinada per:

$$\text{maximitzar} \sum_{(i,j)\in E} a(i,j)x(i,j) \tag{3.8}$$

amb aquest plantejament, les arestes que no siguin de l'aparellament M quedaran multiplicades per 0 i el resultat de $\sum a(i,j)x(i,j)$ serà el pes total de l'aparellament M.

Pel que fa a les condicions, aquestes han d'imposar que les arestes que se seleccionin no incompleixin la definició d'aparellament i que realment els valors que prenguin les variables $x(i,j)$ siguin 1 o 0. Així doncs, ens queden les condicions següents:

$$\sum_j x(i,j) \le 1\,, \quad \forall\, i \in V \tag{3.9}$$

$$\sum_{(i,j)\in T_m} x(i,j) \le n_m\,, \quad \forall\, m \in \{1,2,\ldots,z\} \tag{3.10}$$

I les condicions de no-negativitat:

$$0 \le x(i,j)\,, \quad \forall\,(i,j) \in E \tag{3.11}$$

Un fet important que cal esmentar és que, tot i que al definir les variables $x(i,j)$ hem considerat que prendrien valors 0 o 1, en el programa lineal les variables poden prendre qualsevol valor de $\mathbb{R}$. Per tant, si volem que les variables només prenguin valors en 0 i 1 cal imposar-ho a les condicions, en concret ho hem fet a (3.9), (3.10) i (3.11).

Per la restricció (3.11) sabem que tots els valors de $x(i,j)$ seran positius, mentre que amb (3.9) podem afirmar que seran menors o iguals que 1. Això però no és suficient per a fer que els valors siguin 0 o 1.

Per exemple, si considerem un triangle on totes les arestes fossin de pes 1, donant un valor de $\frac{1}{2}$ a totes les variables $x(i,j)$, obtindríem un pes total de $1'5$ mentre que és evident que un aparellament de pes màxim hauria de ser de pes 1.

Aquests casos però, es poden evitar imposant les condicions de (3.10). Amb elles obliguem que cap subconjunt d'arestes pugui tenir una suma de $x(i,j)$ major que la que tindria en un aparellament i, per tant, el resultat es maximitzarà quan agafem les arestes més pesades (que compleixin (3.9)) "completament"(fent que $x(i, j) = 1$).

Això no vol dir que no hi hagi solucions que tinguin variables $x(i, j) \in (0, 1)$ però sí que ens assegura que podem trobar solucions iguals o millors on totes les $x(i, j)$ siguin 0 o 1 i, per tant, un aparellament. Així doncs, a l'hora de treballar amb l'algorisme podrem considerar només els valors 0 i 1 per a les variables.

Com a qualsevol problema de programació lineal, a partir del problema original en podem descriure el seu problema dual. En el nostre cas serà:

$$\text{minimitzar} \sum_{i \in V} y_i + \sum_{m=1}^{z} n_m z_m \tag{3.12}$$

Fixem-nos que les variables y_i es corresponen amb les condicions (3.9) mentre que les z_m són les de (3.10). Pel que fa a les condicions del problema dual són:

$$y_i + y_j + \sum_{m:(i,j) \in T_m} z_m \geq a(i, j)\,, \quad \forall\, (i, j) \tag{3.13}$$

I les restriccions de no-negativitat són:

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0\,, \quad \forall\, i \in V \\ z_m &\geq 0\,, \quad \forall\, m \in \{1, 2, \ldots, z\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Realitzant alguns càlculs arribem també a les condicions complementàries de relaxació següents:

$$x(i, j) > 0 \Rightarrow \quad y_i + y_j + \sum_{m:(i,j) \in T_m} z_m = a(i, j)\,, \quad \forall\, (i, j) \tag{3.15}$$

$$y_i > 0 \Rightarrow \quad \sum_{j \in V} x(i, j) = 1\,, \quad \forall\, i \in V \tag{3.16}$$

$$z_m > 0 \Rightarrow \quad \sum_{(i,j) \in T_m} x(i, j) = n_m\,, \quad \forall\, m \in \{1, 2, \ldots, z\} \tag{3.17}$$

Plantejat el problema de programació lineal i el seu dual sabem que la solució del problema de trobar un aparellament de pes màxim en un graf amb pesos haurà de complir totes les condicions, des de (3.8) fins a (3.17). Només ens queda doncs mostrar l'algorisme que en troba la solució a partir del mètode del símplex.

3.3 Algorisme aparellament de pes màxim

La idea de l'algorisme és començar amb una solució factible i millorar-la a cada pas fins a trobar una solució òptima. Així doncs, per les condicions del problema, podem plantejar com a solució factible l'aparellament nul on no agafem cap aresta (la solució $x(i, j) = 0\; \forall\, (i, j)$). A més a més, podem triar les variables y_i i z_m de forma que també es compleixin (3.15) i (3.17) (no podíem considerar-les totes nul·les ja que també han de complir (3.13)).

Per tant, començant amb aquesta solució, l'única condició complementària de relaxació que no es compleix és la (3.16). A cada iteració de l'algorisme, la nova solució ha de seguir essent una solució factible (que és equivalent a que compleixi les equacions de (3.9) a (3.11) i les equacions del dual (3.13) i (3.14)) mentre millora fent complir (3.16) per almenys una variable y_i més. Això ens dona un resultat prou interessant: l'algorisme farà com a màxim $|V|$ iteracions (poden ser menys si alguna y_i és 0) i donarà com a resultat l'aparellament de pes màxim que buscàvem.

Per veure el motiu de com actuarem al llarg de l'algorisme cal fixar-nos en el significat de la condició (3.16), veiem que

$$y_i > 0 \Rightarrow \quad \sum_{j \in V} x(i,j) = 1\,, \quad \forall\, i \in V$$

vol dir que si la variable y_i que està lligada al vèrtex i és positiva, aleshores el vèrtex i és un vèrtex aparellat. Per tant, els vèrtexs que no compleixen aquesta condició són aquells que tenen la variable y_i positiva i són vèrtexs lliures.

És en aquest punt on recuperem els resultats de l'algorisme que vàrem construir per a trobar un aparellament de cardinalitat màxima. El primer que ens cal és trobar un vèrtex que sigui lliure i que y_v sigui positiva. Com que aquest és lliure, reutilitzant l'algorisme de la primera secció, podem crear un arbre alternant del qual el vèrtex v en sigui l'arrel. A més a més, l'algorisme sabem que podia portar-nos a 3 resultats possibles: un camí incremental, un cicle imparell o un arbre hongarès. Veiem doncs el significat d'aquests resultats quan són grafs ponderats i com podem seguir a partir d'aquests:

- Si trobem un camí incremental aquest serà un camí incremental fort (ja que els extrems seran arestes no aparellades). Per tant, podem actuar com en el cas no ponderat: canviant els papers de les arestes el pes de l'aparellament augmentarà i el vèrtex v ja no serà un vèrtex lliure, fent que la condició complementària de relaxació (3.16) es compleixi per a v.
- Si trobem un cicle senar tornem a poder actuar com amb el graf sense pesos, col·lapsem el cicle en un nou vèrtex artificial i seguim l'algorisme en el nou graf.
- En cas que el resultat fos un arbre hongarès, a diferència de les dues altres opcions, no actuaríem igual que a l'algorisme per a grafs no ponderats. Amb aquest resultat abans donàvem el vèrtex per explorat, ara però, encara no haurem comprovat totes les opcions ja que el fet que y_v sigui positiu pot estar impedint-nos de seleccionar alguna aresta que en realitat podria ser de l'aparellament. És per aquest motiu que, en cas de trobar un arbre hongarès, si y_v és positiva podem intentar canviar les variables duals de manera que totes les condicions es compleixin (sense tenir en compte (3.16)) i que s'habiliti una aresta que anteriorment no podíem seleccionar. Reiterant aquest resultat acabarem arribant a un punt on o bé $y_v = 0$ o bé haurem aconseguit trobar una aresta que ens serveixi. Ambdós resultats compleixen la condició complementària de relaxació (3.16).

D'aquesta manera, combinant els resultats de programació lineal amb l'algorisme que hem fet servir per trobar aparellaments de cardinalitat màxima, podem "dissenyar" l'algorisme per al cas de grafs amb arestes amb pesos. Més detalladament l'algorisme és:

Algorisme 3.7. *Algorisme d'aparellament de pes màxim*

1. *(Inicialització).* El primer pas és definir una solució factible des de la qual iniciar l'algorisme. Considerem doncs, l'aparellament nul M_0 (aleshores totes les variables x_i són iguals a 0) i definim les variables duals $z_m = 0$ per a tot $m = 1, 2, \ldots, z$. Les altres variables duals y_i no poden ser 0 ja que ens cal que es compleixi l'equació (3.13) i per tant $y_i + y_j \geq a(i,j)$ per a tot $(i,j) \in E$. Aquesta selecció es pot fer de moltes formes diferents, una possibilitat adient seria prendre per a cada y_i la meitat del pes de l'aresta de pes màxim.
   A més a més, per una qüestió de notació, ens cal crear una nova variable $k = 0$ que anirem incrementant cada cop que col·lapsem un cicle senar.
2. *(Examinació d'un vèrtex lliure).* Aquest és realment el primer pas de l'algorisme. Cal buscar un vèrtex lliure v no artificial[9] en el graf G_k tal que $y_v > 0$. En cas que no existís cap vèrtex que complís aquestes condicions anem al *punt 6*.

[9] Que no sigui producte de col·lapsar un cicle senar.

Un cop trobat un vèrtex v que compleix les condicions que demanàvem, considerem el conjunt d'arestes (i,j) de G_k tal que

$$y_i + y_j + \sum_{(i,j)\in T_m} z_m = a(i,j)$$

denotem aquest conjunt com E^*. En aquest punt podem utilitzar 2.13 (l'algorisme d'arbre incremental) per buscar un arbre alternant amb arrel a v fent servir només les arestes de E^*. Com en el cas no ponderat, 2.13 pot arribar a 3 resultats diferents, depenent d'això caldrà actuar de les formes següents:

- Si trobem un camí incremental, passem al *punt 3*.
- Si trobem un cicle senar, passem al *punt 4*.
- Si el resultat és un arbre hongarès, passem al *punt 5*.

3. *(Camí incremental)*. Només podem arribar a aquest punt si en el *punt 2* hem trobat un camí incremental, en aquest cas canviem els papers de les arestes del camí (d'aparellades a no aparellades i viceversa) en l'aparellament M_k. Com que un dels extrems del camí incremental fort era l'arrel v al capgirar els papers de les arestes aquest vèrtex deixarà de ser un vèrtex lliure. Tornem al *punt 2*.

4. *(Cicle senar)*. Només arribem aquí si en el *punt 2* el resultat hem trobat un cicle senar. En aquest cas redefinim $k = k + 1$ i anomenem el cicle senar trobat per C_k. Llavors, col·lapsem el cicle senar C_k en un nou vèrtex artificial a_k i definim un nou graf $G_k = G_k(V_k, E_k)$. Considerem llavors el nou aparellament M_k com les arestes de l'aparellament M_{k-1} (que era l'aparellament abans de col·lapsar el cicle senar) que són al nou graf G_k.
Un cop fet això tornem al *punt 2* i continuem aplicant 2.13 al vèrtex v (en cas que aquest hagués esta comprimit al vèrtex artificial a_k utilitzaríem aquest últim com arrel).

5. *(Arbre hongarès)*. A aquest punt només s'hi arribarà en el cas que al *punt 2* el resultat fos un arbre hongarès. Com hem esmentat abans, en aquest punt no donarem el vèrtex com examinat sinó que adaptarem les variables duals i tornarem al *punt 2* per tornar a aplicar l'algorisme d'arbre alternant a un nou conjunt d'arestes nou (degut a que els canvis a les variables duals ens permetran seleccionar més arestes que les del conjunt E^* actual). Només ens falta veure com podem canviar les variables duals per a obtenir més arestes.

   Per fer-ho definim les quantitats $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ de la forma següent:

   Definim δ_1 com
$$\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i,j)\}$$
   d'entre les arestes (i,j) tals que $i \in V_0$ és un vèrtex exterior i $j \in V_0$ és un vèrtex no etiquetat.

   Prenem δ_2 com
$$\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{y_i + y_j - a(i,j)\}$$
   d'entre les arestes (i,j) tals que $i \in V_0$ és un vèrtex exterior, $j \in V_0$ és un vèrtex exterior, i i i j no són en el mateix vèrtex artificial.

   Definim δ_3 com
$$\delta_3 = \frac{1}{2}\min\{z_m\}$$
   on els z_m a considerar són tots els conjunts imparells de vèrtexs V_m tals que han estat comprimits en el vèrtex artificial a_k i aquest a_k és un vèrtex interior [10].

   Per últim, definim δ_4 com
$$\delta_4 = \min\{y_i\}$$

[10] No tots els vèrtexs artificials són considerats, a_k representa l'últim vèrtex artificial que hem creat (el més extern)

on es consideren tots els vèrtexs $i \in V_0$ etiquetats com a exteriors.
Un cop tenim totes les δ_i definides, anomenem $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Aquesta quantitat és la que farem servir per adaptar les variables duals de la forma següent:

- A les variables y_i de vèrtexs exteriors els restem δ.
- A les variables y_i de vèrtexs interiors els sumem δ.
- Per a cada vèrtex exterior artificial de G_k, incrementem la seva variable dual z_m en 2δ.
- Per a cada vèrtex interior artificial de G_k, restem a la seva variable dual z_m la quantitat 2δ.

Veiem que aquests canvis realment ens permeten considerar més arestes a E^*. Per fer-ho, considerem els possibles valors de δ:

Cas $\delta = \delta_1$: l'aresta (i, j) que determina δ_1 passa a ser de E^* i, per tant, podem tornar a utilitzar l'algorisme d'arbre incremental al nou conjunt E^* tornant al *punt 2*.

Cas $\delta = \delta_2$: l'aresta (i, j) que determina δ_2 passa a ser de E^* i per tant podem seleccionar-la mitjançant l'algorisme d'arbre alternant. Fixem-nos que en aquest cas els vèrtexs de l'aresta eren exteriors i, per tant, si afegim l'aresta (i, j) tancarem un cicle. Al ser v (el vèrtex arrel) un vèrtex lliure, aquest cicle serà senar. Retornem al *punt 2* i continuem aplicant 2.13.

Cas $\delta = \delta_3$: alguna variable z_i serà igual a 0. En aquest cas haurem d'expandir el vèrtex artificial corresponent a z_i (que passarà a ser un cicle senar). Al fer aquest canvi (tant si col·lapsem com si expandim vèrtexs) ens caldrà redefinir $k = k + 1$ i considerar un nou graf $G_k = G_k(V_k, E_k)$. Evidentment, en expandir el vèrtex artificial, ens caldrà definir també un nou aparellament M_k que constarà de les mateixes arestes que M_{k-1} i les n_i arestes de T_i que aparellen els $2n_i$ vèrtex lliures de V_i.
Un cop fet això tornem al *punt 2*.

Cas $\delta = \delta_4$: la variable dual y_i que es correspon amb un vèrtex exterior i passarà a ser igual a 0. Aquest fet és equivalent a que el camí de v a i sigui un camí incremental neutral, i per tant podem canviar els papers de les arestes del camí aconseguint un aparellament de major pes. A més a més, al fer aquests canvis, v que era el vèrtex lliure del camí incremental neutral passarà a ser un vèrtex aparellat. L'intercanvi de papers també farà que el vèrtex i passi a ser un vèrtex lliure, però la condició (3.16) que es complia abans degut a que i no era un vèrtex lliure ara la segueix complint degut a que $y_i = 0$. Per tant, totes les condicions que es complien abans de l'intercanvi de papers del camí incremental neutral es seguiran complint després d'aquest. Un cop fet això retornem al *punt 2*.

6. *(Expansió dels vèrtexs artificials).* Arribem a aquest punt un cop el *punt 2* no troba més vèrtexs per examinar (quan no queda cap vèrtex tal que $y_i > 0$ i i és un vèrtex lliure). Quan això succeeix realment ja hem trobat l'aparellament de pes màxim, però aquest resultat està fet en un graf G_k que conté vèrtexs artificials i que, per tant, no és igual que el graf G. Així doncs, l'únic que ens cal es desfer els vèrtexs artificials fins a arribar al graf original. Les expansions dels vèrtexs a_k s'han de fer en l'ordre invers al qual s'han anar col·lapsant els vèrtexs i, per a cada expansió, ens cal també afegir un aparellament maximal al cicle senar generat.
   Un cop desfets tots els vèrtexs artificials ens quedarà un aparellament de pes màxim en el graf original $G = G_0$.

Demostració. Si bé algunes parts de l'algorisme presentat són similars als de 2.13 i en altres hem justificat alguns dels passos fets. És interessant veure alguns aclariments sobre el funcionament de l'algorisme:

Com hem mostrat al plantejar el problema de programació lineal, la solució òptima per a l'aparellament de pes màxim serà aquella que compleixi totes les condicions des de (3.8) fins a (3.17).

A l'algorisme, la primera solució factible que es crea és un aparellament nul. A més a més, de la forma com es defineixen les diverses variables hem fet que compleixi les condicions (3.15) i (3.17).

El mètode símplex es basa en millorar solucions factibles fins a trobar la solució òptima. Per tant, una primera condició que ens cal comprovar és que totes solucions que apareixen al algorisme siguin factibles. Perquè una solució sigui factible cal que compleixi les condicions del problema original des de (3.9) fins a (3.11) i les condicions del problema dual (3.13) i (3.14).

Pel que fa al grup de condicions del problema original l'algorisme no varia les variables x_i més enllà de ser 1 si $x_i \in M$ o bé 0 en cas contrari, per tant, sempre es complirà (3.11). D'altra banda hem vist que un aparellament sempre compleix les condicions (3.9) i (3.10), com que l'algorisme treballa sempre amb aparellaments aquestes condicions també es compliran.

Ens queda veure que es compleixen les condicions (3.13) i (3.14):

Respecte a (3.13), a diferència de les variables x_i que sabem que prendran valors 0 o 1, les variables y_i i z_m canvien de valor depenent de δ. Tot i això, al ser $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ en particular serà menor o igual que δ_3 i δ_4 que són $\frac{1}{2}\min\{z_m\}$ i $\min\{y_i\}$ respectivament. Per tant, sempre restarem un valor inferior a tots els y_i i z_m. Com que a la primera solució factible aquests valors eren positius ho seran també durant tot l'algorisme, fent que es compleixi (3.14).

La condició (3.13) sabem que se sosté en la primera solució factible que crea l'algorisme, ens queda veure que no hi ha cap acció a l'algorisme que la faci incompatible.

Per veure-ho cal comprovar que la desigualtat se sosté per a totes les arestes en qualsevol punt de l'algorisme. Llavors, en un moment determinat (havent seleccionat un vèrtex al pas 2), tindrem les arestes repartides entre aquelles que pertanyen a un vèrtex artificial, les que no són d'un vèrtex artificial i pertanyen a el conjunt d'arestes E^* i, per últim, les que no són d'un vèrtex artificial ni pertanyen a E^*. Com que en tot moment les arestes queden repartides en aquests 3 conjunts, podem fer una demostració per inducció.

Com que sabem que la desigualtat es compleix per a la primera solució factible, només ens falta veure que els canvis que es facin a les iteracions no desfan les desigualtats. Veiem, doncs, els diversos casos:

(i, j) és una aresta en un vèrtex artificial:
: llavors i i j estaran etiquetats tots dos com exteriors (resp. interiors) i, per tant, sumarem (resp. restarem) δ a y_i i a y_j, al mateix temps la variable dual corresponent al vèrtex artificial tindrem z_m disminuirà (resp. augmentarà) en 2δ. Per tant, el resultat final serà igual que sense haver fet cap canvi.

(i, j) no és d'un vèrtex artificial i és de E^*:
: en aquest cas, com que les variables duals es modifiquen un cop hem arribat a un arbre hongarès (a partir de les arestes de E^*), tenim doncs que l'aresta (i, j) connectarà un vèrtex exterior i un vèrtex interior. Per tant, la variable y del vèrtex exterior disminuirà en δ mentre que la variable y del vèrtex interior augmentarà en δ. Es mantindrà la desigualtat.

(i, j) no és ni d'un vèrtex artificial ni de E^*:
: podem afirmar que tindrem la desigualtat següent:

$$y_i + y_j + \sum_{m:(i,j)\in T_m} z_m > a(i, j)$$

ja que per hipòtesi teníem que totes les arestes complien la desigualtat amb $\geq$ i, al no ser de E^*, sabem que no és una igualtat. Veiem com poden ser els vèrtexs d'aquestes arestes:

- cap dels vèrtexs està etiquetat, llavors no es farà cap canvi a les variables y_i o y_j.
- els vèrtexs estan etiquetats un exterior i l'altre interior, llavors una de les variables augmentarà en δ i l'altra disminuirà en la mateixa quantitat.
- un dels vèrtexs és etiquetat com a interior i l'altre és o no etiquetat o interior, llavors la suma dels vèrtexs augmenta i, per tant, se segueix complint la igualtat.

- un dels vèrtexs és exterior i l'altre és no etiquetat, llavors tenim δ_1 una quantitat que mantindrà la desigualtat (3.13) i la quantitat δ que restarem a la variable del vèrtex exterior serà menor o igual que δ_1.
- els dos vèrtexs són exteriors, llavors tenim δ_2 que manté la desigualtat (3.13) i les quantitats que restarem a les variables dels dos vèrtexs seran iguals o menors que δ_2.

Així doncs, cap de les arestes incomplirà la desigualtat (3.13) un cop fets els canvis possibles al *punt 5*.

Per tant, totes les condicions del problema original i del problema dual es mantindran satisfetes durant tot l'algorisme (ja que la primera solució les compleix i cap canvi que es faci a l'algorisme les pot desfer). Una solució òptima però cal que compleixi les condicions complementàries de relaxació (3.15), (3.16) i (3.17).

A la primera solució que proposa l'algorisme (l'aparellament nul), les condicions complementàries (3.15) i (3.17) ja és compleixen per a totes les variables. Llavors, les demostracions es poden fer com amb les anteriors, veient que es mantenen durant tot l'algorisme:

Totes les arestes del graf es poden separar en dos conjunts: el conjunt d'arestes que són de l'aparellament i el conjunt de les arestes que no en formen part. Si veiem que per a ambdós conjunts sempre es compleix (3.15), haurem demostrat el que volíem. Les arestes que no són de l'aparellament, per definició, tindran $x(i,j) = 0$ i, per tant, no afectaran l'equació (3.15). L'altre conjunt, d'arestes que són aparellades, es pot dividir (a cada iteració que arriba al *punt 6*) entre les que formen part de E^* i les que no. Si veiem que es compleix per a tots dos conjunts, haurem demostrat el que volíem:

- si $(i,j) \in E^*$ per definició de $E^* = \{(i,j) \mid y_i + y_j + \sum_{m:(i,j)\in T_m} z_m = a(i,j)\}$ és clar que compleix la igualtat (3.15).
- si $(i,j) \notin E^*$, en haver arribat al *punt 6*, podem afirmar que serà una aresta d'un vèrtex artificial. Com que eventualment haurem de desfer els vèrtexs artificials, les arestes que estaven contingudes en ells passaran a ser de E^* i compliran la igualtat.

La condició (3.17) involucra les variables z_m que hem inicialitzat a 0 i sabem que només canviaran de valor si es col·lapsen els vèrtexs de V_m en un vèrtex artificial. Per tant, les úniques z_m que no compliran l'equació seran aquelles que es corresponguin amb un vèrtex artificial. Al final de l'algorisme però, no ens quedarà cap vèrtex artificial i, per tant, cap variable z_m serà diferent de 0, fent que (3.17) sigui certa.

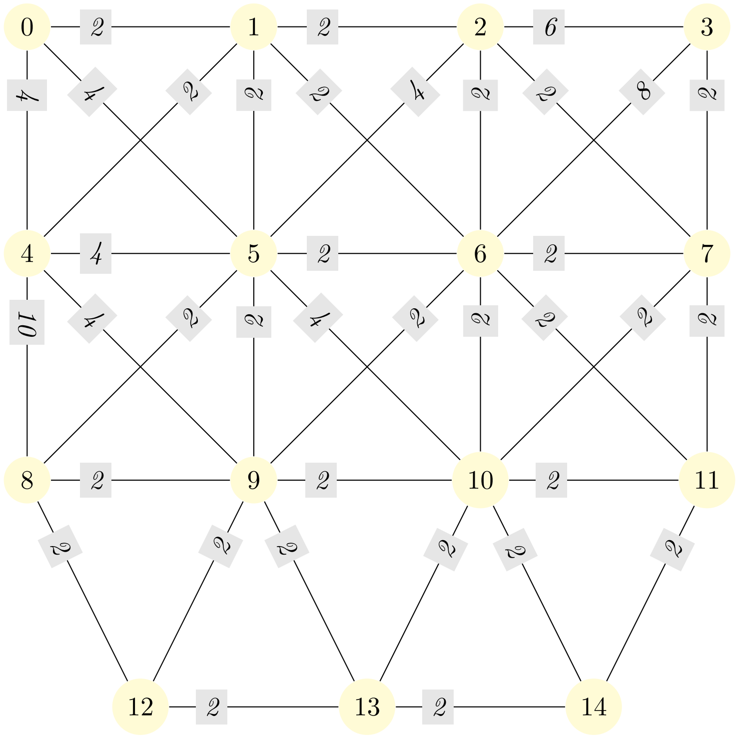
Pel que fa a la condició complementària (3.16) en el *punt 2* ens assegurem que es complirà per a tots els vèrtexs (al final de l'algorisme).

Vist això, sabem que totes les condicions del problema de programació lineal (3.9) - (3.11), així com les del problema dual (3.13) i (3.14) i les condicions complementàries (3.15) - (3.17) es satisfaran al final de l'algorisme. I, per tant, la solució que trobarà l'algorisme serà una solució òptima. Tal i com volíem demostrar.

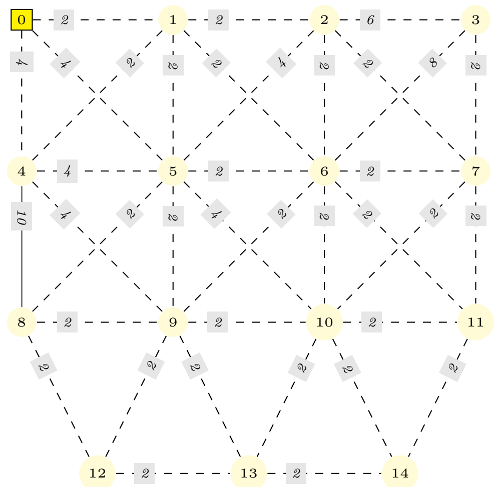
□

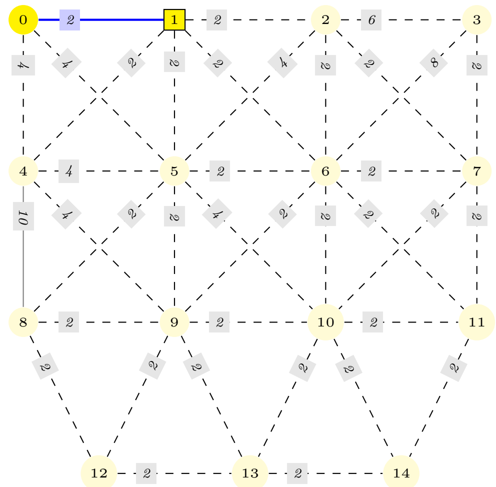
3.3.1 Exemple del funcionament de l'algorisme

Exemple 3.8. Com a la secció anterior, un cop comprovat el funcionament de l'algorisme, veiem com actuaria en un graf ponderat com el següent:



Pel que fa a la llegenda de colors i estils que utilitzarem serà la mateixa que hem utilitzat en el graf no ponderat amb les excepcions de les arestes discontínues que en aquest exemple representaran arestes que no estan disponibles (no són de E^*), per a les arestes que si són de E^* però no són de l'arbre utilitzarem línies contínues de color gris.





Per poder iniciar l'algorisme, primer ens cal assignar valors a les variables duals. Les combinacions que podem utilitzar són assignar 0 a totes les variables z i qualsevol combinació de y que permeti complir l'equació (3.13). Com ja hem vist, una opció és prendre la meitat del valor de l'aresta de pes màxim i assignar-lo a totes les variables duals y. En el nostre cas això és equivalent a inicialitzar totes les $y_i = 5\ \forall\, i \in \{1, \ldots, |V|\}$.

Un cop fet això, podem començar a explorar els vèrtexs del graf. Els vèrtexs que ens cal explorar són tots aquells que tinguin la variable dual $y_i > 0$. Inicialment totes les variables duals y_i són 5 i per tant podem triar qualsevol vèrtex. Comencem doncs, pel vèrtex 0.
Un cop triat el vèrtex intentem crear un arbre alternant amb les arestes de E^*. Recordem que les

arestes de E^* són les arestes $(i,j) \in G_0$ que compleixen $y_i + y_j + \sum_{(i,j)\in T_m} z_m = a(i,j)$. Per tant, d'inici només tindrem l'aresta $(4,8)$ que és la de màxim pes.
Així doncs, partint del vèrtex 0 no tenim cap aresta adjacent que es pugui afegir a l'arbre alternant i, per tant, el vèrtex 0 serà un arbre hongarès.
Un cop trobat un arbre hongarès passem al *punt 5* i procedim a determinar el δ corresponent. Com que en aquest pas l'arbre hongarès només està format pel vèrtex 0 només ens cal calcular els deltes δ_1 i δ_4, la primera serà $\delta_1 = \min\{5+5-a(0,j)\} = 6$ mentre que $\delta_4 = 5$. Per tant, $\delta = 5$ i la variable dual $y_0 = 0$. Retornem al *punt 2* on podem escollir un nou vèrtex a examinar, en el nostre cas escollim el vèrtex 1.

Com en el cas anterior, no tenim cap aresta adjacent a 1 que sigui de E^*. Per tant, el vèrtex 1 forma un arbre hongarès. A diferència del cas anterior però, quan calculem les deltes obtenim:

$$\delta_1 = \min\{y_1 + y_j - a(1,j)\} = \min\{5+5-2,\ 5+0-2\} = 3$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_1 = 5$$

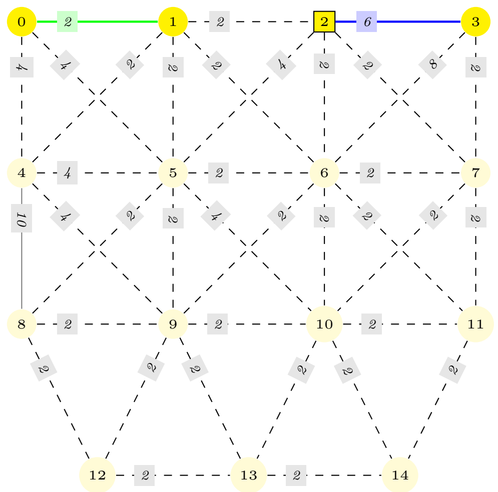
Per tant, $\delta = 3$ i $y_1 = 5-3 = 2$. Com que la delta mínima és δ_1 l'aresta $(0,1)$ passarà a formar part de E^*, llavors podem tornar al *punt 2* i tornar a crear l'arbre alternant des de 1, aquest cop amb $E^* = \{(4,8),(0,1)\}$. L'algorisme de l'arbre alternant ens retorna un camí incremental de 1 a 0. Així doncs, tenim $M_0 = \{(0,1)\}$.

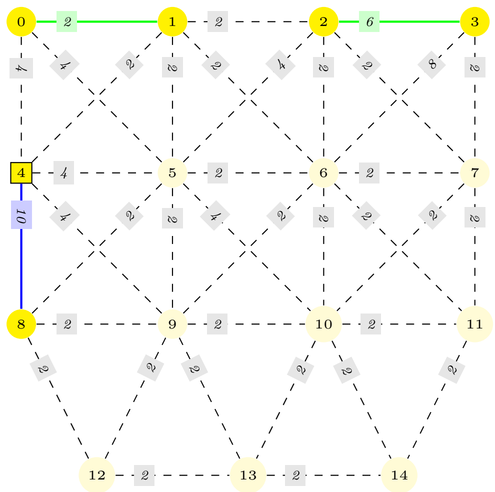
Escollim un nou vèrtex lliure tal que $y_i > 0$, per exemple el vèrtex 2. Novament, al intentar trobar un arbre alternant des de 2, veiem que no hi ha cap aresta de E^* adjacent a 2. Passem a calcular les deltes:

$$\delta_1 = \min\{y_2 + y_j - a(2,j)\} = \min\{5+5-6,\ 5+5-2,\ 5+5-4,\ 5+2-2\} = 4$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_2 = 5$$

Per tant, $\delta = 4$ i $y_2 = 1$. Recordem que en aquest moment tenim: $y_0 = 0$, $y_1 = 2, y_2 = 1$ i $E^* = \{(4,8),(0,1),(2,3)\}$. Tornem a implementar l'algorisme de l'arbre alternant des de 2. Com a resultat aconseguim un camí incremental de 2 a 3, afegim l'aresta a l'aparellament, obtenint $M_0 = \{(0,1),(2,3)\}$. Tornem al *punt 2*.





El vèrtex lliure següent (seguin l'ordre en que hem anomenat els vèrtexs) és el vèrtex 4. A diferència dels casos anteriors, aquest cop sí que tenim una aresta de E^* adjacent a 4. Quan apliquem l'algorisme de l'arbre incremental ens dona un camí incremental, l'aresta $(4,8)$. Afegim l'aresta a l'aparellament: $M_0 = \{(0,1),(2,3),(4,8)\}$. Retornem al *punt 2*.

El vèrtex 5, com havia passat amb els tres primers vèrtexs, no té arestes incidents de E^* i, per tant, l'algorisme de l'arbre alternant retorna un arbre hongarès format exclusivament pel vèrtex 5. Així doncs, passem al *punt 5* i calculem les deltes:

$\delta_1 = \min\{y_5 + y_j - a(5,j)\} = \min\{5+5-2,\ 5+5-4,\ 5+0-4,\ 5+2-2,\ 5+1-4\} = 1$

$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_5 = 5$

Així doncs, $\delta = 1$ i $y_5 = 4$. Aquests canvis ens habiliten l'aresta $(0,5)$ i, per tant, tenim $E^* = \{(0,1),(2,3),(4,8),(0,5)\}$. Passem doncs, a aplicar l'algorisme de l'arbre alternant amb arrel a 5 al conjunt d'arestes d'E^*. El resultat és un arbre hongarès format per les arestes $(5,0)$ i $(0,1)$. Observem que els vèrtexs 5 i 1 queden etiquetats com a exteriors mentre que 0 és un vèrtex interior. Com el resultat d'aplicar l'algorisme (2.13) ha estat un arbre hongarès (amb 5 i 1 com a vèrtexs exteriors), cal tornar a calcular les deltes d'aquest nou arbre.

Arestes que uneixen un vèrtex exterior i un vèrtex no etiquetat:

$$A_5 = \{(5,4),(5,8),(5,9),(5,10),(5,6),(5,2)\} \qquad A_1 = \{(1,4),(1,6),(1,2)\}$$

$\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i,j) \mid (i,j) \in (A_1 \cup A_5)\} = 1$. Aquesta δ_1 s'aconsegueix a les arestes $(2,5)$ i $(1,2)$.

D'arestes que connectin 2 vèrtexs exteriors només en tenim una: $(1,5)$.
$\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{4+2-2\} = 2$

De moment no tenim cap vèrtex artificial, per tant: $\delta_3 = \infty$.

Els dos vèrtexs exteriors són 1 i 5. Aleshores: $\delta_4 = \min\{y_5, y_1\} = \min\{4, 2\} = 2$

Així doncs, $\delta = 1$ i els canvis que ens calen fer són: $y_0 = 1$, $y_1 = 1$ i $y_5 = 3$. La resta de variables duals queden igual. Aquest canvi (com podem intuir del fet que la δ mínima fos δ_1) habilita almenys una nova aresta de E^*. En el nostre cas habilita les arestes $(2,5)$ i $(1,2)$. Retornem al *punt 2* i tornem a aplicar l'algorisme (2.13) al vèrtex 5 per al conjunt d'arestes $E^* = \{(0,1),(2,3),(4,8),(0,5),(2,5),(1,2)\}$.
Escollint les arestes $(0,5)$ i $(2,5)$ obtenim altre cop un arbre hongarès com a resultat: el camí que comença a 1 i va fins a 3 a través de 0, 5, 2. Així doncs, els vèrtexs exteriors són 1, 5 i 3 i els interiors 0 i 2. Veiem doncs, el valor de les deltes per a aquest arbre hongarès:

Arestes que contenen un vèrtex exterior i un vèrtex no etiquetat:

$$A_5 = \{(5,4),(5,8),(5,9),(5,10),(5,6)\} \quad A_1 = \{(1,4),(1,6)\} \quad A_3 = \{(3,6),(3,7)\}$$

$\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i,j) \mid (i,j) \in (A_1 \cup A_5 \cup A_3)\} = 2$. Aquesta δ_1 s'aconsegueix $(3,6)$.

D'arestes que connectin 2 vèrtexs exteriors només en tenim una: $(1,5)$.
$\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{3+1-2\} = 1$

De moment no tenim cap vèrtex artificial, per tant: $\delta_3 = \infty$.

Els vèrtexs exteriors són 1, 5 i 3. Aleshores: $\delta_4 = \min\{y_5, y_1, y_3\} = \min\{3, 1, 5\} = 1$

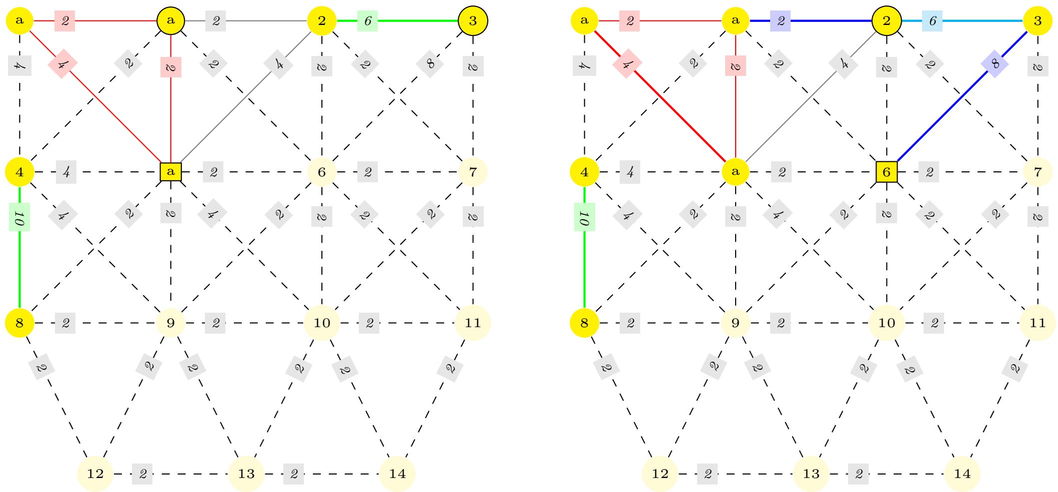
Si bé el fet que $\delta = 1$ no sembla un valor significant, és important remarcar que (a diferència dels casos anteriors) aquest cop hem obtingut el resultat mínim en dues deltes diferents δ_2 i δ_4. Aquesta situació és important ja que quan només tenim una delta mínima l'estratègia a seguir queda determinada per l'algorisme (ja sigui tornar a calcular l'arbre alternant, expandir un vèrtex artificial o canviar els paper d'un camí neutral i donar el vèrtex com explorat). En aquest punt on δ_2 i δ_4 són iguals però, no tenim a priori una estratègia a seguir.

Optem doncs, per fer el cas en que considerem $\delta = \delta_2$. Com sempre, un cop realitzats els canvis a les variables duals tenim:

(a) Vèrtexs exteriors: $y_1 = 0$, $y_5 = 2$ i $y_3 = 4$

(b) Vèrtexs interiors: $y_0 = 2$ i $y_2 = 2$

Un cop fets els canvis, al ser $\delta = \delta_2$, podem tancar un cicle senar. En el nostre cas tindrem el cicle $(0, 1, 5)$, col·lapsem el cicle en un nou vèrtex a. Retornem el *punt 2*



Recordem que un cop trobat el cicle senar hem creat un nou graf $G_1 = G(V_1, E_1)$ corresponent a el graf G amb els vèrtexs 0, 1 i 5 col·lapsats en a. Al mateix temps també tenim $M_1 = \{(4, 8), (2, 3)\}$ el nou aparellament per a G_1, observem que l'aresta $(0, 1) \in M_0$ no forma part de M_1 ja que ha esta col·lapsada amb el cicle senar que hem trobat. Un cop fet això, tornem a explorar el vèrtex 5 de G_0 que ara és al vèrtex artificial a. Observem que, al ser a un vèrtex col·lapsat, podem prendre tant l'aresta $(5, 2)$ com la $(1, 2)$, suposarem que hem seleccionat $(1, 2)$. Llavors obtenim l'arbre hongarès format per les arestes $(a, 2)$ i $(2, 3)$. Per tant, els vèrtexs exteriors són a i 3, mentre que el 2 és l'únic vèrtex interior. Passem doncs, a calcular-ne les deltes. En aquest punt, on si tenim un vèrtex artificial, cal recordar que al calcular les deltes hem de tenir en compte els vèrtexs de V_0 (el graf inicial).

Arestes de V_0 que contenen un vèrtex exterior i un vèrtex no etiquetat:

$$A_5 = \{(5, 4), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (5, 6)\}$$

$$A_1 = \{(1, 4), (1, 6)\} \qquad A_3 = \{(3, 6), (3, 7)\} \qquad A_0 = \{(0, 4)\}$$

$\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i, j) \mid (i, j) \in (A_1 \cup A_5 \cup A_3 \cup A_0)\} = 1$. Aquesta δ_1 s'aconsegueix $(3, 6)$.

D'arestes que connectin 2 vèrtexs exteriors, i que no siguin del mateix vèrtex artificial, no en tenim cap. Per tant: $\delta_2 = \infty$

Si bé ara si tenim un vèrtex artificial a, aquest no està etiquetat com a interior, per tant: $\delta_3 = \infty$.

Els vèrtexs de V_0 que estan etiquetats com exteriors són 0, 1, 5 i 3. Aleshores: $\delta_4 = \min\{y_0, y_1, y_3, y_5\} = \min\{2, 0, 4, 2\} = 0$

Observem que en aquest cas hem trobat $\delta = 0$. Per tant no tindrem cap canvi en les variables duals. El fet que δ_4 sigui 0 degut a que el la variable dual $y_1 = 0$ ens indica que existeix un camí incremental neutral que va de 5 a 1. Aquest camí però, està completament contingut al vèrtex artificial a (seria el camí $(5, 0), (0, 1)$, que augmenta l'aparellament M_0 en dos unitats).

Passem doncs al vèrtex lliure següent: el vèrtex 6. Novament obtenim un arbre hongarès format únicament per un vèrtex exterior. Comprovem les deltes:

$\delta_1 = \min\{y_6 + y_j - a(6, j)\} = \min\{5 + 5 - 2,\ 5 + 2 - 2,\ 5 + 0 - 2,\ 5 + 4 - 8\} = 1$

$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_6 = 5$

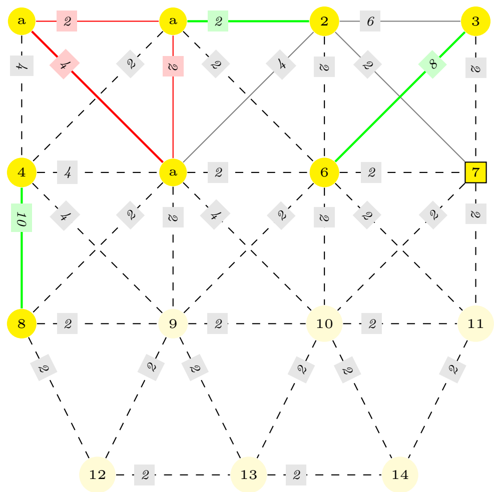
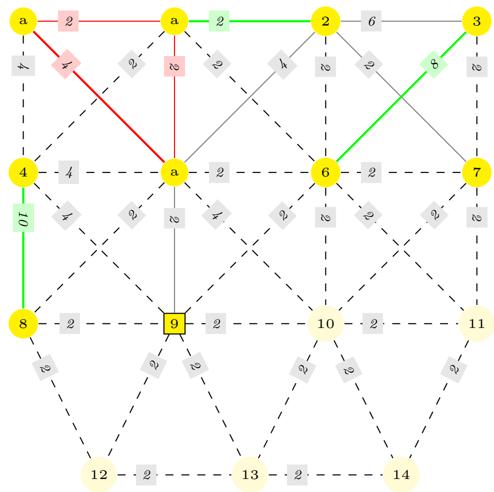
Per tant, $\delta = \delta_1 = 1$ i $y_6 = 4$. Al ser la delta mínima δ_1, s'afegirà almenys una aresta a E^*. L'aresta que passa a complir la igualtat és $(3,6)$. Al tornar a aplicar l'algorisme de l'arbre alternant a 6 obtenim un camí incremental $\{(6,3),(3,2),(2,a)\}$. Intercanviem els papers de les arestes del camí i retornem al *punt 2*.

Escollim el vèrtex lliure 7. No tenim cap aresta adjacent disponible. Passem a calcular les deltes:

$$\delta_1 = \min\{y_7 + y_j - a(7,j)\} = \min\{5+5-2,\ 5+4-2,\ 5+2-2\} = 5$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_7 = 5$$

En aquest cas tornem a tenir dues deltes δ_1 i δ_4 mínimes. Veiem que δ_1 ens indica que afegirem l'aresta $(7,2)$ a E^* i δ_4 ens permet donar el vèrtex 7 com explorat, ja que $y_7 = 0$.

El següent vèrtex lliure tal que $y_i > 0$ és el vèrtex 9. Com en el pas anterior, no tenim arestes disponibles adjacents a 9 i, per tant, l'arbre alternant retorna un arbre hongarès amb l'únic vèrtex 9. Calculem les deltes corresponents:

$$\delta_1 = \min\{y_9 + y_j - a(9,j)\} = \min\{5+5-4,\ 5+5-2,\ 5+4-2,\ 5+2-2\} = 5$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_9 = 5$$

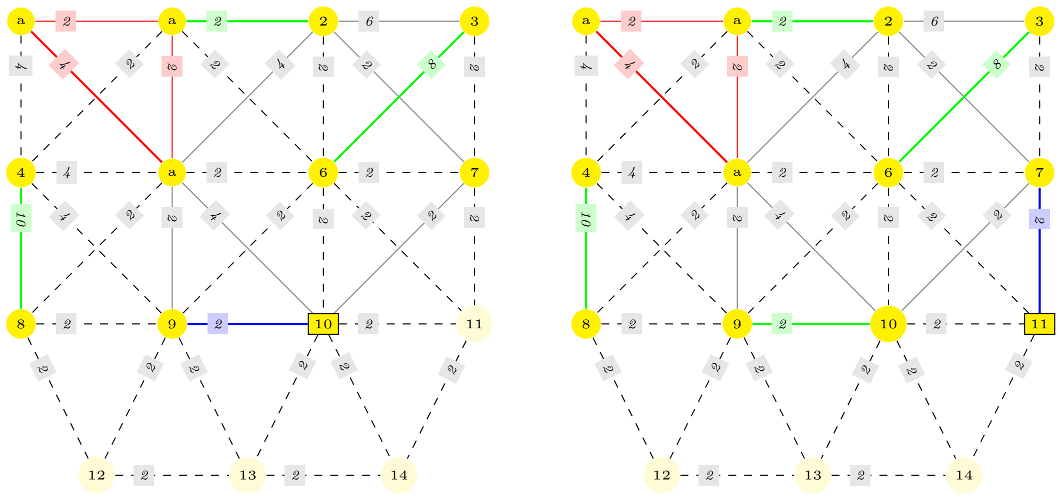
Els resultats són iguals als del pas anterior. L'aresta $(9,a)$ passa a ser de E^* i podem donar el vèrtex com examinat (com en el cas anterior, $y_9 = 0$).

El vèrtex lliure següent és el 10. L'algorisme (2.13) retorna un arbre hongarès format únicament pel vèrtex 10. Procedim a calcular-ne les deltes.

$$\delta_1 = \min\{y_{10} + y_j - a(10,j)\} = \min\{5+5-2,\ 5+4-2,\ 5+2-2, 5+0-2,\ 5+2-4\} = 3$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_{10} = 5$$

Obtenim doncs, $\delta = \delta_1$. A diferència dels dos passos anteriors, aquest cop δ_4 no és la delta mínima. Fem els canvis corresponents: $y_{10} = 2$. Com que $\delta = \delta_1$, hi haurà alguna aresta que s'afegirà a E^*, en el nostre cas seran tres arestes: $(10,7)$, $(10,9)$ i $(10,a)$. Un cop afegides les arestes, retornem al *punt 2* i tornem a aplicar l'algorisme d'arbre alternant al vèrtex 10. Un possible resultat de l'algorisme és el camí incremental $(10,9)$ i, per tant, afegim l'aresta $(10,9)$ a M_1.



Prenem el vèrtex lliure 11 com a vèrtex arrel. Al no tenir arestes adjacents disponibles, obtenim un arbre hongarès. Per tant, anem al *punt 5* i calculem les deltes:

$$\delta_1 = \min\{y_{11} + y_j - a(11, j)\} = \min\{5 + 5 - 2,\ 5 + 4 - 2,\ 5 + 2 - 2,\ 5 + 0 - 2\} = 3$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_{11} = 5$$

Obtenim $\delta = \delta_1 = 3$ i $y_{11} = 2$. Aquest canvi habilita l'aresta $(11, 7)$. Així doncs, al tornar a aplicar (2.13) al vèrtex arrel 11 obtindrem un camí incremental format per l'aresta $(11, 7)$. Afegim aquesta aresta a l'aparellament M_1. Retornem al *punt 2* per a explorar un vèrtex lliure nou.

Abans de continuar amb el vèrtex 12, pot ser convenient resumir la situació actual de l'algorisme.

Variables duals y_i:

$$\begin{array}{cccc} y_0 = 2 & y_1 = 0 & y_2 = 2 & y_3 = 4 \\ y_4 = 5 & y_5 = 2 & y_6 = 4 & y_7 = 0 \\ y_8 = 5 & y_9 = 0 & y_{10} = 2 & y_{11} = 2 \end{array}$$

Les variables no explorades, evidentment, mantenen la quantitat inicial:

$$y_{12} = 5 \qquad y_{13} = 5 \qquad y_{14} = 5$$

Vèrtexs artificials:

Només tenim un vèrtex artificial $a = \{0, 1, 5\}$ i la seva variable dual z_a no ha estat alterada en cap cas, per tant: $z_a = 0$

Arestes disponibles sense comptar les col·lapsades a a:

$$E^* = \{(a, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 6), (4, 10), (a, 9),$$
$$(a, 10), (7, 10), (7, 11), (9, 10)\}$$

Arestes a l'aparellament M_1:

$$M_1 = \{(a, 2), (3, 6), (4, 8), (7, 11), (9, 10)\}$$

i, per tant, M_1 (en el moment d'examinar el vèrtex 12) té un pes total de 24 unitats.

Ens queden per explorar els vèrtexs 12, 13 i 14. Comencem escollint el vèrtex 12. Aplicant l'algorisme d'arbre alternant obtenim un arbre hongarès format únicament pel vèrtex 12. Llavors, procedim a calcular-ne les deltes:

$\delta_1 = \min\{y_{12} + y_j - a(12, j)\} = \min\{5 + 5 - 2,\ 5 + 0 - 2\} = 3$

$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_{12} = 5$

Per tant, $\delta = \delta_1 = 3$ i $y_{12} = 2$. Aquest canvi de la variable dual y_{12} ens permet seleccionar l'aresta $(12, 9)$. Retornem al *punt 2* i apliquem novament l'algorisme de l'arbre alternant al vèrtex 12. Veiem, resumidament, l'algorisme:

Començant per l'arrel, només tenim una aresta disponible $(12, 9)$, afegim aquesta aresta i l'aresta $(9, 10)$ que aparella el vèrtex 9. Marquem 9 com a interior i 10 com a exterior. Del vèrtex 10 tenim disponibles les arestes $(10, 7)$ i $(10, a)$, a l'exemple escollim l'aresta $(a, 10)$. Llavors, a queda etiquetat com interior i afegim l'aresta $(a, 2)$, 2 queda etiquetat com a exterior. Des de 2 tenim dos arestes possibles per seleccionar però cap de les dues troba un camí incremental. Així doncs, ens queden 3 i 7 etiquetats com a vèrtexs interiors i 6 i 11 com a exteriors. Ens queden com arestes disponibles $(10, a)$, $(2, a)$ i $(10, 7)$, totes connecten vèrtexs exteriors amb interiors i per tant no poden ser afegides a l'arbre.

Per tant, hem trobat un arbre hongarès que ens ha deixat els vèrtexs etiquetats de la forma següent:

Vèrtexs exteriors: 12, 10, 2, 11, 6.

Vèrtexs interiors: 9, a, 3, 7.

Calculem les deltes corresponents:

Arestes de V_0 que contenen un vèrtex exterior i un vèrtex no etiquetat:

$$A_{12} = \{(12, 8), (12, 13)\} \qquad A_{10} = \{(10, 13), (10, 14)\} \qquad A_{11} = \{(11, 14)\}\}$$

$$\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i, j) \mid (i, j) \in (A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12})\} = \min\{2 + 5 - 2\} = 5$$

D'arestes que connectin 2 vèrtexs exteriors, i que no siguin del mateix vèrtex artificial, tenim $(6, 10)$ i $(6, 11)$. Per tant: $\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{4 + 2 - 2\} = 2$

Només tenim un vèrtex artificial: a, que hem etiquetat com a interior. Per tant: $\delta_3 = \frac{1}{2}\min\{z_a\} = 0$.

Els vèrtexs de V_0 que estan etiquetats com exteriors són 12, 10, 2, 11, 6. Aleshores: $\delta_4 = \min\{y_2, y_6, y_{10}, y_{11}, y_{12}\} = \min\{2, 4, 2, 2, 2\} = 2$

Llavors, $\delta = 0$ i, per tant, no es requereix cap canvi a les variables. Com que la delta mínima ha estat δ_3, l'algorisme procedeix a expandir un vèrtex artificial (el vèrtex a). Així doncs, creem un nou graf $G_2 = G(V_2, E_2)$ amb un aparellament M_2 que consisteix en les arestes que ja eren de M_1 i les arestes del cicle senar col·lapsat a a (aquestes estan determinades ja que el vèrtex que no queda aparellat al cicle és aquell que hem utilitzat com a interior a l'arbre hongarès, en el nostre cas el vèrtex 1).

Un cop expandit el vèrtex artificial, tornem a calcular l'arbre hongarès des de 12. El resultat però, torna a ser un arbre hongarès. Aquest, és igual que l'anterior però recorrent els vèrtexs que abans eren d'a en l'ordre 5, 0, 1. Aquests queden etiquetats com interior, exterior, interior, respectivament. La resta de vèrtexs queden etiquetats igual que a l'arbre hongarès anterior. Pel que fa al càlcul de les deltes, tenim:

Arestes de V_0 que contenen un vèrtex exterior i un vèrtex no etiquetat:

$$A_{12} = \{(12, 8), (12, 13)\} \qquad A_{10} = \{(10, 13), (10, 14)\}$$
$$A_{11} = \{(11, 14)\} \qquad A_0 = \{(0, 4)\}\}$$

$$\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i, j) \mid (i, j) \in (A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12} \cup A_0)\} = 2 + 5 - 2 = 5$$

D'arestes que connectin 2 vèrtexs exteriors, i que no siguin del mateix vèrtex artificial, tenim $(6,10)$ i $(6,11)$. Per tant: $\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{4+2-2\} = 2$

A l'haver expandit a tornem a no tenir cap vèrtex artificial, per tant: $\delta_3 = \infty$.

Els vèrtexs de V_0 que estan etiquetats com exteriors són 12, 10, 0, 2, 11, 6. Aleshores: $\delta_4 = \min\{y_0, y_2, y_6, y_{10}, y_{11}, y_{12}\} = \min\{2,2,4,2,2,2\} = 2$

Observem que el fet que haguem expandit el vèrtex artificial a ha fet variar el conjunt d'arestes que van d'un vèrtex exterior a un de no etiquetat. A més a més ara hem pogut considerar el vèrtex 2 com a vèrtexs exterior i per tant ha estat afegit al càlcul de δ_4. No obstant aquests canvis, al fer els càlculs amb el nou arbre hongarès hem obtingut com a resultat $\delta = \delta_2 = \delta_4 = 2$. El fet que el mínim sigui δ_4 ens indica que existeixen camins incrementals neutrals que van de 12 als vèrtexs exteriors tals que $y_i = \delta_4$ (en el nostre cas tots els vèrtexs exteriors). Si revertim l'ordre de les arestes d'aquest camí incremental neutral el vèrtex 12 quedarà aparellat i el vèrtex exterior i quedarà lliure.

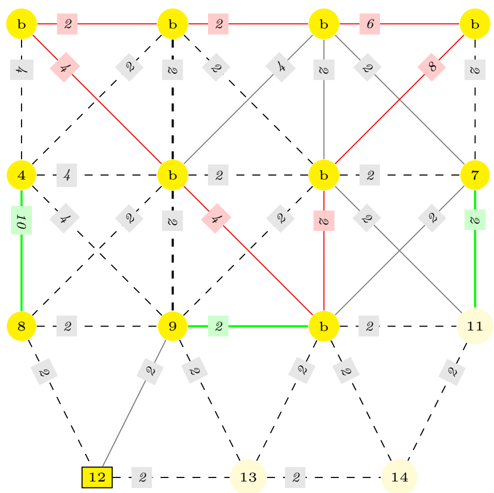
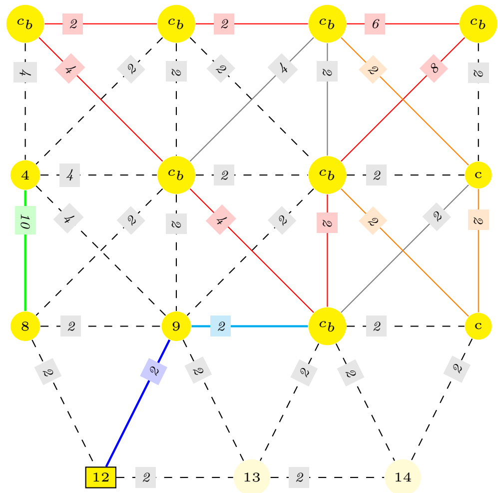
Abans però, ens cal aplicar els canvis corresponents a les variables duals:

(a) Vèrtexs exteriors: $y_0 = 0$, $y_2 = 0$, $y_6 = 2$, $y_{10} = 0$, $y_{11} = 0$ i $y_{12} = 0$.

(b) Vèrtexs interiors: $y_9 = 2$, $y_5 = 4$, $y_1 = 2$, $y_3 = 6$ i $y_7 = 2$.

Observem que, el fet que el mínim sigui δ_3 també ens permet afegir les arestes $(6,10)$ i $(6,11)$. A més a més, $\delta = \delta_3$ ens indica que al pròxim càlcul d'un arbre alternant podrem trobar un cicle senar que quedarà tancat per l'aresta $(6,9)$ o $(6,11)$.

Veiem doncs, quin resultat s'obté al retornar al *punt 2* amb l'arrel 12. Escollim l'aresta $(12,9)$ i, per tant, 9 queda etiquetat com a interior i s'afegeix també l'aresta $(9,10)$, el vèrtex 10 s'etiqueta com a exterior. En aquest punt tornem a tenir diverses opcions, les arestes $(10,5)$, $(10,6)$ i $(10,7)$. Com en el cas anterior optarem per escollir l'aresta $(10,5)$. A partir d'aquí anem afegint les arestes $(10,5)$, $(5,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Com en el pas anterior, podem prendre qualsevol de les dues arestes. Seleccionem, per exemple, $(2,3)$. Llavors, afegim l'aresta $(3,6)$ i, a diferència d'abans, des del vèrtex exterior 6 podem tancar un cicle senar amb l'aresta $(6,10)$ que uneix dos vèrtexs exteriors. Col·lapsem els vèrtexs del cicle senar $(10,5,0,1,2,3,6)$ en un nou vèrtex b (i realitzem les accions pertinents: creem un nou graf $G_3 = G(V_3, E_3)$...). Un cops fets els canvis tornem a implementar l'algorisme d'arbre alternant des de 12.

Si bé abans havíem trobat el cicle senar que tancava l'aresta $(6,10)$, al fer l'arbre alternant de nou obtenim un camí $(12,9)$, $(9,b)$, $(b,7)$, $(7,11)$. Un cop arribats al vèrtex 11, l'aresta que ens queda per afegir és l'aresta $(b,11)$ que uneix dos vèrtexs exteriors b i 11 (observem que aquesta aresta al graf G_0 és la $(6,11)$ que havíem habilitat juntament amb $(6,10)$ al pas anterior).

Al tancar un cicle senar $(b, 7, 11)$, hem de col·lapsar aquest nou cicle en un vèrtex artificial c. Com hem comentat abans, al ser $\delta = \delta_4$ i $y_{12} = 0$ podríem no haver calculat cicles senars i donar el vèrtex 12 com explorat (ja que al ser $y_{12} = 0$ hem aconseguit que compleixi l'equació de la variable dual y_i). No obstant això, suposem que seguim explorant les altres opcions. Observem que, al mateix temps que habilitàvem les dues arestes de tancament $(6, 10)$ i $(6, 11)$, les arestes $(9, 5)$ i $(1, 5)$ que connectaven dos vèrtexs interiors ha deixat d'estar de formar part de E^* ja que hem augmentat en 2 unitats la variable y_i els dos vèrtexs que la formen. Així doncs, d'ara en endavant l'aresta $(9, 5)$ tornarà a no estar disponible per a ser seleccionada.

Observem també que al fer els canvis a les variables duals y_{12} i y_{10} ambdues han passat a valdre 0. Aquest fet, en cas que només fos la variable $y_{10} = 0$ voldria dir que tenim un camí incremental neutral des de 12 fins a 10. D'altra banda, si y_{12} és 0 tenim la opció de donar per explorat el vèrtex i seguir al vèrtex següent (de fet podríem haver optat per aquest camí fins i tot abans de tancar els cicles senars).

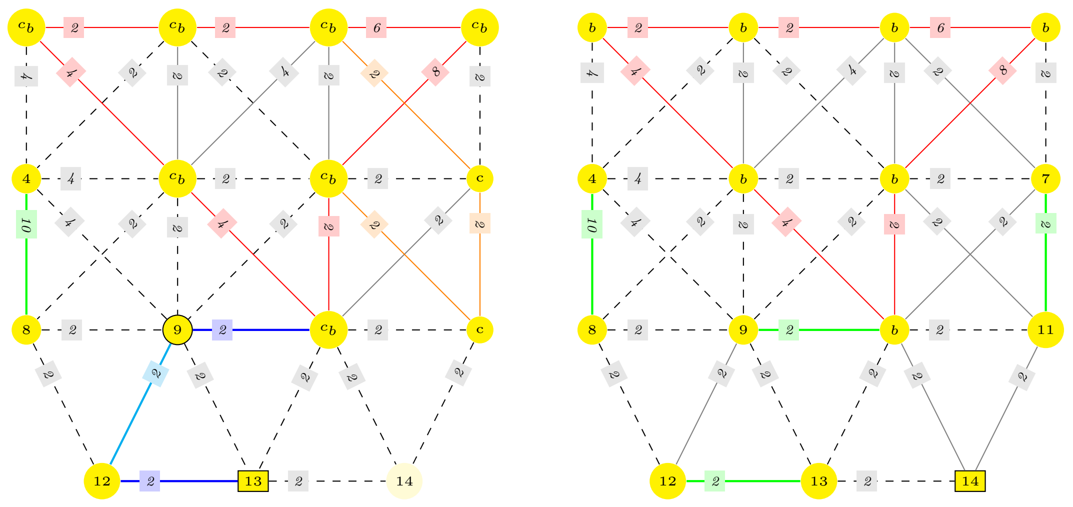
Així doncs, el fet que tant y_{12} com y_{10} siguin 0 ens indica que podem prendre qualsevol de les dues decisions. En el nostre cas optarem per canviar les arestes del camí incremental neutral. Un cop fet això, donem el vèrtex 12 per explorat i busquem el vèrtex següent tal que $y_i > 0$ i i és un vèrtex lliure. Seleccionem el vèrtex 13.

Al no tenir cap aresta disponible que sigui adjacent a 13, podem passar directament a calcular les deltes d'aquest:

$$\delta_1 = \min\{y_{13} + y_j - a(13, j)\} = \min\{5 + 5 - 2,\ 5 + 0 - 2\} = 3$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_{13} = 5$$

La delta mínima és $\delta_1 = 3$ i, per tant, tenim $y_{13} = 2$. Al ser $\delta = \delta_1$, obtenim dues arestes noves per afegir a E^*, les arestes $(13, 9)$ i $(13, 10)$ (aquesta última realment és $(13, c)$ a G_3). Tornem a calcular l'arbre alternant des de 13. Com a resultat obtenim un camí incremental format per les arestes $(13, 12)$, $(12, 9)$ i $(9, c)$ (teníem també l'opció seleccionant l'aresta $(13, c)$). Capgirem el paper de les arestes i etiquetem 13 com a explorat.



Un cop explorat el vèrtex 13, només ens queda 14 per explorar. A diferència de l'algorisme per a grafs no ponderats, en el cas ponderat ens cal examinar tots els vèrtexs (encara que només en quedi un de lliure). Com en anteriors passos, el 14 no té cap aresta disponible adjacent. Calculem les deltes:

$$\delta_1 = \min\{y_{14} + y_j - a(14, j)\} = \min\{5 + 2 - 2,\ 5 + 0 - 2\} = 3$$

$$\delta_2 = \infty, \quad \delta_3 = \infty, \quad \delta_4 = y_{14} = 5$$

Llavors, $\delta = \delta_1 = 3$ i $y_{14} = 2$. Aquest canvi ens permet seleccionar les arestes $(14, 10)$ i $(14, 11)$ a G_0 que representen $(14, c)$ a G_3. Així doncs, tornem a calcular l'arbre alternant des de 14:

Comencem afegint l'aresta $(14, c)$, llavors etiquetem c com a interior i afegim l'aresta $(c, 9)$ etiquetant 9 com exterior. Des de 9 només podem anar al vèrtex 12 i per tant seleccionem $(9, 12)$ etiquetant 12 com a interior, afegim $(12, 13)$ i etiquetem 13 com exterior. El resultat és un arbre hongarès. Els vèrtexs del qual han estat etiquetats de la forma següent:

Vèrtexs exteriors: 14, 9 i 13.

Vèrtexs interiors: c i 12.

Així doncs, cal tornar a calcular les deltes de l'arbre hongarès:

Arestes de E_0 que contenen un vèrtex exterior i un vèrtex no etiquetat:
Només tenim $A_9 = \{(9, 4), (9, 8)\}$

$$\delta_1 = \min\{y_9 + y_j - a(9, j) \mid (i, j) \in A_9\} = \min\{2 + 5 - 4,\ 2 + 5 - 2\} = 3$$

D'arestes que connectin 2 vèrtexs exteriors, i que no siguin del mateix vèrtex artificial, tenim $(9, 13)$ i $(13, 14)$. Per tant:

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \min\{2 + 2 - 2\} = 1$$

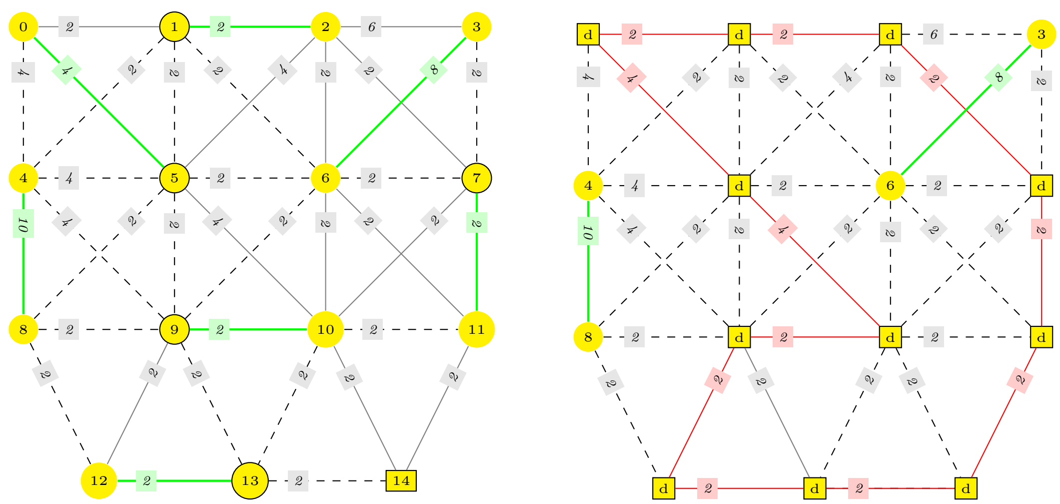
Només tenim un vèrtex artificial: c, que hem etiquetat com a interior. Per tant: $\delta_3 = \frac{1}{2} \min\{z_c\} = 0$.

Els vèrtexs de V_0 que estan etiquetats com exteriors són 14, 9 i 13. Aleshores: $\delta_4 = \min\{y_{14},\ y_9,\ y_{13}\} = \min\{2, 2, 2\} = 2$

Per tant, tenim $\delta = \delta_3 = 0$. No ens cal fer cap canvi a les variables duals. Ens queda expandir el cicle c. Tenint en compte que el vèrtex de G_2 que té una aresta incident aparellada de l'arbre hongarès és l'b hem de recórrer el cicle aparellant de forma alternada arestes de forma que el vèrtex b sigui el vèrtex que no queda aparellat al cicle senar. Això és equivalent a aparellar l'aresta $(7, 11)$ i deixar sense aparellar les arestes $(11, b)$ i $(b, 7)$.

Un cop expandit el cicle tornem a implementar l'algorisme (2.13) des del vèrtex 14. Com a resultat obtenim un nou arbre hongarès.

Calculant les deltes novament tenim $\delta = \delta_3 = 0$ degut a que el vèrtex artificial b ha quedat etiquetat com a interior i $z_b = 0$. Per expandir la variable artificial al cicle senar original observem que el vèrtex de G_0 que està aparellat a l'arbre alternant que estem considerant és el 10. Llavors, ens cal recórrer el cicle afegint arestes de forma alternada a l'aparellament de manera que l'únic vèrtex lliure sigui el 10. Obtenim el resultat següent:



Un cop més tornem a calcular l'arbre alternant des de 14. Com a resultat obtenim un camí que va alternant vèrtexs exteriors i interiors en l'ordre següent: 14, 11, 7, 2, 1, 0, 5, 10, 9, 12 i 13. Per tant, arribem a un arbre hongarès amb el vèrtexs etiquetats com:

Vèrtexs exteriors: 14, 7, 1, 5, 9 i 13.

Vèrtexs interiors: 11, 2, 0, 10 i 12.

Pel que fa a les deltes, podem intentar estalviar-nos el càlcul d'aquestes mirant el valors de les variables y dels vèrtexs exteriors. Si alguna d'aquestes fos 0 podríem considerar directament que $\delta = \delta_4 = 0$ i construir el camí incremental de 14 al vèrtex que fos $y_i = 0$. Observem però que cap dels vèrtexs exteriors és 0. Calculem doncs, el valor de les deltes:

Els únics vèrtexs no etiquetats són: 3, 4, 6 i 8. Les arestes que van d'un vèrtex exterior a un d'etiquetat són doncs: $A = \{(1,4),(5,4),(5,8),(7,3),(7,6),(9,4),(9,8)\}$. Per tant, $\delta_1 = \min\{y_i + y_j - a(i,j) \mid (i,j) \in A\} = \min\{2+5-2,\ 4+5-4,\ 4-5-2,\ 2+6-2,\ 2+2-2,\ 2+5-4,\ 2+5-2\} = 2$

Les arestes que connecten dos vèrtexs exteriors són: $(14,13)$, $(1,5)$, $(5,9)$ i $(9,13)$. Aleshores:

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{2+2-2,\ 2+4-2,\ 2+2-2\} = 1$$

No tenim vèrtexs artificials. Per tant, $\delta_3 = \infty$.

Els vèrtexs exteriors són: 14, 7, 1, 5, 9 i 13. Llavors,

$$\delta_4 = \min\{y_1, y_5, y_7, y_9, y_{13}, y_{14}\} = \min\{2,4,2,2,2,2\} = 2$$

Així doncs, $\delta = \delta_2 = 1$. Aleshores, pel que fa a les variables duals obtenim: tots els vèrtexs de l'arbre hongarès passen a ser $y_i = 1$ excepte $y_5 = 3$. Aquests canvis permeten seleccionar les arestes $(13,14)$ i $(13,9)$ que, al ser δ_2 el mínim, ens permetrà tancar un cicle senar.

Si tornem a construir un arbre alternant des de 14, obtenim el mateix camí que abans fins arribar a 13 i des de 13 podem tancar un cicle senar amb qualsevol de les dues arestes. Escollim, per exemple, l'aresta $(13,14)$. Obtenim el cicle: $(14,11,7,2,1,0,5,10,9,12,13)$. Procedim col·lapsant aquest cicle en un vèrtex artificial d. Un cop col·lapsat, si apliquem l'algorisme de l'arbre alternant trobem un arbre hongarès format únicament per d.

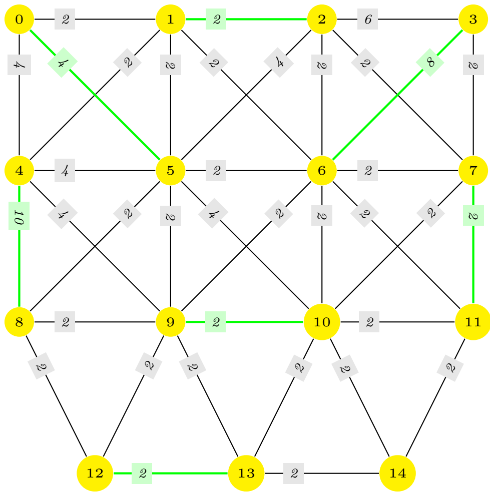
Passem a calcular-ne les deltes. Com a resultat obtenim $\delta = \delta_4 = 1$ (recordem que tots els vèrtexs de d són 1 excepte el vèrtex 5). Quan canviem les variables duals, al ser d un vèrtex exterior totes les variables y_i dels vèrtexs de G_0 seran 0 (excepte y_5 que tindrà un valor de 2). A més a més tindrem $z_d = 2\delta = 2$.

Els últims canvis a les variables duals han fet que $y_{14} = 0$ i per tant podem donar el vèrtex per explorat. Així doncs, hem explorat tots els vèrtexs. Al no tenir més vèrtexs lliures tals que $y_i > 0$, podem passar al *punt 6* de l'algorisme d'aparellament de pes màxim.

El pas que ens queda fer és expandir els vèrtexs artificials que tenim a G_4. Observem que, a diferència dels passos anteriors on hem expandit vèrtexs artificials, en aquest cas no tenim cap aresta incident al vèrtex d. Quan això succeeix hem d'escollir com a vèrtex que no quedarà aparellat al cicle aquell vèrtex i tal que $y_i = 0$. En el nostre cas, qualsevol dels vèrtexs de d excepte 5. Per exemple, el mateix 14 que acabem d'explorar.

Pel que fa a les arestes del cicle, cal recordar que tot i que tots els vèrtexs excepte 4 siguin 0, les arestes que formen el cicle segueixen estan disponibles ja que $z_d = 2$ i per tant la igualtat de E^* es manté.

Un cop expandit el vèrtex artificial obtindrem l'aparellament de pes màxim que buscàvem:



Així doncs, el pes total obtingut és de 30 unitats. Com hem comentat abans, aquest resultat sabem que és de pes màxim, però pot no ser únic. Per exemple, a l'últim pas qualsevol dels vèrtex de d (excepte el 5) podrien haver estat el vèrtex no aparellat, llavors tindríem un aparellament diferent però del mateix pes.

4 Aparellaments de pes màxim i el Problema del viatjant

Fins ara, hem abordat la qüestió de trobar aparellaments de pes màxim (podem considerar el cas no ponderat com un cas particular del ponderat). No obstant això, aquesta qüestió no és l'única que considerarem sobre el problema mostrat a la secció anterior. Alguns problemes que a priori no semblen tenir relació amb els aparellaments de grafs poden ser resolts utilitzant aparellaments de pes màxim (o, equivalentment, pes mínim). Exemple d'això en són algunes de les aplicacions ja esmentades a la introducció.

De fet, una de les motivacions més antigues per l'estudi dels aparellaments de grafs va ser la de reduir els costos de transport, així com els problemes d'assignar personal a llocs de treball. Alguns resultats sobre aquestes qüestions es poden trobar a principis de la dècada de 1940 a les aportacions de Kantoróvitx i Hitchcock al problema dels transports. Si bé l'objectiu del treball no és aprofundir en aquest tipus de problemes, pot ser interessant veure com el fet de trobar aparellaments de màxim pes ens és útil en alguns dels problemes més icònics d'aquesta àrea com són el Problema del carter xinès o el Problema del viatjant. En concret ens centrarem en aquest últim.

4.1 El Problema del viatjant

El problema del viatjant de comerç, si bé és un cas particular del problema d'enrutament de vehicles i del problema del comprador viatjant, és un dels problemes de grafs més coneguts i estudiats. No obstant això, l'enunciat d'aquest pot variar depenent de si volem que es visitin tots els vèrtexs un sol cop o no imposem el nombre de vegades que visitem un vèrtex. A més a més, també podem diferenciar els casos simètric i no simètric (no considerarem el cas no simètric). Un cop aclarit això podem introduir la definició del problema:

Definició 4.1. *Problema del viatjant de comerç (TSP, traveling salesman problem): Donada una llista de ciutats i les distàncies entre cada parell de ciutats, quina és la ruta més curta possible que visita cada ciutat (exactament una vegada) i torna a la ciutat d'origen?*

És senzill convertir aquest enunciat a grafs considerant les ciutats com els vèrtexs del graf i les connexions entre aquestes com les arestes. Així, ens queden els dos casos següents:

- Si només podem passar un cop per cada ciutat, l'objectiu serà trobar el camí hamiltonià de pes mínim.
- Si podem passar per cada ciutat diverses vegades, buscarem el camí de pes mínim que passi per tots els vèrtexs.

Aquestes variants representen les dues formes més esteses d'entendre el problema del viatjant (simètric). Nosaltres prendrem la definició que ens permet visitar un vèrtex més d'una vegada si això millora el circuit final. A més a més, d'ara en endavant, considerarem una simplificació del TSP: el problema del viatjant en espais mètrics. Això és equivalent a imposar que els grafs que estudiem compleixin la desigualtat triangular definida de la forma següent:

Definició 4.2. *Desigualtat triangular. Sigui $G = G(V, E)$ un graf ponderat, aquest compleix la desigualtat triangular si $\forall\, u,\, v \in V$*

$$\omega(u, v) \leq \omega(u, x) + \omega(x, v) \quad \forall\, x \in V,\ x \neq u,\ x \neq v$$

on $\omega(u, v)$ és el pes de l'aresta (u, v).

Tot i que la restricció que els grafs compleixin la desigualat triangular sembli molt restrictiva, podem adaptar els grafs que no la compleixen.
Suposem que G és un graf que no compleix la desigualtat triangular, llavors definim G' un graf complet amb els mateixos vèrtexs que G. Les arestes $(u, v) \in E'$ de G' tindran com a pes $\omega(u, v)$

el pes total del camí de pes mínim de u a v per a cada parella de vèrtexs $u, v \in V$. Fixem-nos que aquest nou graf G' sí que compleix la desigualtat triangular i, al ser complet, té un cicle hamiltonià. Observem que el fet de trobar una solució per al TSP a G' ens dona una solució a G, en cas que G complís la desigualtat triangular aquesta solució serà un circuit que visita cada vèrtex com a mínim un cop, mentre que si G ja complia la desigualtat triangular tindrem un cicle hamiltonià. La demostració d'això es correspon amb el teorema següent:

Teorema 4.3. *La solució del problema del viatjant per a un graf G és equivalent a trobar un cicle hamiltonià de pes mínim al graf complet G'*

Demostració. Suposem que no es complís el teorema. Aleshores tindríem una solució C per a G que no seria un cicle equivalent a un cicle hamiltonià de pes mínim de G'.

Anomenem C' al circuit equivalent a C en G'. Observem que podem escriure el circuit C només amb les arestes comunes de G' i G ja que si en algun moment utilitzéssim una aresta $(u, v) \in E$ tal que a E' l'aresta corresponent fos un camí de pes menor a (u, v) podríem canviar a G l'aresta (u, v) pel camí de u a v que representa l'aresta $(u, v) \in E'$ a G' i obtindríem un nou circuit solució (ja que estem considerant que la solució pot passar varies vegades pel mateix vèrtex) de pes menor a C.

D'aquesta forma, obtenim un circuit C' que recorre tots els vèrtexs de G'. Ens queda veure que és equivalent a un cicle hamiltonià.
Havíem suposat que no era equivalent a un cicle hamiltonià, tenint en compte que hem comprovat que cobreix tots els vèrtexs, l'única manera que no sigui un cicle hamiltonià és que passi més d'una vegada per algun vèrtex. Suposem doncs, un vèrtex $s \in V'$ tal que C' passa per segon cop per s i, r i t els vèrtexs que visita abans i després de passar per s. Llavors podem canviar el camí (r, s, t) per (r, t), sabem que el resultat d'aquest canvi serà una solució del TSP a G ja que G' compleix la desigualtat triangular, i per tant $w(r, t)$ és igual que el del camí més curt de r a t, i C' ja era una solució. Repetint el procediment per a tots els vèrtexs que es repeteixen en C' acabem obtenint un circuit que no repeteix cap vèrtex i per tant arribem a contradicció amb que C' no és a un cicle hamiltonià.

□

A partir d'ara doncs, per a solucionar el problema del viatjant per a G buscarem un cicle hamiltonià de pes mínim al graf G'.

Abans de presentar algorismes que solucionin el problema del viatjant, pot ser convenient parlar de la complexitat del problema:

4.1.1 Complexitat del Problema del viatjant

Per tal d'entendre millor la dificultat de trobar una solució exacta per al TSP veiem, com en el cas de l'aparellament de pes màxim, com seria resoldre l'enunciat com un problema de programació lineal. Per al cas en el qual només podem visitar cada ciutat un cop i les distàncies són simètriques tindríem:

Problema 4.4. Problema del viatjant de comerç (TSP, traveling salesman problem).

A diferència dels problemes de programació lineal de la secció anterior on les variables estaven relacionades amb els vèrtexs del graf, al programa lineal que presentarem a continuació les variables seran les arestes del graf.

Considerant el graf $G = G(V, E)$ on V és el conjunt de vèrtexs i E el conjunt d'arestes, tenim com a funció objectiu:

$$\text{minimitzar} \sum_{e \in E} d_e \, x_e \tag{4.1}$$

on d_e és la distància entre les ciutats que connecta l'aresta e i x_e pren valors 1 o 0 depenent de si l'aresta e forma part del cicle hamiltonià H o no.

Pel que fa a les condicions que cal imposar per obtenir com a resultat un cicle hamiltonià són:

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| \tag{4.2}$$

$$\sum_{e \in (S,\, V-S)} x_e \geq 1\,, \quad \forall\, (S,\, V-S), \quad S \subset V \tag{4.3}$$

el conjunt $(S, V-S)$ és el conjunt d'arestes que van d'un vèrtex de S a un de $V-S$. El fet que sempre tinguem com a mínim una aresta en qualsevol partició que fem de V que connecti els dos conjunts ens descarta els resultats que generen diversos cicles disjunts.

$$\sum_{e \in A_i} x_e = 2\,, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, |V|\} \tag{4.4}$$

on A_i són els conjunts d'arestes adjacents al vèrtex i.

Per últim, les condicions de no negativitat:

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in H \\ 0 & \text{si } e \notin H \end{cases} \tag{4.5}$$

Com en el cas de trobar un aparellament de pes màxim per a grafs ponderats, la resolució del problema de programació lineal és impracticable degut al nombre de condicions que implica. A l'equació (4.3), per exemple, a l'haver de considerar una equació per a cada subconjunt de vèrtexs, el nombre d'equacions augmentarà de forma exponencial a mesura que afegim vèrtexs al graf.

Per acabar d'entendre la complexitat del problema, tornant a la formulació de l'enunciat per a grafs, un cicle hamiltonià recorre els vèrtexs del graf en un ordre determinat. Per tant, cada ordre diferent representarà un cicle hamiltonià diferent. D'aquesta forma, el nombre total de cicles possibles seria de $n!$. Si considerem que no importa la ciutat d'origen i que recórrer les ciutats en un sentit o altre és equivalent, obtenim $\frac{(n-1)!}{2}$ rutes diferents. Així doncs, una solució que comprovés el pes de cada ruta possible seria d'una complexitat d'ordre $O(n!)$.

Cal observar que el fet que el nombre de condicions del programa lineal creixi de forma exponencial no implica que no existeixi una solució que es pugui calcular en temps polinòmic. El problema d'aparellament de pes màxim és un exemple de programa lineal que, tot i tenir un nombre d'equacions que creix de forma exponencial, té una solució que es pot calcular en un temps d'ordre $O(mn^2)$. No obstant, per al problema del viatjant no existeix (actualment) cap solució en un temps polinòmic.

En particular, el problema del viatjant és de la classe de complexitat NP-difícil, fet que el fa un problema important en teoria de la computació [10].

Observació 4.5. Els problemes de decisió són problemes les respostes dels quals poden ser sí o no. Depenent de la complexitat de resoldre'ls els podem classificar en diverses categories:

- Els problemes P són aquells problemes de decisió que es poden resoldre en un temps polinòmic.
- Els problemes NP són problemes de decisió tals que, donada una solució podem determinar si aquesta és correcta en un temps polinòmic.
- Els problemes NP-complets són el conjunt de problemes de NP a partir dels quals en podem derivar qualsevol altre problema de NP en un temps polinòmic.

Per últim, els problemes NP-difícils és defineixen no com a problemes de decisió sinó com el conjunt de problemes tals que es poden reduir a un problema NP-complet en temps polinòmic.

Si bé no és la nostra intenció aprofundir en temes de complexitat, el fet que no tinguem un algorisme de temps polinòmic que trobi una solució pel problema del viatjant ens dóna una justificació per a introduir els algorismes heurístics i aproximats.

Un dels algorismes més senzills, d'aquest tipus, és l'Algorisme del veí més pròxim que consisteix a anar visitant la ciutat més pròxima d'aquelles que no han estat explorades des de l'última ciutat visitada. Tot i que sembla un algorisme que pot aportar resultats prou òptims només podem fitar els resultats d'aquest algorisme com a menors que $L_0(\frac{1}{2}(\ln n + 1))$ on L_0 és la longitud del camí que és solució exacta [12]. Aquest resultat però, no és especialment bo ja que la fita de l'error relatiu que obtindrem dependrà del nombre de ciutats que haguem de visitar.

Evidentment, altres algorismes més sofisticats milloren el resultat d'aquesta primera aproximació. A continuació mostrarem un d'aquests algorismes.

4.2 Algorisme de Christofides

Com hem esmentat abans, en aquesta secció considerarem el problema del viatjant en espais mètrics. L'algorisme que presentarem a continuació és obra del matemàtic Nicos Christofides (1942 - 2019) i fou publicat l'any 1976 [8]. Des de llavors fins al 2020 ha estat la millor aproximació al problema del viatjant en espais mètrics.

Pel que fa a la fita de l'error que ens dona l'algorisme de Christofides el resultat que obtindrem serà com a màxim 1.5 vegades el resultat real del problema del viatjant. Observem que aquesta fita no depèn del nombre de vèrtexs com ho feia la de l'algorisme del veí més pròxim.

Com hem comentat aquest algorisme ha estat la millor aproximació fins a mitjans del 2020, quan es va publicar un nou algorisme [11] que millora lleugerament la fita que aporta Christofides, dona una fita tal que el resultat obtingut L és com a màxim $(1.5 - 10^{-36})L_0$ on L_0 seria la solució exacta, mentre que l'algorisme de Christofides ens dona un resultat menor o igual a $1.5L_0$. No obstant això, els dos utilitzen de la mateixa forma l'algorisme d'aparellament de pes màxim.

La idea general de l'algorisme és:

1. Buscar un arbre generador de pes mínim.
2. Construir el graf complet del conjunt de vèrtexs de l'arbre que tenen grau imparell.
3. Trobar un aparellament perfecte del graf complet que havíem construït prèviament.
4. Buscar un camí eulerià del nou graf format per les arestes de l'arbre i les arestes de l'aparellament.
5. Adaptar el cicle eulerià trobat a un cicle hamiltonià.

Veiem doncs, la demostració del resultat de l'algorisme de Christofides.

Teorema 4.6. *Per a qualsevol problema del viatjant d'un graf G en el qual es compleixi la desigualtat triangular, l'algorisme de Christofides dona un resultat $\omega(L) < 1.5\,\omega(L_0)$ on L és el resultat de l'algorisme de Christofides i L_0 és la solució exacta del problema del viatjant a G.*

Demostració. Per a demostrar aquest resultat veiem primer que l'arbre generador de pes mínim T té un pes inferior al de L_0.
Per fer-ho cal recordar que el resultat que hem vist abans sobre els grafs que compleixen la desigualtat triangular: si un graf G compleix la desigualtat triangular la solució al problema del viatjant és equivalent a trobar una cicle hamiltonià de pes mínim C_0 a G. Observem però que, si eliminem una aresta d'aquest cicle C_0 que cobreix tots els vèrtexs de G, llavors obtenim un arbre generador. Com que T és l'arbre generador de pes mínim tindrem $\omega(T) \leq \omega(C_0) - \omega(e)$ on e és una aresta qualsevol de C_0. Per tant (si considerem que el pes de les arestes es estrictament positiu) tindrem $\omega(T) < \omega(C_0) = \omega(L_0)$ com volíem veure.

Un cop tenim un arbre generador de pes mínim[11] si féssim servir cada aresta dues vegades (per entrar i sortir de cada vèrtex) obtindríem un circuit de pes menor a 2 vegades el pes del problema del viatjant. Aquesta aproximació però, es pot millorar.

[11]Es pot trobar amb l'algorisme de Prim en un temps polinòmic.

Seguint la idea general de l'algorisme, l'objectiu és trobar un circuit eulerià i, utilitzant que G compleix la desigualtat triangular, convertir-lo en un cicle hamiltonià. En el cas que hem introduït a l'anterior paràgraf, si dupliquem cada aresta de l'arbre generador, podem trobar un circuit eulerià degut a que tots els vèrtexs de l'arbre seran de grau parell (el grau de cada vèrtex serà el doble del grau que tenia a l'arbre sense duplicar arestes). Fixem-nos però que realment, per a poder trobar un circuit eulerià, només ens cal que els vèrtexs de grau senar passin a ser de grau parell.

És en aquest pas de convertir tots els vèrtexs de l'arbre en vèrtexs de grau parell on utilitzarem l'algorisme d'aparellament de pes mínim (anàleg al de pes màxim). La idea és que cada dos vèrtexs aparellats el seu grau augmentarà en 1. Per tant, si aconseguim aparellar tots els vèrtexs de grau senar, tots passaran a ser de grau parell.

Prenem doncs, un nou graf $G_M = G(V_M, E_M)$ complet de tots els vèrtexs de T tal que el seu grau és senar. Observem que el nombre de vèrtexs d'aquest graf ha de ser parell ja que la suma de graus del total de vèrtexs és parella i la suma dels graus dels vèrtexs de grau parell també. Així doncs, G_M és un graf complet de cardinalitat parella i, per tant, té un aparellament perfecte de pes mínim (sabem que serà perfecte pel teorema de Tutte i podem adaptar l'algorisme d'aparellament de pes màxim per a que trobi el de pes mínim). Anomenarem M a aquest aparellament.

Per a poder demostrar el teorema en tindríem prou en comprovar que aquest aparellament té un pes menor a $\frac{1}{2}\omega(L_0)$. Veiem-ho:

Donat un cicle hamiltonià qualsevol de G' aquest passarà per tots els vèrtexs de V_M. Per tant, al complir-se la desigualtat triangular, podem canviar cada camí que va d'un vèrtex $u \in V_M$ fins al vèrtex següent $v \in V_M$ per l'aresta $(u, v) \in E_M$ sense que augmenti el pes del cicle. Un cop fets els canvis necessaris tindrem un circuit que passa només per arestes de G_M i cobreix tots els els vèrtexs de V_M. En haver adaptat aquest circuit a partir d'un cicle podem afirmar que el resultat també serà un cicle C_M a G_M.

Al ser $|V_M|$ parell, C_M serà un cicle parell i, per tant, podem construir dos aparellaments M_1 i M_2 alternant arestes d'un i altre aparellament. Tots dos cobreixen V_M i, per tant, són aparellaments perfectes de V_M. Així doncs, tant $\omega(M_1)$ com $\omega(M_2)$ seran majors al pes de l'aparellament de pes mínim del graf complet G_M. Veiem però que, si seleccionem l'aparellament de menor pes d'entre M_1 i M_2, aquest serà menor que $\frac{1}{2}\omega(L_0)$, ja que $\omega(M_1) + \omega(M_2) = \omega(C_M) \leq \omega(L_0)$. I, evidentment, M l'aparellament de pes mínim de V_M també ho serà.

Així doncs, si unim les arestes de M a l'arbre T, obtindrem un graf que tindrà un pes total menor de $\frac{1}{2}\omega(L_0)$. A més a més, en haver fet que tots el vèrtexs d'aquest siguin de grau parell sabem que existirà un circuit eulerià per aquest graf.

Un cop calculat aquest cicle eulerià, només ens queda convertir-lo en un cicle hamiltonià. El cicle eulerià que hem trobat és clar que recorre tots els vèrtexs de G. Per tant, l'únic que pot fer que no sigui un cicle hamiltonià és que passi més d'un cop per algun dels vèrtexs. Observem però que, al ser G un graf que satisfà la desigualtat triangular, podem utilitzar el mateix procediment que hem realitzat altres cops, escurçant cada camí que passi per vèrtexs ja visitats per l'aresta que uneixi directament el vèrtex no visitat següent.

Aquestes dreceres que prendrem de G al complir-se la desigualtat triangular sabem que no augmentaran el pes total del cicle i, per tant, el cicle hamiltonià que trobarem L serà de pes menor o igual que $\frac{1}{2}\omega(L_0)$, com volíem veure.

$\square$

4.3 Fita inferior per al problema del viatjant

Amb l'algorisme de Christofides hem obtingut una solució aproximada del problema del viatjant en espais mètrics que té un pes major que la solució real. D'altra banda, utilitzant aparellaments de graf podem crear un algorisme que ens doni, no una solució sinó, una fita inferior del problema del viatjant.

Anteriorment hem comprovat que resoldre el problema del viatjant de G passa per trobar un cicle hamiltonià a G'. Al plantejar el programa lineal, hem vist que, el fet d'haver de trobar un sol cicle, es tradueix en imposar un nombre d'equacions que creix de forma exponencial en funció del nombre de vèrtexs del graf.

Una idea que podríem considerar doncs, és trobar una solució per al programa lineal que complís totes les condicions del problema excepte el conjunt d'equacions que imposa que sigui un únic cicle. Això, és clar, donaria un resultat que no tindria perquè ser una solució del problema del viatjant, però el problema del viatjant no podria ser millor que el resultat que obtinguem. Trobant així una fita inferior al pes del problema del viatjant.

El fet d'imposar que cada vèrtex sigui de grau 2 és equivalent a demanar que existeixi un 2-factor[12] per a G'. En particular qualsevol cicle hamiltonià, inclòs el cicle hamiltonià de pes mínim que busquem, serà un 2-factor de G'. La diferència doncs, és que un 2-factor pot ser també un conjunt de cicles disjunts tals que cobreixin tots els vèrtexs de G'.

Veiem també que, al ser totes les components cicles, podem entendre el problema com entrar i sortir de cada vèrtex un cop. Per tant, el problema es pot traduir en trobar per a cada vèrtex una única aresta d'entrada i una única aresta de sortida. Observem que aquesta redefinició del problema també ens és útil per al cas del problema del viatjant asimètric (on cada aresta té un únic sentit).

Utilitzant aquesta redefinició del problema podem considerar el següent:

Cada aresta dels cicles que obtindrem podem entendre que surt d'un vèrtex i entra al vèrtex següent del cicle. Per tant, cada vèrtex serà un cop d'entrada i un altre de sortida. Podem representar això amb el graf bipartit $B = G(V_I \cup V_O, E_2)$ on V_I i V_O són dues còpies de V, E_2 és el conjunt d'arestes per duplicat (ja que en el cas simètric podem fer servir les arestes en ambdós sentits). En el cas asimètric no doblarem les arestes sinó que les escriurem en el sentit que tinguin a G'.

Un cop tenim el graf bipartit B, escollir una aresta d'entrada i una de sortida de G' per a cada vèrtex és equivalent a trobar un aparellament perfecte per a B. I, per tant, podem conèixer la fita inferior trobant l'aparellament de pes mínim del graf bipartit.

Observem que sempre trobarem un aparellament perfecte. Això, queda palès al resultat següent:

Teorema 4.7. *Un graf G conté un 2-factor $\iff$ B de G conte un aparellament perfecte.*

Demostració. Si B té un aparellament perfecte, cada aresta (u_I, v_O) de l'aparellament es correspondrà amb l'aresta (u, v) de G, com que l'aparellament perfecte té $|V|$ arestes i cada vèrtex tindrà grau 2 (ja que hi haurà una aresta que sigui adjacent a v_I i una altra a v_O per a cada vèrtex $v \in G$) fent que el conjunt d'arestes (u, v) sigui un 2-factor.

D'altra banda, amb el procediment invers, si G té un 2-factor, podem prendre les arestes d'aquest i a cada aresta (u, v) assignar-li (u_I, v_O) a B i marcar-la com a part de l'aparellament. Com que cada vèrtex té dues arestes adjacents, l'aparellament resultant serà perfecte.

□

Com hem comentat abans, un cicle hamiltonià és un 2-factor, però altres solucions de diversos cicles que cobreixen tots els vèrtexs també ho serien. L'aparellament perfecte de pes mínim trobarà la solució que pesi menys, tot i que podria no ser un cicle hamiltonià.

[12]Un k-factor és un subgraf generador k-regular. En particular un 1-factor és un aparellament perfecte i un 2-factor és una col·lecció de cicles que cobreix tots els vèrtexs.

5 Conclusions

En el treball s'han abordat aspectes diferents del problema d'aparellaments maximals i de les seves aplicacions. Al primer capítol hem tractat el cas de grafs no ponderats i encarat un seguit de resultats des del punt de vista de la teoria de grafs, sense haver d'utilitzar la programació lineal. Un cop hem tingut els resultats que ens han permès trobar aparellaments de cardinalitat màxima en grafs no ponderats, al segon capítol hem adaptat el resultat a grafs ponderats. El fet de no poder utilitzar directament l'algorisme trobat al primer capítol ens ha fet replantejar el problema com un problema de programació lineal. Utilitzant l'algorisme obtingut per a grafs no ponderats i els resultats vistos al programa lineal hem descrit l'algorisme per a trobar aparellaments de pes màxim. Finalment a l'últim capítol s'ha abordat el Problema del viatjant utilitzant l'algorisme d'aparellament de pes màxim per trobar-ne una fita superior i una fita inferior.

Al ser 3 capítols bastant diferenciats, és útil comentar les conclusions de cadascun d'ells per separat.

Així doncs, al primer capítol, a part de tractar algunes demostracions de teoria de grafs, hem vist l'algorisme d'Edmonds així com el seu funcionament. D'aquest en podem destacar el fet que la cerca de camins incrementals és bastant semblant a l'algorisme per a trobar aparellaments de cardinalitat màxima (algorisme Hongarès) que es va estudiar a l'assignatura de Grafs del Grau de Matemàtiques. La diferència evident és que l'algorisme Hongarès no ha de considerar els cicles senars ja que és impossible que aquests es formin en un graf bipartit, caldria que dos vèrtexs del mateix conjunt estiguessin connectats (impossible per definició de graf bipartit). Per tant, si bé ambdós algorismes es basen en trobar camins incrementals, al no estar considerant únicament grafs bipartits l'algorisme d'Edmonds ha de tractar també la formació de cicles senars així com la cerca en arbre.

Al capítol següent, a diferència del primer, no podem determinar si un camí és incremental. El cas no ponderat només depenia del nombre d'arestes que passaven a l'aparellament. Aquest fet, però, s'ha resolt plantejant-ho com un problema de programació lineal. La importància del programa lineal és l'aparició d'un problema dual, el qual té variables variables y i z, associades a les condicions lineals del problema lineal (primal) associat al problema d'aparellament de pes màxim. Un cop plantejats el problema primal i el seu dual, s'ha utilitzat el fet que la solució òptima compleix un seguit de condicions per tal de adaptar l'algorisme del capítol 1 perquè a cada pas compleixi més condicions fins a arribar a la solució òptima. Fent-ho, hem aconseguit un algorisme que cerca camins incrementals en un conjunt d'arestes tal que compleixen una condició determinada.

Observem, també, que les variables y_i associades als vèrtex juguen el paper d'indicar-nos el pes que aportarà el vèrtex al pes de l'aparellament. Així, per saber en quant ha augmentat el pes de l'aparellament, només ens cal mirar els extrems del camí que hem trobat, ja que els vèrtexs que no són als extrems aporten el mateix a les arestes adjacents. D'això també se'n dedueix que, quan la variable $y_v = 0$, aparellar el vèrtex v no aporta més pes a l'aparellament. Al mateix temps, donat que l'algorisme no permet mai que una variable y o z siguin negatives, sabem que l'algorisme sempre augmentarà el pes total de l'aparellament (sense comptar els vèrtexs artificials).

A part, d'aquestes consideracions, altres resultats importants són el fet que, a diferència de l'algorisme del capítol 1, l'algorisme per a trobar aparellaments de màxim pes no desfà els cicles senars col·lapsats a cada iteració. Això és degut a que, abans, podíem saber clarament quines arestes quedaven aparellades, mentre que al segon capítol no podem seleccionar les arestes del cicle fins a poder determinar quin pes acabarà esdevenint màxim.

Pel que fa a l'algorisme per a trobar aparellaments de pes màxim, n'hem vist el funcionament en un exemple força més elaborat que els que podem trobar a la bibliografia consultada. La complexitat de l'exemple ens ha permès veure com tracta l'algorisme la formació de vèrtexs artificials així com el fet de col·lapsar cicles que ja contenen un vèrtex artificial. D'altra banda, haver fet exemples tant del cas ponderat com el no ponderat, ens ha permès veure les diferències que presentes ambdós algorismes en el tractament dels vèrtexs artificials així com la modificació que s'ha fet a la cerca d'arbres hongaresos en el cas de grafs ponderats (utilitzant les variables duals) per tal de considerar només les arestes que realment formen camins incrementals.

D'aquest capítol cal remarcar també el fet que en el problema d'aparellaments de màxim pes hem vist com el plantejament del programa lineal ens donava un conjunt de condicions que augmentava de forma exponencial. Si bé, això podria fer-nos pensar que la solució del problema no serà factible en un temps raonable (temps polinòmic) el resultat obtingut ens dona una solució prou ràpida.

Per últim, al capítol on apliquem els resultats obtinguts al Problema del viatjant, hem pogut veure com els aparellaments (i en concret la cerca d'aparellaments de màxim pes) són útils per tal d'afrontar problemes tan complexos com el del viatjant. Al mateix temps, el Problema del viatjant ha servit també com a una introducció a temes de complexitat.

Per tant, el treball incorpora demostracions en grafs per a les quals hem fet servir tècniques similars a alguna demostració vista a l'assignatura de Grafs (cerca de camins incrementals), així com l'ús de la programació lineal per a resoldre problemes de grafs. La qual cosa no havíem vist fins ara i, per tant, hem hagut d'aprendre el funcionament de la programació lineal: plantejament del problema, existència del problema dual i de les condicions complementàries...

Al aplicar els resultats al Problema del viatjant també s'ha estudiat un problema que, si bé és bastant conegut, ens ha permès introduir alguns conceptes de complexitat com el Problema P vs NP i l'existència dels problemes d'enrutament de vehicles, dels quals el Problema del Viatjant n'és un cas particular. Al mateix temps, hem pogut veure la relació de problemes tan diversos com l'arbre generador de pes mínim i l'aparellament de pes màxim utilitzats per a determinar la millor fita superior per al Problema del viatjant en espais mètrics.

Així, doncs, el treball, tot i que s'ha centrat en el problema dels aparellaments maximals, s'ha ampliat amb alguns aspectes de diverses àrees de les matemàtiques com són la teoria de grafs, la programació lineal, la teoria de la complexitat... En resum, hem pogut avançar en la comprensió dels algorismes d'aparellaments maximals en cardinalitat i en pes, i de les seves aplicacions. Les eines emprades han requerit una ampliació dels coneixements matemàtics adquirits al llarg del Grau. El treball m'ha servit per tenir una visió més global en aquesta temàtica, a mig camí entre les matemàtiques i la informàtica, en la qual tinc un interès creixent i espero que em sigui útil en el futur.

Referències

[1] Gibbons, A.: Algorithmic Graph Theory, *Cambridge University Press*, 1985.

[2] Evans, J.R.; Minieka, E.: Optimization Algorithms for Networks and Graphs, *Marcel Dekker, Inc.*, 1992.

[3] Lovász, L.; Plummer, M. D.: Matching Theory, *Annals of Discrete Mathematics, 29, North-Holland*, 1986.

[4] Bondy, J. A.; Murty, U. S. R.: Graph theory, *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag London*, 2008.

[5] Berge, C.: Two theorems in graph theory, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43 (9): 842 - 844, 1957.

[6] Edmonds, J.: Paths, trees, and flowers, *Canad. J. Math.*, 17: 449 - 467, 1965.

[7] Duan, R.; Pettie, S.: Linear-Time Approximation for Maximum Weight Matching. *Journal of the ACM.*, 61: 1 - 23, 2014.

[8] Christofides, N.: Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem, Report 388, *Graduate School of Industrial Administration, CMU*, 1976.

[9] Gale, D.; Shapley, L.S.: College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly*, 69 (1): 9 - 14, 1962

[10] Fortnow, L.: The Status of the P Versus NP Problem, *Communications of the ACM*, 52 (9): 78-86, 2009.
(Review article) https://cacm.acm.org/magazines/2009/9/38904-the-status-of-the-p-versus-np-problem/fulltext [Online; consultat 19-juny-2021]

[11] Karlin, Anna R.; Klein, Nathan; Gharan, Shayan Oveis, A (Slightly) Improved Approximation Algorithm for Metric TSP, (2020-08-30).

[12] Liu, C. L.: Elements of Discrete Mathematics, *McGraw-Hill, Computer Science Series*, Chapter 5, 1977