



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Introducció al Mètode de Melnikov

Autor: Marc Túnica

Director: Dr. Ernest Fontich

Realitzat a: Departament matemàtiques i informàtica

Barcelona, Febrer-Juny 2021

Abstract

Melnikov method is a method which aims to study the splitting between the stable and unstable manifold of fixed points or periodic orbits of dynamical systems when a perturbation is applied. In this dissertation, we introduce this method besides a study of stable and unstable manifolds of saddle points.

Resum

El mètode de Melnikov és un mètode que permet l'estudi de la separació de les variables estables i inestables d'un punt fix o òrbita periòdica d'un sistema dinàmic quan se li aplica una pertorbació. En aquest treball s'introdueix aquest mètode així com s'estudia les varietats estables i inestables en punts de sella.

Agraïments

Vull agrair aquest treball al meu tutor, per la seva paciència, la seva ajuda i, en definitiva, per aguantar-me.

Índex

Introducció	1
1 Varietats invariants	3
1.1 Varietat diferencial	3
1.2 Estabilitat	4
1.2.1 Cas lineal	5
1.2.2 Cas no lineal	7
1.2.3 Cas amb dependència de paràmetre	13
1.3 Estabilitat de les òrbites periòdiques	14
2 Breu teoria de les equacions integrals	19
2.1 Equació integral de Volterra	19
2.2 Equació integral de Hammerstein	22
3 El mètode de Melnikov	26
3.1 Seccions i aplicacions de Poincaré	26
3.2 El mètode de Melnikov	27
3.2.1 El mètode de Melnikov. Cas autònom per a òrbites homoclíniques	28
3.3 Sistemes hamiltonians	36
4 El pèndol simple pertorbat	39
4.1 Càlcul numèric	39
4.1.1 Cas $n = 1$	41
4.1.2 Cas $n > 1$	43
4.2 Càlcul analític	44
4.2.1 Càlcul de la integral de Melnikov	46
4.3 Aproximació de primer ordre	47
Conclusions	49
A Teoremes de contracció i de convergència	51
A.1 Principis de contracció	51
A.2 Teorema de la convergència dominada de Lebesgue	54
B Integrals primeres	57
C Programa	62

ÍNDEX

iv

Bibliografía

71

Introducció

Dins de l'estudi de les equacions diferencials i dels sistemes dinàmics, és interessant estudiar l'evolució d'un sistema quan se'l sotmet a una determinada pertorbació. Aquest camp és especialment important en l'àmbit de la física, on molts models es construeixen a partir de potencials més bàsics i coneguts i s'apliquen altres forces en forma de pertorbacions. És el cas, per exemple, de l'aproximació de partícules principals d'un àtom. Especialment en l'àmbit de la mecànica, és rellevant l'estudi de com varia la varietat estable i inestable d'un punt de sella o entre dos punts de sella. És el cas, per exemple del pèndol simple, un sistema força conegut. Si podem estudiar com es comporten les varietats estable i inestable dels seus punts sella quan hi apliquem una pertorbació, obtindrem molta informació del nou sistema.

Amb aquest objectiu, l'any 1964, el matemàtic que duia per cognom Melnikov va proposar un mètode per a determinar l'existència del caos en sistemes dinàmics sota pertorbacions. En matemàtiques, l'estudi del caos consisteix en determinar patrons i comportaments en sistemes dinàmics que semblen governats per estats aleatoris i irregularitats. Tot i que se li atribueix el mètode majoritàriament a Melnikov, consten resultats anteriors desenvolupats per Poincaré. És per aquest motiu que sovint també es coneix amb el nom del mètode de Poincaré-Melnikov.

Aquest treball, com a presentació final del grau de matemàtiques de la universitat de Barcelona, té com objectiu la introducció i estudi d'aquest mètode i la seva aplicació en un cas particular molt senzill, el del pèndol simple. És per això que la memòria principal consta de quatre capítols. El primer, destinat a l'estudi de les varietats estables i inestables en punts de sella per a sistemes dinàmics lineals i no lineals així com per a òrbites periòdiques. El segon capítol introdueix el concepte d'equació de Volterra i Hammerstein, que són molt usades en sistemes dinàmics. El tercer és la construcció del mètode de Melnikov com a tal, amb una petita introducció sobre les aplicacions de Poincaré. Finalment, es conclou la memòria amb una aplicació pràctica del mètode; l'estudi del pèndol simple en el que apliquem una senzilla pertorbació. Com a part annexa al treball, hi consta un annex del capítol 2 amb alguns resultats bàsics sobre les equacions integrals. També un annex sobre les integrals primeres i els sistemes hamiltonians, complementari al capítol 3. Finalment, incorporem un apèndix amb un petit codi de FORTRAN utilitzat en el capítol 4.

En definitiva, aquest document pretén ser una humil introducció al mètode de Melnikov, que serveixi per entendre d'una manera clara que són les varietats estables i inestables, com es comporten sota determinades pertorbacions i comprendre la seva importància en determinats sistemes físics. A nivell didàctic, combina diverses disciplines tractades durant la carrera: sistemes

dinàmics, càlcul integral, programació i càlcul numèric. És un treball multidisciplinari, que pretén usar diverses tècniques no massa complexes per a l'estudi del caos.

Pels tres primers capítols i els corresponents annexos s'ha seguit una metodologia basada en una profunda recerca bibliogràfica, amb documents i articles reconeguts per la comunitat matemàtica. Hi ha diverses maneres de construir el teorema de Melnikov i fins i tot diverses variants del mètode. S'ha intentat optar sempre pels mètodes més generalistes i fidels al document original. Pel darrer capítol, s'han posat en pràctica els coneixements dels anteriors i s'ha proposat un exemple més qualitatiu amb l'ajuda dels mètodes numèrics. És evident que el mètode de Melnikov té un desenvolupament teòric molt important, ja que és el que sustenta la seva viabilitat, tanmateix, seria imprudent no exemplificar tot el seu potencial.

Sense més dilacions, comencem.

1. Varietats invariants

Notació:

- Espai de les funcions ($f : X \rightarrow Y$) derivables i contínues $\mathcal{C}^1(X, Y)$. De manera general, $\mathcal{C}^r(X, Y)$.
- $Re(\lambda)$ denota la part real de $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $Spec(A)$ és el conjunt d'autovalors de la matriu A .

En aquest capítol introduïrem algunes definicions bàsiques sobre les varietats estables i inestables així com algun que altre teorema rellevant. Posteriorment, s'analitzarà l'estabilitat en el cas de sistemes diferencials autònoms, fent el cas lineal primer i el cas no lineal seguidament. S'acabarà el capítol amb el teorema de la varietat estable i l'estabilitat en òrbites periòdiques.

1.1 Varietat diferencial

Definició 1.1. Una equació diferencial és autònoma si és de la forma

$$\dot{u} = f(u) \tag{1.1}$$

on suposarem que u pertany al cos \mathbb{R}^n , amb $n \geq 1$, i $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una funció contínua en un Ω obert.

Definició 1.2. Descriurem el flux associat a aquesta equació com una aplicació contínua

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{\Omega} \subset I \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, u_0) &\mapsto \phi_t(u_0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

diferenciable respecte de t , on $I \subset \mathbb{R}$ és un obert que conté el punt 0, amb $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert, tal que $\phi(0, u_0) = u_0$ per a tot $u_0 \in \Omega$ i que per a tot $t, s \in I$ tals que $\phi_{t+s}(u_0) \in \Omega$, $\phi_t(\phi_s(u_0)) = \phi_{t+s}(u_0)$. Usarem la notació $\phi_t(u_0) = \phi(t, u_0)$.

Definició 1.3. Un sistema d'equacions és lineal si és de la forma

$$\dot{u} = Au \tag{1.3}$$

on $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ i A és una matriu $(n \times n)$.

Definició 1.4. Un subconjunt S de Ω és invariant respecte l'equació diferencial (1.1) si per a cada $u \in S$, la solució maximal $t \mapsto \phi_t(u)$ té la seva imatge en S .

Dit d'una altra manera, tota òrbita que passi per un punt de S no s'escapa del subconjunt S .

Definició 1.5. Sigui S un subconjunt de Ω invariant. Aleshores, si S és una varietat diferencial, podem dir que S és una varietat diferencial invariant.

És important introduir un parell de teoremes que tenen una gran rellevància en l'estudi de sistemes dinàmics però que no demostrarem. No obstant, són teoremes molt coneguts i aquests es poden trobar en qualsevol referència bibliogràfica [1, pàg. 208].

Teorema 1.1. (Teorema de variació de constants) *Sigui un sistema de la forma*

$$\dot{u} = Au + R(t) \quad (1.4)$$

on $u \in \mathbb{R}^n$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, A és una matriu de $\text{Mat}_{n \times n}$ i $R : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua, la seva solució general és de la forma

$$u(t) = e^{At}C + e^{At} \int e^{-As}R(s)ds$$

on $C \in \mathbb{R}$ és una constant arbitrària determinada per les condicions inicials, de manera que donat el problema de Cauchy amb l'equació anterior i condició inicial $u(t_0) = u_0$, la solució és

$$u(t) = e^{A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}R(s)ds. \quad (1.5)$$

Teorema 1.2. (Teorema de la funció implícita) *Siguin M i N subconjunts de \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m respectivament. Sigui $f : M \times N \rightarrow \mathbb{R}^m$ i considerem el sistema $f(u, v) = 0$. Si existeix $(u_0, v_0) \in M \times N$ tal que $f(u_0, v_0) = 0$, si f és de classe C^r en el domini $M \times N$ amb r més gran o igual a 1, i si el determinant de $D_v f(u_0, v_0)$ no s'anul·la, aleshores existeixen dos entorns $U \subset M$ i $V \subset N$ de u_0 i v_0 respectivament, i una funció $g : U \rightarrow V$, de classe $C^r(U)$, i tal que compleix que per a qualsevol u de U i v de V , $f(u, v) = 0$ si i només si $v = g(u)$.*

A més a més, $Dg(u) = -(D_v f(u, g(u)))^{-1} D_u f(u, g(u))$ per a qualsevol u de U .

1.2 Estabilitat

Un cop introduït el concepte de varietat invariant, volem estudiar l'estabilitat dels diferents punts d'equilibri.

Definició 1.6. *Sigui una equació de la forma (1.1), un punt fix (i.e. una solució d'equilibri) és un punt $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(u_0) = 0$.*

És senzill veure que u_0 punt fix és una solució del sistema que no varia en el temps, i en particular, és la solució del problema de Cauchy per a condició inicial $u(t_0) = u_0$. En general, a nivell de notació, considerarem t_0 com el temps inicial.

Considerem ara $u(t)$ solució de l'equació autònoma (1.1). Podem introduir una sèrie de definicions sobre l'estabilitat.

Definició 1.7. *Sigui un sistema diferencial de la forma (1.1). Denotem per $u(t)$ una solució d'aquest sistema. Diem que $u(t)$ és Liapunov estable si per a qualsevol $\epsilon > 0$ existeix $\delta = \delta(\epsilon) >$*

0 tal que, per a qualsevol altra solució de l'equació autònoma de la forma (1.1), $v(t)$, tal que $|u(t_0) - v(t_0)| < \delta$, aleshores $|u(t) - v(t)| < \epsilon$ per a tot $t > t_0$.

Definició 1.8. Diem que $u(t)$ és asimptòticament estable si és Liapunov estable i existeix $\alpha > 0$ constant tal que per a qualsevol altra solució de l'equació autònoma (1.1), $v(t)$, si es compleix que $|u(t_0) - v(t_0)| < \alpha$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0$.

Definició 1.9. Sigui un sistema diferencial de la forma (1.1). Denotem per $u(t)$ una solució d'aquest sistema. Definim una semi-òrbita positiva associada a un punt u_0 de l'espai de fases com

$$O^+(u_0, t_0) = \{u \in \mathbb{R}^n : u(t) = u, t \geq t_0, u(t_0) = u_0\}. \quad (1.6)$$

De la mateixa manera, podem definir la semi-òrbita negativa com

$$O^-(u_0, t_0) = \{u \in \mathbb{R}^n : u(t) = u, t \leq t_0, u(t_0) = u_0\}. \quad (1.7)$$

Definició 1.10. Sigui un sistema diferencial de la forma (1.1). Denotem per $u(t)$ una solució d'aquest sistema. Sigui $O^+(u_0, t_0)$ una semi-òrbita positiva. Diem que $u(t)$ és orbitalment estable si per a tot $\epsilon > 0$, existeix $\delta(\epsilon) > 0$ tal que per a qualsevol altra solució de la mateixa equació ($v(t)$), si $|u(t_0) - v(t_0)| < \delta$, aleshores la distància entre l'òrbita i $v(t)$, entesa de la manera $d(v(t), O^+(u_0, t_0)) = \inf_{u \in O^+} \{|v(t) - u|\}$, és més petit que ϵ .

Definició 1.11. Diem que $u(t)$ solució de (1.1) és orbitalment asimptòticament estable si és orbitalment estable i a més a més per a qualsevol solució de la mateixa equació existeix una constant $\alpha > 0$ tal que si $|u(t_0) - v(t_0)| < \alpha$, llavors $\lim_{t \rightarrow \infty} d(v(t), O^+(u_0, t_0)) = 0$.

1.2.1 Cas lineal

Considerem un sistema lineal de la forma (1.3). En aquest cas la condició d'estabilitat és invariant sota canvis de coordenades i podem suposar, sense pèrdua de la generalitat, que A és la forma canònica de Jordan. Sabem que la solució en funció del temps de l'equació lineal (1.3) amb condició inicial u_0 és

$$u(t) = e^{At}u_0. \quad (1.8)$$

El comportament d'aquest sistema en el temps queda determinat per la part real dels vectors propis. Podem definir dues varietats lineals, una que anomenarem estable $E^+(e^A)$ i una inestable $E^-(e^A)$ tals que si comencem des d'un punt de $E^+(e^A)$, aleshores $u(t) \rightarrow 0$ a mesura que $t \rightarrow \infty$ i si comencem en $E^-(e^A)$, $u(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow -\infty$. La varietat estable està associada a aquells autovalors que tenen part real negativa mentre que la inestable amb aquells autovalors que tenen part real positiva. També podem definir una varietat central, $E^0(e^A)$, associada als valors propis de part real 0. Per a facilitar les coses, podem assumir que és un conjunt buit, ja que aquesta varietat sol ser inestable per a petites perturbacions. Totes dues varietats, estable i inestable, es poden expressar com a suma directe dels subespais propis generalitzats amb autovalors de part

real negativa o positiva. És a dir, denotant la multiplicitat algebraica com a m_i ,

$$E^+(e^A) = \bigoplus_{\{Re(\lambda_i) < 0\}} Ker(A - \lambda_i)^{m_i} \quad (1.9)$$

$$E^-(e^A) = \bigoplus_{\{Re(\lambda_i) > 0\}} Ker(A - \lambda_i)^{m_i}. \quad (1.10)$$

Definició 1.12. Donat un sistema diferencial lineal, $\dot{u} = Au$, on A és una matriu ($n \times n$). Direm que és hiperbòlic si la matriu A no té cap valor propi amb part real nul·la.

Definició 1.13. Sigui un sistema lineal (1.3), diem que és globalment estable si totes les solucions estan acotades quan t tendeix a infinit. I diem que és globalment asimptòticament estable si totes les solucions convergeixen a zero quan t tendeix a infinit.

Teorema 1.3. Considerem un sistema lineal com el (1.3). Siguin λ_i , amb $1 \leq i \leq n$, els valors propis de la matriu A . Sigui m_i la multiplicitat algebraica i g_i la multiplicitat geomètrica. El sistema (1.3) és globalment estable si i només si les parts reals dels valors propis són menor o igual a 0 i si és igual a 0, les multiplicitats algebraiques i geomètriques coincideixen. També podem afirmar que el sistema (1.3) és globalment asimptòticament estable si i només si la part real de qualsevol valor propi de la matriu A és estrictament menor que 0, i.e., $\forall \lambda_i \in \text{Spec}(A)$, $Re(\lambda_i) < 0$. En aquest cas, per a qualsevol $0 < \lambda < \min\{-Re(\lambda_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, existeix una constant C , dependent de λ , tal que

$$\|e^{At}\| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad (1.11)$$

per a t major que 0.

Ara introduïrem un resultat molt bàsic de l'estudi de la dinàmica, però molt important, ja que ens determina la trajectòria sobre les varietats.

Teorema 1.4. Les varietats lineals estable i inestable són invariants sota el flux i per a tot punt que comença en la varietat estable (varietat inestable) convergeix exponencialment a 0 quan t tendeix a infinit (quan t tendeix a menys infinit).

Demostració: Fem el cas de la varietat lineal estable. Sigui $u_+ \in E^+(e^A)$, el punt inicial. Pel teorema 1.3 veiem que

$$|e^{At}u_+| \leq Ce^{-\lambda t}|u_+|,$$

per a $t > 0$, i per a tot $0 < \lambda < \min\{|Re(\lambda_i)| : \lambda_i \in \text{Spec}(A), Re(\lambda_i) < 0\}_{1 \leq i \leq n}$. C és una constant el valor de la qual depèn de λ .

El cas invariant es demostra de manera anàloga. Considerant $u_- \in E^-(e^A)$, aleshores, per a $t \leq 0$ i per a tot $0 < \lambda < \min\{|Re(\lambda_i)| : \lambda_i \in \text{Spec}(A), Re(\lambda_i) < 0\}_{1 \leq i \leq n}$,

$$|e^{At}u_-| \leq Ce^{\lambda t}|u_-|.$$

C és una constant dependent de λ . □

Observem que podem definir l'espai compost per totes aquelles condicions inicials que convergeixen a 0 per a un determinat exponent $\lambda > 0$.

$$E^{+, \lambda}(e^A) = \{u : \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{\lambda t} |e^{At} u|) = 0\} \quad (1.12)$$

$$E^{-, \lambda}(e^A) = \{u : \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^{-\lambda t} |e^{At} u|) = 0\}. \quad (1.13)$$

En aquest punt és important recordar la classificació dels punts fixos de l'equació lineal. Farem la classificació en el pla. És a dir, considerem un sistema lineal de la forma

$$\dot{u} = Au \quad (1.14)$$

on A és una matriu de dimensió $n \times n$ i u pertany a \mathbb{R}^n . Podem considerar que el punt fix hiperbòlic és l'origen i que els valors propis de la matriu són λ_1 i λ_2 amb part real diferent de zero perquè es tracta d'un punt fix hiperbòlic.

Definició 1.14. (Classificació de punts hiperbòlics) *Sigui un sistema diferencial de la forma $\dot{u} = Au$, definit en un espai de fases $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ obert, on A és una matriu de dimensió 2×2 . Suposem que té un punt fix i que els valors propis de la matriu A en aquest punt són λ_1 i λ_2 . Classifiquem aquest punt segons com siguin els valors propis en:*

- i. Si λ_1 i λ_2 són reals i diferents entre ells, és un **node** o una **sella**:
 - Si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, és un **node atractor** si $\lambda_1 < 0$ (i per tant també $\lambda_2 < 0$) o un **node repulsor** si tots dos són positius.
 - Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, aleshores és un **punt de sella**.
- ii. Si els dos valors propis són reals, iguals entre ells i no nuls, és un **node**:
 - Si A diagonalitza, és un **node estrellat**.
 - En cas contrari, és un **node impropri**.
- iii. Si els valors són complexos conjugats (considerem el cas amb part real no nul·la, és a dir, hiperbòlic), és un **focus**.
 - Si la part real és negativa, és un **focus atractor**.
 - Si la part real és positiva, és un **focus repulsor**.

1.2.2 Cas no lineal

Definició 1.15. *Donada una equació diferencial autònoma, sigui u_0 un punt fix i sigui ϕ_t el flux associat a aquesta equació diferencial. Anomenem varietat estable al conjunt de punts u del domini de ϕ_t tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(u) = u_0$, i.e. podem expressar el conjunt estable com:*

$$W^+(u_0) = \{u \in M : \phi_t(u) \text{ definida } \forall t \geq 0 \text{ i } \lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_t(u) - u_0| = 0\}. \quad (1.15)$$

Anàlogament, una varietat inestable és aquell conjunt de punts u del domini de ϕ_t tal que compleix

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(u) = u_0$, i.e.

$$W^-(u_0) = \{u \in M : \phi_t(u) \text{ definida } \forall t \leq 0 \text{ i } \lim_{t \rightarrow -\infty} |\phi_t(u) - u_0| = 0\}. \quad (1.16)$$

Proposició 1.1. *Sigui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencial en un punt $u_0 \in \Omega$. Sigui aquest punt u_0 tal que $f(u_0) = 0$, aleshores f es pot expressar de la forma*

$$f(u) = Df(u_0)(u - u_0) + R(u), \quad (1.17)$$

on $Df(u_0)$ és la matriu Jacobiana de f a u_0 i $R(u) = \mathcal{O}(|u - u_0|)$.

Demostració: Aplicant un desenvolupament de Taylor sobre f al voltant de u_0 , tenint en compte que, al ser u_0 un punt fix, $f(u_0) = 0$. \square

Aquest sistema de la forma $\dot{u} = Df(u_0)u$ l'anomenarem la linealització del sistema $\dot{u} = f(u)$. Per a simplificar la notació, suposarem que $Df(u_0) = A$. A més a més, com que l'anàlisi de l'estabilitat és invariant sota canvis de coordenades, podem suposar que la matriu A és de la forma canònica de Jordan. Això ens permet escriure el sistema de la forma¹

$$\begin{cases} \dot{x} = Sx + R(x, y, z) \\ \dot{y} = Uy + R(x, y, z) \\ \dot{z} = Cz + R(x, y, z), \end{cases} \quad (1.18)$$

on $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3}$ amb n_1, n_2 i n_3 tals que $n_1 + n_2 + n_3 = n$. A més a més, podem considerar sense problemes que S, U i C són operadors lineals on totes les parts reals dels valors propis són negatives, nul·les o positives respectivament.

Una altra manera d'expressar el sistema lineal és de la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Definició 1.16. *Sigui una equació diferencial de la forma $\dot{u} = f(u)$ amb $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable. Direm que un punt fix d'aquesta equació, u_0 , és un punt hiperbòlic si ho és en el sistema linealitzat (d'acord amb la definició 1.12), és a dir, si els valors propis de la matriu Jacobiana de f en el punt u_0 tenen tots part real no nul·la. En notació matemàtica, $\forall \lambda \in \text{Spec}(Df(x'))$, $\text{Re}(\lambda) \neq 0$.*

Per tant, si considerem punts hiperbòlics, podem suposar que la varietat central és buida.

¹No confondre amb coordenades cartesianes, no ho són.

Exemple 1.1. Una manera senzilla de veure com actua la varietat estable i inestable en un sistema diferencial i en la seva part lineal és considerar el sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x - y^2 \\ \dot{y} = -6x^2 - 6y. \end{cases} \quad (1.20)$$

Veiem que el punt $(x, y) = (0, 0)$ és un punt de sella i que té com a sistema linealitzat

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x \\ \dot{y} = -6y. \end{cases} \quad (1.21)$$

Si dibuixem en dues gràfiques els retrats de fase d'aquests dos sistemes, podem intuir que a l'entorn del punt $(0, 0)$ ambdues varietats tendeixen a ser tangents.

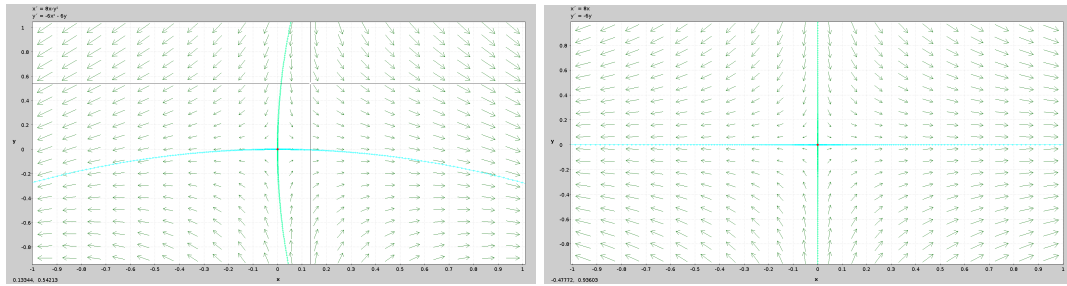


Figura 1.1: En la figura de l'esquerra es mostra el retrat de fase no lineal. En colors marcades la varietat estable i la varietat inestable. En la figura de la dreta el cas lineal. Ambdós retrats han estat elaborats amb el software **pplane**.

Ens interessa un resultat local. Sigui u_0 un punt fix. Considerem un entorn suficientment petit de u_0 , $U(u_0)$. Definim l'homòleg de les varietats lineals, el conjunt de tots els punts que convergeixen exponencialment a u_0 amb un exponent $\lambda > 0$ quan $t \rightarrow \pm\infty$.

$$M^{+, \lambda}(u_0) = \{u : O^+(u) \subseteq U(u_0), \sup_{t \geq 0} (e^{\lambda t} |\phi_t(u) - u_0|) < \infty\} \quad (1.22)$$

$$M^{-, \lambda}(u_0) = \{u : O^-(u) \subseteq U(u_0), \sup_{t \leq 0} (e^{-\lambda t} |\phi_t(u) - u_0|) < \infty\}. \quad (1.23)$$

Aleshores definim les varietats locals estable i inestable com

$$M^+(u_0) = \cup_{\lambda > 0} M^{+, \lambda}(u_0) \quad (1.24)$$

$$M^-(u_0) = \cup_{\lambda > 0} M^{-, \lambda}(u_0). \quad (1.25)$$

Tots dos conjunts són invariants respecte del flux.

És senzill veure que en el cas lineal, $M^\pm(0) = E^\pm$, si definim

$$E^+ = \cup_{\lambda > 0} E^{+, \lambda}(u_0) \quad (1.26)$$

$$E^- = \cup_{\lambda > 0} E^{-, \lambda}(u_0), \quad (1.27)$$

on λ és un factor exponencial.

Volem generalitzar el teorema 1.4 de manera que ens interessa veure que $M^+(u_0)$ i $M^-(u_0)$ són varietats i que E^\pm és tangent a $M^\pm(u_0)$ en el punt u_0 .

Podem suposar sense pèrdua de la generalitat que el punt fix és $u_0 = 0$ i que $t_0 = 0$. Volem reformular el problema com a una equació integral i resoldre-la per iteració.

Si agafem el sistema autònom no lineal, podem escriure una solució en forma d'equació integral a partir de la fórmula de variació de constants (teorema 1.1).

$$u(t) = e^{At}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}R(u(s))ds. \quad (1.28)$$

Utilitzarem els projectors sobre els subespais lineals estable i inestables de l'exponencial e^A , P^+ i P^- respectivament. Recordem que els projectors en un espai vectorial són transformacions lineals idempotents ($P^2 = P$). És important saber també, ja que s'usa indistintament en la demostració, que els projectors commuten amb la matriu A .

En el nostre cas, definim $u_+ = P^+u(0)$, $R_+(u) = P^+R(u)$, $u_- = P^-u(0)$ i $R_- = P^-R(u)$. Fixem-nos que u_\pm és la projecció del punt inicial u_0 sobre les varietats lineals estables i inestables. R_+ i R_- corresponen a les projeccions de $R(u)$.

Definim una condició sobre $u(0) = u_+ + u_-$ tal que $u(t)$ sigui finita. Si $R(0) = 0$, aleshores $u_- = 0$. No obstant ho podem generalitzar si expressem u_- com a funció de u_+ ; $u_- = h^+(u_+)$. Si ara projectem sobre la varietat inestable l'equació 1.28,

$$u_-(t) = e^{At}u_- + e^{At} \int_0^t e^{-As}R_-(u(s))ds,$$

de manera que podem aïllar u_- , ja que e^{At} és invertible amb inversa e^{-At} ,

$$u_- = e^{-At}u_-(t) - \int_0^t e^{-As}R_-(u(s))ds.$$

Suposem ara que $|u(t)|$ està acotada per $t \geq 0$. Fem tendir $t \rightarrow \infty$ de manera que

$$u_- = - \int_0^\infty e^{-As}R_-(u(s))ds.$$

Tornant a l'equació 1.28 tenim que

$$u(t) = e^{At}u_+ + \int_0^t e^{A(t-s)}R_+(u(s))ds - \int_t^\infty e^{A(t-s)}R_-(u(s))ds.$$

Introduïm ara una funció de la forma $P(t) = P_+$, $t > 0$ i $P(t) = P_-$, $t \leq 0$. Fixem-nos que podem escriure l'equació 1.28 com

$$u(t) = e^{At}u_+ + \int_0^\infty e^{A(t-s)}P(t-s)R(u(s))ds. \quad (1.29)$$

Aquest pas és lògic ja que si avaluem sobre $t - s$,

$$P(t-s) = \begin{cases} P^+ & \text{si } t > s \\ -P^- & \text{si } t \leq s \end{cases} \quad (1.30)$$

Sobre la integral tenim que

$$\int_0^\infty e^{A(t-s)}P(t-s)R(u(s))ds = \int_0^t e^{A(t-s)}P^+R(u(s))ds + \int_t^\infty e^{A(t-s)}(-P^-)R(u(s))ds$$

Escriurem de forma compacta l'equació 1.29 com

$$u(t) = K(u)(t). \quad (1.31)$$

En aquest punt, es recomana la lectura del **capítol 2**, on s'introdueix algun resultat sobre les equacions integrals, i en especial les equacions de Volterra i de Hammerstein. També apareixen resultats importants per a les demostracions dels teoremes que segueixen aquest capítol.

Teorema 1.5. *Sigui f de classe C^r amb r més gran o igual que 1. Suposem que u_0 és un punt fix de f i que aquesta té associada la matriu jacobiana A en u_0 . Aleshores, si $\lambda > 0$ i $A + \lambda Id$ és hiperbòlic, existeix un entorn de u_0 , $U(u_0) = u_0 + U$ i una funció $h^{+, \lambda} \in C^r(E^{+, \lambda} \cap U, E^{-, \lambda})$ tal que $h^{+, \lambda}(0) = 0$ i $Dh^{+, \lambda}(0) = 0$. A més,*

$$M^{+, \lambda}(u_0) \cap U(u_0) = \{u_0 + a + h^{+, \lambda}(a) : a \in (E^{+, \lambda} \cap U)\}, \quad (1.32)$$

de manera que $M^{+, \lambda}$ és tangent a $E^{+, \lambda}$ en el punt u_0 .

Demostració: Ara sí, comencem la demostració. Sense pèrdua de la generalitat, suposarem que $u_0 = 0$. Suposarem també que la matriu Jacobiana A és hiperbòlica, per tant, podem escollir $\lambda = 0$ en $A + \lambda Id$. L'espai de Banach en el que ens trobem serà $(\mathcal{C}_b([0, \infty), \mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$, on $\|u\| = \sup_{t \geq 0} |u(t)|$ és la norma que hi hem definit. Suposem que $|u(t)| \leq \delta$. Intentem resoldre l'equació 1.29 per iteració. Tenim que $DR(0) = 0$,

$$|R(u(t)) - R(v(t))| \leq \epsilon |u(t) - v(t)|$$

on podem escollir δ suficientment petit i per tant fer ϵ suficientment petit.

Sigui $\lambda_0 < \min\{|Re(\lambda)| : \lambda \in \text{Spec}(A)\}$, per la proposició 1.4, tenim

$$\|e^{A(t-r)}P(t-r)\| \leq Ce^{-\lambda_0|t-r|},$$

i si combinem aquesta darrera igualtat amb la definició de $K(u)(t)$ donada en 1.29

$$\begin{aligned} \|K(u) - K(v)\| &= \sup_{t \geq 0} \left| \int_0^\infty e^{A(t-r)} P(t-r) (R(u(r)) - R(v(r))) dr \right| \\ &\leq C \sup_{t \geq 0} \int_0^\infty e^{-\lambda_0 |t-r|} |R(u(r)) - R(v(r))| dr, \end{aligned}$$

i per l'equació 1.5 d'aquesta mateixa demostració,

$$\|K(u) - K(v)\| \leq C\epsilon \|u - v\| \sup_{t \geq 0} \int_0^\infty e^{-\lambda_0 |t-r|} dr = \frac{2C\epsilon}{\lambda_0} \|u - v\|.$$

Si $\epsilon < \frac{\lambda_0}{2C}$, pel principi de contracció (teorema A.1) existeix una única solució $\Psi(t, u_+)$. A més a més, pel teorema 2.2, si f és de classe C^r , la solució també ho és respecte de u_+ .

Si considerem $x_+ = 0$, és fàcil comprovar que $\Psi(t, 0) = 0$. Si ara introduïm $h^+(a) = P^- \Psi(0, a)$ obtenim que

$$M^+(0) \cap U = \{a + h^+(a) : a \in (E^+ \cap U)\}$$

per la varietat estable del sistema no-lineal en un entorn U de 0. A més, $M^+(0)$ és tangent a E^+ en el punt 0. En efecte, de la demostració del teorema 2.2, se satisfà que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_+}(t, u_+) = e^{At} P^+ + \int_0^\infty e^{A(t-r)} P(t-r) R_x(\Psi(r, u_+)) \frac{\partial \Psi}{\partial u_+}(r, u_+) dr.$$

Si avaluem aquesta equació per a $t = 0$ i $u_+ = 0$, veiem que $\frac{\partial \Psi}{\partial u_+}(0, 0) = P^+$ de manera que

$$\frac{\partial h^+}{\partial a}(a = 0) = 0.$$

El que ens diu que $M^+(0)$ és tangent a la varietat lineal estable E^+ en el punt 0.

Finalment, apliquem un canvi de coordenades $u'(t) = e^{\lambda t} u(t)$, $A' = A + \lambda Id$ i $R'(t, u') = e^{\lambda t} R(e^{-\lambda t} u')$ que és el canvi de coordenades sobre $R(u)$. Suposem que A' i R' compleixen el mateix assumit per A i R . Sabem també que $\sup_{t \geq 0} |u'(t)| \leq \delta$. Aleshores, $\sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq \delta \exp(-\lambda t)$. Per unicitat de solucions de l'equació integral, en un entorn U_0 de u_0 suficientment petit, aleshores obtenim

$$M^{+, \lambda}(u_0) \cap U(u_0) = \{u_0 + a + h^{+, \lambda}(a) : a \in (E^{+, \lambda} \cap U)\}.$$

□

Proposició 1.2. *Amb les mateixes hipòtesis que el teorema anterior 1.5, si tenim dos valors propis λ_2 i λ_1 tals que $\lambda_1 \leq \lambda_2$, llavors $M^{+, \lambda_2}(u_0) \subset M^{+, \lambda_1}(u_0)$. Particularment, si $E^{+, \lambda_2} = E^{+, \lambda_1}$, es compleix que $M^{+, \lambda_2}(u_0) = M^{+, \lambda_1}(u_0)$.*

Demostració: Considerem u , pertanyent a $M^{+, \lambda_2}(u_0) \cap U(u_0) \subset M^{+, \lambda_1}(u_0) \cap U(u_0)$. Llavors, per a pertanyent a $E^{+, \lambda_1} = E^{+, \lambda_2}$, $u = u_0 + a + h^{+, \lambda_2}(a) = u_0 + a + h^{+, \lambda_1}(a)$ on és evident que $h^{+, \lambda_2}(a) = h^{+, \lambda_1}(a)$. \square

A partir del teorema anterior es pot demostrar l'existència de varietats estables i inestables. Cal agafar ϵ suficientment petit tal que $E^+ = E^{+, \epsilon}$, llavors $M^+(u_0) = M^{+, \epsilon}(u_0)$. Concretament tenim:

Teorema 1.6. (*Teorema de la varietat estable*) *Sigui f una funció de classe \mathcal{C}^r amb $r \geq 1$. Sigui u_0 un punt fix de f amb la matriu Jacobiana A corresponent. Aleshores existeix un entorn $U(u_0) = u_0 + U$ i una funció $h^+ \in \mathcal{C}^r(E^+ \cap U, E^-)$ tal que*

$$M^+(u_0) \cap U(u_0) = \{u_0 + a + h^+(a) : a \in E^+ \cap U\}. \quad (1.33)$$

Anàlogament, el teorema ens diu que també existeix una funció h^- que pertany a $\mathcal{C}^r(E^+ \cap U, E^-)$ i tal que

$$M^-(u_0) \cap U(u_0) = \{u_0 + a + h^-(a) : a \in E^- \cap U\}. \quad (1.34)$$

Teorema 1.7. *Sigui $f \in \mathcal{C}^r$ amb $r \geq 1$. Sigui u_0 un punt fix (tal que $f(u_0) = 0$) hiperbòlic. Aleshores existeix un entorn $U(u_0)$ tal que $O^+(u) \subset U(u_0)$ si i només si $u \in M^+(u_0) \cap U(u_0)$ i $O^- \subset U(u_0)$ si i només si $u \in M^-(u_0) \cap U(u_0)$. En particular*

$$W^\pm(u_0) = M^\pm(u_0).$$

Demostració: Hem demostrat que tota solució suficientment propera a u_0 és solució de l'equació . Per unicitat de solucions, en un entorn suficientment petit de u_0 el valor inicial ha de trobar-se sobre $M^+(u_0)$. \square

1.2.3 Cas amb dependència de paràmetre

Podem fer el mateix raonament anterior amb el cas paramètric. En aquest cas tenim una equació diferencial de la forma

$$\dot{u} = f(u, \epsilon), \quad (1.35)$$

on ϵ és un paràmetre. $f : \Omega \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, on $M \subset \mathbb{R}^n$ és un obert. El flux associat a aquesta equació diferencial serà de la forma $\phi_t(u, \epsilon)$.

Sigui u_0 un punt hiperbòlic per a $\epsilon = 0$, $f(u_0, \epsilon = 0) = 0$. Pel teorema de la funció implícita 1.2, per a ϵ suficientment petit, existeix un punt fix u_0 depenent de ϵ ($u_0(\epsilon)$), que també és hiperbòlic.

De la mateixa manera que en el cas no lineal,

Proposició 1.3. *Sigui f de classe \mathcal{C}^1 com a mínim, tal que $f(u_0(\epsilon), \epsilon) = 0$, es pot descompondre la funció com*

$$f(u, \epsilon) = A(\epsilon)(u - u_0(\epsilon)) + R(u, \epsilon), \quad (1.36)$$

on $A(\epsilon)$ és la matriu Jacobiana i $R(u, \epsilon)$ és el residu.

Aleshores, es pot demostrar el teorema

Teorema 1.8. *Sigui $f \in C^r$, amb $r \geq 1$. Aleshores existeix un entorn $U(u_0) = u_0 + U$ i les funcions h^+ , h^- pertanyent a $C^r(E^+ \cap U \times \Delta, E^-)$ i $C^r(E^- \cap U \times \Delta, E^+)$ respectivament, de manera que*

$$M^+(u_0(\epsilon)) \cap U(u_0) = \{u_0(\epsilon) + P^+(\epsilon)a + h^+(a, \epsilon) : a \in (E^+ \cap U)\} \quad (1.37)$$

$$M^-(u_0(\epsilon)) \cap U(u_0) = \{u_0(\epsilon) + P^-(\epsilon)a + h^-(a, \epsilon) : a \in (E^- \cap U)\}. \quad (1.38)$$

No entrarem en majors demostracions ja que són similars a les del cas que no depèn del paràmetre.

1.3 Estabilitat de les òrbites periòdiques

Per l'estudi del mètode de Melnikov, és important definir les condicions d'estabilitat en òrbites periòdiques. Això és degut a que aquest mètode es restringeix a sistemes d'òrbites periòdiques. En aquesta secció del primer capítol, procedirem de manera similar a les anteriors, a través d'alguns resultats interessants sobre l'estabilitat d'òrbites periòdiques.

Suposem que una equació diferencial del tipus (1.1) té una solució T -periòdica ($\phi_t(u_0) = \phi(t, t_0, u_0)$), per a una determinada condició inicial u_0 en un temps inicial t_0 . El període depèn de la condició inicial escollida, així que podem expressar-ho com $T = T(u_0)$.

En aquest cas, també podem obtenir la linealització del sistema. Per simplificar la notació, definim la matriu $A(t)$ com

$$A(t) = Df(\phi_t(u_0)) \quad (1.39)$$

i per tant, el sistema lineal serà

$$\dot{u} = A(t)(u - u_0). \quad (1.40)$$

Observem que degut a la periodicitat del sistema, la matriu del sistema lineal també serà periòdica, és a dir,

$$A(t) = A(t + T). \quad (1.41)$$

A partir d'aquí seguirem la construcció del Teschl [2]. L'objectiu final serà el de demostrar que existeix una relació entre l'estabilitat de la primera variacional del sistema i de l'òrbita periòdica. Primerament, introduïrem un petit teorema que ens dona una relació entre la solució de la primera equació variacional i la derivada respecte de la coordenada u .

Teorema 1.9. *Sigui un sistema de la forma (1.40). Denotem per $\phi_t(u_0)$ el flux associat a aquest sistema amb condició inicial a u_0 . La matriu principal solució de la primera equació variacional de $\dot{u} = f(u)$ és*

$$\Pi_{u_0}(t, t_0) = \frac{\partial \phi_{t-t_0}}{\partial u}(\phi_{t_0}(u_0)). \quad (1.42)$$

Demostració: Primerament, fixem-nos que $\frac{\partial \phi_{t=0}}{\partial u}(u)$ és equivalent a la identitat. Aleshores, derivant pel temps i intercanviant les derivades, podem veure que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial u}(u) \right) = Df(\phi_t(u_0)) \frac{\partial \phi_t}{\partial u}(u). \quad (1.43)$$

Per tant, $\frac{\partial \phi_{t-t_0}}{\partial u}(\phi_{t_0}(u_0))$ és la matriu principal solució de la primera equació variacional. \square

Corol·lari 1.1. *Amb les condicions del teorema anterior. Si $f(\phi_t(u_0))$ és solució de la primera equació variacional, aleshores*

$$f(\phi_t(u_0)) = \Pi_{u_0}(t, t_0) f(\Pi_{t_0}(u_0)) \quad (1.44)$$

on $\Pi_{u_0}(t, u_0)$ és la matriu principal solució de la la primera variacional.

Demostració: Tenim que

$$0 = \frac{\partial \phi_t(u_0)}{\partial t_0}(u_0) = \frac{\partial \phi_{t-t_0}}{\partial t_0}(\phi_{t_0}(u_0)),$$

on hem aplicat les propietats del flux (definició 1.2). Si ara apliquem la regla de la cadena, obtenim que

$$0 = -f(\phi_{t-t_0}(\phi_{t_0}(u_0))) + \Pi_{u_0}(t, u_0) f(\phi_{t_0}(u_0)).$$

Aquesta darrera igualtat es basa en l'aplicació del teorema anterior, l'aplicació de la regla de la cadena i la definició de camp vectorial com a derivada del flux.

I d'aquí clarament se'n dedueix la igualtat que volem. \square

Per seguir amb l'estudi farem un seguit de transformacions que ens seran de gran utilitat. Primerament, definirem

$$v(t) = u(t) - \phi_t(u_0). \quad (1.45)$$

Si ara definim $\bar{f}(t, v) = f(v + \phi_t(u_0)) - f(\phi_t(u_0))$, sabem que $v(t)$ és solució del sistema

$$\dot{v}(t) = \bar{f}(t, v). \quad (1.46)$$

Observació 1.1. *Podem destacar alguns propietats interessants de $\bar{f}(t, v)$.*

- $\bar{f}(t, 0) = 0$.
- $\bar{f}(t + T, u) = \bar{f}(t, u)$.

Aquest nou sistema també admet una linealització, de manera que es pot escriure de la forma

$$\dot{v} = A(t)v + \bar{R}(t, v). \quad (1.47)$$

Es complirà que $\bar{R}(t, 0) = 0$, $\frac{\partial \bar{R}}{\partial v}(t, 0) = 0$ i \bar{R} és periòdica de període T .

En aquest punt ja podem introduir el teorema de la varietat estable per a òrbites periòdiques. Recordem que a partir de la definició de la varietat estable en el punt u_0 , $M^+(u_0)$ i de la varietat inestable $M^-(u_0)$, segons (1.22), podem definir el conjunt d'aquestes varietats per a diferents punts $\phi_{t_0}(u_0)$, de manera que

$$M_{t_0}^+(u_0) = M^+(\phi_{t_0}(u_0)) \quad (1.48)$$

$$M_{t_0}^-(u_0) = M^-(\phi_{t_0}(u_0)). \quad (1.49)$$

Aquestes varietats tenen associades les seves respectives varietats lineals, que denotarem com $E^+(t_0)$ per la varietat inestable i $E^-(t_0)$ per la varietat estable. No obstant, abans apliquem uns resultats que no demostrarem ja que no són la part principal d'aquest treball, però tenen una certa importància per entendre la construcció.

Teorema 1.10. (Teorema de Floquet) *Considerem un sistema d'equacions diferencials de la forma (1.47). Sigui $A(t)$ una matriu T -periòdica. Aleshores la matriu principal de la solució del corresponent sistema lineal presenta la forma*

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0)e^{(t-t_0)Q(t_0)}, \quad (1.50)$$

on $P(t_0, t_0) = Id$ i és també T -periòdica.

Del teorema anterior, se'n deriva un corol·lari interessant.

Corol·lari 1.2. *Si fem la transformació $w(t) = P(t, t_0)^{-1}v(t)$, el sistema d'equacions diferencials obtenim un sistema de coeficients constants*

$$\dot{w}(t) = Q(t_0)v(t). \quad (1.51)$$

Amb aquest corol·lari, podem aplicar un canvi de variable sobre el sistema de manera que

$$\dot{w}(t) = Q(t_0)w(t) + R(t, w(t)), \quad (1.52)$$

si definim $w(t) = P(t)^{-1}v(t)$. Ara sí, introduïm finalment el teorema desitjat.

Teorema 1.11. (Teorema de la varietat estable per a òrbites periòdiques) *Sigui f una funció r -diferenciable, corresponent al camp vectorial d'un sistema T -periòdic. Sigui l'interval $I = [0, T]$, i sigui u_0 un punt hiperbòlic i $\gamma(u_0)$ l'òrbita hiperbòlica corresponent. Existeix un entorn de $\gamma(u_0)$, $U(\gamma(u_0))$ i dues funcions r -diferenciables definides segons*

$$h^+ : I \times E^+ \longrightarrow E^- \quad (1.53)$$

$$h^- : I \times E^- \longrightarrow E^+ \quad (1.54)$$

tals que totes dues s'anul·len i les seves respectives derivades s'anul·len en el punt u_0 . A més, també compleixen que

$$M_{t_0}^+ \cap U(\gamma(u_0)) = \{\phi_{t_0}(u_0) + a + h^+(t_0, a) : a \in E^+(t_0) \cap U(\gamma(u_0))\} \quad (1.55)$$

$$M_{t_0}^- \cap U(\gamma(u_0)) = \{\phi_{t_0}(u_0) + a + h^-(t_0, a) : a \in E^-(t_0) \cap U(\gamma(u_0))\}. \quad (1.56)$$

Demostració: La demostració d'aquest teorema és molt similar a la del cas anterior de manera que no té gaire interès. No obstant, és important tenir en compte que en aquest cas el valor de R , definit segons (1.52) depèn de la variable temporal. En aquest moment sorgeix la importància de la seva periodicitat, ja que ens permet definir un interval compacte de 0 al període T . \square

Corol·lari 1.3. *Amb les hipòtesis del teorema anterior. Sigui λ_i els valors propis de $Q(t_0)$. Es compleix que per a qualsevol $0 < \lambda < \min \{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|\}_{i=1,\dots,m}$, existeix una constant dependent de λ , C , que a més és positiva, i tal que*

$$|\phi_t(u) - \phi_{t+t_0}(u_0)| \leq Ce^{-\lambda t}, \text{ per a } t > 0, u \in M_{t_0}^+(u_0) \quad (1.57)$$

$$|\phi_t(u) - \phi_{t+t_0}(u_0)| \leq Ce^{+\lambda t}, \text{ per a } t < 0, u \in M_{t_0}^-(u_0). \quad (1.58)$$

Observació 1.2. *Del teorema 1.11 es desprèn que en el punt $\phi_{t_0}(u_0)$, $M_{t_0}^+$ és tangent a $E^+(t_0)$. Aquest resultat és idèntic per al cas inestable. Així doncs, el teorema també ens indica les varietats estable i inestables són tangents a les seves respectives varietats lineals.*

Ara introduïrem una definició molt natural. Definirem la unió de les varietats estables i inestables per a cada temps inicial t_0 dins del període $I = [0, T]$.

$$M^+(\gamma(u_0)) = \bigcup_{t_0 \in [0, T]} M_{t_0}^+(u_0) \quad (1.59)$$

$$M^-(\gamma(u_0)) = \bigcup_{t_0 \in [0, T]} M_{t_0}^-(u_0). \quad (1.60)$$

Aquests conjunts són invariants respecte del flux. Si suposem un entorn de $\gamma(u_0)$, $U(\gamma(u_0))$, aleshores la varietat estable i inestable en aquest entorn seran de la forma

$$M^+(u_0) \cap U(\gamma(u_0)) = \{\phi_{t_0}(u_0) + \Pi_{u_0}(t_0, 0)a + h^+(t_0, \Pi_{u_0}(t_0, 0)a) : a \in E^+(0) \cap U(\gamma(u_0)), t_0 \in I\} \quad (1.61)$$

$$M^-(u_0) \cap U(\gamma(u_0)) = \{\phi_{t_0}(u_0) + \Pi_{u_0}(t_0, 0)a + h^-(t_0, \Pi_{u_0}(t_0, 0)a) : a \in E^-(0) \cap U(\gamma(u_0)), t_0 \in I\}. \quad (1.62)$$

Definició 1.17. *Diem que un punt de $M^+(\gamma(u_0))$, u , té un fase asimptòtica quan existeix un t_0 tal que, quan t tendeix a infinit o a menys infinit,*

$$\phi_t(u) \rightarrow \phi_{t+t_0}(u_0). \quad (1.63)$$

Teorema 1.12. (Teorema de Hartman-Grobman) *Sigui f un camp vectorial de classe C^1 . Sigui 0 un punt fix hiperbòlic d'aquest camp vectorial, i.e. $f(0) = 0$. Sigui $\phi_t(u)$ el corresponent flux. Sigui A la matriu Jacobiana de f avaluada en el punt 0 tal que compleix que $\det A \neq 0$. Per un punt entorn suficientment proper al punt 0 , existeix un homeomorfisme de la forma $\varphi(u) = u + h(u)$, amb h acotada, tal que*

$$\varphi \circ e^{At} = \phi_t \circ \varphi. \quad (1.64)$$

Demostració: La seva demostració no és de gaire interès per a aquest treball i per aquest motiu no la reproduïrem. No obstant, es pot trobar en el llibre Sotomayor [3, pàg. 226]. \square

Teorema 1.13. *Sigui f un camp vectorial d'un sistema d'equacions diferencials i suposem que és r -diferenciable. Sigui u_0 un punt hiperbòlic i sigui $\gamma(u_0)$ una òrbita periòdica. Aleshores existeix un entorn de u_0 , $U(u_0)$, tal que $\gamma_+(u) \subset U(\gamma(u_0))$ ($\gamma_-(u) \subset U(\gamma(u_0))$) si, i només si, $u \in M^+(\gamma(u_0))$ ($u \in M^-(\gamma(u_0))$).*

Demostració: Per a la demostració d'aquest teorema, començarem suposant que u és suficientment proper a $\gamma(u_0)$. D'aquesta manera, suposem que la distància entre $\phi_t(u)$ i $\gamma(u_0)$ tendeix cap a 0 quan el temps tendeix a infinit. Ara escollim una secció transversal (veure el capítol 3), que denotarem per Σ i tal que contingui el punt u . Aleshores considerem l'aplicació de Poincaré que denotarem per P_Σ .

Les varietats estables i inestables de l'aplicació de Poincaré són aleshores $M^+(\gamma(u_0)) \cap \Sigma$ i $M^-(\gamma(u_0)) \cap \Sigma$, respectivament. Aleshores, pel teorema de Hartman-Grobman, u ha d'estar en la varietat estable de l'aplicació de Poincaré i per tant, ha d'estar en $M^+(\gamma(u_0))$ o $M^-(\gamma(u_0))$. \square

Corol·lari 1.4. *Amb les condicions del teorema anterior, tenim que*

$$W^+(\gamma(u_0)) = M^+(\gamma(u_0)) \tag{1.65}$$

$$W^-(\gamma(u_0)) = M^-(\gamma(u_0)). \tag{1.66}$$

I amb això acabem el capítol sobre les varietats estables i inestables. Ara que ja sabem el que són i com es relacionen amb les seves respectives varietats lineals, podem construir el mètode de Melnikov.

2. Breu teoria de les equacions integrals

Notació:

- Sigui $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, anotem la seva norma del suprem com $\|f(u)\| = \sup_{u \in C} |f(u)|$.

En aquest capítol introduïm alguns aspectes sobre les equacions integrals que són importants per a l'anàlisi de la teoria de l'estabilitat en sistemes dinàmics del primer capítol. La construcció d'aquest capítol es basa en la realitzada per Gerald Teschl [2].

Introduïrem primer la definició d'espai de Banach, que és un espai vectorial complet amb una norma associada.

Definició 2.1. *Un espai de Banach és un espai vectorial E sobre el cos dels nombres reals o complexos amb una norma $\|\cdot\|$ tal que tota successió de Cauchy en E és convergent.*

Definició 2.2. *Sigui (M, d) un espai mètric, amb d la seva distància. Una contracció (o una aplicació contractiva) és una aplicació $K : M \rightarrow M$, tal que existeix un nombre real, no negatiu i menor que 1, que escrivim com θ , i que compleix que per a tot u, v de M ,*

$$d(K(u), K(v)) \leq \theta d(u, v). \quad (2.1)$$

Diem que θ és la constant de contracció de K .

A partir d'aquí, abans de prosseguir amb la lectura del capítol, recomanem parar atenció a l'**apèndix A**. Aquest annex conté alguns resultats molt bàsics però interessants sobre les contraccions i convergència dominada de les integrals.

2.1 Equació integral de Volterra

Definició 2.3. *Sigui $I = [-T, T] \subset \mathbb{R}$ un interval tancat i sigui Δ un subconjunt de \mathbb{R}^n compacte. Sigui també V un subconjunt tancat de \mathbb{R}^n . Sigui k és una funció contínua que pertany a $\mathcal{C}(I \times \Delta, V)$ i K és una funció contínua pertanyent a $\mathcal{C}(I \times V \times \Delta, \mathbb{R}^n)$. Suposem que per a tot u, v de V existeix una constant L independent (constant de Lipschitz) de $t \in I$ i de $\lambda \in \Delta$ tal que*

$$|K(t, u, \lambda) - K(t, v, \lambda)| \leq L|u - v|. \quad (2.2)$$

Aleshores una equació integral es diu que és de Volterra si és del tipus

$$K_\lambda(u)(t) = k(t, \lambda) + \int_0^t K(s, u(s), \lambda) ds. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1. Sigui $I = [-T, T] \subset \mathbb{R}$ un interval tancat i sigui Δ un subconjunt de \mathbb{R}^n compacte. Sigui també V un subconjunt tancat de \mathbb{R}^n . Sigui K_λ una funció contínua pertanyent a $\mathcal{C}(I \times V \times \Delta, \mathbb{R}^n)$. Suposem que per a tot u, v de V existeix una constant L independent de $t \in I$ i de $\lambda \in \Delta$ tal que

$$|K(t, u, \lambda) - K(t, v, \lambda)| \leq L|u - v|. \quad (2.4)$$

Sigui un δ més gran que 0 tal que

$$C_\delta = \{B_\delta(k(t, \lambda)) : (t, \lambda) \in I \times \Delta\} \quad (2.5)$$

és un subconjunt de V . Sigui

$$M = \sup_{(t, u, \lambda) \in I \times B_\delta(0) \times \Delta} |K(t, k(t, \lambda) + u, \lambda)|. \quad (2.6)$$

Sigui $T_0 = \min\left(T, \frac{\delta}{M}\right)$. Aleshores, l'equació $K_\lambda(u) = u$ té una única solució $u_0(t, \lambda)$ funció contínua $\mathcal{C}(I \times \Delta, V)$ i tal que

$$|u_0(t, \lambda) - k(t, \lambda)| \leq e^{LT_0} \sup_{\lambda \in \Delta} \int_{-T_0}^{T_0} |K(s, k(s, \lambda), \lambda)| ds. \quad (2.7)$$

Demostració: Podem suposar, sense pèrdua de la generalitat, que $k(t, \lambda) = 0$. Efectivament, si fem els canvis necessaris en $K(t, u, \lambda)$ i en V , no hi ha cap problema.

Per demostrar l'existència i la cota s'ha d'aplicar el Lema de Gronwall a partir de que sabem que hi ha un punt fix.

$$\begin{aligned} |u_0(t, \lambda) - k(t, \lambda)| &= \left| \int_{-T_0}^{T_0} K(s, u_0, \lambda) ds \right| \leq \int_0^T |K(s, u_0, \lambda) - K(s, k(s, \lambda), \lambda)| ds \\ &\quad + \int_{-T_0}^{T_0} |K(s, k(s, \lambda), \lambda)| ds \end{aligned}$$

si considerem que K és L -lipschitz, i que $M = \sup_{\lambda \in \Delta} \int_{-T_0}^{T_0} |K(s, k(s, \lambda), \lambda)| ds$ que és una cota de la segona integral, llavors es pot expressar de la forma (re-denotant L com $L/2$)

$$|u_0(t, \lambda) - k(t, \lambda)| \leq \frac{L}{2} \int_{-T_0}^{T_0} |u_0 - k(s, \lambda)| + M$$

i pel teorema de Gronwall acabem aquesta demostració de la cota.

Fixat $u(t)$, pel teorema de convergència dominada, $K_\lambda(u)$ és contínua respecte de λ . Considerem

$$\begin{aligned} |u_0(t, \lambda) - u_0(s, \mu)| &= |u_0(t, \lambda) - u_0(s, \lambda) + u_0(s, \lambda) - u_0(s, \mu)| \\ &\leq |u_0(t, \lambda) - u_0(s, \lambda)| + |u_0(s, \lambda) - u_0(s, \mu)|, \end{aligned}$$

on hem aplicat la desigualtat triangular.

Pel teorema A.4, $|u_0(s, \lambda) - u_0(s, \mu)|$ convergeix a 0 quan λ tendeix a μ , i per extensió, quan (t, λ) tendeix a (s, μ) . Per altra banda, per hipòtesis,

$$|u_0(t, \lambda) - u_0(s, \lambda)| \leq \left| \int_s^t K(r, u_0(r, \lambda), \lambda) dr \right|.$$

Efectivament, al ser u_0 un punt fix,

$$|u_0(t, \lambda) - u_0(s, \lambda)| = |K_\lambda(u_0)(t) - K_\lambda(u_0)(s)|.$$

Com que $K_\lambda(u)(t) = k(t, \lambda) + \int_0^t K(s, u(s), \lambda) du$, considerant $k(t, \lambda) = 0$ (com hem justificat anteriorment),

$$|u_0(t, \lambda) - u_0(s, \lambda)| = \left| \int_0^t K(s, u_0(s), \lambda) du - \int_0^s K(s, u_0(s), \lambda) du \right| \leq \left| \int_s^t K(s, u_0(s), \lambda) du \right|.$$

Finalment, com que

$$\left| \int_s^t K(r, u_0(r, \lambda), \lambda) dr \right| \leq M|t - s|,$$

per hipòtesis, llavors

$$|u_0(t, \lambda) - u_0(s, \lambda)| \leq M|t - s|$$

i per tant, convergeix a 0 quan t tendeix a s i per extensió quan (t, λ) tendeix a (s, μ) . \square

Proposició 2.1. *Sigui $K(t, u, v)$ una funció contínua. Sigui u pertanyent a $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Aleshores, la funció*

$$K_u(v)(t) = \int_0^t K(s, u(s), v(s)) ds \tag{2.8}$$

és contínua respecte de u . A més a més, la funció

$$\bar{K}_\lambda(u, v)(t) = \int_0^t \frac{\partial K}{\partial \lambda}(s, u(s), \lambda) ds + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial u}(s, u(s), \lambda) \cdot v(s) ds \tag{2.9}$$

també és contínua respecte de u .

Proposició 2.2. *Amb les condicions del teorema 2.1, si les derivades parcials de $k(t, \lambda)$, $K(t, u, \lambda)$ de fins a ordre r o superior respecte de u i de λ són contínues, aleshores totes les derivades parcials de fins a ordre r o superior de $u_0(t, \lambda)$ són contínues.*

Demostració: Sigui $u_0(t, \lambda)$ de classe \mathcal{C}^1 . Definim $v_0(t, \lambda) = \frac{\partial u_0}{\partial \lambda}(t, \lambda)$. v_0 és solució de l'equació $\bar{K}_\lambda(u_0(\lambda), v) = v$, on hem expressat $\bar{K}_\lambda(u, v)(t)$ com un operador lineal respecte de $v(s)$,

$$\bar{K}_\lambda(u, v)(t) = \int_0^t \frac{\partial K}{\partial \lambda}(s, u(s), \lambda) ds + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial u}(s, u(s), \lambda) \cdot v(s) ds.$$

Considerant el teorema del valor mitjà i el fet que, per la definició 2.3, es pot afirmar que $|K(t, u, \lambda) - K(t, v, \lambda)| \leq L|u - v|$,

$$\left\| \frac{\partial K}{\partial u}(t, u, \lambda) \right\| \leq L.$$

Efectivament, recordem que pel teorema de valor mitjà, si $K(t, u, \lambda)$ és contínua respecte de u en un interval tancat i derivable en un obert, aleshores existeix un punt c en l'interval obert (a, b) tal que

$$\frac{\partial K}{\partial u}(t, c, \lambda) = \frac{K(t, b, \lambda) - K(t, a, \lambda)}{b - a}.$$

Per tant, és evident que el seu valor absolut serà menor que L . D'aquesta manera, queda demostrada l'existència d'una solució de $\overline{K}_\lambda(u_0(\lambda), v) = v$, $v_0(t, \lambda)$ contínua.

Ara ens falta veure que aquesta solució consisteix en la derivada de $u_0(\lambda)$. Deixem λ fixat.

Començant per $(u_1(t), v_1(t)) = (0, 0)$. Determinem la seqüència següent $(u_{n+1}, v_{n+1}) = (K_\lambda(u_n), \overline{K}_\lambda(u_n, v_n))$.

Per la proposició 2.1, \overline{K}_λ és contínua respecte de u .

A més, pel teorema A.4, (u_n, v_n) convergeix a $(u_0(\lambda), v_0(\lambda))$. Com que (u_n, v_n) és uniformement acotat respecte de λ , pel corol·lari A.1, $v_0(\lambda)$ és la derivada de $u_0(\lambda)$.

Per tant, pel cas $r = 1$ ja ho hem demostrat. Ho suposarem cert per a $r - 1$. Com que l'equació per a v és del mateix tipus que l'equació per a u , i com que k_λ és derivable amb derivada contínua $r - 1$ vegades, així com $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$ i $\frac{\partial K}{\partial u}$, que també són de classe \mathcal{C}^{r-1} , llavors $v \in \mathcal{C}^{r-1}$ i com que v és la derivada de u respecte de λ , aleshores u és de classe \mathcal{C}^r . \square

Corol·lari 2.1. *Suposem les mateixes condicions que el teorema 2.1 i la proposició 2.2, si afegim la condició que $k : I \times \Delta \rightarrow V$ i $K : I \times V \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ són \mathcal{C}^{r-1} -diferenciables, aleshores $u_0 : I \times V \rightarrow V$ és \mathcal{C}^r -diferenciable.*

Demostració: El teorema 2.1 ens demostra el cas $r = 0$. Ara demostrarem el cas $r = 1$. Si considerem l'equació

$$|K(t, u, \lambda) - K(t, v, \lambda)| \leq L|u - v|,$$

sabem que $u_0(t, \lambda)$ n'és un punt fix. Per tant, si fem la derivada respecte de t , pel teorema sota el signe de la integral, obtenim

$$\dot{u}_0(t, \lambda) = \cdot k(t, \lambda) + K(t, u_0(t, \lambda), \lambda)$$

i a més $\dot{u}_0(t, \lambda)$ és contínua. A partir d'aquí, amb la justificació de dalt totes les derivades parcials existeixen i són contínues. Per tant, $u_0 \in \mathcal{C}^1$. Per demostrar el cas general s'aplica inducció. Resultat idèntic al del teorema anterior. \square

2.2 Equació integral de Hammerstein

En aquesta secció es descriu un altre tipus d'equació integral, l'equació de Hammerstein. L'interès d'aquesta secció rau en el que part de la demostració del teorema 2.2, que és l'equivalent al teorema

2.1, forma part de la demostració del teorema de la varietat estable.

Definició 2.4. *Sigui Δ un subconjunt de \mathbb{R}^n compacte. Sigui també V un subconjunt tancat de \mathbb{R}^n . Sigui k una funció contínua que pertany a $\mathcal{C}([0, \infty) \times \Delta, V)$ i K és una funció contínua pertanyent a $\mathcal{C}([0, \infty) \times V \times \Delta, \mathbb{R}^n)$. Sigui a més κ una funció contínua $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \Delta, \mathbb{R}^n)$.*

Suposem que per a qualsevol compacte $Y \subset V$, les funcions k i K són uniformement contínues i existeix m i M més grans que 0 tals que per a tot $(t, u, \lambda) \in [0, \infty) \times Y \times \Delta$

$$|(t, \lambda)| \leq m \quad (2.10)$$

$$|K(t, u, \lambda)| \leq M. \quad (2.11)$$

A més, suposarem que existeix una funció $\alpha(t)$, funció integrable, i un paràmetre $\epsilon > 0$, tal que per a tot $|t| \leq \epsilon$

$$|\kappa(s + t, \lambda)| \leq \alpha(s). \quad (2.12)$$

Suposem que per a tot u, v de V existeix una constant L independent de $t \in I$ i de $\lambda \in \Delta$ tal que

$$|K(t, u, \lambda) - K(t, v, \lambda)| \leq L|u - v| \quad (2.13)$$

i que també

$$L \int_{-\infty}^{\infty} |\kappa(s, \lambda)| ds \leq \theta \leq 1. \quad (2.14)$$

Aleshores una equació integral és diu que és de Hammerstein si és del tipus

$$K_\lambda(x)(t) = k(t, \lambda) + \int_0^\infty \kappa(s - t)K(s, u(s), \lambda)du. \quad (2.15)$$

Teorema 2.2. *Sigui K_λ tal que satisfà les mateixes condicions que la definició de l'equació de Hammerstein. Aleshores existeix una única solució $u_0(t, \lambda)$ que compleix que $K_\lambda(u) = u$. Aquesta solució estarà definida en $\mathcal{C}([0, \infty) \times \Delta, V)$.*

Demostració: Podem assumir que $k(t, \lambda) = 0$. Això modifica l'equació de condició 2.15 de manera que

$$K_\lambda(u)(t) = \int_0^\infty \kappa(s - t, \lambda)K(s, u(s), \lambda)ds.$$

Escollim $\|u\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|K_\lambda(0)\|$. Per tant,

$$\|K_\lambda(u)\| = \left| \int_0^\infty \kappa(s - t, \lambda)K(s, u(s), \lambda)ds \right| \leq \int_0^\infty |\kappa(s - t, \lambda)| \cdot |K(s, u(s), \lambda)| ds.$$

Si sumem i restem $K(s, 0, \lambda)$,

$$\|K_\lambda(u)\| \leq \int_0^\infty |\kappa(s - t, \lambda)| (|K(s, u(s), \lambda) + K(s, 0, \lambda) - K(s, 0, \lambda)|) ds,$$

i aplicant la desigualtat triangular,

$$\|K_\lambda(u)\| \leq \int_0^\infty |\kappa(s - t, \lambda)| (|K(s, 0, \lambda)| + |K(s, u(s), \lambda) - K(s, 0, \lambda)|) ds.$$

Fixem-nos que

$$\int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda)| |K(s, 0, \lambda)| ds = \|K_\lambda(0)\|.$$

Al ser $K(t, u, \lambda)$ Lipsitchz amb constant L , $|K(s, u(s), \lambda) - K(s, 0, \lambda)| = L|u(s) - 0|$. A més,

$$L \int_{-\infty}^\infty |\kappa(s, \lambda)| ds \leq \theta \leq 1$$

per la definició 2.4. Per tant,

$$\|K_\lambda(u)\| \leq \|K_\lambda(0)\| + \theta \|u\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|K_\lambda(0)\|.$$

Llavors, K_λ envia $\mathcal{C}([0, \infty), B_\delta(0))$ cap a $\mathcal{C}([0, \infty), B_\delta(0))$. A més, si suposem que K_λ és una contracció amb constant de contracció θ , hi ha una única solució $u_0(\lambda, t)$.

Ara hem de demostrar que K_λ és continu respecte de λ . Veiem que es compleix que

$$\begin{aligned} |K_\lambda(u)(t) - K_\mu(u)(t)| &\leq \int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda)| \cdot |K(s, u(s), \lambda) - K(s, u(s), \mu)| ds \\ &\quad + \int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda) - \kappa(s-t, \mu)| |K(s, u(s), \mu)| ds. \end{aligned}$$

Efectivament, per hipòtesis,

$$K_\lambda(u)(t) = \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K(s, u(s), \lambda) ds.$$

Així que

$$|K_\lambda(u)(t) - K_\mu(u)(t)| = \left| \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K(s, u(s), \lambda) ds - \int_0^\infty \kappa(s-t, \mu) K(s, u(s), \mu) ds \right|$$

i és senzill veure que

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) K(s, u(s), \lambda) ds - \int_0^\infty \kappa(s-t, \mu) K(s, u(s), \mu) ds \right| \\ &\leq \int_0^\infty |\kappa(s-t, \lambda) K(s, u(s), \lambda) - \kappa(s-t, \mu) K(s, u(s), \mu)| ds, \end{aligned}$$

i sumant i restant $K(s, u(s), \mu)$ i aplicant la desigualtat triangular, arribem a la solució desitjada. Finalment, com que K és uniformement continu, sempre i quan $|\lambda - \mu|$ sigui suficientment petit, per a tot ϵ més gran que 0, $|K(s, u, \lambda) - K(s, u, \mu)| \leq \epsilon$. Sabent això i tenint en compte que per hipòtesis $|K(s, u(s), \mu)| \leq M$, llavors

$$\|K_\lambda(u)(t) - K_\mu(u)(t)\| \leq \frac{\epsilon\theta}{L} + M \int_{-\infty}^\infty |\kappa(s-t, \lambda) - \kappa(s-t, \mu)| ds.$$

Com podem fer la part dreta de la inequació tan petita com vulguem escollint un $|\lambda - \mu|$ suficientment petit (convergència dominada), aleshores ja hem demostrat que és continu.

Demostrem ara que $u_0(t)$ és contínua per a tot t . Veiem que, restant i sumant $u_0(t, \mu)$ i aplicant la desigualtat triangular

$$|u_0(t, \lambda) - u_0(s, \mu)| \leq |u_0(t, \lambda) - u_0(t, \mu)| + |u_0(t, \mu) - u_0(s, \mu)|$$

Fixem-nos que quan (t, λ) tendeix a (s, μ) , aleshores $|u_0(t, \lambda) - u_0(t, \mu)|$ i $|u_0(t, \mu) - u_0(s, \mu)|$ convergeixen cap a 0.

Efectivament, és fàcil veure que

$$\begin{aligned} |u_0(t, \mu) - u_0(s, \mu)| &\leq \int_0^\infty |\kappa(r-t, \mu) - \kappa(r-s, \mu)| |K(r, u_0(r, \mu), \mu)| dr \\ &\leq M \int_0^\infty |\kappa(r-t, \mu) - \kappa(r-s, \mu)| dr \end{aligned}$$

on hem usat que per la definició de l'equació integral de Hammerstein, $|K(t, u, \lambda)| \leq M$. \square

Proposició 2.3. *Amb les condicions del teorema 2.2 i la definició 2.4, si considerem que les derivades parcials respecte de λ i u , fins a ordre r , de $K(t, u, \lambda)$, $k(t, \lambda)$ i $\kappa(t, \lambda)$ són contínues. Suposem també que totes les derivades fins a ordre r respecte de λ i u de $K(s, u, \lambda)$ són uniformement contínues i acotades quan u està restringit a un compacte. Llavors, totes les derivades parcials fins a ordre r de $u_0(t, \lambda)$ respecte de λ són contínues.*

Demostració: Per la demostració del teorema anterior, el cas $r = 0$ ja està demostrat. Continuem per la resta de casos. Sigui $u_0(t, \lambda)$ solució del sistema $K_\lambda(u) = u$ i de classe \mathcal{C}^1 . Aleshores,

$$v_0(t, \lambda) = \frac{\partial u_0}{\partial \lambda}(t, \lambda)$$

és solució de l'equació de punt fix

$$\bar{K}_\lambda(u_0(\lambda), v) = v.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \bar{K}_\lambda(u, v)(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda}(s-t, \lambda) K(s, u(s), \lambda) ds + \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) \frac{\partial K}{\partial \lambda}(s, u(s), \lambda) ds \\ &\quad + \int_0^\infty \kappa(s-t, \lambda) \frac{\partial K}{\partial u}(s, u(s), \lambda) v(s) ds. \end{aligned}$$

Segueix la demostració com en el cas de l'equació de Volterra. \square

3. El mètode de Melnikov

Notació:

- Sigui E l'espai vectorial \mathbb{R}^2 . Denotem la dos-forma àrea entre dos vectors $u, v \in E$ com $u \wedge v$.
- Sigui E un espai vectorial. Denotem el producte escalar entre dos vectors $u, v \in E$ com $\langle u, v \rangle$.

3.1 Seccions i aplicacions de Poincaré

Iniciarem aquest capítol sobre la teoria de Melnikov amb un petit repàs de les seccions de Poincaré. Aquest recordatori és important, ja que el concepte d'aplicació de Poincaré serà recurrent al llarg del capítol. L'aplicació de Poincaré és una aplicació que no es troba definida en l'espai de fases del sistema sinó que ho està en una subvarietat de dimensió menor. La idea general és definir una secció local que sigui transversal al camp vectorial del sistema. D'aquesta manera, les òrbites d'aquell entorn travessaran la secció i no seran tangents a ella. L'objectiu és estudiar per quins punt de la secció talla una òrbita.

Comencem introduint la noció de transversalitat.

Definició 3.1. Un subconjunt Σ , subconjunt de \mathbb{R}^n és una subvarietat de dimensió $n - 1$ i de classe C^r si es pot escriure de la forma

$$\Sigma = \{u \in U : S(u) = 0\} \tag{3.1}$$

on U és un obert de \mathbb{R}^n , S és una funció de $C^r(U)$ amb $r \geq 1$ tal que $\frac{\partial S}{\partial u}(u) \neq 0$ per a qualsevol u de Σ .

També se sol dir que és una subvarietat de codimensió 1.

Definició 3.2. Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp de vectorial. Sigui Σ una subvarietat de codimensió 1 definida segons la definició anterior (3.1). Direm que Σ és transversal al camp vectorial $f(u)$ si $\frac{\partial S}{\partial u}(u) \cdot f(u) \neq 0$ per a tot u de Σ . Idènticament, diem que és transversal al camp vectorial sobre l'espai de fases si el producte escalar del camp vectorial amb el vector normal a Σ sobre un punt de Σ és diferent de 0.

És important la definició d'aplicació de Poincaré. Aquesta és una aplicació d'una secció transversal sobre si mateixa. L'aplicació de Poincaré ens permet obtenir informació sobre la periodicitat d'una òrbita. Aquestes aplicacions solen enviar un punt de la secció a un altre punt, corresponent al següent punt que l'òrbita que comença en el primer tallarà i creuarà en la mateixa direcció al

tornar a passar per la secció. D'aquesta manera, si la imatge d'un punt és ell mateix, estarem parlant d'una òrbita periòdica. És a dir, que els punts fixos d'una aplicació de Poincaré formen part d'òrbites periòdiques. Formalment, primer introduïm un petit lema que no demostrarem. Aquest lema prova que si agafem les òrbites que passen pels punts d'un entorn suficientment petit, aquestes també seran transversals al camp vectorial.

Lema 3.1. *Sigui un camp vectorial $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , amb $r \geq 1$. Sigui també $\phi : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ el flux associat a aquest camp vectorial, on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un obert. Sigui u_0 pertanyent a Ω i sigui T pertanyent a \mathbb{R} . Sigui Σ una subvarietat diferenciable de dimensió $n - 1$ i de classe C^r transversal al camp vectorial f i tal que $\phi(T, u_0)$ pertany a Σ , aleshores existeix un entorn, U , de u_0 i una funció \bar{t} de $C^r(U)$, tal que $\bar{t}(u_0) = T$ i es compleix que per a tot u de U , $\phi(\bar{t}(u), u)$ pertany a Σ .*

Definició 3.3. *Sigui f un camp vectorial de classe C^r , amb $r \geq 1$. Sigui una òrbita T -periòdica $\gamma(u_0)$, on u_0 és un punt d' Ω . Sigui Σ una secció de classe C^k , amb $k \geq 1$ transversal a f . Suposem que aquesta secció conté el punt u_0 . Pel lema anterior, existeix un entorn, U , de u_0 i una funció \bar{t} de $C^r(U)$, tal que per a tot u de U , $\phi(\bar{t}(u), u)$ pertany a Σ . Definim l'aplicació de Poincaré com a una aplicació $P : U \cap \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $P(u) = \phi(\bar{t}(u), u)$. Sovint també la denotarem per P_Σ .*

Respecte a les aplicacions de Poincaré, ens interessa un seguit de resultats.

Proposició 3.1. *Si una òrbita periòdica $\gamma(u_0)$ és asimptòticament estable, u_0 és un punt fix asimptòticament estable de P_Σ .*

D'aquí se'n deriva un corol·lari

Corol·lari 3.1. *Sigui una òrbita periòdica d'un sistema diferencial, que denotarem com $\gamma(u_0)$. Sigui la derivada de la funció de Poincaré DP_Σ . Aleshores, si tots els autovalors de DP_Σ al punt u_0 , es troben a l'interior del cercle unitat i.e. $\forall \lambda \in \text{Spec}(DP_\Sigma(u_0)), |\lambda| \leq 1$ (notem que $\lambda \in \mathbb{C}$), aleshores l'òrbita periòdica és asimptòticament estable.*

3.2 El mètode de Melnikov

En aquest punt ja estem preparats per introduir el mètode de Melnikov que rep el nom del matemàtic que el va desenvolupar sistemàticament [4], encara que Poincaré ja l'havia usat en casos concrets. Per aquest mètode, serà necessari disposar d'unes condicions molt particulars. És per això que primerament definirem uns conceptes bàsics. No obstant, recomanem primerament la lectura de l'apèndix B, que tracta nocions bàsiques sobre les integrals primeres i els sistemes Hamiltonians.

3.2.1 El mètode de Melnikov. Cas autònom per a òrbites homoclíniques

Definició 3.4. *Sigui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial d'un sistema d'equacions diferencials. Sigui $\phi : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ el seu flux associat. Diem que un punt $u_0 \in \Omega$ pertany a l' ω -límit d'un punt $u \in \Omega$ si existeix una seqüència $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R} tals que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \tag{3.2}$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, u) = u_0 \tag{3.3}$$

Per a una òrbita γ del sistema diem que u_0 és un ω -límit si per a qualsevol punt de l'òrbita ho és.

Anàlogament, diem que un punt u_0 pertany a l' α -límit d'un punt u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty \tag{3.4}$$

i de la mateixa manera que en el cas anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, u) = u_0 \tag{3.5}$$

Per a una òrbita del sistema diem que u_0 és un α -límit si per a qualsevol punt de l'òrbita ho és.

Definició 3.5. *Definim una connexió entre punts de sella com una òrbita de la qual l' α -límit i l' ω -límit són punts de sella hiperbòlics.*

Definició 3.6. *Direm que una connexió entre punts de sella és una òrbita homoclínica si els conjunts α -límit i ω -límit coincideixen.*

En canvi, direm que aquesta connexió és una òrbita heteroclínica si els punts són diferents.

Considerarem un cas on només hi ha un punt hiperbòlic de sella a la frontera d'un anell d'òrbites periòdiques. Per tant, l'existència d'una òrbita homoclínica que connecta ambdós punts estarà garantida. L'òrbita periòdica es mou per sobre de les varietats invariants estables i inestables del punt de sella. Després de la pertorbació, sigui autònoma o no autònoma, les corresponents varietats estable i inestable poden coincidir, separar-se o creuar-se. L'estudi de les posicions d'una varietat respecte de l'altre ens donarà informació sobre la distància del sistema pertorbat. El mètode de Melnikov proporciona una manera de calcular en primer ordre la separació entre la variable estable i la inestable. En aquest cas, ens centrarem sobretot en les pertorbacions autònomes.

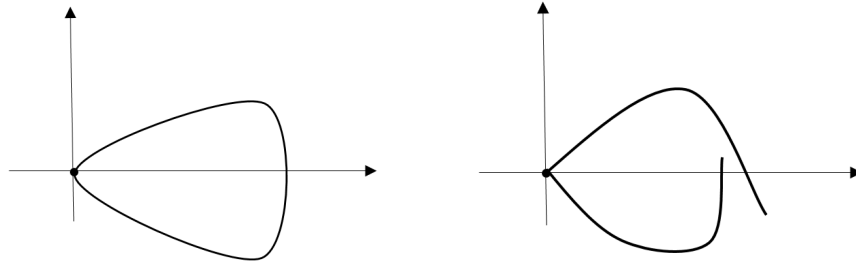


Figura 3.1: Exemple d'una òrbita homoclínica on la varietat estable i inestable coincideixen (esquerra) i separació de les varietats quan hi apliquem una pertorbació (dreta).

Inicialment, considerarem un sistema en el pla, i en aquest cas, un sistema autònom pertorbat

$$\dot{u} = f(u, \epsilon) \quad (3.6)$$

on $u \in \mathbb{R}^2$ i $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ és el paràmetre pertorbatiu. Suposarem que f és de classe \mathcal{C}^r , amb $r \geq 1$. Fixem-nos que aquest paràmetre té dimensió n . Tot i que sovint usem $n = 1$, no imposarem cap restricció sobre n en aquest desenvolupament teòric. Així doncs, el paràmetre ϵ es pot expressar com $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. També, donats $u_0 \in \Omega, \epsilon \in \mathbb{R}^m$, podem definir la corresponent solució del sistema.

$$\begin{aligned} u : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto u(t; u_0, \epsilon) \end{aligned} \quad (3.7)$$

amb condició inicial $u(0; u_0, \epsilon) = u_0$, amb $u_0 \in \mathbb{R}^2$ o en forma de flux, com $\phi_t(u_0)$, amb condició inicial u_0 .

El sistema (3.6) té associat el sistema no pertorbat

$$\dot{u} = f(u, 0). \quad (3.8)$$

També podem definir el sistema ortogonal com

$$\dot{u} = f^\perp(u) \quad (3.9)$$

on

$$f^\perp(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f(u, 0). \quad (3.10)$$

Donat $u_0 \in \Omega$, denotem la solució d'aquest darrer sistema com

$$\begin{aligned} \Psi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \Psi(t, u_0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Donat un punt regular de l'equació (3.8), $u_0 \in \mathbb{R}^2$, és clar que $t \mapsto \Psi(t, u_0)$ és transversal a $t \mapsto u(t; u_0, 0)$. És molt important a partir d'aquí tenir en compte que u_0 és un punt regular, és a

dir, no fix.

Definim la secció

$$\Sigma = \{\Psi(t, u_0) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.12)$$

El plantejament general serà el de partir de dues solucions diferents del sistema pertorbat, parametritzades totes dues per ϵ , que siguin transversals a Σ i que al considerar $\epsilon = 0$ coincideixin totes dues. Aquestes dues podrien ser, per exemple, les varietats estable i inestable d'un punt homoclínic. Seguirem la mateixa construcció que la realitzada per Chicone [5], ja que és la més generalista i la que té un formalisme més rigorós. No obstant, per a una visió més geomètrica, es recomana la del Wiggins [6].

Primerament, definim dues funcions \mathcal{C}^∞ que ens donen el punt d'intersecció entre la secció (3.12) i una família de solucions que definim més avall (3.14)

$$\begin{aligned} \rho^i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \epsilon &\longmapsto \rho^i(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.13)$$

on $i = 1, 2$. Imposem que $\rho^i(0) = 0$ per a $i = 1, 2$.

Definim ara la família i -èsima de solucions com

$$\gamma^i(t, \epsilon) = u(t, \Psi(\rho^i(\epsilon), u_0), \epsilon) \quad (3.14)$$

i que contenen les solucions pel cas no pertorbat, quan $\epsilon = 0$,

$$\gamma^i(t, 0) = u(t, u_0, 0). \quad (3.15)$$

Fixem-nos que la família i -èsima també té una condició inicial en la secció transversal

$$\gamma^i(0, \epsilon) = \Psi(\rho^i(\epsilon), u_0). \quad (3.16)$$

Seguidament, definim una funció de separació de la forma

$$\begin{aligned} \text{sep} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \epsilon &\longmapsto \rho^1(\epsilon) - \rho^2(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.17)$$

No obstant, com que aconseguir les funcions ρ^i de manera explícita és difícil, per a pertorbacions suficientment petites, podem aproximar la funció separació com

$$\begin{aligned} \text{sep} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \epsilon &\longmapsto \text{sep}(\epsilon) = \langle \Psi(\rho^1(\epsilon), u_0) - \Psi(\rho^2(\epsilon), u_0), f^\perp(u_0) \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

que no és res més que el producte escalar entre el camp vectorial perpendicular en el punt u_0 de Σ i la diferència entre les solucions del sistema perpendicular a les dues famílies i -èsimes.

Proposició 3.2. *La funció (3.18) també es pot expressar de la forma*

$$\text{sep}(\epsilon) = f(u_0, 0) \wedge (\Psi(\rho^1(\epsilon), u_0) - \Psi(\rho^2(\epsilon), u_0)). \quad (3.19)$$

Demostració: Recordem que $f^\perp(u_0) = Jf(u_0, 0)$. On J és

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Recordem que tant la diferència $\Psi(\rho^1(\epsilon), u_0) - \Psi(\rho^2(\epsilon), u_0)$ com $f(u_0, 0)$ pertanyen a \mathbb{R}^2 . Fixem-nos que $J(c, d) = (-d, c)$. Aleshores,

$$\langle (a, b), (-d, c) \rangle = (a, b)(-d, c) = (-ad + bc).$$

Finalment, per la definició del producte \wedge ,

$$(c, d) \wedge (a, b) = cb - ad$$

i ambdós resultats coincideixen. Si identifiquem $(a, b) = \Psi(\rho^1(\epsilon), u_0) - \Psi(\rho^2(\epsilon), u_0)$ i també $(c, d) = f(u_0, 0)$, obtenim el resultat desitjat. \square

Respecte aquesta aplicació separació, es poden fer algunes observacions interessants.

Proposició 3.3. (Propietats de la funció separació) *La funció separació, definida segons (3.18), compleix:*

- $\text{sep}(0) = 0$.
- $\text{sep}(\epsilon) = 0$ si i només si $\gamma^1(t, \epsilon) = \gamma^2(t, \epsilon)$.

Demostració: Efectivament, per a la primera propietat, per definició, $\rho^i(0) = 0$ per a $i = 1, 2$. Llavors, $\Psi(0, u_0) - \Psi(0, u_0) = 0$.

La segona propietat es demostra a partir de la unicitat de solucions. Efectivament, si $\gamma^1(t, \epsilon) = \gamma^2(t, \epsilon)$, $\Psi(0, u_0) = \Psi(0, u_0)$ i la seva diferència és 0. \square

L'objectiu és arribar a calcular la derivada de la funció separació respecte del paràmetre ϵ . D'aquesta manera, podrem aplicar una primera aproximació sobre el valor de la funció separació, per exemple, a través d'un desenvolupament en sèrie de Taylor. És per aquest motiu que definim ara la funció separació dependent del temps

$$\begin{aligned} \text{SEP} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \epsilon) &\longmapsto \langle \gamma^1(t, \epsilon) - \gamma^2(t, \epsilon), f^\perp(\phi_t(u_0)) \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

o equivalentment, aplicant la mateixa propietat que en la proposició 3.2,

$$\text{SEP}(t, \epsilon) = f(\phi_y(u_0), 0) \wedge (\gamma^1(t, \epsilon) - \gamma^2(t, \epsilon)). \quad (3.22)$$

Proposició 3.4. *Definim una funció de la forma*

$$\text{SEP}^i(t, \epsilon) = \langle \gamma^i(t, \epsilon), f^\perp(\phi_t(u_0)) \rangle, \quad (3.23)$$

on $i = 1, 2$. Aleshores, $\text{SEP}(t, \epsilon) = \text{SEP}^1(t, \epsilon) - \text{SEP}^2(t, \epsilon)$.

Demostració: Efectivament, per la definició de $\text{SEP}(t, \epsilon)$ (3.21), aplicant la propietat del producte escalar segons la qual el producte d'una suma és la suma del producte. \square

Observació 3.1. *Fixem-nos que la funció auxiliar de la proposició anterior, si apliquem la proposició 3.2, es pot expressar de la forma*

$$\text{SEP}^i(t, \epsilon) = f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \gamma^i(t, \epsilon). \quad (3.24)$$

Proposició 3.5. *Es compleix que*

$$\frac{\partial \text{SEP}^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) = f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0), \quad (3.25)$$

on ϵ_j és una coordenada de $\epsilon \in \mathbb{R}^n$.

Demostració: Efectivament, per les propietats del \wedge ,

$$\frac{\partial \text{SEP}^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) = f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_t(u_0), 0) \wedge \gamma^i(t, 0) = f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0).$$

\square

Proposició 3.6. *Es compleix que*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon}(t, 0) \right) = \frac{\partial f}{\partial u}(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon}(t, 0) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(\phi_t(u_0), 0). \quad (3.26)$$

Proposició 3.7. *Si sigui $\text{SEP}^i(t, \epsilon)$ definit segons l'equació (3.23). Es compleix que*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \text{SEP}^i}{\partial \epsilon_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial u}(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \right) \quad (3.27)$$

i si definim $A(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\phi_t(u_0), 0)$, aleshores

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \text{SEP}^i}{\partial \epsilon_j} \right) &= A(t) f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + f(\phi_t(u_0), 0) \wedge A(t) \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \\ &\quad + f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_t(u_0), 0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ara ens convé parlar sobre un resultat de l'àlgebra força útil.

Lema 3.2. *Si sigui A una matriu de dimensió 2×2 . Si sigui $v, w \in \mathbb{R}^2$, aleshores es compleix que*

$$Av \wedge w + v \wedge Aw = \text{tr}(A) v \wedge w. \quad (3.29)$$

Proposició 3.8. *Sigui $SEP^i(t, \epsilon)$ definit segons l'equació (3.23). Es compleix que*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \right) = \operatorname{div} (f(\phi_t(u_0), 0)) f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial \gamma^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_t(u_0), 0). \quad (3.30)$$

Demostració: Pel lema anterior, la traça de la matriu $A(t)$ és la divergència de f . \square

Fixem-nos que si definim una funció que envia t a $\frac{\partial SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0)$, on recordem que $i = 1, 2$, aleshores l'equació (3.30) és una equació variacional que a més a més és lineal.

Assumirem que coneixem el comportament de $\gamma^1(t, 0)$ quan el temps tendeix a $-\infty$ i el comportament de $\gamma^2(t, 0)$ quan t tendeix a infinit. Això podria ser equivalent a que γ^1 fos la varietat inestable i γ^2 l'estable.

Definim la funció $K(t)$ per

$$K(t) = e^{-\int_0^t \operatorname{div} f(\phi_s(u_0), 0) ds}. \quad (3.31)$$

Proposició 3.9. *Sigui $SEP^i(t, \epsilon)$ definit segons l'equació (3.23). Sigui $K(t)$ definit segons (3.31). Es compleix que*

$$\frac{d}{dt} \left(K(t) \frac{\partial SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \right) = K(t) f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_t(u_0), 0). \quad (3.32)$$

Demostració: Podem calcular fàcilment la derivada temporal de $K(t)$,

$$\frac{d}{dt} K(t) = -\operatorname{div} f(\phi_t(u_0), 0) K(t). \quad (3.33)$$

Si apliquem la regla de la cadena sobre l'expressió que volem demostrar,

$$\frac{d}{dt} \left(K(t) \frac{\partial SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \right) = \left(\frac{d}{dt} K(t) \right) \frac{\partial SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + K(t) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \right) \quad (3.34)$$

i substituint la derivada de $K(t)$ respecte del temps i l'expressió (3.30), obtenim la igualtat desitjada, ja que els termes que contenen la divergència es cancel·len. \square

El fet d'haver creat la funció K d'aquesta manera no és casual. Si en l'expressió (3.30) hi substituïm l'equació (3.25), ens queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) \right) = \operatorname{div}(f(\phi_t(u_0), 0)) \frac{\partial SEP^i}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_t(u_0), 0). \quad (3.35)$$

Per simplificar la notació, anomenem $A(t) = \operatorname{div}(f(\phi_t(u_0), 0))$ i $b(t) = f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_t(u_0), 0)$. Fixem-nos que tenim una equació diferencial i per la fórmula de variació de constants, si considerem el cas d'integració de 0 a t ,

$$\frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(t, 0) = e^{\int_0^t A(s) ds} \left[\frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(0, 0) + \int_0^t e^{-\int_0^s A(z) dz} b(s) ds \right] \quad (3.36)$$

i això és

$$\frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(t, 0) = K^{-1}(t) \left[\frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(0, 0) + \int_0^t K(s) f(\phi_s(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s(u_0), 0) ds \right]. \quad (3.37)$$

Hem usat l'exponent $i = 2$ ja que com hem dit abans suposem que coneixem com es comporten les dues famílies de solucions γ^i . Pel cas $i = 1$ hauríem d'integrar de t a 0 . Escrit en forma de corol·lari:

Corol·lari 3.2. *De la proposició anterior,*

$$\frac{\partial SEP^1}{\partial \epsilon_j}(0, 0) = K(t) \frac{\partial SEP^1}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + \int_t^0 K(s) f(\phi_s(u_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s(u_0), 0) ds \quad (3.38)$$

$$-\frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(0, 0) = -K(t) \frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + \int_0^t K(s) f(\phi_s(u_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s(u_0), 0) ds. \quad (3.39)$$

Demostració: Per a la primera expressió, integrem l'equació (3.32), pel cas $i = 1$ integrem per a temps negatius, de t a 0 .

$$-K(t) \frac{\partial SEP^1}{\partial \epsilon_j}(t, 0) = -\frac{\partial SEP^1}{\partial \epsilon_j}(0, 0) + \int_t^0 K(s) f(\phi_s(u_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s(u_0), 0) ds$$

i obtenim el resultat desitjat.

Per a la segona, integrem de la mateixa manera però considerant temps positius, és a dir, de 0 cap a t .

$$K(t) \frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(t, 0) = \frac{\partial SEP^2}{\partial \epsilon_j}(0, 0) + \int_0^t K(s) f(\phi_s(u_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s(u_0), 0) ds.$$

□

La part dreta les igualtats anteriors són constants respecte de t . Per tant, els següents límits existiran i es complirà que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon_j}(0) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[K(t) f(\phi_t(u_0)) \wedge \frac{\partial \gamma^1}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + \int_t^0 K(s) f(\phi_s(u_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s) ds \right] \\ &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-K(t) f(\phi_t(u_0)) \wedge \frac{\partial \gamma^2}{\partial \epsilon_j}(t, 0) + \int_0^t K(s) f(\phi_s(u_0)) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon_j}(\phi_s(u_0), 0) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A partir d'aquí aplicarem el que hem fet fins ara al cas d'un punt de sella. Sigui u_0 un punt de la connexió de sella del sistema no pertorbatiu (3.8) que connecta els punts de sella p_0 i q_0 , de manera que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(u_0) = p_0 \quad (3.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(u_0) = q_0. \quad (3.42)$$

És important tenir clar que també es pot considerar el cas $p_0 = q_0$. Considerem una pertorbació ϵ , suficientment petita, pel sistema (3.6), aleshores els punts de sella es poden desplaçar, no obstant, aquests es poden aproximar als punts de sella del sistema no pertorbat.

Proposició 3.10. *Sigui un sistema d'equacions diferencials pertorbat amb paràmetre pertorbatiu ϵ suficientment petit. Sigui p_0 un punt de sella hiperbòlic del sistema no pertorbat, aleshores existeix un punt de sella hiperbòlic de la forma*

$$p_\epsilon = p_0 + O(\epsilon). \quad (3.43)$$

Demostració: Al considerar un paràmetre ϵ suficientment petit podem aplicar el teorema de la funció implícita. \square

En el nostre cas, al tenir dos punts de sella, denotarem els respectius punts de sella del sistema pertorbat com

$$p_\epsilon = p_0 + O(\epsilon) \quad (3.44)$$

$$q_\epsilon = q_0 + O(\epsilon). \quad (3.45)$$

Definim dues solucions del sistema pertorbat (3.6), les condicions inicials de les quals es troben sobre Σ , segons la definició (3.12).

$$t \mapsto \gamma^1(t, \epsilon) \quad (3.46)$$

$$t \mapsto \gamma^2(t, \epsilon). \quad (3.47)$$

Imposem ara que la primera solució $\gamma^1(t, \epsilon)$ es troba sobre la varietat inestable del punt p_ϵ , mentre que $\gamma^2(t, \epsilon)$ es troba sobre la varietat estable del punt hiperbòlic q_ϵ . La varietat estable γ^2 i la inestable γ^1 intersequen Σ .

Proposició 3.11. *Sigui el sistema (3.6). Sigui u_0 una punt de sella connexió. Sigui γ^1 i γ^2 segons la definició (3.46) solucions de la varietat inestable i estable del sistema pertorbat. Sigui $K(t)$ definit segons (3.31). Es compleix*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} K(t) f(\phi_t(u_0)) \wedge \frac{\partial \gamma^1}{\partial \epsilon}(t, 0) = 0 \quad (3.48)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) f(\phi_t(u_0)) \wedge \frac{\partial \gamma^2}{\partial \epsilon}(t, 0) = 0. \quad (3.49)$$

Corol·lari 3.3. (Integral de Melnikov) *Amb les condicions de la proposició anterior 3.11,*

$$\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_0^t \text{div} f(\phi_s(u_0), 0) ds} f(\phi_t(u_0), 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(\phi_t(u_0), 0) dt. \quad (3.50)$$

Aquesta darrera integral 3.50 és coneguda com a la **integral de Melnikov homoclínica**. Si apliquem un desenvolupament en sèrie de Taylor per a un ϵ petit, tendint a 0, sobre $\text{sep}(\epsilon)$,

$$\text{sep}(0) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon_i}(0) + O(|\epsilon|^2). \quad (3.51)$$

Ens interessa el cas particular en que $n = 1$ i per tant, $\epsilon_1 = \epsilon$. Aleshores,

$$\text{sep}(\epsilon) = \epsilon \left(\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0) + O(\epsilon) \right). \quad (3.52)$$

Fixem-nos que si $\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0)$ no és 0, llavors, sempre i quan $|\epsilon|$ sigui suficientment petit, la integral de Melnikov es pot fer servir per a determinar el signe de l'aplicació de separació. Si coneixem el seu signe, podem determinar la direcció de separació entre les varietats estables i inestables del sistema pertorbat (respecte la direcció de $f^\perp(u_0)$).

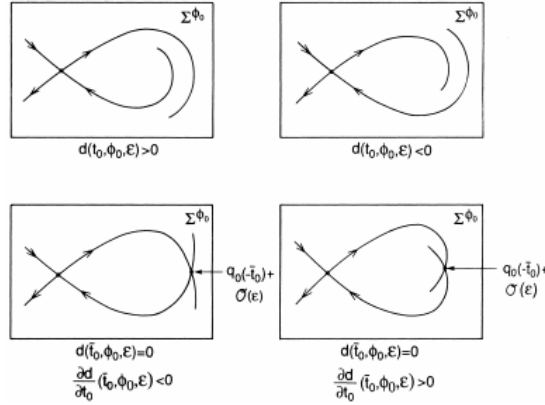


Figura 3.2: Figura extreta del Wiggins [6, pàg.697] on es veu el comportament en funció del signe i de les seves derivades.

Observació 3.2. El signe de la distància i la seva derivada ens aporta informació sobre com es comporten les varietats. Suposant que el paràmetre és positiu,

- Si $\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0) \neq 0$, canvia la posició relativa de les varietats.
- Si $\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0) = 0$, les dues varietats es creuen en un punt. Serà un creuament de dins cap a fora o de fora cap a dins en funció del signe de la derivada.
 - Si $\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0) \right) < 0$, es creuen de dins cap a fora.
 - Si $\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\partial \text{sep}}{\partial \epsilon}(0) \right) > 0$, es creuen de fora cap a dins.

3.3 Sistemes hamiltonians

Podem considerar un sistema Hamiltonià en el pla de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (3.53)$$

La funció $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és una integral primera. Aquest sistema també es pot definir amb el camp vectorial $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, amb $X(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right)$, de manera que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = X(x, y). \quad (3.54)$$

Tanmateix, afegirem la condició que aquest sistema té una òrbita homoclínica, de manera que el seu retrat de fase queda com el de la figura 3.1.

Considerem també una funció

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, t, \epsilon) &\longmapsto R(x, y, t, \epsilon). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Com a hipòtesis, suposem que aquesta funció és T -periòdica i descriu el sistema pertorbat no autònom com

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \epsilon R_1(x, y, t, \epsilon) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \epsilon R_2(x, y, t, \epsilon) \end{cases} \quad (3.56)$$

on, lògicament,

$$R(x, y, t, \epsilon) = \begin{pmatrix} R_1(x, y, t, \epsilon) \\ R_2(x, y, t, \epsilon) \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Vectorialment, podem denotar $f(x, y, t, \epsilon) = X(x, y) + \epsilon R(x, y, t, \epsilon)$, amb X definit segons (3.54):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y, t, \epsilon). \quad (3.58)$$

Notem que, com en els casos anteriors, $\epsilon = 0$ correspon al cas no pertorbat. Denotarem per $\phi_t(x, y, \epsilon) = \phi(t, x, y, \epsilon)$ el flux associat a aquest sistema pertorbat i tal que compleix la propietat que $\phi_{t_0}(x, y, \epsilon) = \phi(t_0, x, y, \epsilon) = (x, y)$. Particularment, $\phi_t(x, y, 0)$ el flux del cas no pertorbat. Sigui (x_0, y_0) un punt de sella del sistema no pertorbat. Sigui Γ l'òrbita homoclínica en aquest punt (com el de la figura 3.1).

Podem introduir un resultat interessant que afecta a la forma de la integral de Melnikov en sistemes Hamiltonians.

Proposició 3.12. *Sigui $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ el camp vectorial d'un sistema hamiltonià pertorbat autònom, on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sigui $\phi_t(u_0)$ el seu flux associat amb u_0 com a condició inicial. Aleshores,*

$$e^{\int_0^t \operatorname{div} f(\phi_t(u_0), 0) ds} = 1. \quad (3.59)$$

Demostració: Efectivament, sabem que la divergència d'un sistema Hamiltonià és 0 i per tant, $\operatorname{div}(f(\phi_t(u_0), 0))$ és 0. \square

Així doncs, definim la funció de Melnikov per a un punt $(x, y) \in \Gamma$, on recordem que Γ és l'òrbita homoclínica en un punt de sella, com

$$M(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_t(x, y, 0)) \wedge R(\phi_t(x, y, 0), t, 0) dt. \quad (3.60)$$

Podem completar la secció amb un teorema força rellevant. És important introduir l'aplicació de Poincaré definida com

$$P : D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.61)$$

tal que $P(x, y, \epsilon) = \phi(T, x, y, \epsilon)$.

Teorema 3.1. *Sigui un sistema Hamiltonià pertorbatiu de la forma (3.56). Suposem que el paràmetre pertorbatiu ϵ és suficientment petit en valor absolut. Llavors, l'aplicació de Poincaré corresponent al sistema té un punt fix hiperbòlic de tipus sella, de la forma*

$$(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x(0), y(0)) + O(\epsilon). \quad (3.62)$$

Proposició 3.13. *Sigui un sistema Hamiltonià pertorbatiu de la forma (3.56). Suposem que el paràmetre pertorbatiu ϵ és suficientment petit en valor absolut i diferent de zero. Sigui (\bar{x}, \bar{y}) un zero simple de la funció de Melnikov definida en el cicle homoclínic Γ . Aleshores, l'aplicació de Poincaré associada a aquest sistema té un punt homoclínic transversal respecte la varietat estable i inestable del punt hiperbòlic fix $(x(\epsilon), y(\epsilon)) = (x(0), y(0)) + O(\epsilon)$.*

Proposició 3.14. *Sigui un sistema Hamiltonià pertorbatiu de la forma (3.56). Suposem que el paràmetre pertorbatiu ϵ és suficientment petit en valor absolut i diferent de zero. Si la funció de Melnikov no té cap zero, aleshores la varietat estable i inestable de $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ no intersequen.*

Amb aquestes proposicions que ens parlen sobre les posicions respectives de les varietats estables i inestables en un sistema Hamiltonià amb pertorbació no autònoma, tanquem el capítol.

4. El pèndol simple pertorbat

Per veure de manera pràctica els formalismes desenvolupats en el capítol anterior, és interessant exemplificar-ho a nivell numèric, fent la comparació amb el resultat analític. Per aquest propòsit, considerarem un sistema físic típic: el pèndol. En aquest sistema, aplicarem una pertorbació multiplicada per un paràmetre ϵ suficientment petit. La idea principal consisteix en veure numèricament com varia la separació entre la varietat estable i la inestable i comparar aquest resultat amb el que obtindrem de calcular la integral de Melnikov.

4.1 Càlcul numèric

El càlcul numèric consisteix, en primer lloc, en l'obtenció d'una condició inicial per a la varietat estable i una per a la inestable. Condicions molt properes als punt sella d'una òrbita heteroclínica i pertanyents a les seves respectives varietats lineals. Si agafem un punt suficientment proper al punt fix, al ser la varietat lineal tangent a la varietat hiperbòlica, minimitzarem l'error. Aquest pas serà necessari ja que agafar el punt fix no ens permet aplicar l'algoritme de Runge-Kutta, que serà el següent pas. Amb aquest mètode de resolució de sistemes diferencials determinarem els punts de la varietat estable i inestable que tallen una secció perpendicular i finalment calcularem la distància entre ells. Ens hem dotat de l'ajuda d'un ordinador per aplicar els dos darrers passos mencionats. L'apèndix C conté el programa utilitzat.

El pèndol no pertorbat és un sistema Hamiltonià d'equacions:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

És un sistema 2π -periòdic, que presenta una successió de punts sella $(\pi + 2k\pi, 0)$ i una successió de centres $(2k\pi, 0)$. Ens centrarem en els punts $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ com a punts de sella. A més a més, considerem el punt $(0, 0)$ com a punt no hiperbòlic (ja que els valors propis de la linealització del sistema tenen part real nul·la), que està foliat per òrbites periòdiques. En la figura 4.1, podem observar com la varietat estable d'un dels punts és la varietat inestable de l'altre i viceversa. A partir d'ara ens referirem a la varietat inestable com la del punt $(-\pi, 0)$ (corresponent a l'estable del punt $(\pi, 0)$).

Apliquem una pertorbació $(0, \epsilon R(x, y, \epsilon))$, amb ϵ com a constant pertorbativa. El sistema queda

com

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) + \epsilon R(x, y). \end{cases} \quad (4.2)$$

Podem considerar un cas molt senzill, $R(x, y) = y^n$, amb n un nombre natural. En la figura 4.2 es visualitzen les varietats estables i inestables d'aquest sistema pel cas $\epsilon = 0.001$ i $n = 1$. Veiem com aquestes dues varietats se separen. En les figures 4.3 i 4.4 s'observen amb major claredat els casos per a $\epsilon = 0.01$ i $n = 1$, i $\epsilon = 0.01$ i $n = 2$, respectivament.

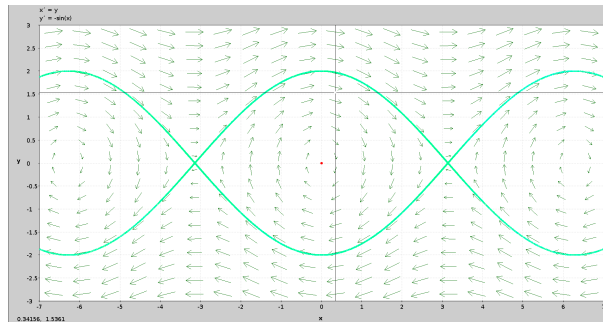


Figura 4.1: Retrat de fase del sistema no pertorbat (4.1). Els punts $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ són punts de sella. La varietat inestable del punt $(-\pi, 0)$, que es dirigeix al punt $(\pi, 0)$, correspon a la varietat estable del punt $(\pi, 0)$. Figura creada amb el software **pplane**.

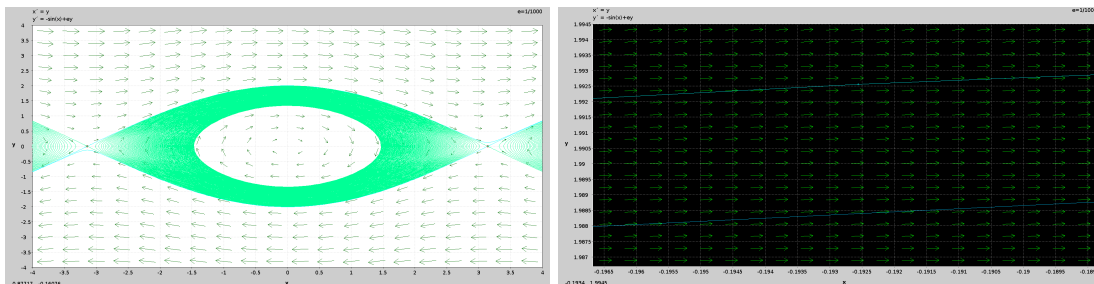


Figura 4.2: Retrat de fase del sistema pertorbat (4.2), amb paràmetre $\epsilon = 0.001$ i $n = 1$. Els punts $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ són punts de sella. La varietat inestable del punt $(-\pi, 0)$, i la varietat estable del punt $(\pi, 0)$ se separen. Figura creada amb el software **pplane**.

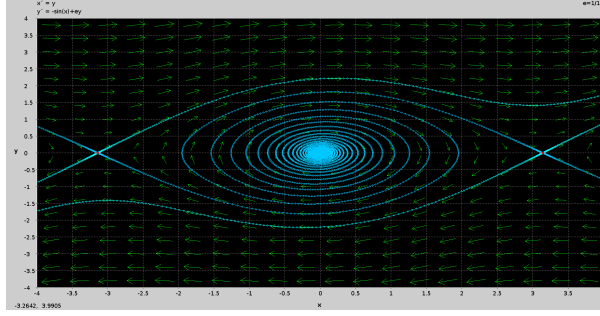


Figura 4.3: Retrat de fase del sistema pertorbat (4.2). Per a un paràmetre de $\epsilon = 10^{-2}$ i per a $n = 1$. Figura creada amb el software *pplane*.

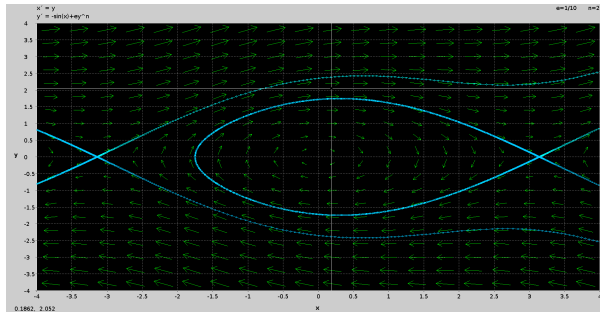


Figura 4.4: Retrat de fase del sistema pertorbat (4.2). Per a un paràmetre de $\epsilon = 10^{-2}$ i per a $n = 2$. Figura creada amb el software *pplane*.

4.1.1 Cas $n = 1$

Calculem els vectors propis de la matriu $DF(x, y, \epsilon)$ considerant inicialment el valor de $n = 1$.

$$F(x, y, \epsilon) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin(x) + \epsilon y \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

i derivant,

$$DF(x, y, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & \epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

que avaluat sobre el punt $(-\pi, 0)$ és

$$DF(-\pi, 0, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

És fàcil veure que els valors propis d'aquesta matriu són $\lambda_1 = \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2}$.

Efectivament, són arrels del polinomi

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & \epsilon - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \epsilon) - 1 = \lambda^2 - \epsilon\lambda - 1. \quad (4.6)$$

Sabem que el valor propi positiu correspon a la varietat inestable i el valor propi negatiu a l'estable. Si considerem per aquest punt la varietat inestable, el vector propi serà $v^u(\epsilon) = \left(\frac{+\pi\epsilon + \sqrt{(\pi\epsilon)^2 + 4}}{2}, 1 \right)$. Aleshores, la condició inicial serà de la forma $(-\pi, 0) + kv^u(\epsilon)$, on hem d'escollir un $k \in \mathbb{R}$ prou petit i, en aquest cas, positiu (ens interessa geomètricament).

Repetim el mateix procediment pel punt $(\pi, 0)$. En aquest cas, els valors propis són els mateixos: $\lambda_1 = \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2}$ i $\lambda_2 = \frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2}$. Senzillament, el valor de la derivada és el mateixa que en el punt $(-\pi, 0)$.

$$DF(\pi, 0, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Agafem la varietat estable, i per tant, el vector propi és $v^e = \left(1, \frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4}}{2} \right)$ i la condició inicial $(\pi, 0) + kv^e(\epsilon)$, amb k negatiu i de valor absolut suficientment petit. A nivell numèric, el considerem de $|k| = 10^{-3}$.

El següent pas és calcular per a cadascuna de les varietats, el punt de tall amb una secció perpendicular. Per posar les coses fàcils, considerarem una secció transversal de la forma

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y > 0\}. \quad (4.8)$$

Per aquest càlcul s'ha utilitzat el mètode de Runge-Kutta 4 ([7, pàg. 299]), fins a un valor de x més gran que 0 per a la varietat inestable (partint de $(-\pi, 0) + kv^u(\epsilon)$) i més petit per a l'estable (començant de $(-\pi, 0) + kv^e(\epsilon)$ i anant amb temps invers; s'ha fet la transformació $t \rightarrow -t$). Aleshores, s'ha implementat el mètode de Newton per ajustar millor el pas del Runge-Kutta i s'ha repetit el procés d'integració fins a obtenir una diferència entre el valor de 0 i el valor de x menor que una tolerància de 10^{-6} .

És interessant emfatitzar com s'ha aplicat el mètode de Newton. Recordem que aquest mètode numèric, conegut també amb el nom del mètode de Newton-Raphson, consisteix en que donada una funció $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, amb $I \subset \mathbb{R}$, contínua i derivable;

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{\frac{df}{dt}(t_n)}. \quad (4.9)$$

En el nostre cas, hem definit $f(t_n) = x(t_n) - 0$ i, llavors, $\dot{f}(t_n) = \dot{x}(t_n) = y(t_n)$. La darrera igualtat és així per definició del sistema (4.2). Notem que $t_{n+1} - t_n = dt$ és el nou pas que necessitem per aplicar, de nou, un pas de Runge-Kutta i així alternar els dos algoritmes fins a complir la condició de tolerància. És interessant veure com varia aquesta separació en funció del valor de la pertorbació escollida. En la figura 4.5 veiem la tendència obtinguda per a valors de ϵ entre 10^{-10} i 10^{-1} . Segueix un comportament perfectament lineal amb un pendent molt proper a 4.

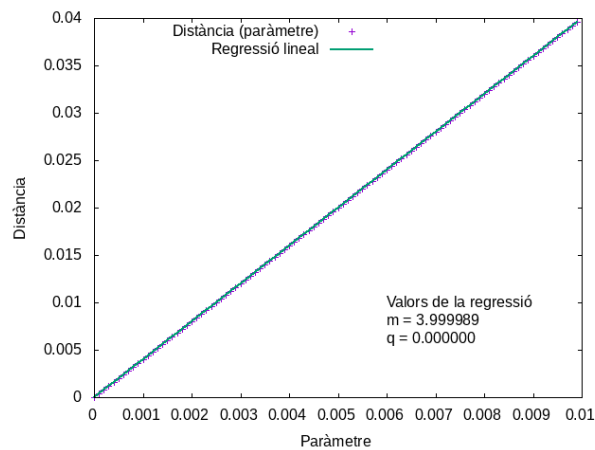


Figura 4.5: Representació de la distància en funció del paràmetre del pèndol simple per a una pertorbació de la forma ϵy . S'inclou també la seva respectiva regressió lineal. Creat amb **gnuplot**.

És interessant mostrar la representació de l'espai de fases en funció del paràmetre (figura 4.6) per a fer-nos una idea dels punts trobats amb els algorismes de Runge-Kutta i de Newton.

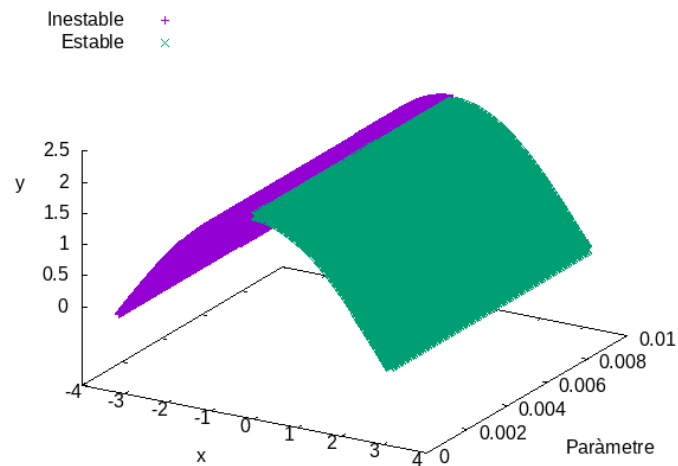


Figura 4.6: Representació de l'espai de fases en funció del paràmetre pel sistema $n = 1$. Creat amb **gnuplot**.

4.1.2 Cas $n > 1$

En el cas d'un nombre natural n més gran que 1, la diferencial de $F(x, y, \epsilon)$ és

$$DF(x, y, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & \epsilon n y^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

que avaluat en el punt $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ equival a

$$DF(-\pi, 0, \epsilon) = DF(\pi, 0, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Té com a valors propis $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ i per tant, vectors propis $(1, 1)$ i $(-1, 1)$. En aquest cas la condicions inicials seran de la forma $(-\pi, 0) + k(1, 1)$ per la varietat inestable i $(\pi, 0) + k(-1, 1)$ per l'estable, amb un valor de k suficientment petit i positiu. En el cas numèric, $k = 10^{-3}$. Amb la mateixa tolerància que en el cas anterior, obtenim la representació de la figura 4.7. També manté un comportament lineal amb un pendent molt pròxim a 6.28.

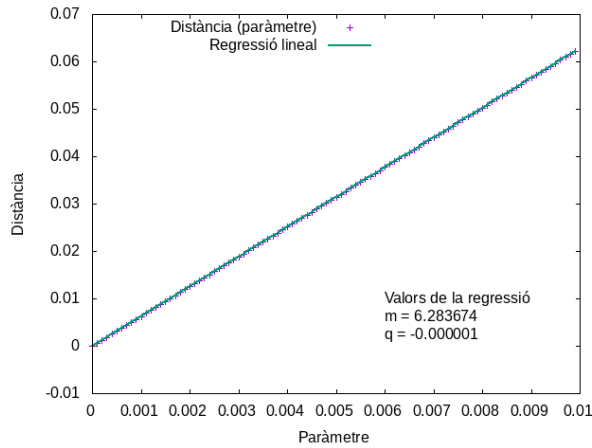


Figura 4.7: Representació de la distància en funció del paràmetre del pèndol simple per a una pertorbació de la forma ϵy^2 . S'inclou també la seva respectiva regressió lineal. Creat amb **gnuplot**.

4.2 Càlcul analític

Pel càlcul analític hem de partir de l'expressió sobre Hamiltonians, tal que ens definia el sistema a partir de la integral primera $H(x, y)$ com

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (4.12)$$

En el cas del pèndol no pertorbat, això ens dona un sistema de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \sin(x). \end{cases} \quad (4.13)$$

Si integrem, el Hamiltonià resultant és $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x) + Constant$. Aquest Hamiltonià és equivalent a l'energia del sistema pel cas no pertorbatiu, on la constant és l'origen de potencials que podem considerar 0. Així doncs, per a un determinat valor del Hamiltonià, $H(x, y)$, obtindrem

uns determinats valors permesos de y i de x que són els que compleixen l'equació. Al tractar-se d'un sistema autònom, no tenim variació de l'energia i aquesta és una constant.

L'òrbita heteroclínica del pèndol es troba a un nivell energètic de $H(x, y) = 1$. Això es pot comprovar substituint un punt de l'òrbita en l'expressió del Hamiltonià. Per tant, podem expressar y en funció de x

$$y(x) = \sqrt{2(H + \cos(x))} = \sqrt{2(1 + \cos(x))}. \quad (4.14)$$

Lema 4.1. *Es compleix que*

$$\arctan(\sinh(t)) = \arcsin(\tanh(t)) \quad (4.15)$$

i també que

$$\arctan(\sinh(t)) = \arccos(\operatorname{sech}(t)). \quad (4.16)$$

Proposició 4.1. *Les solucions de l'òrbita heteroclínica per al sistema del pèndol simple no pertorbat (4.1) són*

$$x(t) = 2 \arctan(\sinh(t)) \quad (4.17)$$

$$y(t) = \frac{2}{\cosh(t)}. \quad (4.18)$$

Demostració: Efectivament, $\dot{x} = \frac{2 \cosh(t)}{\sinh^2(t) + 1} = \frac{2}{\cosh(t)} = y(t)$. Per tant, es compleix una de les equacions del sistema (4.1).

Per altra banda, $\dot{y}(t) = -2 \tanh(t) \operatorname{sech}(t)$. Pel lema 4.1, $-\sin(x(t)) = -\sin(2 \arcsin(\sinh(t)))$. Ara, com que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, si apliquem la segona propietat del lema 4.1 en el cosinus, $-\sin(x(t)) = -2 \sin(\arcsin(\tanh(t))) \cos(\arccos(\operatorname{sech}(t))) = -2 \tanh(t) \operatorname{sech}(t) = \dot{y}$. Per tant, ja hem demostrat la segona equació del sistema (4.1). \square

Notem que per a $t = 0$, $y(0) = 2$ i $x(0) = 0 + 2\pi k$ amb k pertanyent als enters, el que ens mostra la periodicitat del sistema. No obstant, pel nostre cas, degut a la regió escollida, podem considerar $k = 0$. Observem que a $t = 0$ ens trobem en un punt de Σ , definida segons (4.8).

En aquest punt recuperem el sistema pertorbat (4.2) i l'expressió de Melnikov per a sistemes Hamiltonians (3.60). Recordem que l'únic sistema que ha de ser Hamiltonià per a poder aplicar aquesta fórmula és el sistema no pertorbat. Quan apliquem la pertorbació, deixa de ser-ho. Ens centrarem, doncs, en trobar la seva solució pel cas $n = 1$ i $n = 2$, tot i que també establirem un mètode de recurrència per a qualsevol n nombre natural.

4.2.1 Càlcul de la integral de Melnikov

La resolució del primer cas és immediata, ja que

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{2}{\cosh(t)} \\ \sin(2 \arctan(\sinh(t))) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\cosh(t)} \end{pmatrix} ds \quad (4.19)$$

i per tant,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\cosh^2(s)} ds. \quad (4.20)$$

En els llibres de taules de primitives podem trobar que

$$\int \frac{1}{\cosh^2(t)} = \tanh(t) \quad (4.21)$$

i com que la tangent hiperbòlica de t tendeix a 1 quan t tendeix a infinit i a -1 quan t ho fa a menys infinit,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(t)} = 2 \quad (4.22)$$

i la nostra integral de Melnikov serà

$$M = 8. \quad (4.23)$$

Per calcular la distància s'ha de normalitzar la funció de Melnikov, és a dir s'ha de dividir aquest darrer resultat pel mòdul de DH , avaluat sobre el punt de l'òrbita no pertorbada on volem determinar la variació que, en aquest cas, és el $(0, 2)$. Per tant,

$$\|DH(x, y)\| = \sqrt{\sin^2(x) + y^2} \quad (4.24)$$

i $\|DH(0, 2)\| = 2$. En definitiva, la distància entre les dues varietats és $4\epsilon + O(\epsilon^2)$, que coincideix perfectament amb els càlculs numèrics.

Ens preguntem què passaria en el cas general, és a dir, si $n > 1$. Si definim $m = 1 + n$, la integral de Melnikov és

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^m}{\cosh^m(s)} ds. \quad (4.25)$$

Podem aplicar la fórmula següent:

$$\int \operatorname{sech}^m(t) dt = \frac{\sinh(t) \operatorname{sech}^{m-1}(t)}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \operatorname{sech}^{m-2}(t) dt. \quad (4.26)$$

Amb aquesta proposició, tot es redueix a calcular el valor de la integral de la secant hiperbòlica o de la secant hiperbòlica al quadrat, en funció de si m és parell o imparell, ja que podem aplicar recurrència. Notem que pel cas parell ja l'hem resolt. Aleshores, tot consisteix en resoldre

$$\int \frac{1}{\cosh(t)} dt. \quad (4.27)$$

Proposició 4.2. *Es pot demostrar que la primitiva de la secant hiperbòlica és*

$$\int \operatorname{sech}(t) dt = \arctan(\sinh(t)). \quad (4.28)$$

Demostració: Sabem que $\cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t)$. Aleshores, és fàcil veure que

$$\int \frac{1}{\cosh(t)} dt = \int \frac{\cosh(t)}{\cosh^2(t)} dt = \int \frac{\cosh(t)}{1 + \sinh^2(t)} dt = \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

on hem considerat el canvi de variables $u = \sinh(t)$. La seva primitiva és doncs

$$\int \frac{1}{\cosh(t)} dt = \arctan(\sinh(t)).$$

□

Corol·lari 4.1. *Si avaluem sobre l'interval $[-\infty, \infty]$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(t)} dt = \pi. \quad (4.29)$$

Ja podem determinar una recurrència per a resoldre qualsevol sistema del tipus (4.2), amb $R(x, y) = y^n$ per a qualsevol n natural. Ho podem exemplificar amb el cas $n = 2$, és a dir, $m = 3$. Es complirà que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{\cosh^3(t)} &= 8 \left(\left[\frac{\sinh(t)\operatorname{sech}^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(t)} \right) \\ &= 8 \left(\left[\frac{\sinh(t)\operatorname{sech}^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Observem que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^3(t)} = \left[\frac{\tanh(t)\operatorname{sech}(t)}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\pi}{2}. \quad (4.31)$$

Com que la tangent hiperbòlica està acotada i la secant tendeix a 0 quan t tendeix a infinit, ens queda que el valor de la integral de Melnikov és 4π . Si ho normalitzem amb el modul $\|DH(0, 2)\|$, el resultat és 2π , el que un altre cop coincideix amb els valors numèrics.

4.3 Aproximació de primer ordre

El mètode de Melnikov és una aproximació de primer ordre. La seva construcció, més enllà de les característiques del sistema (punts de sella connectats per una òrbita heteroclínica), es basa en considerar un valor per a ϵ suficientment petit. És força visual la representació gràfica d'aquest fenomen. En la figura 4.8 veiem el cas $\epsilon = 2$ d'un sistema pertorbat 4.2. És evident que el sistema canvia completament i ja no hi podem aplicar els mateixos conceptes.

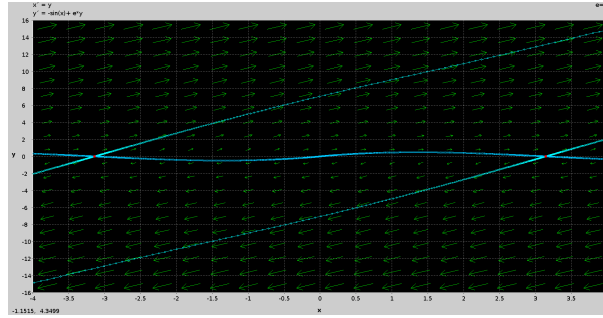


Figura 4.8: *Retrat de fase del sistema pertorbat (4.2). Per a un paràmetre de $\epsilon = 2$, tot per un valor de $n = 1$. Figura creada amb el software **pplane**.*

Si agafem valors més petit del paràmetre, fins a 1, i fem la mateixa representació de la distància en funció d'aquest, veurem que per a valors més alts, l'aproximació lineal no és prou acurada. En la figura 4.9, s'observa que a partir de paràmetres de valor 0.7 o superior, la distància no s'ajusta a l'aproximació lineal. En aquest cas serien necessàries aproximacions d'ordre major.

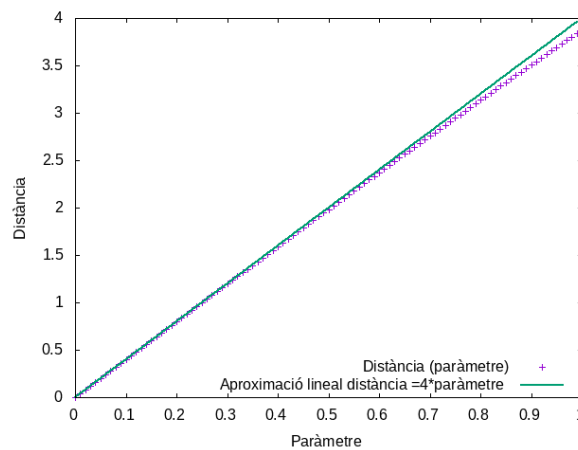


Figura 4.9: *Representació de la distància en funció del paràmetre del pèndol simple per a una pertorbació de la forma ϵy . S'inclou també l'aproximació lineal. Creat amb **gnuplot**.*

Conclusions

Hem arribat a les conclusions d'aquest treball de final de grau. Evidentment, els diferents conceptes explicats es poden desenvolupar més a fons i ampliar-ne els seus continguts. En aquest treball, especialment, faltaria una mica d'explicacions sobre el cas de les pertorbacions no autònomes. Tot i que en el darrer capítol no es fa ús d'aquest tipus de pertorbacions, hagués donat més sentit en el primer, on sí que es fa tota una construcció que és útil. Així doncs, s'obren diverses branques per a futurs estudis o per a un major aprofundiment. Cal dir però, que l'estudi de les varietats estables i inestables sí que ha tingut algun paper en la part pràctica. Si ens fixe'm, en la condició inicial del càlcul per ordinador, hem aplicat que la varietat lineal és tangent a la varietat hiperbòlica. Aquest principi, juntament amb el teorema de Hartman-Grobman (que ha passat més desapercbut), tenen un gran potencial. Tot i que puguin semblar principis molt lògics, els formalismes que ho sostenen són realment interessants.

Respecte al capítol 2, cal destacar la introducció de les equacions integrals de Volterra i de Hammerstein. Tot i que no són pròpiament del tema central del treball, sí que tenen un cert sentit dins l'estudi de la dinàmica. Es podria continuar aquesta línia d'investigació amb l'estudi de les funcions block-pulse com a mètode de resolució de l'equació de Volterra, que té aplicacions, per exemple, en el camp dels microprocessadors ([8]).

Pel que fa al tema central, el mètode de Melnikov és una teoria pertorbativa que ens dona molta informació sobre la separació de les varietats estable i inestable d'òrbites homoclíniques o heteroclíniques. No obstant, es tracta d'una aproximació de primer ordre, que depèn de que el paràmetre pertorbatiu sigui suficientment petit. Per tant, presenta unes hipòtesis molt estrictes. L'obtenció d'aproximacions d'ordres superiors és possible [9], i fins i tot el mateix Melnikov ho va desenvolupar a la seva manera. Tanmateix, no són procediments senzills i s'escapen dels coneixements d'un grau.

En l'àmbit de la física, destaca l'aplicació del mètode en sistemes Hamiltonians. Com hem vist en el capítol 4, es poden trobar resultats analítics a determinats problemes. Tot i que en aquest treball, per extensió, ens hem centrat en l'estudi del pèndol simple, també és interessant el cas del sistema de Duffing. Si augmentem la complexitat, el mètode de Melnikov es fa servir com a complement en l'estudi de sistemes dinàmics caòtics. N'és un exemple el càlcul de la reentrada a l'atmosfera de càpsules espacials [10] entre moltes altres aplicacions.

En conclusió, aquest treball ha servit com una introducció al mètode, que és l'objectiu que es

persegua, però deixa la porta oberta a posteriors desenvolupaments. S'han usat un conjunt de eines i disciplines diverses, combinant conceptes nous amb coneixements de la carrera. Com a punt negatiu, s'ha quedat una mica sobri pel que fa al cas no autònom, el que ha fet que es perdés una certa coherència entre capítols.

A. Teoremes de contracció i de convergència

Aquest apèndix comprèn els resultats més bàsics del capítol 2 i n'és un bon complement. Particularment, estudia alguns resultats sobre les contraccions i la convergència d'equacions integrals.

A.1 Principis de contracció

Primerament, mencionarem un resultat bàsic sobre les aplicacions contractives que no ens entretindrem a demostrar. Tanmateix, són teoremes coneguts i la seva demostració és senzilla de localitzar en diferents fonts bibliogràfiques.

Teorema A.1. (Principi de contracció) *Sigui X un espai de Banach amb una norma $\|\cdot\|$ ben definida. Sigui $M \subset X$ un subconjunt tancat no buit. Sigui $K : M \rightarrow M$ una contracció, és a dir, existeix una constant de contracció $0 \leq \theta < 1$. Aleshores K té un únic punt fix $u_0 \in M$. A més a més, es verifica que*

$$\|K^n(u) - u_0\| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} \|K(u) - u\| \quad (\text{A.1})$$

per a tot $u \in M$.

Teorema A.2. (Teorema de Weissinger) *Sigui X un espai de Banach amb una norma $\|\cdot\|$ ben definida. Sigui $M \subset X$ un subconjunt tancat no buit. Sigui $K : M \rightarrow M$ tal que*

$$\|K^n(u) - K^n(v)\| \leq \theta_n \|u - v\|$$

per a tot $u, v \in M$ i amb $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \leq \infty$. Llavors, existeix un punt fix u_0 , $K(u_0) = u_0$, que és únic. A més a més, es compleix que per a tot $u \in M$

$$\|K^n(u) - u_0\| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \right) \|K(u) - u\|. \quad (\text{A.2})$$

Lema A.1. *Sigui a_n una successió tal que a_n tendeix a 0. Sigui $\theta \in [0, 1)$ una constant, aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \theta^{n-i} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Demostració: La demostració no és de gaire interès per aquest treball. Aquesta es pot llegir en el llibre Sotomayor [3, pàg. 212]. \square

Teorema A.3. (Principi de contracció uniforme) *Sigui $(X, \|\cdot\|)$ un espai de Banach. Sigui $M \subset X$ un subconjunt tancat diferent del conjunt buit. Sigui Δ un subconjunt d'un espai de Banach, que pot ser diferent de X . Sigui λ un paràmetre pertanyent a Δ . Si tenim una contracció que depèn del paràmetre $K_\lambda : M \rightarrow M$, en particular, una contracció uniforme, amb constant de contracció $\theta \in [0, 1)$. Suposem que $K_\lambda(u)$ és contínua respecte de λ per a qualsevol $u \in M$. Aleshores, per a cada λ , existeix un únic punt fix $u_0(\lambda)$ tal que $K_\lambda(u_0(\lambda)) = u_0(\lambda)$. A més, u_0 és contínua respecte de λ .*

Si a més existeix una successió λ_n convergent a λ (i.e. $\lambda_n \rightarrow \lambda$), llavors $K_{\lambda_n}(u_n)$ convergeix a $u_0(\lambda)$ (i.e. $K_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow u_0(\lambda)$). Hem definit $u_n = K_{\lambda_{n-1}}(u_{n-1})$ per recurrència¹.

Demostració: L'existència del punt fix és fàcilment demostrable. Si deixem fixat λ , pel principi de contracció A.1, existeix un punt fix u_0 , que podem escriure com $u_0(\lambda)$.

Volem ara demostrar que $u_0(\lambda)$ és contínua respecte de λ . Per això considerem dos paràmetres de Δ , que denotarem λ i μ . Com que $u_0(\lambda) = K_\lambda(u_0(\lambda))$, perquè u_0 és punt fix (idènticament per a μ), i si restem i sumem $K_\lambda(u_0(\mu))$, podem corroborar que

$$\|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| = \|K_\lambda(u_0(\lambda)) - K_\lambda(u_0(\mu)) + K_\lambda(u_0(\mu)) - K_\mu(u_0(\mu))\|.$$

Per la desigualtat triangular

$$\|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| \leq \|K_\lambda(u_0(\lambda)) - K_\lambda(u_0(\mu))\| + \|K_\lambda(u_0(\mu)) - K_\mu(u_0(\mu))\|.$$

Per hipòtesis, K_λ és una aplicació contractiva amb constant de contracció θ . Així doncs, per definició

$$\|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| \leq \theta \|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| + \|K_\lambda(u_0(\mu)) - K_\mu(u_0(\mu))\|.$$

Per tant,

$$\|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| - \theta \|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| \leq \|K_\lambda(u_0(\mu)) - K_\mu(u_0(\mu))\|.$$

Finalment, és fàcil comprovar que

$$\|u_0(\lambda) - u_0(\mu)\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|K_\lambda(u_0(\mu)) - K_\mu(u_0(\mu))\|.$$

Fixem-nos que si fem tendir λ a μ , la part de la dreta de la desigualtat tendeix a zero perquè per hipòtesis K_λ és contínua respecte de λ . Per tant, $u_0(\lambda)$ és contínua, ja que $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} u_0(\lambda) = u_0(\mu)$.

Per concloure la demostració, necessitem veure que si una successió $\{\lambda_n\}_n$ convergeix a λ , aleshores u_{n+1} , definit com $u_{n+1} = K_{\lambda_n}(u_n)$ tendeix a $u_0(\lambda)$. És important considerar que $u_0(\lambda)$ és el punt

¹No confondre amb u_0 , que s'usa per a denotar el punt fix.

fix i que la seva notació és independent de la u_n .

Notem que

$$\|u_{n+1} - u_0(\lambda)\| = \|u_{n+1} - u_0(\lambda_n) + u_0(\lambda_n) - u_0(\lambda)\|$$

on hem sumat i restat $u_0(\lambda_n)$. Si ara apliquem la desigualtat triangular,

$$\|u_{n+1} - u_0(\lambda)\| \leq \|u_{n+1} - u_0(\lambda_n)\| + \|u_0(\lambda_n) - u_0(\lambda)\|.$$

Com que K_λ és contractiu, al ser $u_0(\lambda_n)$ punt fix de K_{λ_n} i considerant la definició de u_{n+1} , obtenim que

$$\|u_{n+1} - u_0(\lambda)\| \leq \theta \|u_n - u_0(\lambda_n)\| + \|u_0(\lambda_n) - u_0(\lambda)\|.$$

Si en el terme multiplicat per θ hi sumem i restem $u_0(\lambda)$ i apliquem la desigualtat triangular,

$$\|u_{n+1} - u_0(\lambda)\| \leq \theta \|u_n - u_0(\lambda)\| + \theta \|u_0(\lambda_n) - u_0(\lambda)\| + \|u_0(\lambda_n) - u_0(\lambda)\|$$

i per tant,

$$\|u_{n+1} - u_0(\lambda)\| \leq \theta \|u_n - u_0(\lambda_n)\| + (\theta + 1) \|u_0(\lambda_n) - u_0(\lambda)\|.$$

D'aquí se'n deriva que

$$\|u_n - u_0(\lambda)\| \leq \theta^n \|u_0 - u_0(\lambda)\| + (1 + \theta) \sum_{j=1}^n \theta^{n-j} \|u_0(\lambda_{j-1}) - u_0(\lambda)\|,$$

que convergeix a 0 per a n suficientment gran, aplicant el lema A.1. \square

Ara introduïrem una versió uniforme del principi de Weissinger (A.2).

Teorema A.4. *Sigui un espai de Banach $(X, \|\cdot\|)$ i sigui M un subconjunt tancat no buit de X . Sigui Δ un subconjunt d'un espai de Banach que pot ser diferent de X . Sigui un operador $K_\lambda : M \rightarrow M$ continu respecte de λ per a qualsevol $u \in M$, i tal que $K_{\lambda_n} \circ \dots \circ K_{\lambda_1}$, amb λ_i pertanyent a Δ per a tot $i = 1, \dots, n$, compleix que*

$$\|K_{\lambda_n} \circ \dots \circ K_{\lambda_1}(u) - K_{\lambda_n} \circ \dots \circ K_{\lambda_1}(v)\| \leq \theta_n \|u - v\| \quad (\text{A.4})$$

on θ_n és tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$.

Aleshores, existeix un únic punt fix $u_0(\lambda)$ que és continu respecte de λ . A més a més, si λ_n és una successió tal que tendeix a λ , $K_{\lambda_n} \rightarrow u_0(\lambda)$.

Demostració: Per a la demostració d'aquest teorema usarem els criteris de notació següents. Designarem per a $K_{\lambda'} = K_{\lambda_n} \circ \dots \circ K_{\lambda_1}$ amb $\lambda' = (\lambda_n, \dots, \lambda_1)$ pertanyent a Δ^n . Primerament, volem veure que $K_{\lambda'}$ és contínua respecte de λ' . Per hipòtesis, el cas $n = 1$ ja està demostrat. Ho

suposarem cert per a $n-1$ i ho demostrarem per inducció. Reformulem per tant $\lambda' = (\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1) \in \Delta^{n-1}$ i definim un altre paràmetre $\mu' = (\mu_{n-1}, \dots, \mu_1) \in \Delta^{n-1}$. Aleshores,

$$\|K_{\lambda_n} \circ K_{\lambda'}(u) - K_{\mu_n} \circ K_{\mu'}(u)\| = \|K_{\lambda_n} \circ K_{\lambda'}(u) - K_{\lambda_n}(u) \circ K_{\mu'}(u) + K_{\lambda_n}(u) \circ K_{\mu'}(u) - K_{\mu_n} \circ K_{\mu'}(u)\|$$

i per la desigualtat triangular,

$$\|K_{\lambda_n} \circ K_{\lambda'}(u) - K_{\mu_n} \circ K_{\mu'}(u)\| \leq \|K_{\lambda_n} \circ K_{\lambda'}(u) - K_{\lambda_n} \circ K_{\mu'}(u)\| + \|K_{\lambda_n} \circ K_{\mu'}(u) - K_{\mu_n} \circ K_{\mu'}(u)\|$$

d'on podem extreure que

$$\|K_{\lambda_n} \circ K_{\lambda'}(u) - K_{\mu_n} \circ K_{\mu'}(u)\| \leq \theta_1 \|K_{\lambda'}(u) - K_{\mu'}(u)\| + \|K_{\lambda_n} \circ K_{\mu'}(u) - K_{\mu_n} \circ K_{\mu'}(u)\|.$$

Si ara considerem un n suficientment gran, tenim que $\theta_n < 1$ ja que per hipòtesis $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$. Per tant $K_{\lambda'}$ és una contracció uniforme. Podem aplicar el teorema A.3. Podem escollir $\lambda'_j = (\lambda_j, \dots, \lambda_{j+n-1})$, veiem clarament que $K_{\lambda'_{(nj+l)}}(u_{(nj+l)})$ convergeix cap a un únic punt fix $K(\lambda, \dots, \lambda)$ que és $u_0(\lambda)$. Com a conseqüència, $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{nj+l} = u_0(\lambda)$ per a tot $0 \leq l \leq n-1$. D'aquest darrer es pot extreure que $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u_0(\lambda)$. \square

Observació A.1. *Si en el cas del teorema anterior, teorema A.4, considerem que $\lambda_i = \lambda$ per a tot $i = 1, \dots, n$, aleshores obtenim el teorema de Weissinger.*

A.2 Teorema de la convergència dominada de Lebesgue

Ara introduïrem dos resultats, el lema de Fatou i un conjunt de propietats, que serviran per a la demostració del teorema de la convergència dominada per Lebesgue.

Lema A.2. (Lema de Fatou) *Sigui $V \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. Sigui $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successió de funcions mesurables no negatives en V , aleshores,*

$$\int_V \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_n(u) du \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n(u) du. \quad (\text{A.5})$$

Proposició A.1. *Siguin f i g dues funcions integrals $L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores,*

- *Condicció de dominació: Sigui $f_n(u)$ una successió puntualment convergent tal que $|f_n(u)| \leq g(u)$ per a tot $n \geq 1$, aleshores, si $f(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u)$, $|f(u)| \leq |g(u)|$.*
- *Si f i g són funcions reals i $f \leq g$, llavors $\int_V f(u) du \leq \int_V g(u) du$.*
- $|\int_V f(u) du| \leq \int_V |f(u)| du$.

Teorema A.5. (Teorema de convergència dominada de Lebesgue) *Sigui $\{f_n\}_{n \leq 1}$ una successió de funcions mesurables en V tals que convergeixen puntualment cap a una funció f que és mesurable en V . Això és que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n(u) du = \int_V f(u) du \quad (\text{A.6})$$

per a quasi tot u de V . A més a més, suposem que aquesta successions de funcions estan dominades per una funció no negativa integrable g . És a dir, per a cada $n \geq 1$ i per a quasi tot $u \in V$,

$$|f_n(u)| \leq g(u). \quad (\text{A.7})$$

Aleshores les funcions f_n i f són integrables i es compleix que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V |f_n(u) - f(u)| du = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n(u) du = \int_V f(u) du. \quad (\text{A.9})$$

Demostració: Com que $|f_n(u)| \leq g(u)$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per a tot $n \geq 1$, aleshores $f_n \in L^1(U)$. Fixem-nos que $|f(u)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(u)|$ i per tant, per la condició de dominació, $|f(u)| \leq g(u)$ gaire bé per a tot $u \in V$. Per tant, com que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Provem ara les equacions A.8 i A.9. Considerem T la unió de conjunts de mesura 0 i canviem U per $U \setminus T$. Podem suposar que per a tot $u \in U$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = f(u) \\ \sup_{n \geq 1} |f_n(u)| \leq g(u).$$

Per la proposició A.1,

$$\left| \int_V f_n(u) du - \int_V f(u) du \right| = \left| \int_V (f_n(u) - f(u)) du \right| \leq \int_V |f_n(u) - f(u)| du.$$

Si ara fem tendir els límits,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_V f_n(u) du - \int_V f(u) du \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_V |f_n(u) - f(u)| du.$$

Fixem-nos que $|f_n(u) - f(u)| \leq |f_n(u)| + |f(u)| \leq 2g$ i per tant la funció mesurable $h_n = 2g - |f_n(u) - f(u)|$ és no negativa. Pel lema de Fatou A.2,

$$\int_V 2g(u) du = \int_V \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(u) du \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_V h_n(u) du = \int_V 2g(u) du - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_V |f_n(u) - f(u)| du.$$

Per demostrar aquesta última igualtat, hem de veure per la proposició A.1,

$$\int_V h_n(u) du = \int_V 2g(u) du - \int_V |f_n(u) - f(u)| du.$$

Així doncs, com que $\int_V 2g(u) du \in \mathbb{R}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_V |f_n(u) - f(u)| du \leq 0$ i per tant, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V |f_n(u) - f(u)| du = 0$. \square

D'aquest teorema en podem derivar dos corol·laris. El primer ens serà útil per a la demostració del teorema sobre l'equació de Volterra.

Corol·lari A.1. *Sigui $\{f_n(u)\}_n$ una família de funcions que convergeixen puntualment a $f(u)$. Sigui també $\{Df_n(u)\}_n$ la família de les seves derivades i suposem que convergeix puntualment a $g(u)$. Si localment existeix una funció dominant per $Df_n(u)$, aleshores $f(u)$ és diferenciable i $Df(u) = g(u)$.*

Demostració: La demostració s'obté a partir d'agafar els límits en l'equació

$$f_n(u) = f_n(u_0) + \int_{u_0}^u \dot{f}_n(t) dt.$$

□

Corol·lari A.2. *Suposem que $f(u, \lambda)$ és integrable respecte de u per a qualsevol λ i derivable amb derivada contínua respecte de λ per a qualsevol u . Si existeix una funció dominant $g(u)$ tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(u, \lambda) \right| \leq g(u)$, llavors*

$$F(\lambda) = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(u, \lambda) du \tag{A.10}$$

és derivable de derivada contínua. Particularment,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda) = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(u, \lambda) du. \tag{A.11}$$

B. Integrals primeres

El mètode de Melnikov és una eina molt útil en l'estudi de determinats sistemes físics pertorbatius. És per això que és convenient introduir algunes nocions bàsiques, però no gaire extenses, sobre integrals primeres i sistemes Hamiltonians en el pla.

Sigui l'equació diferencial ordinària autònoma bidimensional de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

on g i f són funcions de classe \mathcal{C}^1 de la forma

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.2})$$

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{B.3})$$

on Ω és un subconjunt de \mathbb{R}^2 obert. Així doncs, pode representar el camp vectorial X com

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (f(x, y), g(x, y)). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Denotem el flux associat a aquest sistema com $\phi : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definit segons $\phi_0(x, y) = \phi(0, x, y) = (x, y)$. Notem que usarem indistintament la notació $\phi_t(x, y) = \phi(t, x, y)$. Suposem a més a més que Ω és d'estrella respecte a un cert punt $(x_0, y_0) \in \Omega$, és a dir, per a tot (x, y) de Ω i tot \bar{t} de l'interval $[0, 1]$,

$$(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y)) = (x_0 + \bar{t}(x - x_0), y_0 + \bar{t}(y - y_0)) \in \Omega. \quad (\text{B.5})$$

Veiem que si definim $z = (x, y)$ l'equació (B.1) es pot escriure de la forma:

$$\dot{z} = X(x, y). \quad (\text{B.6})$$

Introduïm ara unes breus definicions:

Definició B.1. *Sigui $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial d'un sistema com el (B.4). Diem que X és integrable si existeix una funció $H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 (anomenada **integral primera**), que no és constant en cap obert però que és constant sobre les solucions de l'equació (3.18). De la mateixa manera, sigui $\phi : I \longrightarrow \Omega$ una solució de l'equació (B.4), aleshores $H(\phi(t)) = H(\phi(0))$.*

Definició B.2. *Sigui $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial d'un sistema com el (B.4). Diem que X és conservatiu si per a tot (x, y) de Ω , la seva divergència és 0, i.e. $\text{div} X = 0$, i.e.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Definició B.3. Sigui $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial d'un sistema com el (B.4). Un factor integrant de l'equació (B.4) és una funció $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , que no s'anul·la, tal que μX és un camp vectorial que a més a més és conservatiu, i.e. per a qualsevol (x, y) de Ω ,

$$f(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) + g(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) + \operatorname{div}(X(x, y))\mu(x, y) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Tot seguit, exposarem uns resultats força interessants.

Proposició B.1. Sigui $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial d'un sistema com el (B.4). En aquest cas diem que H és una integral primera d'aquest camp. Diem que aquest camp vectorial del pla és integrable si, i només si, existeix $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $DH(x, y)X(x, y) = 0$ per a tot (x, y) de Ω . Idènticament, si, i només si,

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} g(x, y) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Demostració: Un camp vectorial és integrable si, i només, per definició, existeix una funció

$$H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que és constant sobre les solucions. Sigui $\phi(t) = (x(t), y(t))$ una solució. Si $H(\phi(t)) = H(\phi(0))$, per a qualsevol t , és constant, aleshores, $\frac{dH(\phi(t))}{dt} = 0$. Veiem que, aplicant la **regla de la cadena** per la primera igualtat i substituint-hi l'equació (B.1).

$$\frac{dH}{dt}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)\dot{y} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} g(x, y) = DH(x, y)X(x, y)$$

on $(x, y) = (x(t), y(t))$. Si això és igual a 0 per a qualsevol (x, y) de Ω , aleshores és fàcil veure que H és constant per a qualsevol solució $\phi(t) \in \Omega$ i viceversa. \square

A partir d'aquí utilitzarem la notació de Leibniz, segons la qual, si considerem z dependent explícitament de y i y dependent explícitament de x , $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$. D'aquesta manera, donarem una expressió per a la derivada de composició de $f(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y))$ i de $g(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y))$ que ens simplificarà força la notació.

Proposició B.2. Tot camp del pla conservatiu X és localment integrable. Gràcies a això, podem considerar la funció $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida

$$H(x, y) = \int_0^1 (-g(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y)))(x - x_0) + f(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y))(y - y_0) d\bar{t}$$

que satisfà el que s'anomena **un sistema Pfaffià**:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y), \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

on les funcions f i g esta definides segons el sistema (B.1).

Demostració: En aquest cas, primerament hem de veure que efectivament és un camp integral i que es pot demostrar considerant el hamiltonià donat. Si considerem certa la condició

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y), \end{cases}$$

i substituïm en la proposició B.1, veiem que aquesta és igual a 0. Així doncs, ja hem demostrat que es tracta d'un camp pla integrable. Demostrem ara que és conservatiu.

Aplicuem el teorema de la derivada sota el signe de la integral,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 (-g(u, v)(x - x_0) + f(u, v)(y - y_0)) d\bar{t} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} (-g(u, v)(x - x_0) + f(u, v)(y - y_0)) d\bar{t} \\ &= \int_0^1 -\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}(x - x_0) - \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}(x - x_0) \\ &\quad + \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0) + f(u, v) d\bar{t}, \end{aligned}$$

on recordem $u = u(\bar{t}, x, y)$ i $v = v(\bar{t}, x, y)$. Per la propietat d'estrella de Ω mencionada a les consideracions teòriques, tenim que

$$\begin{cases} u(\bar{t}, x, y) = x_0 + \bar{t}(x - x_0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v(\bar{t}, x, y) = y_0 + \bar{t}(y - y_0) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \bar{t}. \end{cases}$$

Substituïnt:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 \left[-\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \bar{t}(x - x_0) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \bar{t}(y - y_0) + f(u, v) \right] d\bar{t}.$$

Si el camp és conservatiu, la divergència és 0 i per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

A més, podem calcular la derivada de f respecte de \bar{t} aplicant la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{df(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{d\bar{t}} &= \frac{\partial f(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial u} \frac{du(\bar{t})}{d\bar{t}} + \frac{\partial f(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial v} \frac{dv(\bar{t})}{d\bar{t}} \\ &= \frac{\partial f(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial u} (x - x_0) + \frac{\partial f(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial v} (y - y_0) \end{aligned}$$

on en la darrera igualtat hem fet servir les derivades calculades en la propietat d'estrella de Ω .

Substituïnt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} &= \int_0^1 \left[\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \bar{t}(x - x_0) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \bar{t}(y - y_0) + f(u, v) \right] d\bar{t} \\ &= \int_0^1 \left[\bar{t} \frac{df(u, v)}{d\bar{t}} + f(u, v) \right] d\bar{t} = \int_0^1 \frac{d(\bar{t}f(u, v))}{d\bar{t}} d\bar{t} = \bar{t}f(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y)) \Big|_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=1}. \end{aligned}$$

En la penúltima igualtat hem usat la regla del producte a la inversa.

Demostrem ara de la mateixa manera que $\frac{\partial H}{\partial x} = -g(x, y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 (-g(u, v)(x - x_0) + f(u, v)(y - y_0)) d\bar{t} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (-g(u, v)(x - x_0) + f(u, v)(y - y_0)) d\bar{t} \\ &= \int_0^1 -\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} (x - x_0) - \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} (x - x_0) \\ &\quad + \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} (y - y_0) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} (y - y_0) - g(u, v) d\bar{t}. \end{aligned}$$

Per la propietat d'estrella de Ω mencionada a les consideracions teòriques, tenim que

$$\begin{cases} u(\bar{t}, x, y) = x_0 + \bar{t}(x - x_0) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{t} \\ v(\bar{t}, x, y) = y_0 + \bar{t}(y - y_0) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Substituïnt:

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \int_0^1 \left[-\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \bar{t}(x - x_0) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \bar{t}(y - y_0) - g(u, v) \right] d\bar{t}.$$

Si el camp és conservatiu, la divergència és 0 i per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

A més, podem calcular la derivada de g respecte \bar{t} aplicant la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} -\frac{dg(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{d\bar{t}} &= -\frac{\partial g(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial u} \frac{du(\bar{t})}{d\bar{t}} - \frac{\partial g(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial v} \frac{dv(\bar{t})}{d\bar{t}} \\ &= -\frac{\partial g(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial u} (x - x_0) - \frac{\partial g(u(\bar{t}), v(\bar{t}))}{\partial v} (y - y_0) \end{aligned}$$

on en la darrera igualtat hem fet servir les derivades calculades en la propietat d'estrella de Ω .

Substituïnt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} &= \int_0^1 \left[-\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} \bar{t}(x - x_0) - \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \bar{t}(y - y_0) - g(u, v) \right] d\bar{t} \\ &= \int_0^1 \left[-\bar{t} \frac{dg(u, v)}{d\bar{t}} - g(u, v) \right] d\bar{t} = \int_0^1 \frac{-d(\bar{t}g(u, v))}{d\bar{t}} d\bar{t} = -g(u(\bar{t}, x, y), v(\bar{t}, x, y)) \Big|_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=1}. \end{aligned}$$

□

Demostrem ara la següent proposició:

Proposició B.3. *Sigui $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un camp vectorial d'un sistema com el (B.4). Si existeix un factor integrant, μ , aleshores X té una integral primera.*

Demostració: Si existeix un factor integrant, aleshores el camp μX és un camp conservatiu. Per la definició μX és integrable i per la definició existeix una funció H de classe \mathcal{C}^1 integral primera

de μX tal que:

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \mu(x, y) f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \mu(x, y) g(x, y) = 0$$

i per tant,

$$\mu(x, y) \left(\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} g(x, y) \right) = 0.$$

Com que $\mu(x, y)$ és diferent de 0 per definició,

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} g(x, y) = 0,$$

i per definició X és integrable i per tant, té una integral primera. □

C. Programa

En aquest annex s'adjunta el programa en FORTRAN usat en el capítol 4. Hi ha un total de tres fitxers de FORTRAN i un de gnuplot que també adjuntem per si el lector té interès en saber com s'han dibuixat els gràfics i la regressió lineal. L'algoritme següent és senzill i no necessita massa explicacions.

El primer fitxer són les funcions de fortran usades, que corresponen als sistemes d'equacions que volem calcular.

```
subroutine derivad(t, yyin, k, nequs)
    implicit none
    common/parameter/epsilon
    common/exponential/n
    double precision :: epsilon
    integer nequs, n
    double precision t, yyin(nequs), k(nequs)

    k(1) = yyin(2)
    k(2) = - sin(yyin(1)) + epsilon*(yyin(2)**n)

    return
end subroutine
```

```
subroutine reversderivad(t, yyin, k, nequs)
    implicit none
    common/parameter/epsilon
    common/exponential/n
    double precision :: epsilon
    integer nequs, n
    double precision t, yyin(nequs), k(nequs)

    k(1) = - yyin(2)
    k(2) = sin(yyin(1)) - epsilon*(yyin(2)**n)

    return
end subroutine
```

En el segon fitxer tenim un sol pas del mètode de Runge-Kutta.

```

c -----
c -----
c Subrutina que integra una equacio mitjan ant el metode
c de Runge Kutta d'ordre 4
    subroutine miRungeKutta4(derivad , t , dt , yyin , nequs , yyout)
        implicit none
        external derivad
c Nombre d'equacions
        integer nequs , i
c t:variable independent , dt=h (pas)
c yyin(nequs): vector amb el pas previ (y0-incial)
c yyout(nequs): vector amb el seguent pas (y1-resultant)
        double precision t , dt , yyin(nequs) , yyout(nequs)
c k1,k2,k3,k4 vectors de dimensio nequs amb els pasos
c del metode de RK4
        double precision , dimension(nequs) :: k1 , k2 , k3 , k4
c yy(nequs): vector amb el pas intermig per poder calcular
c el nou pas de runge kutta
        double precision yy(nequs)
c     Calculem el valor de k1
        call derivad(t , yyin , k1 , nequs)
c     Generem un vector(nequs) amb el pas posterior a l'inicial
        do i= 1 , nequs
            yy(i)=yyin(i)+(dt/2.d0)*k1(i)
        enddo
c     Calculem el valor de k2
        call derivad(t+dt/2.d0 , yy , k2 , nequs)
c     Generem un vector(nequs) amb el pas posterior a l'anterior
        do i= 1 , nequs
            yy(i)=yyin(i)+(dt/2.d0)*k2(i)
        enddo
c     Calculem el valor de k3
        call derivad(t+dt/2.d0 , yy , k3 , nequs)
c     Generem un vector(nequs) amb el pas posterior a l'anterior
        do i= 1 , nequs
            yy(i)=yyin(i)+dt*k3(i)

```

```

        enddo
c      Calculem el valor de k2
        call derivad(t+dt,yy,k4,nequs)
c      Generem un vector(nequs) amb els valors del pas final
        do i=1,nequs
            yyout(i)=yyin(i)+(dt/6.d0)*(k1(i)+2.d0*k2(i)+2.d0*k3(i)+k4(i))
        enddo
        return
    end subroutine
c _____

```

Finalment, el fitxer principal conté l'algoritme d'aplicació. S'han de determinar els valors de les condicions inicials per a cada cas $n = 1$ o $n > 1$, donar el valor de n interessat, un valor màxim del paràmetre i un valor mínim així com el nombre de valors de paràmetre que vols calcular. També s'ha de definir una tolerància.

```

c—INCLUDE EXTERNAL FILES—
c_____
c_____
        include "rk4.f"
        include "function.f"
c_____
c_____
c—MAIN PROGRAM—
c_____
        program melnikov
c_____
c—VARIABLE DECLARATION—
        implicit none

        external derivad, reversderivad
        integer :: nequs, i, j, comptador, securityrk=10000000
        integer :: securitynew=1000000
        double precision :: epsilon=1.e-8, pi= 4.d0*atan(1.d0), tol=1E-10
        double precision :: eps_max= 1.e-2
        integer :: pas=100, n
        double precision :: h,t1, dt1, t2, dt2
        double precision, dimension(2):: yyin, yyin0.1, yyin0.2, yyout

```

```

    double precision , dimension (2):: yyout_1 , yyout_2
    common/parameter/epsilon
    common/exponential/n
c-----
c—OPENING FILE—
    write (*,*) "Opeing File"
    open (unit = 11, file= "melnikov.dat", status = "unknown")
    open (unit = 12, file= "punts2.dat", status = "unknown")
    open (unit = 13, file= "punts1.dat", status = "unknown")
    write (*,*) "File opened, not mistake detected"
c-----
c—VARIABLE VALUES—
    n=1
    nequs = 2
    h = (eps_max-epsilon)/dble(pas)
c-----
c—ALGORITHM—
c    First loop controls epsilon value
    epsloop:do j = 1, pas
        if(n.le.2) then
            yyin0_1(2)= 1E-3*(epsilon+sqrt((epsilon)**2+4))/2.d0
            yyin0_1(1) = -pi + 1E-3
            yyin0_2(1) = pi - 1E-3
            yyin0_2(2) = -1E-3*(epsilon - sqrt((epsilon)**2+4))/2.d0

            else
            yyin0_1(2)= 1E-3
            yyin0_1(1) = -pi + 1E-3
            yyin0_2(1) = pi - 1E-3
            yyin0_2(2) = 1E-3
        endif

        dt1= 5E-3
        dt2= 5E-3
c-----
c—Unstable manifold—
c-----

```

```

c          Inisialization conditions (y,x) and time
          yyin= yyin0_1
          t1=0.d0
c          Loop of Runge kutta , just a maximum if
c          there is a mistake
          RKloop1:do i=1, securityrk
          call miRungeKutta4(derivad ,t1 ,dt1 ,yyin ,nequs ,yyout)
c          Writing results of RK
          write(13,*) epsilon , yyout(1), yyout(2)
c          we increment time
          t1= t1+dt1
c          We have pass 0 value
          if (yyout(1).ge.0.d0) then
              exit RKloop1
c
          endif
c          In order to repeat Runge Kutta ,
c          we determine new initial point
          yyin = yyout
          enddo RKloop1
c          Security comprovements
          if (i.ge.securityrk) then
              stop
          endif
c          We start Newton process
          newtonloop1: do i=1, securitynew
              if(dabs(yyout(1)-0.d0).le.tol) then
c                  Traspassing results
                  yyout_1 = yyout
                  exit newtonloop1
              else
c                  Compute new dt
                  dt1 = -yyout(1)/yyout(2)
c                  We redesign
                  yyin= yyout
c                  Apply Runge Kutta
                  call miRungeKutta4(derivad ,t1 ,dt1 ,yyin ,nequs ,yyout)

```



```

c                                     Traspassing results
                                     yyout_2 = yyout
                                     exit newtonloop2
                                     else
c                                     Compute new dt
                                     dt2 = yyout(1)/yyout(2)
c                                     We redesign
                                     yyin= yyout
c                                     Apply Runge Kutta 1 step
call miRungeKutta4(reversderivad ,t2 ,dt2 ,yyin ,nequs ,yyout)
                                     write(12,*) epsilon , yyout(1) , yyout(2)
                                     t2=t2+dt2
                                     endif
                                     enddo newtonloop2
c                                     Security comprovements
                                     if (i.ge.securitynew) then
                                     write(*,*) "Problems security Newton 2"
                                     stop
                                     endif
c                                     We plot epsilon , error
                                     write(11,*) epsilon , yyout_1(2)-yyout_2(2)
c                                     Next epsilon
                                     epsilon=epsilon+h
                                     enddo epsloop
c                                     Closing files
                                     close(11)
                                     close(12)
c                                     Ploting
                                     call system("gnuplot -p plot.gnu")
                                     end program
c
c—End of the program—
c
c

```

Finalment, com a curiositat, incorporem els dos fitxers de gnuplot usats.

```

reset
set terminal png
set output "grafic1.png"
set size 1,1
set xlabel "Parametre"
set ylabel "Distancia"
set format x "%g"
set format y "%g"
f(x) = m*x + b
fit f(x) "melnikov.dat" using 1:2 via m, b
mq_value = sprintf("Valors de la regressio\nm = %f \nq = %f", m, b)
set label 1 at 0.006, 0.01 left mq_value
set key top left
plot "melnikov.dat" using 1:2 with points title
"Distancia (parametre)", \
f(x) lw 2 title "Regressio lineal"
unset label 1

```

```

set output "grafic2.png"
set format x "%g"
set format y "%g"
set format z "%g"
set yrange [0:0.01]
set xlabel "x" offset -2, -1
set ylabel "Parametre" offset 3, -2
set zlabel "y" offset 2,2
splot "punts1.dat" using 2:1:3 with points title "Inestable", \
"punts2.dat" using 2:1:3 with points title "Estable"

```

```

reset
set terminal png
set output "grafic1.png"
set size 1,1
set xlabel "Parametre"
set ylabel "Distancia"
set format x "%g"

```

```
set format y "%g"  
f(x) = 4*x  
set key bottom right  
plot "melnikov.dat" using 1:2 with points title  
"Distancia (parametre)", \  
f(x) lw 2 title "Aproximacio lineal distancia =4*parametre "
```

Bibliografia

- [1] Vladimir Arnold. *Ordinary Differential Equations*. The Massachusetts Institute of Technology, 1a edició edition, 1973.
- [2] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2a edició edition, 2012.
- [3] Jorge Sotomayor. *Equações diferenciais ordinárias*. USP, 2011.
- [4] V. Melnikov. On the stability of a center for time-periodic perturbations. *Tr. Mod. Maat. Obs.*, 1964.
- [5] Carmen Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer-Verlag New York, 2a edició edition, 2006.
- [6] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag New York, 2a edició edition, 2003.
- [7] L. Elden and L. Wittmeyer-Koch. *Numerical Analysis, An Introduction*. Academic Press, INC, 1990.
- [8] Suchismita Ghosh, Anish Deb, and Gautam Sarkar. On-line block pulse implementation of a sine wave using microprocessor. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 45(6):1626–1632, jul 2012.
- [9] Guo You-zhong, Liu Zeng-rong, Jiang Xia-mei, and Han Zhi-bin. Higher-order Melnikov method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 12(1):21–32, jan 1991.
- [10] Vladimir S. Aslanov. Deployment, Dynamics, and Control of a Tether-Assisted Return Mission of a Reentry Capsule. In *Rigid Body Dynamics for Space Applications*, pages 179–253. Elsevier, jan 2017.
- [11] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [12] Mattia Cenedese and George Haller. How do conservative backbone curves perturb into forced responses? A Melnikov function analysis. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 476(2234), feb 2020.
- [13] Àlex Haro. Apunts d’EDOS. Universitat de Barcelona.
- [14] Joan Fàbrega. Apunts d’anàlisi Real. Universitat de Barcelona. 2020.
- [15] K. Maleknejad and B. Rahimi. Modification of Block Pulse Functions and their application to solve numerically Volterra integral equation of the first kind. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(6):2469–2477, jun 2011.
- [16] Alejandro García. El método de Melnikov. Universidad Metropolitana Autónoma. Congreso de la SMM, 2001.