Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Valoració d'opcions financeres

Autora: Idoia Altaba Balsebre

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2022

Abstract

In the financial world, like in others, greater and greater the speed with which they are performed is increasingly valued according to which tasks. Looking for mechanisms that allow you to assess financial options fairly and, therefore, set appropriate premiums has long become a necessity for investors. And that's where mathematics comes into play. Calculations like these, thanks to them, have been automated, thus promoting the agility in the negotiations. The aim of this work is for the reader to internalize some of the most basic notions of financial options. In this way, we will be able to understand later how the most relevant models in this field can be deduced: the binomial, discrete time, and the Black-Scholes, continuous time.

Resum

En el món de les finances, com en qualsevol altre, cada cop es valora més la rapidesa amb què s'exerceixen segons quines tasques. Cercar mecanismes que permetin valorar opcions financeres de forma justa i, per tant, establir primes adequades, s'ha convertit, des de fa temps, en una necessitat per als inversors. I és aquí on entren en joc les matemàtiques. Càlculs com aquests, gràcies a elles, s'han automatitzat, promovent així l'agilització en les negociacions. Amb aquest treball es pretén que el lector interioritzi algunes les nocions més bàsiques de les opcions financeres, per, d'aquesta manera, poder arribar a entendre després com es dedueixen dos dels models més rellevants d'aquest àmbit: el binomial, a temps discret, i el de Black-Scholes, a temps continu.

2010 Mathematics Subject Classification. 91G20, 91G30, 91G50

Agraïments

En primer lloc, m'agradaria agrair al meu tutor, el Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia, la disposició que ha mostrat en tot moment i el temps i l'esforç que ha dedicat en aquest treball.

També vull donar les gràcies a la meva família per brindar-me l'oportunitat d'estudiar. Si no hagués estat per ells, ara mateix no estaria escrivint aquestes paraules. Gràcies de tot cor.

I no puc no mencionar a totes aquelles persones que s'han creuat en el meu camí durant aquests anys. Han fet d'aquesta etapa, una etapa inoblidable.

Índex

1 Introducció

Un estudi dut a terme per la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona afirma que un 15 % dels seus llicenciats en Matemàtiques en el període de 2003 a 2007 va trobar feina abans d'un any en sectors com la banca, les finances i les assegurances. I la veritat és que puc donar fe d'això. Igual que jo, alguns dels amics que he fet durant la carrera també estan interessats en aquest àmbit i tenen pensat encarar el seu futur laboral cap aquí. Amb aquest treball m'agradaria posar el meu granet de sorra ajudant a persones que estan en aquesta mateixa situació, a matemàtiques i matemàtics que volen obrir-se pas en el món financer, a ampliar els seus coneixements sobre aquest tema. La valoració d'opcions financeres és una branca de les finances que requereix un alt domini matemàtic. Darrere de les fórmules del model binomial i del de Black-Scholes hi ha una certa complexitat matemàtica que si no estàs familiaritzat amb ella pot arribar a resultar complicat entendre d'on sorgeixen. Això em fa pensar que un matemàtic pot guanyar terreny i destacar força en aquesta àrea. I aquest és un dels motius pel qual vaig decidir fer el Treball de Final de Grau sobre la valoració de les opcions financeres.

El fet de donar valor a un derivat financer (una opció financera, tal com es veurà en el segon capítol d'aquest treball, no és res més que un tipus de derivat financer) és un assumpte que ja fa temps que inquieta a la humanitat. Segons expliquen Aznar, Cayo, López i Vivancos en el llibre *Valoración por Opciones reales*, els derivats financers van sorgir a l'edat mitjana davant la necessitat d'atorgar certa protecció o cobertura a l'agricultor cerealista enfront de les possibles fluctuacions que podien arribar a experimentar els preus d'aquestes plantes. A causa de la diferència que es produïa entre l'oferta i la demanda, en anys d'escassetat podia obtenir més ingressos que no pas en anys d'abundant collita. D'altra banda, el comerciant que li comprava els cereals es veia en la necessitat de poder adquirir-los a un preu que li permetés gestionar el seu negoci sense sobresalts. Per eliminar l'evident risc al qual estaven exposats ambdós subjectes, es va proposar la creació d'una mena de contracte en el qual el comerciant es comprometia a comprar en el moment de la collita els cereals a l'agricultor a un preu ja pactat entre tots dos. Aquest contracte ha anat evolucionant al llarg del temps fins a convertir-se en el que es coneix avui en dia com a derivat financer.

El projecte

La idea d'aquest treball sorgeix de la inquietud que em va començar a despertar l'àmbit financer durant el tercer curs del grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Que va ser just quan em vaig topar amb l'assignatura de Modelització, un primer contacte amb tot aquest món, segons el meu parer, una mica massa curt. Com a un nen quan li treuen el caramel de la boca, a mi em va passar exactament el mateix. Tot i que ja em rondava pel cap, aquesta sensació va ser la que em va acabar impulsant a fer la menció en Economia. Vaig adonar-me, un cop cursades les optatives, que encara em quedava molt per saber i vaig creure que era adient escollir un tema per al meu Treball de Final de Grau que estigués relacionat tant amb les Matemàtiques com amb l'Economia, puix que podia ser una brillant oportunitat per ampliar els meus coneixements sobre aquesta segona matèria. Tenia present que en aquest treball les Matemàtiques havien de tenir un gran pes, per això, després que pegar-li moltes voltes, vaig pensar que era una molt bona opció, mai més ben dit, fer-lo sobre la valoració d'opcions financeres.

Estructura de la Memòria

La meva intenció, com ja he comentat en la introducció, és que aquest treball sigui de caràcter divulgatiu. M'agradaria que persones amb avançats coneixements matemàtics, gràcies a aquest treball, poguessin arribar a comprendre aquesta branca de les finances que està tan relacionada amb el que ells dominen, amb la matemàtica. I això explica el perquè de la seva estructura:

Primer, necessitava nodrir-me de tots aquells conceptes bàsics que em serien de gran utilitat per, posteriorment, poder demostrar les fórmules que s'empren per valorar opcions financeres mitjançant el model binomial i el de Black-Scholes. És per això que en el segon capítol, per tal que el lector comenci a situar-se, vaig definir un seguit de mots que alguns, inclús, estan acompanyats d'un exemple.

Tot seguit, volia ampliar tota aquesta part més teòrica del treball afegint un tercer capítol on es detallessin els diversos tipus d'opcions financeres que existeixen. Vaig creure convenient dur a terme tres distincions diferents: segons el dret que atorguen, segons el benefici del comprador i segons el moment d'execució. I finalment, en l'apartat 3.4, vaig parlar de les opcions exòtiques. En aquest capítol també vaig incloure uns quants exemples quan ho creia oportú.

L'últim capítol el vaig dividir en quatre apartats. En el primer, vaig especificar quins paràmetres influeixen en la valoració d'opcions financeres i com ho fan. En el segon, vaig exposar quatre ràtios que es fan servir per mesurar el grau d'influència que té cadascun dels paràmetres esmentats en l'apartat anterior. I en el tercer i quart, vaig demostrar, respectivament, la fórmula del model binomial i la del de Black-Scholes, incloent-hi un exemple pràctic en cada cas.

2 Introducció a les opcions financeres

Les opcions financeres són un tipus de derivats financers. Així doncs, és necessari introduir el concepte de derivat financer abans d'entrar en matèria amb les opcions financeres.

Definició 2.1. *Un* ***derivat financer*** *és un actiu financer*[1] *el valor del qual es deriva dels canvis produïts en el valor d'un altre actiu, aquest segon anomenat actiu subjacent. Cal tenir en compte que existeix una gran varietat de possibles actius subjacents: matèries primeres, accions*[2]*, índexs borsaris*[3]*, valors de renda fixa*[4]*...*

També es pot definir un ***derivat financer*** *com un contracte a termini els detalls del qual s'estableixen en el moment de l'acord, però la transacció, en canvi, es realitza posteriorment en una data ja estipulada.*

Per acabar d'entendre el concepte de derivat financer, el lector pot llegir l'exemple següent extret de la pàgina *web* de la Comisión Nacional de Mercado de Valores:

Exemple 2.2. Imaginem-nos que hem anat a la fruiteria del costat de casa a comprar un quilogram de taronges. L'habitual és que el paguem al preu establert en el moment del lliurament, o sigui, que l'acord i la transacció es realitzin alhora.

Suposem ara que hem acordat amb el fruiter que la setmana vinent ell ens vendrà un altre quilogram de taronges, però aquest al preu al qual estan avui. Per tant, la variació que experimentarà el preu d'aquesta fruita jugarà a favor nostre si puja o en contra si baixa.

Aquesta mena de contracte a termini es pot interpretar com un derivat financer, ja que tant la quantitat de taronges que comprarem com el preu al qual ho farem (detalls del contracte) ho determinem amb el fruiter en el moment de l'acord i l'intercanvi (transacció), en canvi, el durem a terme en una data futura ja pactada.

Hi ha diversos tipus de derivats financers segons el tipus de contracte. Els més coneguts, però, són els futurs[5] i les opcions. D'ara endavant, atès que són el focus del treball, només es tindran en consideració les opcions. No obstant això, el lector, si ho desitja, pot trobar la definició de futur al peu d'aquesta pàgina.

---

[1] **Actiu financer**: instrument financer que atorga al seu comprador el dret a rebre ingressos futurs per part del venedor.

[2] **Acció**: actiu financer de rendibilitat incerta que representa una fracció del capital d'una societat anònima.

[3] **Índex borsari**: indicador que s'obté ponderant un conjunt de valors cotitzats en una borsa de valors.

[4] **Renda fixa**: tipus d'inversió formada per actius financers l'emissor dels quals està obligat a efectuar els pagaments acordats en un període de temps prèviament establert. El remitent d'una renda fixa té garantida tant la devolució del capital invertit com una certa rendibilitat que treu d'aquest.

[5] **Futur**: derivat financer que obliga el seu posseïdor a comprar o vendre un actiu financer, conegut amb el nom d'actiu subjacent, per un import determinat i a tot tardar a una data ja fixada. El contracte de l'exemple 2.2 es tracta d'un futur, puix que la setmana que ve el fruiter es veurà obligat a vendre't un quilogram de taronges al preu al qual es troben avui.

Definició 2.3. *Una* ***opció financera*** *és un derivat financer que concedeix al seu posseïdor el dret, però no l'obligació, a comprar o vendre un actiu financer per un import determinat i a tot tardar a una data ja fixada. El posseïdor d'una opció financera, per tal d'adquirir aquest dret, ha de pagar un preu que és conegut amb el nom de prima. En el quart capítol d'aquest treball s'expliquen un parell de procediments per calcular-la: el model binomial i el model de Black-Scholes.*

L'exemple que hi ha a continuació pot ser-li útil al lector per acabar d'entendre el concepte d'opció financera:

Exemple 2.4. Suposem que ens trobem en la mateixa situació que en l'exemple 2.2, però l'acord al qual hem arribat ara amb el fruiter és que la setmana que ve nosaltres podrem comprar-li un quilogram de taronges al preu al qual es troben avui. La variació que experimentarà el preu d'aquesta fruita, igual que en l'exemple anterior, jugarà a favor nostre si puja o en contra si baixa. I aquest serà un aspecte clau que tindrem en compte a l'hora de decidir si efectuar o no la compra.

Aquest contracte a termini es pot entendre com una opció financera, perquè tant la quantitat de taronges que podrem comprar com el preu al qual ho podrem fer (detalls del contracte) ho determinem amb el fruiter en el moment de l'acord i l'intercanvi (transacció), en canvi, l'efectuarem, en cas que finalment ens decantem per realitzar la compra, en una data futura que ja haurem pactat amb ell.

Observació 2.5. Convé remarcar que el posseïdor d'una opció financera no té per què exercir el dret que aquesta li atorga. Això és just el que les distingeix dels futurs. D'una banda, el posseïdor d'un futur es compromet a comprar o vendre un actiu financer per un cert preu i no més tard d'un moment futur predeterminat i, de l'altra, el d'una opció té, com el seu nom indica, l'opció de comprar o vendre un actiu financer per un cert preu i no més tard d'un moment futur predeterminat.

Arribats a aquest punt, cal introduir un seguit de definicions que seran de gran utilitat a l'hora d'entendre certs conceptes que s'expliquen més endavant:

Definició 2.6. *L'****actiu subjacent*** *és l'actiu financer que està subjecte a l'opció i que és objecte d'intercanvi. Cal insistir que és el posseïdor de l'opció qui disposa del seu dret. En la definició de derivat financer ja s'han fet quatre pinzellades sobre els diferents tipus d'actius subjacents que existeixen. A continuació, però, es mostra una classificació més detallada:*

- *Actius subjacents no financers:*
  - *Matèries primeres d'origen vegetal: cafè, cacau, blat de moro...*
  - *Matèries primeres d'origen animal: porcs, pollastres, vedells...*
  - *Matèries primeres d'origen mineral: or, plata, coure...*
  - *Matèries primeres d'origen fòssil: gas, petroli...*

- *Actius subjacents financers:*
  - *Accions: de google, d'Amazon, d'Apple...*
  - *Índexs borsaris: IBEX 35*[6]*, FTSE 100*[7]*, Dow Jones*[8]*...*
  - *Actius de renda fixa: lletres del tresor*[9]*, bons de l'Estat*[10]*, obligacions de l'Estat*[11]*...*

Definició 2.7. *La* ***data de venciment****, T, és la data acordada entre el comprador i el venedor de l'opció a la qual el comprador d'aquesta, el seu posseïdor, deixa de disposar del dret sobre l'actiu subjacent.*

Definició 2.8. *El* ***preu de l'actiu subjacent****, S_0, és el preu de l'actiu subjacent en el moment en què el posseïdor de l'opció adquireix el dret sobre aquest.*

Definició 2.9. *El* ***preu d'exercici*** *(o* ***preu strike****), K, és el preu pactat entre el comprador i el venedor de l'opció pel qual el comprador d'aquesta, el seu posseïdor, té la possibilitat de comprar o vendre l'actiu subjacent no més tard de la data de venciment. Serveix de referència a l'hora de deduir-ne les pèrdues o els beneficis.*

Definició 2.10. *La* ***volatilitat del preu de l'actiu subjacent****, σ, és el paràmetre que mesura la velocitat a la qual varia el preu del subjacent. Es diu que el preu d'un subjacent té una alta volatilitat quan aquest tendeix a moure's amb rapidesa i, contràriament, es diu que el preu d'un subjacent té una baixa volatilitat quan aquest no acostuma a experimentar grans variacions. A mesura que augmenta la volatilitat del preu de l'actiu subjacent, també s'incrementa la probabilitat que aquest prengui valors molt més alts o molt més baixos. Això, d'entrada, pot semblar que no comporta cap risc per al venedor de l'opció, ja que aquests dos possibles resultats que pot experimentar el preu del subjacent tendeixen a compensar-se entre si. No passa el mateix, però, amb el comprador de l'opció. Si aquest, en comprar l'opció, adquireix el dret a comprar l'actiu subjacent, el benefici positiu que rebrà en cas que el preu d'aquest pugi és, en valor absolut, superior al benefici negatiu al qual haurà d'atendre en cas que baixi. De manera similar, si el comprador de l'opció, en comprar-la, obté el dret a vendre l'actiu subjacent, el benefici positiu que aconseguirà en*

[6] **IBEX 35**: índex borsari de referència de la borsa espanyola. Està format per les 35 empreses amb més liquiditat que cotitzen en el Sistema d'Interconnexió Borsària Espanyol, SIBE, integrat per les quatre borses espanyoles (Madrid, Barcelona, València i Bilbao). Les seves sigles provenen d'Iberia Index.

[7] ***FTSE 100***: índex borsari de referència de la Borsa de Londres. És conegut informalment com a *Footsie 100*. El componen les 100 empreses de més capitalització borsària del Regne Unit. *FTSE* és l'acrònim de *Financial Times Stock Exchange*.

[8] ***Dow Jones***: índex borsari construït per les 30 empreses amb major capitalització borsària de la Borsa de Nova York, exceptuant les de transport i les de serveis públics. Va ser creat per Charles Henry Dow i Edwar Jones, d'aquí el seu nom.

[9] **Lletra del tresor**: actiu de renda fixa a curt termini (3, 6, 9 o 12 mesos) emès per l'Estat. És un actiu emès al descompte, això significa que el preu d'adquisició és inferior a l'import que rebrà l'inversor en el moment del reemborsament.

[10] **Bo de l'Estat**: actiu de renda fixa a mitjà termini (2, 3 o 5 anys) emès per l'Estat. Genera, al llarg de la seva vida, un tipus d'interès fix que s'abona mitjançant quotes anuals.

[11] **Obligació de l'Estat**: actiu de renda fixa a llarg termini (10, 15 o 30 anys) emès per l'Estat. Igual que un bo de l'Estat, aquest actiu també genera, al llarg de la seva vida, un tipus d'interès fix que s'abona mitjançant quotes anuals.

cas que el preu d'aquest baixi és, en valor absolut, superior al benefici negatiu al qual haurà de respondre en cas que pugi. El motiu pel qual això succeeix s'especifica en l'apartat 3.1.

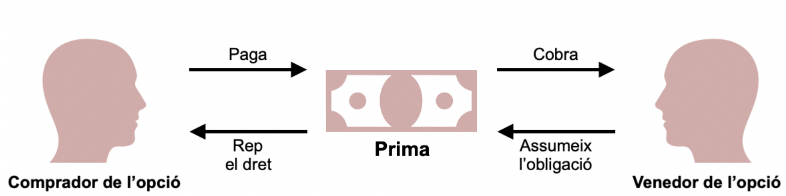
Quan es parla de volatilitat és summament important tenir present si es tracta d'una volatilitat històrica o d'una volatilitat implícita.

La ***volatilitat històrica del preu de l'actiu subjacent*** *mesura la velocitat a la qual ha variat el preu del subjacent durant un període de temps ja transcorregut. Es tracta d'una volatilitat passada i que, per tant, no té perquè repetir-se en el futur. Sovint es calcula anualment, però, com que canvia constantment, també es pot calcular per a marcs temporals més curts. Això sí, cal tenir sempre coneixença del període de temps per al qual s'ha calculat.*

La ***volatilitat implícita del preu de l'actiu subjacent****, altrament, és l'estimació, feta a temps real pels diferents subjectes que participen en l'opció, de com variarà en el futur aquest preu. Està clar que és impossible predir amb total certesa el comportament futur dels preus, és per això que el fet de negociar opcions implica apostar per una determinada volatilitat implícita del preu del subjacent.*

La volatilitat del preu de l'actiu subjacent cobra una gran importància a l'hora de valorar opcions. Si el preu del subjacent fluctua molt, el ventall de possibles preus que pot arribar a prendre és més ampli i, per tant, resulta més complicat preveure el preu exacte que adquirirà en un futur. Així doncs, tal com ja s'ha comentat prèviament, com més gran sigui la variació que pot experimentar el preu del subjacent, la possibilitat que aquest evolucioni a favor del comprador de l'opció també és més alta i, conseqüentment, és lògic pensar que el venedor vulgui exigir una prima més elevada.

Definició 2.11. *La* ***prima*** *és l'import que el comprador de l'opció paga al venedor d'aquesta per tal d'adquirir el dret sobre l'actiu subjacent. Per tant, el venedor, independentment de si el comprador acaba exercint o no el seu dret, sempre cobra la prima. No és cap mena de garantia per al comprador de l'opció, es tracta d'un cost.*



La prima es pot descompondre, en una primera aproximació, en dos valors avaluats en un cert instant t, l'intrínsec i l'extrínsec:

$$Prima = Valor\ intrínsec\ en\ l'instant\ t + Valor\ extrínsec\ en\ l'instant\ t.$$

El ***valor intrínsec*** *en l'instant t, VI_t, és el benefici no negatiu, calculat sense tenir en compte la prima, que obtindria el posseïdor de l'opció en aquest mateix moment t en què s'està valorant en cas que decidís exercir el seu dret sobre l'actiu subjacent. Cal insistir que aquest valor mai és negatiu, ja que és zero sempre que el posseïdor de l'opció no exerciria el seu dret sobre el subjacent perquè, si ho fes, el benefici que rebria seria negatiu. Es tornarà a parlar del valor intrínsec en l'apartat 3.2.*

$$VI_t = \begin{cases} max\{0,\, S_t - K\} & si\ dret\ a\ compra \\ max\{0,\, K - S_t\} & si\ dret\ a\ venda \end{cases},$$

on S_t és el preu de l'actiu subjacent en l'instant t i K és el preu strike.

Ara bé, el ***valor extrínsec****, també conegut com a* ***valor temporal****, en l'instant t, VE_t, és l'import màxim que estaria disposat a pagar el posseïdor de l'opció en aquest mateix moment t en què s'està valorant per tal d'aprofitar-se de l'evolució favorable que aparentment presenta el preu del subjacent. Com que la prima és el preu màxim que està disposat a pagar el posseïdor de l'opció en el moment de la seva compra per adquirir el dret sobre l'actiu subjacent, és lògic pensar que l'import que estaria disposat a pagar en qualsevol instant t no posterior a la data de venciment per continuar gaudint d'aquest dret, o sigui, el valor extrínsec en l'instant t sigui menor o igual que la prima. Afegir, també, que aquest valor pot variar en funció de diversos paràmetres. D'una banda, és més gran com més gran és el temps que resta per al venciment de l'opció i, de l'altra, depèn fortament de la volatilitat de l'actiu subjacent. Si en un cert instant t la volatilitat és 0, és a dir, si no hi ha cap mena d'indici que faci pensar que el preu del subjacent pugui variar, aleshores el valor extrínsec en aquest instant també seria 0 i, conseqüentment, la prima coincidiria amb el valor intrínsec. Si es coneix la prima, la manera més senzilla de calcular-lo és la següent:*

$$VE_t = Prima - VI_t = \begin{cases} \textit{Prima - max\{0, } S_t - K\} & \textit{si dret a compra} \\ \textit{Prima - max\{0, } K - S_t\} & \textit{si dret a venda} \end{cases},$$

on S_t és el preu de l'actiu subjacent en l'instant t i K és el preu strike.

De primeres, pot resultar complex i costós comprendre aquests dos conceptes i saber diferenciar-los. L'exemple següent, extret de la pàgina *web* de la Comisión Nacional de Mercado de Valores, pot ser de gran ajuda per acabar d'entendre a què es refereixen:

Exemple 2.12. Suposem que es vol vendre un cavall de carreres i que s'opta per subhastar-lo. Suposem també que el preu de sortida de la subhasta coincideix amb la mitjana dels preus dels cavalls que són de la mateixa raça i que tenen la mateixa edat que aquest, però que no compten amb les condicions necessàries per participar en l'alta competició. Aquest preu amb el qual s'inicia la subhasta seria l'equivalent al valor intrínsec. Imaginem-nos ara que, com és habitual, la subhasta acaba amb un preu superior al de sortida. La diferència entre aquests dos preus és un clar reflex de les expectatives que el cavall guanyi alguna carrera al llarg de la seva vida, que no pateixi cap malaltia greu i de tots aquells factors que puguin influir en el seu èxit o fracàs. El resultat d'aquesta diferència seria assimilable al valor temporal.

Definició 2.13. *El* ***comprador*** *(o* ***subjecte que es troba en la posició llarga***[12]*) és qui posseeix el dret sobre l'actiu subjacent. El benefici que obtindria aquest si decidís exercir el seu dret en un cert instant t, B_t^C, ve donat per l'expressió següent:*

$$B_t^C = \begin{cases} \textit{Preu de l'actiu subjacent en l'instant t - Preu strike - Prima} & \textit{si dret a compra.} \\ \textit{Preu strike - Preu de l'actiu subjacent en l'instant t - Prima} & \textit{si dret a venda.} \end{cases}$$

[12]**Posició llarga**: situació en què es troba qui compra un actiu financer.

Definició 2.14. *El **venedor** (o **subjecte que es troba en la posició curta**[13]) és qui està obligat a comprar o vendre l'actiu subjacent per l'import acordat al comprador de l'opció en cas que aquest exerceixi el seu dret. El benefici que obtindria aquest si el comprador de l'opció decidís exercir el seu dret en un cert instant t, B_t^V, ve donat per l'expressió següent:*

$$B_t^V = \begin{cases} \textit{Preu strike - Preu de l'actiu subjacent en l'instant t + Prima} & \textit{si dret a compra.} \\ \textit{Preu de l'actiu subjacent en l'instant t - Preu strike + Prima} & \textit{si dret a venda.} \end{cases}$$

Ara que ja es té coneixença de l'anterior terminologia bàsica, una versió més tècnica de la definició d'opció financera seria la següent:

Definició 2.15. *Una **opció financera** és un derivat financer que concedeix al seu posseïdor el dret, però no l'obligació, a comprar o vendre un actiu subjacent per un preu de l'exercici i no més tard d'una data de venciment. Per adquirir aquest dret, el comprador d'una opció financera ha de pagar una prima al seu venedor.*

[13]**Posició curta**: situació en què es troba qui ven un actiu financer.

3 Tipus d'opcions financeres

Els tres apartats següents mostren tres de les formes en què es poden classificar les opcions financeres més comuns. També, a banda d'aquestes, n'hi ha que no són tant típiques, conegudes amb el nom d'opcions exòtiques. Aquestes últimes es veuen en l'apartat 3.4.

3.1 Segons el dret que atorguen

Les opcions financeres es poden classificar en funció del dret que atorguen en:

3.1.1 Opcions *call*

Definició 3.1. *Una* ***opció call****, també coneguda com a opció de compra, és aquella en què el seu posseïdor disposa del dret a comprar un actiu subjacent per un preu d'exercici determinat i no més tard d'una data de venciment ja fixada. Si una opció call s'acaba exercint, el seu venedor té l'obligació de vendre l'actiu subjacent en qüestió.*

Cal prestar especial atenció a la distinció d'aquests dos conceptes:

Compra d'una opció *call* (o posició llarga de compra). El comprador d'una opció *call* té la possibilitat, no l'obligació, de comprar, no més tard de la data de venciment, l'actiu subjacent pel seu preu *strike*. Quan un inversor compra una opció *call* és perquè té expectatives alcistes i espera que el preu del subjacent pugi. Les pèrdues del subjecte que es troba en aquesta posició com a molt seran iguals al valor de la prima, però els seus guanys, en canvi, podran arribar a ser il·limitats. Això és degut al fet que tan sols li interessarà comprar el subjacent si a la data de venciment el preu d'aquest és superior al d'exercici.

Exemple 3.2. Suposem que un individu compra a un altre individu una opció *call* que compta amb les característiques següents: el preu d'exercici és de 55 u. m. i la prima que ha de pagar el comprador d'aquesta opció al seu venedor per tal d'adquirir el dret sobre el subjacent és de 3 u. m.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Benefici que obtindria el comprador de l'opció si no comprés el subjacent (u. m.)	Benefici que obtindria el comprador de l'opció si comprés el subjacent (u. m.)	Comprarà el comprador de l'opció el subjacent? (u. m.)	Benefici que obtindrà el comprador de l'opció (u. m.)
< 55		< -3	No	-3
55		-3	Li és indiferent	-3
> 55 i < 58	-3	> -3 i < 0	Sí	> -3 i < 0
58		0	Sí	0
> 58		> 0	Sí	> 0

Taula 2.1: Possibles escenaris en què es pot trobar el comprador de l'opció.

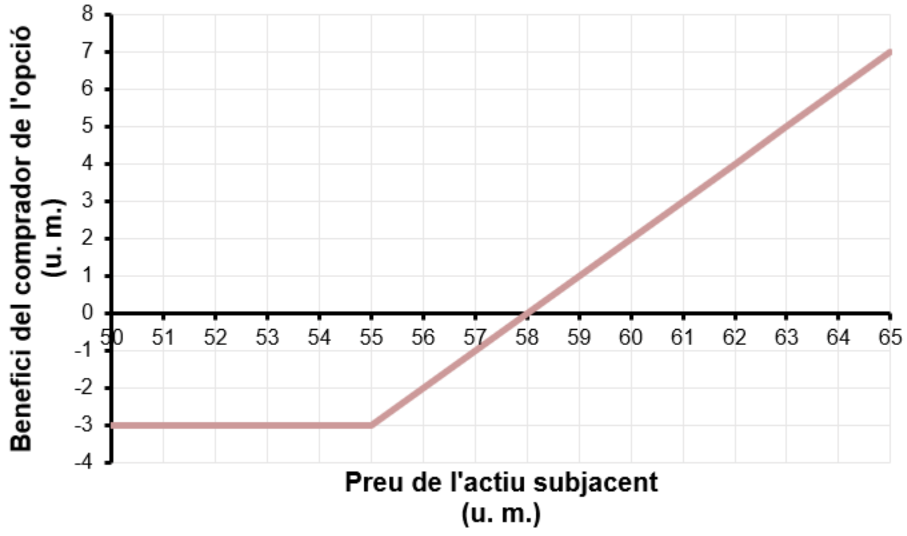
El comprador de l'opció en qüestió, tal com podem observar en la taula 2.1 de la pàgina anterior, no farà ús del seu dret sobre el subjacent en qualsevol cas en què el preu d'aquest estigui per sota del d'exercici i, per tant, en totes aquestes situacions perdrà la prima. És per això que diem que les pèrdues que pot arribar a suportar el comprador d'una opció *call* són limitades.

Contràriament, o sigui, quan el preu del subjacent és superior al d'exercici, inicialment el comprador es troba en una primera fase, que dura fins al moment en què el preu del subjacent s'iguala amb el que resulta de sumar el preu *strike* i la prima, en la qual les seves pèrdues són cada cop menors. A partir de l'instant en què aquests dos preus justs acabats d'esmentar prenen el mateix valor, el benefici del comprador de l'opció en qüestió deixa de ser negatiu i comença a créixer. Així doncs, els guanys que pot arribar a aconseguir el comprador d'una opció *call* són il·limitats.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Benefici que obtindrà el comprador de l'opció (u. m.)
50	-3
51	-3
52	-3
53	-3
54	-3
55	-3
56	-2
57	-1
58	0
59	1
60	2
61	3
62	4
63	5
64	6
65	7

Taula 2.2: Benefici del comprador de l'opció.

En la taula 2.2 i en el gràfic 2.1 podem veure amb tot detall com evoluciona el benefici del comprador d'aquesta opció financera a mesura que va creixent el preu de l'actiu subjacent.



Gràfic 2.1: Benefici del comprador de l'opció.

Venda d'una opció *call* (o posició curta de compra). Fins ara només s'ha vist com afecta una opció *call* al seu comprador. És convenient, però, conèixer què passa amb la contrapartida, és a dir, quines són les conseqüències que ha d'assumir el venedor d'una opció d'aquest tipus. El venedor d'una opció *call* té l'obligació de vendre l'actiu subjacent pel seu preu *strike* al comprador de l'opció en qüestió en el moment en què aquest decideix exercir el seu dret, si és que realment l'acaba exercint. Els guanys del subjecte que es troba en aquesta posició com a molt seran iguals al valor de la prima, però les seves pèrdues, per contra, podran arribar a ser il·limitades. En aquest cas, el venedor de l'opció guanyarà la prima si a la data de venciment el preu del subjacent és inferior al d'exercici, puix que el comprador de l'opció en qüestió decidirà no comprar el subjacent, i guanyarà un import inferior a la prima o, fins i tot, haurà d'assumir pèrdues si el comprador de l'opció decideix comprar el subjacent en algun moment no posterior a la data de venciment perquè el preu d'aquest haurà superat al de l'exercici.

Exemple 3.3. Suposa la mateixa situació que en l'exemple 3.2.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Comprarà el comprador de l'opció el subjacent?	Benefici que obtindrà el venedor de l'opció (u. m.)
< 55	No	3
55 u. m.	Li és indiferent	3
> 55 i < 58	Sí	< 3 i > 0
58	Sí	0
> 58	Sí	< 0

Taula 2.3: Possibles escenaris en què es pot trobar el venedor de l'opció.

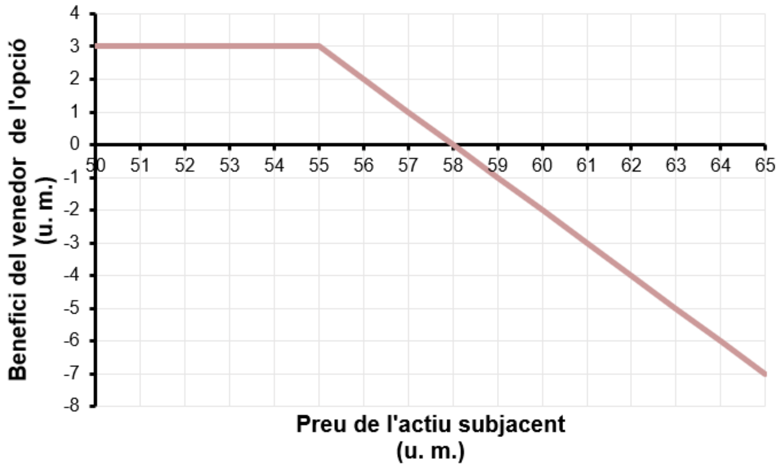
Fixem-nos en la taula 2.3. Si a la data de venciment de l'opció el comprador d'aquesta encara no ha decidit comprar l'actiu subjacent, aleshores el que s'emportarà el venedor serà l'import que el comprador va pagar-li per tal d'apoderar-se del dret sobre el subjacent, o sigui, la prima. El benefici que obtindrà el venedor de cap de les maneres podrà ser superior al valor de la prima, ja que, perquè això es produeixi, el comprador hauria d'exercir el seu dret comprant el subjacent al preu d'exercici acordat amb el venedor en un instant en què el preu de mercat estigui per sota d'aquest.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Benefici que obtindrà el venedor de l'opció (u. m.)
50	3
51	3
52	3
53	3
54	3
55	3
56	2
57	1
58	0
59	-1
60	-2
61	-3
62	-4
63	-5
64	-6
65	-7

Taula 2.4: Benefici del venedor de l'opció.

En el moment en què el comprador faci ús del seu dret, automàticament el benefici que rebrà el venedor quedarà situat per sota del valor de la prima. Com més alt sigui el preu de mercat del subjacent, més ampla serà la diferència entre aquest i el preu *strike* i, en conseqüència, més baix serà el benefici que rebrà el venedor. En definitiva, les pèrdues a les quals es pot arribar a encarar el venedor d'una opció *call* són il·limitades.

Podem trobar l'evolució del benefici del venedor en la taula 2.4 i en el gràfic 2.2.



Gràfic 2.2: Benefici del venedor de l'opció.

3.1.2 Opcions *put*

Definició 3.4. *Una **opció put**, també coneguda com a opció de venda, és aquella en què el seu posseïdor disposa del dret a vendre un actiu subjacent per un preu d'exercici determinat i no més tard d'una data de venciment ja fixada. Si una opció put s'acaba exercint, el seu venedor té l'obligació de vendre l'actiu subjacent en qüestió.*

És necessari diferenciar els dos conceptes següents:

Compra d'una opció *put* (o posició llarga de venda). El comprador d'una opció *put* té la possibilitat, no l'obligació, de vendre, no més tard de la data de venciment, l'actiu subjacent pel seu preu *strike*. Quan un inversor compra una opció *put* és perquè té expectatives baixistes i espera que el preu del subjacent disminueixi. Les pèrdues del subjecte que es troba en aquesta posició com a molt seran iguals al valor de la prima, però els seus guanys, en canvi, podran arribar a ser il·limitats. Això és així perquè aquest només estarà disposat a vendre el subjacent en cas que el seu preu s'hagi posicionat per sota del d'exercici.

Exemple 3.5. Suposem que un individu compra a un altre individu una opció *put* que té les mateixes característiques que l'opció de l'exemple 3.2.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Benefici que obtindria el comprador de l'opció si no vengués el subjacent (u. m.)	Benefici que obtindria el comprador de l'opció si vengués el subjacent (u. m.)	Vendrà el comprador de l'opció el subjacent? (u. m.)	Benefici que obtindrà el comprador de l'opció (u. m.)
< 52		> 0	Sí	> 0
52		0	Sí	0
> 52 i < 55	-3	< 0 i > -3	Sí	< 0 i > -3
55		-3	Li és indiferent	-3
> 55		< -3	No	-3

Taula 2.5: Possibles escenaris en què es pot trobar el comprador de l'opció.

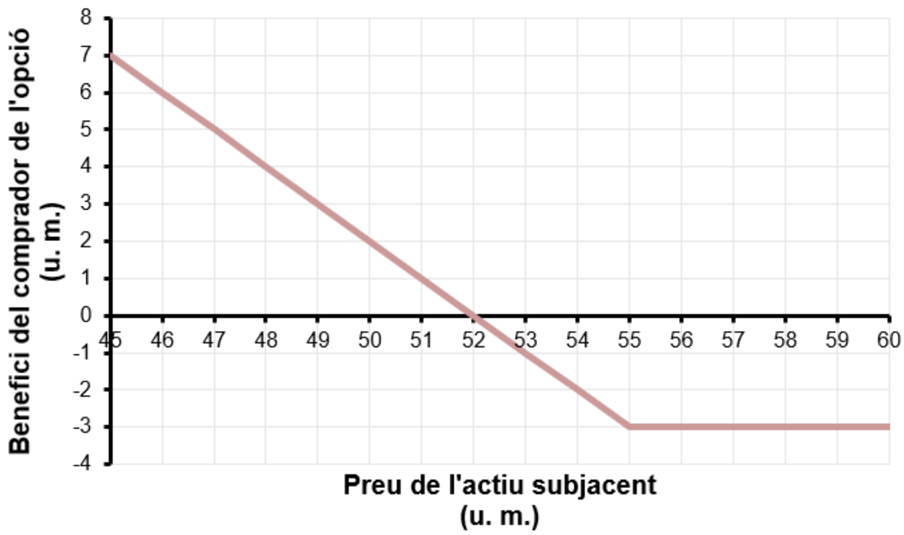
En la taula 2.5 podem veure clarament en quines circumstàncies el comprador de la present opció exercirà el seu dret venent l'actiu subjacent. L'exercirà, o almenys seria lògic que ho fes, sempre que el preu del subjacent estigui per sota del d'exercici perquè, d'aquesta manera, compensaria les pèrdues ocasionades per la prima i, fins i tot, en podria treure un benefici positiu en cas que la diferència entre ambdós preus fos superior a la prima. Com més gran sigui aquesta diferència, més elevats seran també els guanys que pot arribar a assolir el comprador d'aquesta opció. O sigui, són il·limitats els guanys que pot arribar a atènyer el comprador d'una opció *put*.

Quan sigui el preu *strike* el que estigui per sota del preu de mercat del subjacent, llavors el comprador de l'opció, com que no voldrà assumir més pèrdues a part de la prima, mai farà ús del seu dret i, per tant, l'únic que perdrà serà la prima. En conclusió, les pèrdues que pot arribar a atendre el comprador d'una opció *put* són limitades.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Benefici que obtindrà el comprador de l'opció (u. m.)
45	7
46	6
47	5
48	4
49	3
50	2
51	1
52	0
53	-1
54	-2
55	-3
56	-3
57	-3
58	-3
59	-3
60	-3

Taula 2.6: Benefici del comprador de l'opció.

L'evolució, en funció del preu de l'actiu subjacent, del benefici del comprador de l'opció financera d'aquest exemple apareix en la taula 2.6, així com en el gràfic 2.3.



Gràfic 2.3: Benefici del comprador de l'opció.

Venda d'una opció *put* (o posició curta de venda). Perquè algú compri una opció *put*, igual que en el cas de les opcions *call*, ha d'haver-hi un altre individu que la vengui. El venedor d'una opció *put* té l'obligació de vendre l'actiu subjacent pel seu preu *strike* al comprador de l'opció en qüestió en el moment en què aquest decideix exercir el seu dret, si és que realment l'acaba exercint. Els guanys del subjecte que es troba en aquesta posició com a molt seran iguals al valor de la prima, però les seves pèrdues, per contra, podran arribar a ser il·limitades. El venedor de l'opció, doncs, s'emportarà la prima sempre que el preu del subjacent sigui igual o superior al de l'exercici a la data de venciment, atès que al comprador de l'opció en qüestió li serà indiferent vendre el subjacent o preferirà no fer-ho, i s'emportarà un import inferior a la prima o, fins i tot, haurà d'assumir pèrdues si el comprador de l'opció ven el subjacent en algun instant no posterior a la data de venciment, ja que el preu d'aquest haurà quedat per sota del d'exercici.

Exemple 3.6. Suposem la mateixa situació que en l'exemple 3.5.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Comprarà el comprador de l'opció el subjacent?	Benefici que obtindrà el venedor de l'opció (u. m.)
< 52	Sí	< 0
52	Sí	0
> 52 i < 55	Sí	> 0 i < 3
55	Li és indiferent	3
> 55	No	3

Taula 2.7: Possibles escenaris en què es pot trobar el venedor de l'opció.

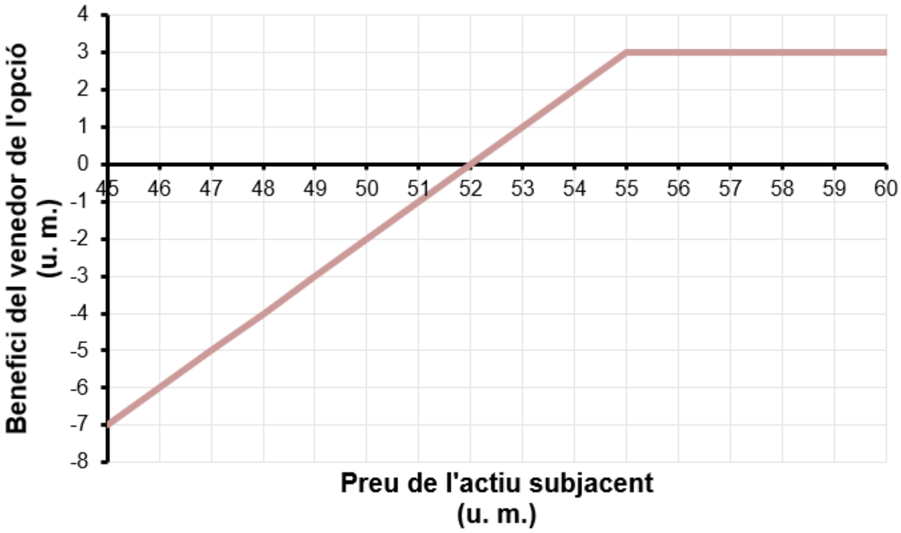
Tal com mostra la taula 2.7, el benefici del venedor d'aquesta opció serà inferior al valor de la prima sempre que el preu de l'actiu subjacent no superi al preu *strike*. Concretament, començarà a ser negatiu un cop el preu del subjacent es trobi a més de 3 u. m. per sota del d'exercici i anirà disminuint a mesura que augmenti la diferència entre aquests dos preus. Així que les pèrdues del venedor d'una opció *put*, igual que les del venedor d'una opció *call*, també poden arribar a ser il·limitades.

Preu de l'actiu subjacent (u. m.)	Benefici que obtindrà el venedor de l'opció (u. m.)
45	-7
46	-6
47	-5
48	-4
49	-3
50	-2
51	-1
52	0
53	1
54	2
55	3
56	3
57	3
58	3
59	3
60	3

Taula 2.8: Benefici del venedor de l'opció.

Quan el preu de mercat del subjacent estigui per damunt del d'exercici, el comprador de l'opció no voldrà vendre el subjacent perquè, si ho fes, l'estaria venent a un preu inferior al que es troba en aquell moment. Així doncs, el venedor guanyarà l'unic que perdrà el comprador, és a dir, la prima.

Per veure com evoluciona el benefici del venedor d'aquesta opció a mesura que augmenta el preu de l'actiu subjacent, podem mirar tant la taula 2.8 com el gràfic 2.4.



Gràfic 2.4: Benefici del venedor de l'opció.

La taula següent mostra un petit resum per acabar d'interioritzar les quatre situacions just acabades d'explicar:

	Opció *call*		Opció *put*	
	Comprador	**Venedor**	**Comprador**	**Venedor**
Expectatives	Alcistes	Baixistes	Baixistes	Alcistes
Guanys màxims	Il·limitats	Prima	Il·limitats	Prima
Pèrdues màximes	Prima	Il·limitades	Prima	Il·limitades

Taula 2.9: Expectatives i benefici del comprador i del venedor d'una opció *call/put*.

3.2 Segons el benefici del comprador

Una altra forma de classificar una opció financera, però ara en un cert instant t no més tard de la data de venciment, és tenint en consideració el benefici que obtindria el posseïdor d'aquesta si es decantés per exercir el seu dret. Cal destacar que una opció, al llarg de la seva vida, pot anar canviant, com a conseqüència de les contínues variacions del preu de l'actiu subjacent, d'una d'aquestes situacions a una altra.

3.2.1 Opcions *in the money*

Definició 3.7. *Es diu que una* ***opció*** *call (resp. put) està* ***in the money*** *en l'instant t, ITM_t, si el preu de l'actiu subjacent en aquest precís instant és superior (resp. inferior) al seu preu strike.*

En ambdues situacions, el valor intrínsec que rebria el posseïdor de l'opció en cas que decidís exercir el seu dret en aquest instant t seria positiu.

3.2.2 Opcions *at the money*

Definició 3.8. *Es diu que una* ***opció****, tant call com put, està* ***at the money*** *en l'instant t,* ATM_t*, si el preu de l'actiu subjacent en aquest precís instant és igual al seu preu strike.*

En aquest cas, el valor intrínsec és 0. No obstant, és altament probable que variï en un futur no molt llunyà.

3.2.3 Opcions *out of the money*

Definició 3.9. *Es diu que una* ***opció*** *call (resp. put) està* ***out of the money*** *en l'instant t,* OTM_t*, si el preu de l'actiu subjacent en aquest precís instant és inferior (resp. superior) al seu preu strike.*

Tant en un cas com en l'altre, el benefici que aconseguiria el posseïdor de l'opció si exercís el seu dret en aquest instant t seria negatiu.

El valor intrínsec d'aquesta classe d'opcións també és 0.

3.3 Segons el moment d'execució

Les opcions financeres també es poden classificar depenent de quan s'executin en:

3.3.1 Opcions europees

Definició 3.10. *Una* ***opció europea*** *és aquella que solament es pot exercir a la seva data de venciment.*

3.3.2 Opcions americanes

Definició 3.11. *Una* ***opció americana*** *és aquella que es pot exercir en qualsevol moment no posterior a la seva data de venciment.*

3.4 Opcions exòtiques

Abans d'introduïr el concepte d'opció exòtica, cal explicar prèviament què és una opció *plain vanilla*:

Definició 3.12. *Una* ***opció plain vanilla*** *és qualsevol de les que s'han vist fins ara. Presenta propietats estàndards ben definides i és més comuna que una d'exòtica.*

Definició 3.13. *Una* ***opció exòtica****, d'altra banda, és aquella que té certes característiques que discrepen de les que són habituals. Dins d'aquest tipus s'agrupen totes aquelles* *opcions que tenen una major complexitat en comparació de les opcions plain vanilla.*

Hi ha una gran multitud d'opcions exòtiques, però les que més destaquen són les següents:

3.4.1 Opcions asiàtiques

Definició 3.14. *Una* ***opció asiàtica*** *és aquella en la qual el preu d'exercici es calcula fent la mitjana dels preus que pren l'actiu subjacent al llarg d'un període de temps determinat.*

3.4.2 Opcions barrera

Definició 3.15. *Una* ***opció barrera*** *és aquella que comença a existir (****opció knock in****) o deixa d'existir (****opció knock out****) un cop el preu de l'actiu subjacent assoleix o travessa un cert nivell, denominat barrera. Depenent tant de si han de començar a existir o si, al contrari, han de deixar de fer-ho com de la relació posicional que hi hagi entre la barrera i el preu del subjacent.*

Les opcions barrera es poden classificar en:

Opcions *up and in*

Definició 3.16. *Una* ***opció up and in*** *és una opció knock in en la qual la barrera està situada damunt del preu inicial del subjacent. Una opció d'aquest tipus comença a existir en el precís instant en què el preu del subjacent arriba a la barrera.*

Opcions *down and in*

Definició 3.17. *Una* ***opció down and in*** *és també una opció knock in, però, a diferència de l'anterior tipus, la barrera es troba inicialment davall del preu del subjacent. Una opció d'aquest tipus comença a existir quan el preu del subjacent ateny la barrera.*

Opcions *up and out*

Definició 3.18. *Una* ***opció up and out*** *és una opció knock out en la qual el preu del subjacent al principi es mou per sota de la barrera i si es dona el cas que l'assoleix o la travessa abans de la data de venciment, deixa d'existir a l'acte.*

Opcions *down and out*

Definició 3.19. *Una* ***opció down and out*** *és també una opció knock out, però en aquest cas el preu del subjacent comença movent-se per sobre de la barrera i en el moment que l'assoleix o la travessa, si arriba a fer-ho, deixa d'existir immediatament.*

3.4.3 Opcions bermuda

Definició 3.20. *Una* ***opció bermuda*** *és aquella que permet al seu posseïdor exercir el dret sobre l'actiu subjacent en diversos moments del temps no posteriors a la data de venciment i determinats amb antelació durant la creació del contracte. La prima d'una opció d'aquest tipus normalment és més cara que la d'una opció europea i més barata que la d'una opció americana.*

3.4.4 Opcions *lookback*

Definició 3.21. *Una* ***opció lookback*** *és aquella en la qual el preu d'exercici és el mínim (resp. màxim) de tots els preus que adquereix l'actiu subjacent en el cas d'una opció call (resp. put) durant tota la seva vida. Aquestes opcions acostumen a ser de les més cares degut al fet que els seus posseïdors es beneficien d'antics preus del subjacent.*

4 Valoració d'opcions financeres

Donar valor a una opció financera permet al comprador i al venedor d'aquesta establir una prima adequada, o sigui, una prima que el comprador estigui disposat a pagar-la i el venedor, a cobrar-la. Com es pot, però, valorar una opció financera? Aquest és just un dels principals problemes amb el qual es topen els individus que participen en mercats financers. Existeixen diversos procediments per fer-ho, però els que s'expliquen en els tres apartats 4.3 i 4.4 són els més coneguts.

Abans que res, però, cal fer esment que un model no és res més que una representació de la realitat i que, com a tal, no deixa de ser una aproximació, una idealització d'un fenomen observat. La simplicitat d'aquesta idealització facilita la comprensió del model i permet generar resultats que, tot i potser no ser un clar reflex de la realitat, poden arribar a ser de gran utilitat. S'ha de ser conscient que com més s'aproxima a la realitat un model, més complicat resulta estudiar-lo. L'important és observar els resultats obtinguts i, a partir d'aquests, extreure'n les conclusions pertinents sense oblidar en cap moment els supòsits que s'han tingut en compte des d'un bon començament.

Per tal de valorar una opció financera mitjançant algun dels mètodes que es detallen en aquest capítol, s'ha de considerar que el mercat on aquesta es troba és ideal i que, per tant, presenta les característiques següents:

- El mercat és competitiu, és a dir, com que hi ha tants compradors i venedors, la influència que tenen aquests sobre el preu és insignificant.
- No hi ha ni costs de transacció, ni cap mena de diferència entre el preu al qual es vol vendre i el preu al qual es vol comprar, ni impostos... O sigui, el mercat està lliure de fricció.
- Els participants del mercat prefereixen major riquesa a menor riquesa.
- No hi ha risc d'incomplir el contracte per part dels individus que l'han signat.
- No hi ha oportunitats d'arbitratge[14].
- La volatilitat del preu de l'actiu subjacent, σ, i la taxa lliure de risc[15], r, es consideren constants durant tota la vida de l'opció.

4.1 Paràmetres que influeixen en la valoració d'opcions financeres

Abans de començar a estudiar els models, cal veure com afecta la prima un canvi produït en cadascun dels factors següents mentre els altres es mantenen constants:

- Data de venciment (T).
- Preu de l'actiu subjacent (S_0).

[14] **Arbitratge**: estratègia financera que consisteix a treure profit de la diferència de preu d'un mateix actiu financer en diferents mercats per obtenir un benefici econòmic sense risc.

[15] **Taxa lliure de risc**: mesura que indica la rendibilitat que s'obté en invertir en un actiu que es considera cent per cent segur, i que, per tant, està lliure de risc.

- Preu d'exercici (K).
- Volatilitat del preu de l'actiu subjacent (σ).

Data de venciment (T). En la definició de la prima ja s'ha comentat que com més gran és el temps que resta per a la data de venciment de l'opció, més gran és el seu valor extrínsec. Això és així perquè les possibilitats que el preu de l'actiu subjacent evolucioni a favor del comprador de l'opció són més elevades, indiferentment si l'opció és de compra o de venda.

Preu de l'actiu subjacent (S_0) i preu d'exercici (K). Si el posseïdor d'una opció *call* acaba exercint el seu dret en un instant t no posterior a la data de venciment, aleshores el benefici que obtindrà serà la quantitat en què el preu del subjacent en aquest precís instant t excedeixi al preu d'exercici. Conseqüentment, un moviment ascendent en el preu del subjacent d'una opció de compra provoca un augment en el seu valor i, d'altra banda, un moviment ascendent en el seu preu d'exercici provoca una disminució en el seu valor.

El benefici que aconseguirà el seu posseïdor, en el cas d'una opció *put*, si decideix fer ús del seu dret en un instant t no més tard de la data de venciment, coincidirà amb la quantitat en què el preu d'exercici excedeixi al preu del subjacent en aquest precís instant t. Així doncs, un moviment ascendent en el preu del subjacent d'una opció de venda provoca una disminució en el seu valor i, en canvi, un moviment ascendent en el seu preu d'exercici provoca un augment en el seu valor.

Volatilitat del preu de l'actiu subjacent (σ). La definició precisa de la volatilitat del preu de l'actiu subjacent es pot trobar en el segon capítol d'aquest treball. En termes generals, es tracta d'un paràmetre que ajuda a preveure els moviments futurs que experimentarà el preu del subjacent. A mesura que aquesta volatilitat augmenta, també s'incrementa la probabilitat que el preu del subjacent assoleixi valors molt més alts o molt més baixos. Aquestes dues possibilitats es compensen entre si per al venedor de l'opció, però no passa el mateix amb el comprador. No obstant això, anteriorment ja s'ha vist que tant els guanys del comprador d'una opció *call* com els del comprador d'una opció *put* són il·limitats i que les pèrdues, per contra, com a molt seran iguals al valor de la prima. És per això que el valor de l'opció, sigui de compra o de venda, sofrirà un increment en cas que augmenti la volatilitat del preu de l'actiu subjacent.

	Opció *call*	**Opció *put***
Data de venciment	↑	↑
Preu de l'actiu subjacent	↑	↓
Preu de l'exercici	↓	↑
Volatilitat del preu de l'actiu subjacent	↑	↑

Taula 2.10: Resum de l'efecte que provoca en la prima d'una acció *call*/*put* l'increment d'un d'aquests paràmetres mantenint els altres constants.

4.2 Lletres gregues

A part de saber quins són els paràmetres que influeixen en la determinació de la prima i com ho fan, també és interessant conèixer el grau d'influència que té cadascun d'ells. Amb les **lletres gregues** es mesura la sensibilitat del preu d'una opció enfront de les variacions d'aquests factors.

4.2.1 Delta

La **delta**, Δ_t, indica quant variaria la prima si augmentés en una unitat el preu que presenta l'actiu subjacent en l'instant t (S_t). O sigui, és la velocitat de canvi de la prima davant de les fluctuacions de S_t i matemàticament, doncs, es pot interpretar com la primera derivada de la prima respecte de S_t:

$$\Delta_t = \frac{\partial P}{\partial S_t}, \text{ on } P \text{ simbolitza la prima.}$$

Aquesta lletra grega pot prendre un valor o un altre depenent de l'instant en què es calculi. Això sí, sempre ha de pertànyer a l'interval [-1, 1]. En una opció *call* està compresa entre el 0 i l'1 i en una opció *put*, entre el -1 i el 0. Això és així perquè la prima d'una opció de compra quan s'incrementa el preu del subjacent augmenta i la d'una opció de venda, disminueix. En un instant proper a la data de venciment, la delta d'una opció *in the money* s'aproxima a 1 i en una opció *out of the money*, a 0. En el primer cas, el valor extrínsec de la prima és gairebé nul i això provoca que P i S_t s'assemblin molt. En el segon cas, la prima tan sols té valor extrínsec a la data de venciment i és per això que no es veu afectada pels canvis produïts en preu del subjacent.

4.2.2 Gamma

La **gamma**, Γ_t, mesura la variació que sofriria la Δ_t si es produïssin modificacions en el preu que presenta l'actiu subjacent en l'instant t (S_t). Això significa que per cada increment unitari en S_t, la Δ_t variarà tant com indica la Γ_t. Matemàticament parlant, la gamma és la segona derivada de la prima respecte de S_t:

$$\Gamma_t = \frac{\partial \Delta_t}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 P}{\partial^2 S_t}, \text{ on } P \text{ simbolitza la prima.}$$

Aquesta lletra grega, igual que l'anterior, pot adquirir diferent valors al llarg del temps.

4.2.3 Vega

La **vega**, ϑ, s'empra per mesurar quant variaria la prima si s'alterés la volatilitat del preu de l'actiu subjacent. Quan aquest últim paràmetre varií un 1%, la prima canviarà la quantitat que indiqui la vega. Es pot entendre com:

$$\vartheta = \frac{\partial P}{\partial \sigma}, \text{ on } P \text{ simbolitza la prima.}$$

4.2.4 Theta

La **theta**, Θ_t, mostra la viariació que experimentaria la prima a causa del pas del temps. Suposant que tots els altres factors que influeixen en la valoració de la prima es mantenen constants, el pas del temps provoca una disminució en el valor de la prima. A continuació hi ha la fórmula que la calcula:

$$\Theta = -\frac{\partial P}{\partial (T-t)}, \text{ on } P \text{ simbolitza la prima i } T \text{ la data de venciment.}$$

4.3 Model binomial

El model binomial va ser proposat per Cox, Ross i Rubinstein el 1979. Es tracta d'un model a temps discret[16] que, a diferència d'altres, té el gran avantatge que és molt intuïtiu i que, matemàticament parlant, no té gaire complicació.

Per tal de comprendre millor la mecànica del model en qüestió, aquest s'estudiarà posant d'exemple la valoració d'una opció financera europea que té accions com a actiu subjacent. Afegir, també, que es començarà analitzant el model sota el supòsit que tan sols hi ha un període i, un cop ja es tingui clara aquesta primera visió, es generalitzarà a dos períodes i, finalment, a diversos períodes.

4.3.1 Model binomial d'un període

En aquest model s'han de considerar dos instants de temps, $t = 0$ i $t = T$. $t = 0$ és el moment en què s'elabora el contracte, $t = T$ és la data de venciment i la diferència entre aquests dos instants, o sigui, T - 0 = T coincideix amb la duració del període.

Si el preu d'una acció en el moment en què el posseïdor de l'opció adquireix el dret sobre aquestes (és a dir, en $t = 0$) és S_0; aleshores, després d'aquest primer període (és a dir, en $t = T$), aquest haurà pogut evolucionar cap a:

$$S_T = \begin{cases} S_0 \cdot u =: S_T^u & \text{si el preu de l'acció augmenta (amb probabilitat } p_u) \\ S_0 \cdot d =: S_T^d & \text{si el preu de l'acció disminueix (amb probabilitat } p_d) \end{cases},$$

on $d < 1 < u$ i $p_u + p_d = 1$.

Pel que fa a la notació, el 0 (resp. la T) del subíndex de la S fa referència a l'instant que es troba just abans (resp. després) d'aquest primer període. Per tant, S_0 (resp. S_T) al·ludeix al preu del subjacent en $t = 0$ (resp. $t = T$).

Observació 4.1. D'on sorgeixen u i d?

Suposem que el preu de l'actiu subjacent augmenta un $U\%$ durant el període, llavors:

$$S_T^u = S_0 + \frac{U}{100} \cdot S_0 = S_0 \cdot (1 + \frac{U}{100}) = S_0 \cdot u, \text{on } u = 1 + \frac{U}{100}.$$

En aquest cas podem veure clarament que $u > 1$.

[16]**Temps discret**: és aquell que es mesura en moments concrets.

Canviem de supòsit i imaginem-nos ara que el preu de l'actiu subjacent disminueix un $D\%$ durant el període, llavors:

$$S_T^d = S_0 - \frac{D}{100} \cdot S_0 = S_0 \cdot (1 - \frac{D}{100}) = S_0 \cdot d, \text{on } d = 1 - \frac{D}{100}.$$

Aquí podem evidenciar que $d < 1$.

A part de com pot variar el preu del subjacent, també s'han de tenir en consideració els possibles valors intrínsecs que pot prendre l'opció a la data de venciment, o sigui, en l'instant $t = T$. Aquí cal distingir si l'opció en qüestió es tracta d'una opció de compra o de venda, ja que l'expressió que s'empra per calcular el valor intrínsec canvia:

- Si l'opció és de compra:

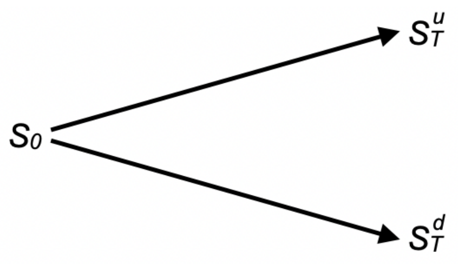
$$VI_T = \max\{0,\, S_T - K\} = \begin{cases} \max\{0,\, S_0 \cdot u - K\} & \text{si el preu de l'acció augmenta.} \\ \max\{0,\, S_0 \cdot d - K\} & \text{si el preu de l'acció disminueix.} \end{cases}$$

- Si l'opció és de venda:

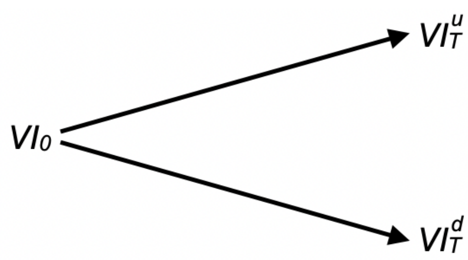
$$VI_T = \max\{0,\, K - S_T\} = \begin{cases} \max\{0,\, K - S_0 \cdot u\} & \text{si el preu de l'acció augmenta.} \\ \max\{0,\, K - S_0 \cdot d\} & \text{si el preu de l'acció disminueix.} \end{cases}$$

VI_T^u designarà, d'ara endavant, el valor intrínsec en $t = T$ en cas que el preu de l'acció pugi i VI_T^d, en cas que baixi.

Els esquemes següents mostren un petit resum de tot el vist fins ara en aquest subapartat:



Evolució del preu de l'acció.



Evolució del valor intrínsec de l'opció.

Arribats a aquest punt, és necessari introduir el concepte de cartera abans de continuar amb l'explicació:

Definició 4.2. *Una **cartera** és un conjunt format per n actius. Així doncs, es pot interpretar com un vector de $\mathbb{R}^n$ les components del qual són els n actius justs acabats d'esmentar:*

$$\vec{c} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),$$

on α_i és un actiu, $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$.

Les carteres que s'empren en aquest context estan compostes únicament per dos actius: la pròpia opció financera i el seu actiu subjacent, o sigui, les Δ accions. En molts llibres, per descriure una cartera com la que s'ha posat d'exemple, s'utilitza la frase següent: "la cartera consisteix en una posició curta en una opció i una posició llarga en Δ accions".

Abans d'introduir el principi de no arbitratge i per després entendre'l amb més facilitat, estaria bé que el lector es llegís l'exemple que apareix a continuació:

Exemple 4.3. Imaginem-nos que llencem una moneda enlaire, si surt cara (C) guanyarem 100€ i, en cas contrari, si surt creu (X) en perdrem 50. Suposem que la moneda s'ha construït de tal manera que tant la probabilitat que surti cara com la que surti creu és $\frac{1}{2}$, o sigui, $p_C = \frac{1}{2}$ i $p_X = \frac{1}{2}$. El benefici que esperem obtenir participant en aquest joc és:

$$100 \cdot \frac{1}{2} + (-50) \cdot \frac{1}{2} = 50 - 25 = 25€.$$

Com que és positiu, el joc és favorable per a nosaltres. Lògicament, però, no ho és per a l'individu que es troba a l'altra banda. Podem concloure, per tant, que aquest joc no és un joc just.

Quines alternatives tenim per fer-lo just?

- Podem optar per canviar la recompensa que rebrem en cas que surti cara i/o la sanció econòmica que haurem de pagar en cas que surti creu. Per exemple, suposem que ara, si surt creu, en comptes de perdre 50 €, en perdrem el doble.

  Si juguem, el benefici que esperem obtenir és:

  $$100 \cdot \frac{1}{2} + (-100) \cdot \frac{1}{2} = 50 - 50 = 0€.$$

  Si juguem, el benefici que espera obtenir el subjecte que es troba a l'altra banda és:

  $$-100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = -50 + 50 = 0€.$$

  Ara el joc sí que és un joc just.

- Altrament, podem pagar 25€ per cada intent.

  Si juguem, el benefici que esperem obtenir és:

  $$100 \cdot \frac{1}{2} + (-50) \cdot \frac{1}{2} - 25 = 50 - 25 - 25 = 0€.$$

  Si juguem, el benefici que espera obtenir el subjecte que es troba a l'altra banda és:

  $$-100 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot \frac{1}{2} + 25 = -50 + 25 + 25 = 0€.$$

  Ara el joc sí que és un joc just.

- Una altra opció és substituir l'actual moneda per una altra.

  Sigui p_C la probabilitat que surti cara (i, per tant, 1 - p_C la probabilitat que surti creu) amb aquesta nova moneda. Perquè el joc sigui just, una de les dues condicions que s'han de complir és que el benefici que esperaríem obtenir en cas que decidíssim jugar sigui nul:

$$100 \cdot p_C + (-50) \cdot (1 - p_C) = 0$$

$$100 \cdot p_C - 50 + 50 \cdot p_C = 0$$

$$150 \cdot p_C = 50$$

$$p_C = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}.$$

  No està de més que comprovem l'altra condició, és a dir, que comprovem que també és nul el benefici que esperaria obtenir l'individu que es troba a l'altra banda en cas que decidíssim jugar:

$$-100 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = -100 \cdot \frac{1}{3} + 50 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{100}{3} + \frac{100}{3} = 0€.$$

Proposició 4.4. *Principi de no arbitratge.*

Sigui $\vec{c}$ una cartera que consisteix en una posició curta en una opció i una posició llarga en Δ accions. Sigui S_0 el preu d'una acció en t = 0 i siguin $S_T^u = S_0 \cdot u$ i $S_T^d = S_0 \cdot d$ els dos possibles imports en $t = T$ als quals pot variar aquest. Sigui VI_0 el valor intrínsec de l'opció en t = 0 i siguin VI_T^u i VI_T^d els dos possibles valors que pot prendre aquest en $t = T$.

Es denota amb Π_t el valor d'una cartera en l'instant t. Així doncs, el valor de la cartera en qüestió en $t = T$ serà:

$$\Pi_T = \begin{cases} \Delta \cdot S_T^u - VI_T^u = \Delta \cdot S_0 \cdot u - VI_T^u =: \Pi_T^u & \textit{si el preu de l'acció augmenta.} \\ \Delta \cdot S_T^d - VI_T^d = \Delta \cdot S_0 \cdot d - VI_T^d =: \Pi_T^d & \textit{si el preu de l'acció disminueix.} \end{cases}$$

El valor de la cartera haurà de ser el mateix tant si es dona una situació com si es dona l'altra:

$$\Pi_T^u = \Pi_T^d$$

$$\Delta \cdot S_0 \cdot u - VI_T^u = \Delta \cdot S_0 \cdot d - VI_T^d$$

$$\Delta \cdot S_0 \cdot (u - d) = VI_T^u - VI_T^d$$

$$\Delta = \frac{VI_T^u - VI_T^d}{S_0 \cdot (u - d)}.$$

Amb aquest nombre d'accions, el valor inicial Π_0 de la cartera evoluciona, independentment de si el preu de les accions puja o baixa, cap al valor final $\Pi_T := \Pi_T^u = \Pi_T^d$.

El que es vol, però, és calcular el valor intrínsec en l'instant t = 0, ja que aquest permetrà al comprador i al venedor de l'opció acordar una prima adequada. Per calcular-lo, cal trobar prèviament el valor de l'opció en t = 0, és a dir, Π_0*. Com que es coneix* Π_T*, aplicant la fórmula* $\Pi_{t_1} = \Pi_{t_2} \cdot e^{-r\Delta t}$ *es trobarà el valor que s'està buscant:* [17]

$$\Pi_0 = \Pi_T \cdot e^{-rT}.$$

Com que $\Pi_T^u = \Pi_T^d$*,* Π_T *es pot substituir indistintament per* Π_T^u *o* Π_T^d*:*

$$\Pi_0 = \Pi_T^u \cdot e^{-rT}$$

$$\Delta \cdot S_0 - VI_0 = (\Delta \cdot S_0 \cdot u - VI_T^u) \cdot e^{-rT}$$
$$VI_0 = \Delta \cdot S_0 - (\Delta \cdot S_0 \cdot u - VI_T^u) \cdot e^{-rT}$$
$$VI_0 = [\Delta \cdot S_0 \cdot e^{rT} - (\Delta \cdot S_0 \cdot u - VI_T^u)] \cdot e^{-rT}$$
$$VI_0 = [\Delta \cdot S_0 \cdot (e^{rT} - u) + VI_T^u)] \cdot e^{-rT}$$
$$VI_0 = [\Delta \cdot S_0 \cdot (e^{rT} - u) + VI_T^u] \cdot e^{-rT}.$$

Substituint Δ *per* $\frac{VI_T^u - VI_T^d}{S_0 \cdot (u - d)}$*, s'obté que:*

$$VI_0 = [\frac{VI_T^u - VI_T^d}{u - d} \cdot (e^{rT} - u) + VI_T^u] \cdot e^{-rT}$$

$$VI_0 = [(VI_T^u - VI_T^d) \cdot (e^{rT} - u) + VI_T^u \cdot (u - d)] \cdot \frac{e^{-rT}}{u - d}$$
$$VI_0 = [VI_T^u \cdot (e^{rT} - u + u - d) + VI_T^d \cdot (u - e^{rT})] \cdot \frac{e^{-rT}}{u - d}$$
$$VI_0 = [VI_T^u \cdot \frac{e^{rT} - d}{u - d} + VI_T^d \cdot \frac{u - e^{rT}}{u - d}] \cdot e^{-rT}$$
$$VI_0 = [VI_T^u \cdot p + VI_T^d \cdot (1 - p)] \cdot e^{-rT},$$

on $p := \frac{e^{-rT} - d}{u - d}$ *i r és la taxa lliure de risc.*

Aquesta última equació permet valorar una opció quan el preu de les accions que formen el subjacent tan sols poden sofrir un canvi. L'únic supòsit que es necessita és que no hi hagi oportunitats d'arbitratge en el mercat.

Ara és un bon moment per introduir un altre principi també de gran rellevància en la valoració d'opcions financeres:

[17] La fórmula que apareix en aquesta línia permet, sota el supòsit de no arbitratge, esbrinar el valor que tindria una cartera en un cert instant t_1 donat el valor que presenta en un altre instant t_2. Pel que fa als paràmetres que hi apareixen, r és la taxa lliure de risc i $\Delta t = t_2 - t_1$.

Proposició 4.5. *Valoració neutral al risc.*

Aquest principi permet avaluar opcions financeres sota el supòsit que els inversors són, tal com indica el seu nom, neutrals al risc. Això significa que no tenen intensions d'incrementar el rendiment que esperen obtenir d'una inversió per tal de compensar el risc addicional que això comporta.

El món en què vivim no és ni molt menys un món neutral al risc. Com més elevats són els riscos que ha d'assumir un individu, més elevats seran també els guanys que espera aconseguir en cas que les coses li vagin de cara.

Un món neutral al risc presenta aquestes dues característiques que ajuden a simplificar bastant la valoració d'opcions:

- *El rendiment que s'espera obtenir amb les accions és la taxa lliure de risc.*
- *La taxa de descompte que s'empra per calcular el valor esperat d'una opció és, també, la taxa lliure de risc.*

Es considera, un altre cop, l'equació següent extreta de la proposició anterior:

$$VI_0 = [VI_T^u \cdot p \; + \; VI_T^d \cdot (1 \; - \; p)] \cdot e^{-rT},$$

on $p := \frac{e^{-rT} \, - \, d}{u \, - \, d}$ *i* r *és la taxa lliure de risc.*

La interpretació que se li ha de donar al paràmetre p és la de la probabilitat que es dugui a terme un moviment ascendent en el preu de les accions en un món neutral al risc i, coherentment, la que se li ha de donar a 1 - p és la de la probabilitat que es produeixi un moviment descendent en el preu de les accions en un món neutral al risc. Per tant, l'expressió

$$p \cdot VI_T^u \; + \; (1 \; - \; p) \cdot VI_T^d$$

és el valor intrínsec que s'espera que tingui l'opció en l'instant $t = T$ *en un món neutral al risc. Tornant a posar èmfasi en l'equació final de la proposició 4.4, aquí es veu clarament que el valor intrínsec de l'opció d'avui dia coincideix amb el que s'espera que tingui en* $t = T$ *en un món neutral al risc descomptant la taxa lliure de risc.*

4.3.2 Model binomial de dos períodes

En aquesta secció s'analitzarà el model binomial de dos períodes d'igual duració. Així que es considerarà que el primer finalitza en $t = \frac{T}{2}$ i el segon, en $t = T$. Cal recordar que T simbolitza la data de venciment.

En el subapartat anterior ja s'ha vist que el preu inicial d'una acció durant el primer període (des de $t = 0$ fins a $t = \frac{T}{2}$) pot evolucionar cap a:

$$S_{\frac{T}{2}} = \begin{cases} S_0 \cdot u =: S_{\frac{T}{2}}^u & \text{si el preu de l'acció augmenta un } U\% \; (u = 1 + \frac{U}{100}). \\ S_0 \cdot d =: S_{\frac{T}{2}}^d & \text{si el preu de l'acció disminueix un } D\% \; (d = 1 - \frac{D}{100}). \end{cases}$$

El valor intrínsec que prendria l'opció en el primer cas seria $VI_{\frac{T}{2}}^u$ i el que prendria en el segon cas, $VI_{\frac{T}{2}}^d$.

Es considera que al llarg del segon període (des de $t = \frac{T}{2}$ fins a $t = T$) el preu d'una acció un cop finalitzat el primer, pot, un altre cop, augmentar un $U\%$ o disminuir un $D\%$. Per tant, els tres possibles valors que pot prendre aquest preu en $t = T$ són:

$$S_T = \begin{cases} S_0 \cdot u^2 =: S_T^{uu} & \text{si el preu de l'acció puja els dos cops.} \\ S_0 \cdot u \cdot d =: S_T^{ud} = S_T^{du} & \text{si el preu de l'acció puja un cop un i baixa l'altre.} \\ S_0 \cdot d^2 =: S_T^{dd} & \text{si el preu de l'acció baixa els dos cops.} \end{cases}$$

Demostració:

- Si el preu d'una acció en $t = \frac{T}{2}$ és $S_{\frac{T}{2}}^u = S_0 \cdot u$, aleshores en $t = T$ pot ser:

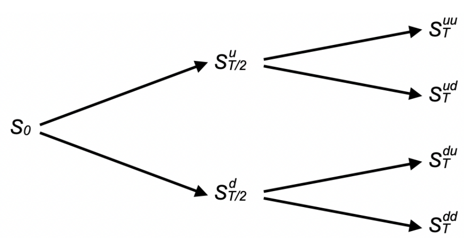
$$S_T = \begin{cases} S_{\frac{T}{2}}^u \cdot u = S_0 \cdot u \cdot u = S_0 \cdot u^2 =: S_T^{uu} & \text{si el preu de l'acció puja.} \\ S_{\frac{T}{2}}^u \cdot d = S_0 \cdot u \cdot d =: S_T^{ud} & \text{si el preu de l'acció baixa.} \end{cases}$$

- Si el preu d'una acció en $t = \frac{T}{2}$ és $S_{\frac{T}{2}}^d = S_0 \cdot d$, aleshores en $t = T$ pot ser:

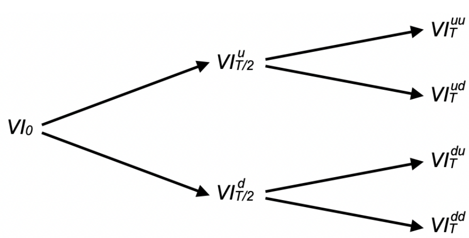
$$S_T = \begin{cases} S_{\frac{T}{2}}^d \cdot u = S_0 \cdot d \cdot u =: S_T^{du} = S_T^{ud} & \text{si el preu de l'acció puja.} \\ S_{\frac{T}{2}}^d \cdot d = S_0 \cdot d \cdot d = S_0 \cdot d^2 =: S_T^{dd} & \text{si el preu de l'acció baixa.} \end{cases}$$

Tal com succeïa en el cas d'un període, només es té coneixença dels possibles valors intrínsecs que pot adquirir una opció a la seva data de venciment. Aquests es poden consultar en la pàgina 23. Ara, però, canviarà la notació: VI_T^{uu} designarà el valor intrínsec en $t = T$ si el preu de l'acció augmenta durant els dos períodes; VI_T^{ud}, si augmenta durant un i disminueix durant l'altre; i VI_T^{dd}, si disminueix durant els dos.

En els esquemes que hi ha a continuació apareix l'evolució tant del preu de l'acció com del valor intrínsec de l'opció:



Evolució del preu de l'acció.



Evolució del valor intrínsec de l'opció.

L'equació resultant de la proposició 4.4 permetrà calcular els dos possibles valors intrínsecs que pot prendre l'opció en l'instant $t = \frac{T}{2}$ i després, quan ja es coneguin aquests dos valors, es podrà aconseguir el valor intrínsec inicial tornant-la a aplicar:

En el cas d'un període es té que:

$$VI_0 = [VI_T^u \cdot p \ + \ VI_T^d \cdot (1 \ - \ p)] \cdot e^{-rT},$$

on $p := \frac{e^{-rT} - d}{u - d}$ i r és la taxa lliure de risc.

Per tant,

$$VI_{\frac{T}{2}}^{u} = [VI_T^{uu} \cdot p \; + \; VI_T^{ud} \cdot (1 \; - \; p)] \cdot e^{-r\frac{T}{2}} \text{ (on } p := \frac{e^{-r\frac{T}{2}} - d}{u - d}).$$

$$VI_{\frac{T}{2}}^{d} = [VI_T^{ud} \cdot p \; + \; VI_T^{dd} \cdot (1 \; - \; p)] \cdot e^{-r\frac{T}{2}} \text{ (on } p := \frac{e^{-r\frac{T}{2}} - d}{u - d}).$$

I aplicant una altra vegada la primera expressió amb els dos valors intrínsecs acabats de cercar, s'obté que:

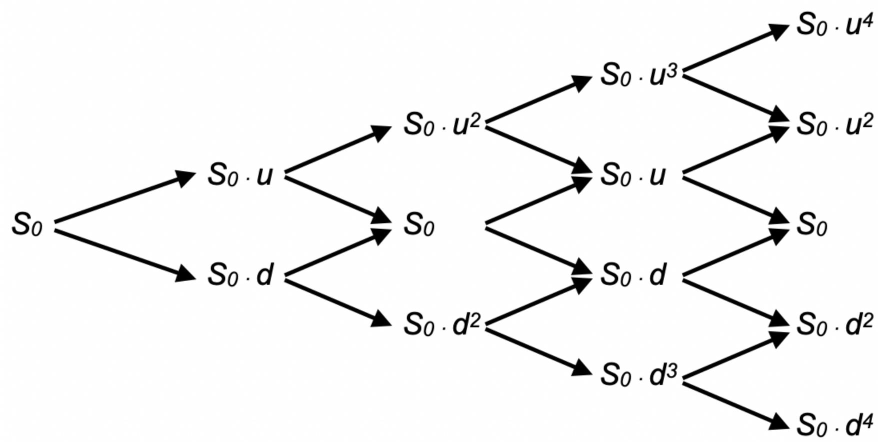
$$VI_0 = [VI_{\frac{T}{2}}^{u} \cdot p \; + \; VI_{\frac{T}{2}}^{d} \cdot (1 \; - \; p)] \cdot e^{-r\frac{T}{2}}$$

$$VI_0 = [VI_T^{uu} \cdot p^2 \; + \; 2 \cdot VI_T^{ud} \cdot p \cdot (1 \; - \; p) \; + \; VI_T^{dd} \cdot (1 \; - \; p)^2] \cdot e^{-2r\frac{T}{2}}.$$

En un món neutral al risc, p^2, $2p(1-p)$ i $(1-p)^2$ són, respectivament, les probabilitats que els dos moviments en el preu de les accions siguin ascendents, que un sigui ascendent i l'altre descendent i que els dos siguin descendents.

4.3.3 Generalització del model binomial

Després d'haver entès com funciona el model binomial d'un i de dos períodes, ha arribat el moment de deduir la seva generalització. Perquè resulti més senzill, es començarà observant l'esquema que mostra l'evolució del preu de l'acció en funció de S_0 (aquest esquema mai tindria fi, però aquí per acotar-lo s'ha tallat després del quart període). I per no complicar-ho massa, en aquesta evolució s'utilitzarà la relació $u = \frac{1}{d}$ i es considerarà, igual que en el subapartat anterior, que tots els períodes duren el mateix.



Evolució del preu de l'acció en funció de S_0.

En l'instant inicial (en $t = 0$), el preu de l'acció és S_0 i és conegut; després del primer període (en $t = \frac{T}{4}$), aquest podrà ser $S_0 \cdot u$ o $S_0 \cdot d$; un cop hagi finalitzat el segon (en $t = \frac{2 \cdot T}{4} = \frac{T}{2}$), aquest haurà pogut evolucionar cap a $S_0 \cdot u^2$, S_0 o $S_0 \cdot d^2$; i així successivament.

Si es suposa que hi ha n períodes en comptes d'haver-ne quatre, després de l'i-èssim (en $t = \frac{i \cdot T}{n}$) el preu de l'acció podrà prendre $i + 1$ possibles valors:

$$S_0 \cdot u^{i-j} \cdot d^j = S_0 \cdot \frac{u^{i-j}}{u^j} = S_0 \cdot \frac{d^j}{d^{i-j}}, \text{on } j \in \{0, 1, ..., i\} \text{ (s'ha fet servir que } u = \frac{1}{d}).$$

Abans d'estudiar l'evolució del valor intrínsec de l'opció, cal aclarir una qüestió de notació. A partir d'ara, el parell ordenat (i, j) farà referència al j-èssim node (de tots els nodes que hi ha al final d'un mateix període el que està dalt de tot és el 0, el que està a sota d'aquest és l'1 i així successivament) de l'esquema de l'evolució del preu de l'acció situat després de l'i-èssim període. De manera que $i \in \{0, 1, ..., n\}$ i $j \in \{0, 1, ..., i\}$. Per exemple, el node (4, 1) de l'esquema que hi ha a la pàgina anterior al·ludeix al preu $S_0 \cdot u^2$.

Ara sí que és el torn del valor intrínsec. D'ara endavant, al valor intrínsec associat al preu de l'acció que es troba en el node (i, j) de l'arbre se l'anomenarà $VI_{i,j}$. D'entrada, com ja s'ha comentat diversos cops, tan sols es poden conèixer els possibles valors intrínsecs que pot obtenir una opció a la seva data de venciment. En aquest cas són els següents:

- Si l'opció és de compra:

$$VI_{n,j} = \max\{0,\ S_0 \cdot u^{n-j} \cdot d^j - K\}, \text{on } j \in \{0, 1, ..., n\}.$$

- Si l'opció és de venda:

$$VI_{n,j} = \max\{0,\ K - S_0 \cdot u^{n-j} \cdot d^j\}, \text{on } j \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Es suposa que el preu de l'acció es desplaça del node (i, j) al $(i + 1, j)$ amb una probabilitat p i que del node (i, j) al $(i + 1, j + 1)$ ho fa amb una probabilitat 1 - p. Llavors, una valoració neutral al risc proporciona aquesta expressió:

$$VI_{i,j} = [VI_{i+1,j} \cdot p \ + \ VI_{i+1,j+1} \cdot (1 \ - \ p)] \cdot e^{-r\frac{T}{n}},$$

on $i \in \{0, 1, ..., n - 1\}$, $j \in \{0, 1, ..., i\}$ i r és la taxa lliure de risc.

Fent el límit es troba el valor intrínsec de l'inici ($VI_{0,0}$) que és el que ajuda al comprador i al venedor de l'opció a establir una prima justa.

4.3.4 Exemple pràctic

L'opció europea que s'utilitzarà d'exemple és de compra i presenta les característiques següents:

- Data de venciment: $T = 4$ anys (el preu del subjacent variarà quatre vegades, una després de cada any).
- Preu de l'actiu subjacent: $S_0 = 90$€ (si el preu del subjacent augmenta un cop finalitzat un d'aquests quatre anys, s'espera que aquest augment sigui del 43%).
- Preu d'exercici (o preu *strike*): $K = 100$€.

- Volatilitat del preu de l'actiu subjacent: $\sigma = 36\%$.

Emprarem un model binomial de quatre períodes per calcular el valor d'aquesta opció.

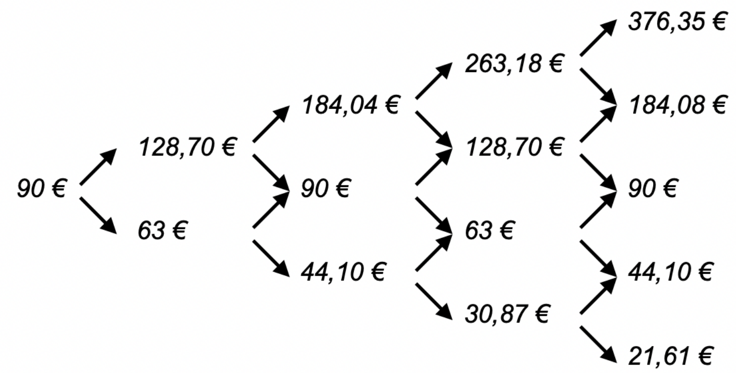
Com que $U = 43$, tenim que $u = 1 + \frac{43}{100} = 1,43 > 1$. I suposant que $u = \frac{1}{d}$, obtenim que $d = \frac{1}{1,43} \simeq 0,70 < 1$. Per tant, els possibles preus que pot prendre l'actiu subjacent en l'instant t són:

$$\text{Si } t = 1 \text{ any} \Longrightarrow \begin{cases} S_1^u = S_0 u = 90 \cdot 1,43 = 128,70€ \\ S_1^d = S_0 d = 90 \cdot 0,70 = 63€ \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 2 \text{ anys} \Longrightarrow \begin{cases} S_2^{uu} = S_0 u^2 = 90 \cdot 1,43^2 \simeq 184,04€ \\ S_2^{ud} = S_2^{du} = S_0 ud = S_0 = 90€ \\ S_2^{dd} = S_0 d^2 = 90 \cdot 0,70^2 = 44,10€ \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 3 \text{ anys} \Longrightarrow \begin{cases} S_3^{uuu} = S_0 u^3 = 90 \cdot 1,43^3 \simeq 263,18€ \\ S_3^{uud} = S_3^{udu} = S_3^{duu} = S_0 u^2 d = S_0 u = 90 \cdot 1,43 = 128,70€ \\ S_3^{ddu} = S_3^{dud} = S_3^{udd} = S_0 u d^2 = S_0 d = 90 \cdot 0,70 = 63€ \\ S_3^{ddd} = S_0 d^3 = 90 \cdot 0,70^3 = 30,87€ \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 4 \text{ anys} \Longrightarrow \begin{cases} S_4^{uuuu} = S_0 u^4 = 90 \cdot 1,43^4 \simeq 376,35€ \\ S_4^{uuud} = S_4^{uudu} = S_4^{uduu} = S_4^{duuu} = S_0 u^3 d = S_0 u^2 = 90 \cdot 1,43^2 \simeq 184,04€ \\ S_4^{uudd} = S_4^{udud} = S_4^{duud} = S_4^{uddu} = S_4^{dudu} = S_4^{dduu} = S_0 u^2 d^2 = S_0 = 90€ \\ S_4^{dddu} = S_4^{ddud} = S_4^{dudd} = S_4^{uddd} = S_0 u d^3 = S_0 d^2 = 90 \cdot 0,70^2 = 44,10€ \\ S_4^{dddd} = S_0 d^4 = 90 \cdot 0,70^4 = 21,61€ \end{cases}$$



Evolució del preu de l'actiu subjacent.

Ara que ja sabem quins són tots els possibles preus que pot anar adquirint el subjacent, ens toca calcular els possibles valors intrínsecs que pot prendre l'opció en cada instant t. Aquest càlcul el realitzarem a l'inrevés, o sigui, començarem calculant els de l'instant $t = 4$ anys i l'últim que trobarem serà l'inicial, que és el que realment ens interessa. Afegir que, per comoditat, utilitzarem la mateixa notació que en la generalització del model binomial, anomenarem $VI_{i,j}$ al valor intrínsec associat al preu del subjacent que es troba situat en el node (i, j) de l'arbre.

$$\text{Si } t = 4 \text{ anys} \Longrightarrow \begin{cases} VI_{4,0} = \max\{0,\, S_0 u^4 - K\} = \max\{0,\, 90 \cdot 1,43^4 - 100\} \simeq 276,35€ \\ VI_{4,1} = \max\{0,\, S_0 u^3 d - K\} = \max\{0,\, 90 \cdot 1,43^3 \cdot 0,70 - 100\} \simeq 84,23€ \\ VI_{4,2} = \max\{0,\, S_0 u^2 d^2 - K\} = \max\{0,\, 90 \cdot 1,43^2 \cdot 0,70^2 - 100\} = 0€ \\ VI_{4,3} = \max\{0,\, S_0 u d^3 - K\} = \max\{0,\, 90 \cdot 1,43 \cdot 0,70^3 - 100\} = 0€ \\ VI_{4,4} = \max\{0,\, S_0 d^4 - K\} = \max\{0,\, 90 \cdot 0,70^4 - 100\} = 0 \end{cases}$$

Per esbrinar els possibles valors intrínsecs en els instants anteriors a aquest, necessitem conèixer el valor de $p = \frac{e^{-r\frac{T}{n}} - d}{u - d}$ (on n és el nombre de períodes). Així doncs, anem a calcular-lo abans que res:

$$p = \frac{e^{-r\frac{T}{n}} \, - \, d}{u \, - \, d} = \frac{e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \, - \, 0,70}{1,43 \, - \, 0,70} \simeq 0,384.$$

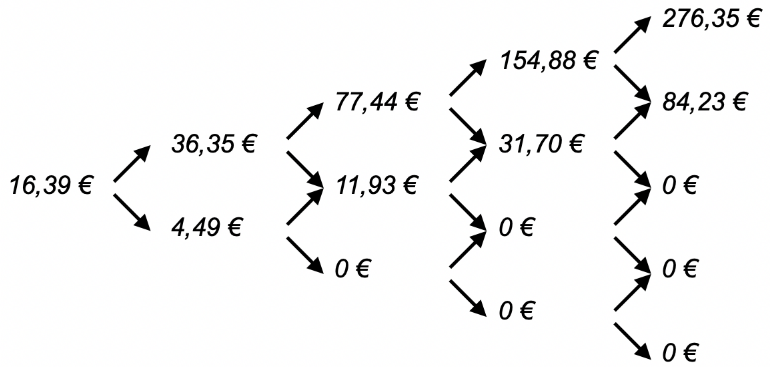
Ara sí, ja podem calcular els possibles valors intrínsecs que ens falten:

$$\text{Si } t = 3 \text{ anys} \Longrightarrow \begin{cases} VI_{3,0} = [VI_{4,0} \cdot p \, + \, VI_{4,1} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 154,88€ \\ VI_{3,1} = [VI_{4,1} \cdot p \, + \, VI_{4,2} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 31,70€ \\ VI_{3,2} = [VI_{4,2} \cdot p \, + \, VI_{4,3} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} = 0€ \\ VI_{3,3} = [VI_{4,3} \cdot p \, + \, VI_{4,4} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} = 0€ \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 2 \text{ anys} \Longrightarrow \begin{cases} VI_{2,0} = [VI_{3,0} \cdot p \, + \, VI_{3,1} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 77,44€ \\ VI_{2,1} = [VI_{3,1} \cdot p \, + \, VI_{3,2} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 11,93€ \\ VI_{2,2} = [VI_{3,2} \cdot p \, + \, VI_{3,3} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} = 0€ \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 1 \text{ any} \Longrightarrow \begin{cases} VI_{1,0} = [VI_{2,0} \cdot p \, + \, VI_{2,1} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 36,35€ \\ VI_{1,1} = [VI_{2,1} \cdot p \, + \, VI_{2,2} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 4,49€ \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 0 \text{ anys} \Longrightarrow VI_{0,0} = [VI_{1,0} \cdot p \, + \, VI_{1,1} \cdot (1 \, - \, p)] \cdot e^{-0,02 \, \cdot \, \frac{4}{4}} \simeq 16,39€$$



Evolució del valor intrínsec de l'opció.

Aquesta opció, doncs, té un valor de $\underline{16,39€}$.

4.4 Model de Black-Scholes

El model de Black-Scholes, proposat per Fischer Black i Myron Scholes a inicis de la dècada dels anys 1970, és un model a temps continu[18] que va suposar un pas transcendental en el càlcul de la valoració d'opcions financeres europees sobre accions. Aquest model ha influït tant en la manera en què els agents valoren aquest tipus d'opcions que encara es fa servir avui en dia en els mercats financers.

Abans de començar amb la deducció de l'equació de Black-Scholes, fa falta introduir el Lema de Itô i un seguit de definicions:

[18]**Temps continu**: és aquell que no es mesura en moments concrets, sinó que s'avalua com un flux que no està dividit.

Definició 4.6. *Es diu que una variable aleatòria*[19] X *segueix una* ***distribució normal*** *de mitjana* μ *(*$E(X) = \mu \in \mathbb{R}$*) i variància* σ^2 *(*$Var(X) = \sigma^2 \in (0, \infty)$*), i s'expressa* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*, si la seva funció de distribució*[20] *és:*

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} du, \ -\infty < x < +\infty.$$

Si $\mu = 0$ *i* $\sigma^2 = 1$*, aleshores es diu que* X *segueix una* ***distribució normal estàndard****.*

Definició 4.7. *El* ***moviment brownià*** *o* ***procés de Wiener****, denotat indistintament per {B(t): t ≥ 0} o {W(t): t ≥ 0}, és un procés estocàstic*[21] *a temps continu que satisfà les tres propietats següents:*

1. *B(0) = 0.*
2. *Té increments independents, és a dir, si* $0 \leq B(t_1) < B(t_2) \leq B(s_1) < B(s_2)$*, aleshores* $B(t_2) - B(t_1)$ *i* $B(s_2) - B(s_1)$ *són variables aleatòries independents. Aquesta condició no és vàlida únicament per a dos increments, sinó que ho és per a qualsevol nombre d'increments.*
3. *Té increments estacionaris, és a dir,* $\forall t \geq 0$ *i* $\forall h > 0$*,* $B(t + h) - B(t) \sim N(0, h)$*.*

Observació 4.8. Tenint en consideració les propietats 1 i 3 de la definició anterior, en el cas que $t = 0$ es té que:

$$B(0 + h) - B(0) = B(h) - B(0) \overset{1.}{=} B(h) - 0 = B(h) \overset{3.}{\sim} N(0, h).$$

Fixada h, la variable aleatòria $B(h)$ segueix una distribució normal de mitjana 0 ($E(B(h)) = 0 \in \mathbb{R}$) i variància h ($Var(B(h)) = h \in (0, \infty)$).

Definició 4.9. *El* ***moviment brownià geomètric****, designat aquest cop per {X(t): t ≥ 0} per diferenciar-lo de l'anterior, és un procés estocàstic que és solució de l'equació que apareix a continuació:*

$$dX(t) = \mu \cdot X(t) \cdot dt + \sigma \cdot X(t) \cdot dB(t),$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ *és la deriva*[22] *o tendència de X;* $\sigma \in (0, \infty)$*, la volatilitat de X; i {B(t): t ≥ 0}, un moviment brownià estàndard.*

Abans d'enunciar el Lema de Itô, afegir que per poder deduir l'equació del model de Black-Scholes cal tenir en consideració el supòsit següent:

[19]**Variable aleatòria**: en termes generals, és la funció matemàtica d'un experiment aleatori.
[20]**Funció de distribució**: funció que descriu la probabilitat segons la qual una variable aleatòria pot prendre un valor menor o igual a un altre al qual està avaluada.
[21]**Procés estocàstic**: conjunt de variables aleatòries que depenen d'un mateix paràmetre.
[22]**Deriva**: variació lenta i contínua d'una magnitud.

- El preu de l'actiu subjacent, $S(t)$, és un moviment brownià geomètric: $dS(t) = \mu \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dB(t)$ (on μ denota la seva variació mitjana i σ, la seva volatilitat).

Demostració:

Es consideren dos instants de temps, t i $t+dt$ ($dt > 0$). Si el preu de l'actiu subjacent en t és $S(t)$ i en $t+dt$ és $S(t+dt) = S(t) + dS$ (dS no té perquè ser estrictament major que zero), aleshores la ràtio entre l'increment o la disminució que ha sofert el preu del subjacent entre aquests dos instants $(S(t+dt) - S(t))$ i $S(t)$ es pot expressar de la manera següent:

$$\frac{dS}{S(t)}.$$

És possible descompondre-la en dues parts, una determinista i l'altra aleatòria. La determinista $(\mu \cdot dt)$ mostra quant ha variat de mitjana el preu del subjacent durant dt i l'aleatòria ($\sigma \cdot B(t)$, on $B(t)$ és un moviment brownià), en canvi, dona resposta a tots aquells canvis fruits de l'atzar que ha experimentat el preu del subjacent durant dt. Així doncs,

$$\frac{dS}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dB(t) \Longleftrightarrow dS = \mu \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dB(t).$$

Un dels objectius més importants del càlcul estocàstic és el de trobar la diferencial d'una funció que depèn tant del temps com d'un procés estocàstic. El Lema de Itô dona les condicions suficients perquè existeixi tal diferencial i, a més a més, mostra com calcular-la.

Lema 4.10. *Lema de Itô.*

Sigui {X(t): $t \geq 0$} un moviment brownià geomètric.

Llavors la funció G(X(t), t) de classe $C^{1,2}$ en el seu domini compleix la igualtat següent:[23]

$$dG(X(t),t) = (\frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}\mu X(t) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}\sigma^2 X(t)^2)dt$$
$$+\frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}\sigma X(t) dB(t),$$

on {B(t): $t \geq 0$} és el moviment brownià que apareix a l'equació que satisfà {X(t): $t \geq 0$} per ser un moviment brownià geomètric.

[23]Que una funció que depèn de dues variables sigui de classe $C^{1,2}$ significa que existeixen i són contínues la primera derivada parcial respecte de la primera variable i les dues primeres derivades parcials respecte de la segona.

Demostració:

G(X(t), t), com que és de classe $C^{1,2}$ en el seu domini, es pot expandir en aquesta sèrie de Taylor:

$$G(X(t+h),t+h) = G(X(t),t) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}(X(t+h)-X(t)) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial t}(t+h-t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}(X(t+h)-X(t))^2 + \frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)\partial t}(X(t+h)-X(t))(t+h-t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial t^2}(t+h-t)^2 + ...$$

Considerant que $h = dt$ (i, per tant, que $dG(X(t),t) = G(X(t+h),t+h) - G(X(t),t)$ i $dX(t) = X(t+h) - X(t)$), s'obté que:

$$dG(X(t),t) = \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}dX(t) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}(dX(t))^2$$

$$+\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)\partial t}dX(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial t^2}(dt)^2 + ...$$

A l'expressió que hi ha acontinuació s'ha substituït $dX(t)$ per $\mu \cdot X(t) \cdot dt + \sigma \cdot X(t) \cdot dB(t)$). Això s'ha pogut fer perquè {X(t): t $\geq$ 0} és un moviment brownià geomètric.

$$dG(X(t),t) = \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t)) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial(t)}dt$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t))^2 + \frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)\partial t}(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t))dt$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial t^2}(dt)^2 + ...$$

$$= \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t)) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial(t)}dt$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}(\mu^2 X(t)^2(dt)^2 + 2\mu\sigma X(t)^2 dt dB(t) + \sigma^2 X(t)^2(dB(t))^2)$$

$$+\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)\partial t}(\mu X(t)(dt)^2 + \sigma X(t)dtdB(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial t^2}(dt)^2 + ...$$

Si t tendeix a 0, aleshores dt^2 i $dtdB(t)$ tendeixen a 0 més ràpidament que dt (cal recordar que com que {B(t): t $\geq$ 0} és un moviment brownià, es té que B(0) = 0). Considerant $(dt)^2 = dtdB(t) = 0$:

$$dG(X(t),t) = \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}(\mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t)) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial(t)}dt$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}\sigma^2 X(t)^2(dB(t))^2 + ...$$

Com que dt i $dB(t)^2$ tendeixen a 0 a la mateixa velocitat quan t tendeix a 0, es pot canviar $(dB(t))^2$ per dt. I així és com s'arriba a la igualtat del Lema de Itô:

$$dG(X(t),t) = (\frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}\mu X(t) + \frac{\partial G(X(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G(X(t),t)}{\partial X(t)^2}\sigma^2 X(t)^2)dt$$
$$+\frac{\partial G(X(t),t)}{\partial X(t)}\sigma X(t)dB(t)$$

Ara sí, ja es pot procedir a deduir l'equació de Black-Scholes. Per simplificar-ho, s'usarà d'exemple una opció de compra europea que té accions com a actiu subjacent.

Sigui $\vec{c}$ una cartera que consisteix en una posició curta en una opció i una posició llarga en Δ accions. Siguin $\Pi^u_{t+dt} = \Delta \cdot S^u_{t+dt}$ - VI^u_{t+dt} i $\Pi^d_{t+dt} = \Delta \cdot S^d_{t+dt}$ - VI^d_{t+dt} els dos possibles valors que pot assolir aquesta cartera en l'instant $t+dt$ (pel que fa a la notació, $S(t) \equiv S_t$ i $S(t+dt) \equiv S_{t+dt}$). Igualant-los, es trobarà la Δ que fa que la cartera creixi d'igual manera independentment de com evolucioni el mercat:

$$\Pi^u_{t+dt} = \Pi^d_{t+dt} \Longleftrightarrow \Delta = \frac{VI^u_{t+dt} \text{ - } VI^d_{t+dt}}{S^u_{t+dt} \text{ - } S^d_{t+dt}} = \frac{dVI}{dS}.$$

Derivant respecte de t l'equació general que s'empra per calcular el valor de la cartera:

$$d\Pi = \Delta \cdot dS \text{ - } dVI.$$

Substituint dS per $\mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dB$:

$$d\Pi = \Delta \cdot (\mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dB) \text{ - } dVI.$$

Com que s'ha suposat que el preu de l'actiu subjacent, $S(t)$, és un moviment brownià geomètric i com que el valor intrínsec (que depèn del preu del subjacent i, per tant, també del temps), $VI(S(t),t)$, és de classe $C^{1,2}$ en el seu domini, es té, pel Lema de Itô, que:

$$dVI = (\frac{\partial VI}{\partial S}\mu S + \frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial VI}{\partial S}\sigma S dB.$$

Canviant aquesta igualtat a l'expressió anterior, s'obté que:

$$d\Pi = \Delta(\mu S dt + \sigma S dB) \text{ - } (\frac{\partial VI}{\partial S}\mu S + \frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial S}\sigma S dB.$$

I separant la part determinista de l'aleatòria:

$$d\Pi = (\Delta\mu S \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial S}\mu S \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial t} \text{ - } \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + (\Delta\sigma S \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial S}\sigma S)dB.$$

Reemplaçant a l'expressió obtinguda Δ per $\frac{\partial VI}{\partial S}$:

$$d\Pi = (\frac{\partial VI}{\partial S}\mu S \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial S}\mu S \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial t} \text{ - } \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + (\frac{\partial VI}{\partial S}\sigma S \text{ - } \frac{\partial VI}{\partial S}\sigma S)dB$$

$$d\Pi = \text{ - }(\frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt.$$

A més, es pot suposar que la ràtio entre la variació que ha sofert el valor de l'opció entre t i $t + dt$ ($\Pi(t + dt) - \Pi(t) =: d\Pi$) i $\Pi(t)$ coincideix amb la rendibilitat que s'ha obtingut d'aquesta opció durant dt ($r \cdot dt$, on r és la taxa lliure de risc). Aquest supòsit és cert perquè $\vec{c}$ és una cartera lliure de risc.

$$\frac{d\Pi}{\Pi(t)} = r \cdot dt \Longleftrightarrow d\Pi = \Pi(t) \cdot r \cdot dt.$$

Per tant, continuant amb la deducció de l'equació de Black-Scholes i substituint $d\Pi$ per $\Pi \cdot r \cdot dt$:

$$\Pi r dt = \text{ - }(\frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt$$

$$\Pi r = \text{ - }(\frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2).$$

I utilitzant que $\Pi = \Delta \cdot S \text{ - } VI = \frac{\partial VI}{\partial S} \cdot S \text{ - } VI$, s'arriba a:

$$\frac{\partial VI}{\partial S}Sr \text{ - } VIr = \text{ - }\frac{\partial VI}{\partial t} \text{ - } \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

$$\frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{\partial VI}{\partial S}Sr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \text{ - } VIr = 0.$$

En aquesta última equació, $t \in [0, T]$, on T és la data de venciment, i $S \in [0, \infty)$.

Tot seguit s'estudiarà com es comporta el valor intrínsec quan $S = 0$ i quan $S \to \infty$:

- Si el preu del subjacent en un cert instant t és 0, aleshores el valor intrínsec de l'opció just en aquest instant, com que es tracta d'una opció de compra, serà $VI(0, t) = max\{0, 0 \text{ - } K\} = max\{0, \text{ - } K\} = 0$.
- Si el preu del subjacent en un cert instant t tendeix a ∞, aleshores el valor intrínsec de l'opció just en aquest instant, com que es tracta d'una opció de compra, tendirà a $max\{0, \infty \text{ - } K\}$ i, com que $\infty >> K$, aquesta expressió és equivalent a $max\{0, \infty\} = \infty$.

Per tant, es té que:

$$\frac{\partial VI}{\partial t} + \frac{\partial VI}{\partial S}Sr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \text{ - } VIr = 0, \text{ on } t \in [0, T] \text{ i } S \in [0, \infty). \quad [1]$$

$$VI(S, t)\begin{cases} = 0, & \text{si } S = 0. \\ \to \infty, & \text{si } S \to \infty. \\ = max\{0, S \text{ - } K\}, & \text{si } S \in (0, \infty). \end{cases}$$

Es consideren, ara, els canvis de variable següents:

$$x := ln(\frac{S}{K}) \Longleftrightarrow S = e^{K \cdot x}.$$

$$y(t) := \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot (T \text{ - } t) \Longleftrightarrow t = T \text{ - } \frac{2 \cdot y(t)}{\sigma^2}.$$

Cal notar que:

- Com que $S \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$S = e^{K \cdot x} \geq 0 \text{ (sempre és cert).}$$

- Com que $t \in [0, T]$, $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$:

$$t = T - \frac{2 \cdot y(t)}{\sigma^2} \geq 0 \Longleftrightarrow y(t) \leq \frac{T \cdot \sigma^2}{2}.$$

$$t = T - \frac{2 \cdot y(t)}{\sigma^2} \leq T \Longleftrightarrow y(t) \geq 0.$$

El quocient $\frac{VI(S,t)}{K}$, doncs, és una funció que depèn de x i y(t). Anomenem-la f:

$$f(x, y(t)) := \frac{VI(S,t)}{K}.$$

Aïllant el valor intrínsec:

$$VI(S,t) = K \cdot f(x, y(t)).$$

A continuació s'efectuen aquestes tres derivades parcials:

$\frac{\partial VI}{\partial t}(S,t) = K \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) \frac{\partial y}{\partial t}(t) = K \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t))(- \frac{1}{2}\sigma^2) = - \frac{1}{2} K \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)).$

$\frac{\partial VI}{\partial S}(S,t) = K \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) \frac{\partial x}{\partial S} = K \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) \frac{\frac{1}{K}}{\frac{S}{K}} = K \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) \frac{1}{S} = \frac{K}{S} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)).$

$\frac{\partial^2 VI}{\partial S^2}(S,t) = - \frac{K}{S^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{K}{S} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) \frac{\frac{1}{K}}{\frac{S}{K}} = - \frac{K}{S^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t))$

$= \frac{K}{S^2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))).$

Substituint a [1] aquests tres resultats, s'obté que:

$-\frac{1}{2} K \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + \frac{K}{S} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) S r + \frac{1}{2} \frac{K}{S^2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))) \sigma^2 S^2 - VIr = 0$

$-\frac{1}{2} K \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + K \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) r + \frac{1}{2} K \sigma^2 (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))) - VIr = 0,$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

I utilitzant que $VI(S,t) = K \cdot f(x, y(t))$:

$-\frac{K\sigma^2}{2} \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + K \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) r + \frac{K\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))) - K f(x, y(t)) r = 0$

$-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) r + \frac{\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))) - f(x, y(t)) r = 0,$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

Fent el canvi de variable $z := \frac{2 \cdot r}{\sigma^2} \Longleftrightarrow r = \frac{z \cdot \sigma^2}{2}$, queda que:

$$-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))\frac{z\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))) - f(x, y(t))\frac{z\sigma^2}{2} = 0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t))z + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) - f(x, y(t))z = 0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) + (z-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) - f(x, y(t))z = 0,$$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$. [2]

Es proposa, ara, el canvi de variable següent:

$$g(x, y(t)) := e^{-\alpha \cdot x - \beta \cdot y(t)} \cdot f(x, y(t)) \Longleftrightarrow f(x, y(t)) = e^{\alpha \cdot x + \beta \cdot y(t)} \cdot g(x, y(t)),$$

on α, $\beta \in \mathbb{R}$.

I es calculen aquestes tres derivades parcials:

$$\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x, y(t)) = \beta e^{\alpha x + \beta y(t)} g(x, y(t)) + e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t)) = e^{\alpha x + \beta y(t)}(\beta g(x, y(t))$$

$$+\frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t))).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(t)) = \alpha e^{\alpha x + \beta y(t)} g(x, y(t)) + e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)) = e^{\alpha x + \beta y(t)}(\alpha g(x, y(t))$$

$$+\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t))).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(t)) = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta y(t)} g(x, y(t)) + \alpha e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)) + \alpha e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t))$$

$$+e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t)) = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta y(t)} g(x, y(t)) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t))$$

$$+e^{\alpha x + \beta y(t)}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t)) = e^{\alpha x + \beta y(t)}(\alpha^2 g(x, y(t)) + 2\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t))).$$

Canviant a [2] aquests tres resultats, s'arriba a:

$$-e^{\alpha x + \beta y(t)}(\beta g(x, y(t)) + \frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t))) + (z-1)e^{\alpha x + \beta y(t)}(\alpha g(x, y(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)))$$

$$+e^{\alpha x + \beta y(t)}(\alpha^2 g(x, y(t)) + 2\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t))) - e^{\alpha x + \beta y(t)} g(x, y(t))z = 0,$$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

I simplificant el terme $\mathrm{e}^{\alpha \cdot x + \beta \cdot y(t)}$:

$-\beta g(x, y(t)) - \frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t)) + (z-1)(\alpha g(x, y(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t))) + \alpha^2 g(x, y(t))$

$+2\alpha \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t)) - g(x, y(t))z = 0,$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

Aquesta equació és equivalent a:

$(\beta + z)g(x, y(t)) + \frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t)) = (z-1)(\alpha g(x, y(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t))) + \alpha^2 g(x, y(t))$

$+2\alpha \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t)),$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

Igualant els coeficients de $g(x, y(t))$ i també els de $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(t))$, s'obté el sistema d'equacions que hi ha a continuació:

$$\left.\begin{array}{rcl} \beta + z & = & (z-1)\alpha + \alpha^2 \\ 0 & = & (z-1) + 2\alpha \end{array}\right\}$$

Solucionant-lo, $\alpha = \frac{1 - z}{2}$ i $\beta = - \frac{(1 + z)^2}{4}$.

Per tant, duent a terme el canvi de variable

$$g(x, y(t)) := e^{- \frac{1 - z}{2} \cdot x + \frac{(1 + z)^2}{4} \cdot y(t)} \cdot f(x, y(t))$$

a la igualtat [2]:

$\frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t)) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t)),$ on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

Deixant de banda per un moment aquest resultat, ja s'ha vist que:

- $VI(S, t) = max\{0, S - K\} = max\{0, K \cdot e^x - K\} = K \cdot max\{0, e^x - 1\}$ (s'ha emprat el canvi de variable $x = ln(\frac{S}{K})$).
- $VI(S, t) = K \cdot f(x, y(t))$.

I efectuant la igualació pertinent:

$$K \cdot f(x, y(t)) = K \cdot max\{0, e^x - 1\}$$

$$f(x, y(t)) = max\{0, e^x - 1\}, \text{ on } x \in \mathbb{R}.$$

Seguidament, es calcularà el valor que pren aquesta última equació a la data de venciment:

$$f(x, y(T)) = max\{0, e^x - 1\}, \text{ on } x \in \mathbb{R}.$$

Com que $y(T) = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot (T - T) = \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot 0 = 0$, es té que:

$$f(x,0) = max\{0, e^x - 1\}, \text{ on } x \in \mathbb{R}.$$

I utilitzant aquesta última igualtat, el canvi de variable $g(x, y(t)) := e^{-\alpha x - \beta y(t)} f(x, y(t))$ i que $\alpha = \frac{1 - z}{2}$:

$$g(x,0) = e^{-\alpha x} f(x,0) = e^{-\alpha x} max\{0, e^x - 1\} = max\{0, e^{(1-\alpha)x} - e^{-\alpha x}\}$$

$$= max\{0, e^{\frac{z+1}{2}x} - e^{\frac{z-1}{2}x}\}, \text{ on } x \in \mathbb{R}.$$

Recapitulant:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial y(t)}(x, y(t)) & = & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y(t)) \\ g(x,0) & = & max\{0, e^{\frac{z+1}{2}x} - e^{\frac{z-1}{2}x}\} \end{array}\right\},$$

on $x \in \mathbb{R}$ i $y(t) \in [0, \frac{T \cdot \sigma^2}{2}]$.

Aquest és un clar exemple d'equació de la calor. No s'entrarà en detall, però aquests tipus d'equacions es resolen mitjançant la fórmula següent:

$$g(x, y(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s,0) e^{-\frac{(x-s)^2}{4y(t)}} \, ds.$$

Aplicant el canvi de variable $w := \frac{s-x}{\sqrt{2y(t)}} \iff s = w\sqrt{2y(t)} + x$ $(ds = \sqrt{2y(t)}dw)$:

$$g(x, y(t)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(w\sqrt{2y(t)} + x, 0) e^{-\frac{(x - w\sqrt{2y(t)} - x)^2}{4y(t)}} \sqrt{2y(t)} \, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(w\sqrt{2y(t)} + x, 0) e^{-\frac{w^2}{2}} \, dw.$$

I reemplaçant $g(w\sqrt{2y(t)} + x, 0)$ per $max\{0, e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)} - e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)}\}$:

$$g(x, y(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} max\{0, e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)} - e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)}\} e^{-\frac{w^2}{2}} \, dw.$$

Tot seguit es procedirà a calcular per a quins valors de w aquest màxim és major o igual que 0:

$$e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)} - e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)} \geq 0 \iff e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)} \geq e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)}$$

$$\iff \frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)} + x) \geq \frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)} + x) \iff w\sqrt{2y(t)} + x \geq -w\sqrt{2y(t)} - x$$

$$\iff 2(w\sqrt{2y(t)} + x) \geq 0 \iff w\sqrt{2y(t)} + x \geq 0 \iff w \geq -\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}.$$

Així doncs, l'expressió anterior queda de la manera següent:

$$g(x,y(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} (e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)} - e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)})e^{-\frac{w^2}{2}}\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)-\frac{w^2}{2}}\, dw - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)-\frac{w^2}{2}}\, dw.$$

I anomenant I_1 a la primera integral i I_2 a la segona, s'obté que:

$$g(x,y(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_2.$$

Seguidament, es resoldrà I_1:

$$I_1 = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{\frac{z+1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)-\frac{w^2}{2}}\, dw = e^{\frac{z+1}{2}x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{\frac{z+1}{2}w\sqrt{2y(t)}-\frac{w^2}{2}}\, dw.$$

A continuació s'estudiarà únicament l'exponent que hi ha a l'interior de la integral:

$$\frac{z+1}{2}w\sqrt{2y(t)} - \frac{w^2}{2} = -\frac{1}{2}(w^2 - w(z+1)\sqrt{2y(t)})$$

$$= -\frac{1}{2}(w^2 - w(z+1)\sqrt{2y(t)} + \frac{(z+1)^2 y(t)}{2} - \frac{(z+1)^2 y(t)}{2})$$

$$= \frac{(z+1)^2 y(t)}{4} - \frac{1}{2}(w^2 - w(z+1)\sqrt{2y(t)} + \frac{(z+1)^2 y(t)}{2})$$

$$= \frac{(z+1)^2 y(t)}{4} - \frac{1}{2}(w^2 - w(z+1)\sqrt{2y(t)} + (\frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2})^2)$$

$$= \frac{(z+1)^2 y(t)}{4} - \frac{1}{2}(w - \frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2})^2.$$

Per tant, es té que:

$$I_1 = e^{\frac{z+1}{2}x + \frac{(z+1)^2 y(t)}{4}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(w - \frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2})^2}\, dw.$$

I fent el canvi de variable $u := w$ - $\frac{(z+1)\,\cdot\,\sqrt{2\,\cdot\,y(t)}}{2}$ $(du = dw)$:

$$I_1 = e^{\frac{z+1}{2}x + \frac{(z+1)^2 y(t)}{4}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}} - \frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Denominant $-d_1$ al límit inferior d'integració:

$$I_1 = e^{\frac{z+1}{2}x + \frac{(z+1)^2 y(t)}{4}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \text{ on } d_1 = \frac{x}{\sqrt{2y(t)}} + \frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2}.$$

I degut a la simetria de $e^{-\frac{u^2}{2}}$ respecte l'eix d'ordenades:

$$I_1 = e^{\frac{z+1}{2}x+\frac{(z+1)^2y(t)}{4}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \text{ on } d_1 = \frac{x}{\sqrt{2y(t)}} + \frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2}.$$

El procediment per a calcular I_2 és molt semblant al que s'acaba de fer:

$$I_2 = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{\frac{z-1}{2}(w\sqrt{2y(t)}+x)-\frac{w^2}{2}}\, dw = e^{\frac{z-1}{2}x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{\frac{z-1}{2}w\sqrt{2y(t)}-\frac{w^2}{2}}\, dw.$$

Mirant solament l'exponent de l'interior de la integral:

$$\begin{aligned}
\frac{z-1}{2}w\sqrt{2y(t)} - \frac{w^2}{2} &= -\frac{1}{2}(w^2 - w(z-1)\sqrt{2y(t)}) \\
= -\frac{1}{2}(w^2 - w(z-1)\sqrt{2y(t)} &+ \frac{(z-1)^2y(t)}{2} - \frac{(z-1)^2y(t)}{2}) \\
= \frac{(z-1)^2y(t)}{4} - \frac{1}{2}(w^2 &- w(z-1)\sqrt{2y(t)} + \frac{(z-1)^2y(t)}{2}) \\
= \frac{(z-1)^2y(t)}{4} - \frac{1}{2}(w^2 &- w(z-1)\sqrt{2y(t)} + (\frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2})^2) \\
= \frac{(z-1)^2y(t)}{4} &- \frac{1}{2}(w - \frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2})^2.
\end{aligned}$$

Així que:

$$I_2 = e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(w-\frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2})^2}\, dw.$$

I duent a terme el canvi de variable $v := w$ - $\frac{(z - 1) \cdot \sqrt{2 \cdot y(t))}}{2}$ $(dv = dw)$:

$$I_2 = e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2y(t)}}-\frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv.$$

Anomenant $-d_2$ al límit inferior d'integració:

$$I_2 = e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv, \text{ on } d_2 = \frac{x}{\sqrt{2y(t)}} + \frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2}.$$

I com que la funció $e^{-\frac{v^2}{2}}$ és simètrica respecte l'eix d'ordenades:

$$I_2 = e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv, \text{ on } d_2 = \frac{x}{\sqrt{2y(t)}} + \frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2}.$$

Resumint:

$$g(x,y(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_2$$
$$= e^{\frac{z+1}{2}x+\frac{(z+1)^2y(t)}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv.$$

Cal adonar-se que:

- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = F(d_1)$, on F és la funció de distribució d'una normal estàndard.
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = F(d_2)$, on F és la funció de distribució d'una normal estàndard.

Per tant, es té que:

$$g(x,y(t)) = e^{\frac{z+1}{2}x+\frac{(z+1)^2y(t)}{4}}F(d_1) - e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}}F(d_2),$$

on $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2y(t)}} + \frac{(z+1)\sqrt{2y(t)}}{2}$ i $d_2 = \frac{x}{\sqrt{2y(t)}} + \frac{(z-1)\sqrt{2y(t)}}{2}$.

Desfent el canvi de variable $g(x,y(t)) = e^{-\frac{1-z}{2}x+\frac{(1+z)^2}{4}y(t)}f(x,y(t)) = e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(1+z)^2y(t)}{4}}f(x,y(t))$:

$$f(x,y(t)) = e^{-\frac{z-1}{2}x-\frac{(1+z)^2y(t)}{4}}g(x,y(t))$$
$$= e^{-\frac{z-1}{2}x-\frac{(1+z)^2y(t)}{4}}(e^{\frac{z+1}{2}x+\frac{(z+1)^2y(t)}{4}}F(d_1) - e^{\frac{z-1}{2}x+\frac{(z-1)^2y(t)}{4}}F(d_2))$$
$$= e^{x}F(d_1) - e^{-zy(t)}F(d_2).$$

I desfent també els canvis de variable $x = ln(\frac{S}{K})$, $y(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, $f(x,y(t)) = \frac{VI(S,t)}{K}$ i $z = \frac{2r}{\sigma^2}$:

$$\frac{VI(S,t)}{K} = e^{ln(\frac{S}{K})}F(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}F(d_2) = \frac{S}{K}F(d_1) - e^{-r(T-t)}F(d_2)$$
$$VI(S,t) = SF(d_1) - Ke^{-r(T-t)}F(d_2),$$

on:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K})}{\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}} + \frac{(\frac{2r}{\sigma^2}+1)\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}}{2} = \frac{ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{2(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2})\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$
$$= \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$
$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{K})}{\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}} + \frac{(\frac{2r}{\sigma^2}-1)\sqrt{2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}}{2} = \frac{ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{2(\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2})\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$
$$= \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

4.4.1 Exemple pràctic

S'emprarà com a exemple una opció de compra europea amb aquestes propietats:

- Data de venciment: $T = 3$ mesos $= 0,25$ anys.
- Preu de l'actiu subjacent: $S_0 = 110$€.
- Preu d'exercici (o preu *strike*): $K = 100$€.
- Volatilitat del preu de l'actiu subjacent: $\sigma = 36\% = 0,36$.
- Taxa lliure de risc: $r = 5\% = 0,05$.

El primer que farem serà calcular d_1 i d_2. Com que coneixem el preu de l'actiu subjacent en l'instant inicial, considerarem que $t = 0$ i $S = S_0 = 90$.

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = \frac{ln(\frac{110}{100}) + (0,05 + \frac{0,36^2}{2})(0,25 - 0)}{0,36\sqrt{0,25 - 0}} \simeq 0,69.$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = \frac{ln(\frac{110}{100}) + (0,05 - \frac{0,36^2}{2})(0,25 - 0)}{0,36\sqrt{0,25 - 0}} \simeq 0,51.$$

Ara que ja els sabem, podem buscar, per exemple amb l'Excel, els valors de $F(d_1)$ i $F(d_2)$:

$$F(d_1) = F(0,69) = 0,75490.$$

$$F(d_2) = F(0,51) = 0,69497.$$

Així doncs,

$$VI(S,t) = S \cdot F(d_1) \text{ - } K \cdot e^{-r \cdot (T \text{ - } t)} \cdot F(d_2).$$

$$VI(110,0) = 110 \cdot 0,75490 \text{ - } 100 \cdot e^{-0,05 \cdot (0,25 \text{ - } 0)} \cdot 0,69497 \simeq 14,04€.$$

Aquesta opció, doncs, té un valor de $\underline{14,04€}$.

5 Conclusions

M'agradaria començar aquest últim capítol recordant el principal motiu pel qual vaig escollir la valoració d'opcions financeres com a tema d'aquest treball. Volia, d'una banda, ampliar els coneixements que ja tenia sobre l'àmbit financer i, de l'altra, que fos de caràcter divulgatiu per ajudar a estudiants del grau de Matemàtiques que estiguin interessats en aquest món a endinsar-s'hi. La veritat és que estic molt satisfeta amb el resultat, quan vaig començar a cercar informació es pot dir que quasi no sabia ni què era un derivat financer i ara, en canvi, conec gran part de la terminologia bàsica de les opcions financeres i, inclús, he après a classificar-les de tres formes diferents. També he de dir que el fet de no saber gairebé res sobre aquest camp ha jugat a favor meu, perquè m'he esforçat a escriure les definicions de la manera més simple possible i a afegir algun exemple per aclarir conceptes sempre que ho he cregut convenient. He intentat explicar-ho tot de forma clara per fer més senzill l'autoaprenentatge, però, ben mirat, això també ajudarà a facilitar la comprensió del lector.

Pel que fa a la part més pràctica del treball, dir que m'ha sobtat veure una matemàtica tan complexa darrere tant de la demostració de la fórmula del model binomial com de la del de Black-Scholes. M'ha sorprès tant perquè ambdues semblen bastant senzilles a simple vista i són prou fàcils d'aplicar. És per això que cal destacar la importància d'aquests dos models en la valoració d'opcions financeres, tots dos han agilitzat la feina de molts inversors.

A Índex alfabètic

Referències

[1] Aznar, Jerónimo; Cayo, Teodosio; López, Arturo A.; Vivancos, José Luis. *Valoración por opciones reales. Teoría y caos.* Primera edició. València: Editorial Universitat Politècnica de València, 2018. ISBN 9788490487471.

[2] Brigo, Damiano; Mercurio, Fabio. *Interest Rate Models - Theory and Practice.* Segona edició. Berlín, Heidelberg: Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2006. ISBN 9783540346043.

[3] Capinski, Market; Kopp, P. E. *Discrete models of financial markets.* Cambridge: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9780521175722.

[4] Capinski, Marek; Zastawniak, Tomasz. *Mathematics for Finance: an Introduction to Financial Engineering.* Primera edició. Londres: Springer, 2003. ISBN 978185233-3300.

[5] Comisión Nacional de Mercado de Valores. *Qué debo saber de Opciones y Futuros* [en línia]. Madrid. [consulta: 18 d'octubre de 2021]. Disponible a: <https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Guias/GUIA_OPCYFUT.PDF>.

[6] Comisión Nacional de Mercado de Valores. *Opciones & Futuros* [en línia]. Madrid. [consulta: 20 d'octubre de 2021]. Disponible a: <https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Guias/G02_OOFF.pdf>.

[7] Hull, John. *Introducción a los mercados de futuros y opciones.* Vuitena edició. Mèxic: Pearson, 2014. ISBN 9786073222693.

[8] Ortiz, Luís. *Lecture notes in Quantitative Finance.* Universitat de Barcelona.

[9] Schulmerich, Marcus. *Real Options Valuation. The Importance of Interest Rate Modelling in Theory and Practice.* Berlín, Heidelberg: Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 9783540285120.